

Lineární programování – jaro 2018 – 2. termín

- (15 bodů)** Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na řádkové vektory $a^1, \dots, a^k \in \mathbb{R}^m$ a matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, aby polytop generovaný body a^1, \dots, a^k měl neprázdný průnik s polyedrem $\{x \in \mathbb{R}^m \mid xA \geq b\}$.
- (20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z , matici C a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{ f \mid Cz \leq a, z \leq 1 \}$$

je duální k úloze

$$\max \{ dx \mid x \leq y^T \leq 0, cx \leq yb, yA \geq d \},$$

kde x a y jsou vektory proměnných stejné dimenze, b, c, d jsou konstantní vektory a A je matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

- (25 bodů)** Definujte stěny polyedru a jejich dimenzi. Popište všechny polyedry, které mají právě dvě maximální stěny. Formulujte a dokažte charakterizaci minimálních stěn jistého polyedru, na níž je založena primární simplexová metoda; k důkazu můžete použít obecnou větu charakterizující minimální stěny polyedrů. Dejte příklad polyedru P a lineárně nezávislých vektorů c a d takových, že množinou všech optimálních řešení úlohy $\max\{cx \mid x \in P\}$ a úlohy $\max\{dx \mid x \in P\}$ je tatáž maximální stěna polyedru P .
- (30 bodů)** Mějme dvě úlohy lineárního programování:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizovat} & 3x - y + z \\ \text{minimalizovat} & 2y + z \end{array}$$

při stejných omezeních $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ a

$$\begin{array}{l} 4x - y - 2z \geq -1, \\ x - 2y - z \leq -2, \\ y - 2z \geq 3. \end{array}$$

Vyřešte jednu z těchto úloh duální simplexovou metodou a poté využijte získanou závěrečnou simplexovou tabulku k dořešení druhé úlohy primární simplexovou metodou.