Lineární programování – jaro 2017 – 4. termín

1. (15 bodů) Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na body $a, b^1, \ldots, b^k, c^1, \ldots, c^\ell \in \mathbb{R}^n$ (kde $k, \ell \geq 1$), aby existovala afinní nadrovina neobsahující bod a taková, že body $a, b^1, \ldots, b^k$ leží v jednom poloprostoru určeném touto nadrovinou a body $c^1, \ldots, c^\ell$ ve druhém.

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných z, matici B a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{ \, f \mid Bz + a = 0, \; z \leq 0 \, \}$$

je duální k úloze

$$\max \{ \, x_1 + \cdots + x_m \mid x \leq y_1 \cdot d, \; Ax = b, \; yC \geq c, \; |x_1| + |x_2| \leq 1 \, \},$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$ jsou vektory proměnných, b, c, d konstantní vektory a A, C matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. (25 bodů) Definujte polyedry a jejich stěny. Zdůvodněte, že každá stěna polyedru je průnikem jeho maximálních stěn. Formulujte věty, které jste při tomto zdůvodnění použili, a jednu z nich dokažte. Dejte příklad polyedru obsahujícího minimální stěnu, která jde jako průnik maximálních stěn vyjádřit jediným způsobem, a současně stěnu, pro kterou takové vyjádření není jednoznačné.

4. (30 bodů) Mějme dvě úlohy lineárního programování:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizovat} & 3x - \;\; y + z \\ \text{maximalizovat} & \quad\;\; - 2y - z \end{array}$$

při stejných omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a

$$\begin{aligned} 4x - \;\; y - 2z &\geq -1, \\ x - 2y - \;\; z &\leq -2, \\ y - 2z &\geq 3. \end{aligned}$$

Vyřešte jednu z těchto úloh duální simplexovou metodou a poté využijte získanou závěrečnou simplexovou tabulku k dořešení druhé úlohy primární simplexovou metodou.