Lineární programování – jaro 2018 – 3. termín

1. **(15 bodů)** Z n látek, které se na sebe vzájemně samovolně přeměňují, potřebujeme vytvořit směs, která bude mít stále stejné složení. Cena jednoho gramu i-té látky je c_i Kč, přičemž jí můžeme zakoupit nejvýše a_i gramů, pro $i = 1, \ldots, n$. Jeden gram i-té látky se během jedné sekundy přemění na směs obsahující právě $b_{i,j}$ g j-té látky, pro $j = 1, \ldots, n$. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na čísla a_i, $b_{i,j}$, c_i a γ, aby bylo možné nakoupit 1 kg stabilní směsi za cenu nejvýše γ Kč.

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici B a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{\, f \mid Bz + a \geq 0 \,\}$$

je duální k úloze

$$\max \{\, x_1 + \cdots + x_m \mid x_1 \geq y \cdot d_1, \ldots,\ x_m \geq y \cdot d_m,\ Ax = b,\ y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n \,\},$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$ jsou vektory proměnných, b, d_1, $\ldots$, d_m konstantní vektory a A matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. **(25 bodů)** Formulujte větu o rozkladu polyedrů a definujte v ní použité pojmy. V souladu s touto větou rozložte polyedr

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1 \,\},$$

a to tak, aby všechny útvary použité v rozkladu měly stejnou dimenzi; přitom tyto útvary zadejte v souladu s příslušnými definicemi. Dokažte, že pro každý polyedr rozklad uvedený ve větě existuje.

4. **(30 bodů)** Vytvořte simplexovou tabulku odpovídající bazické množině indexů $\{3, 1, 2\}$ (v tomto pořadí) pro úlohu lineárního programování maximalizovat

$$x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5$$

při omezeních $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0$ a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3 &= x_3 + x_4 + 2x_5, \\ x_1 + 2x_4 + 5 &= x_3 + 2x_5, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 13 \end{aligned}$$

a s touto počáteční tabulkou vyřešte úlohu primární simplexovou metodou. Po jejím vyřešení přidejte další omezení

$$x_4 + 1 \geq x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

a úlohu dořešte duální simplexovou metodou.