1. PŘEDNÁŠKA

Komplexní čísla

- aritmetické operace
- konjugované čísla (conjugate number)
- absolutní hodnota (module)
- inverzní čísla (inverse)
- argument $z = |z| (\cos\alpha + i \sin\alpha)$

$$\operatorname{Arg} z = \{\alpha \in \mathbb{R},\ z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\}$$

$$\arg z = \{\alpha \in [0, 2\pi),\ z = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha)\}$$

$$(-\pi, \pi]$$

$\operatorname{Arg} z$ is a multivalued function

- aritmetické operace pomocí $|z|$ a $\arg z$
- mocniny (powers)
- odmocniny (roots)

Zobrazení $R^2 \to R^2$

- pair of functions $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, 1-to-1
- linear transformations, affine transformations
- jakobián (jacobian) $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{2}$
- inverse function theorem
- functions of complex variable $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ as function $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Důležité komplexní funkce

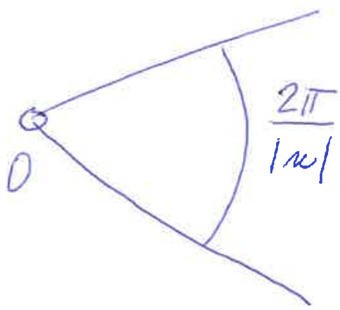
- lineární funkce $f(z) = (a+ib)z$, $a, b \in \mathbb{R}$
  pro $a+ib \neq 0$ je 1-to-1
- afinní funkce $f(z) = Az + B\bar{z} + C$
  kde $A, B, C \in \mathbb{C}$. ~~[illegible]~~
- mocninná funkce (power function)
  $f(z) = z^n$ $\quad n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$

  prostá na

$\longrightarrow \mathbb{C}$

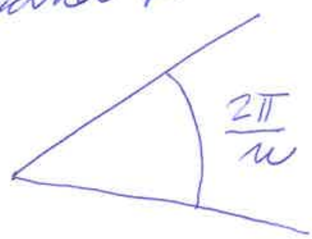
- mocninná funkce pro n záporné
  $f(z) = z^n$ $\quad n \leq -1$, $n \in \mathbb{Z}$
  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$

  1-to-1 na oblastech



- odmocnina $f(z) = \sqrt[n]{z}$
  obecně multivalued (n hodnot pro $z \neq 0$)
  $n \geq 2$

  jednoznačná: $\mathbb{C} \longrightarrow$



- exponenciální funkce $f(z) = e^z$

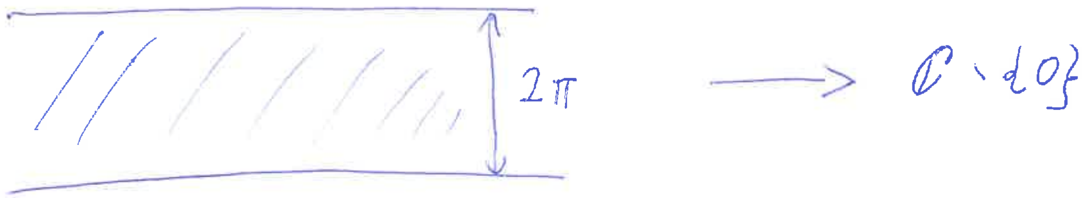
$x \in \mathbb{R}$ $\quad f(z) = e^x$ definována

Definujeme $f(iy) = \cos y + i \sin y$ pro $y \in \mathbb{R}$

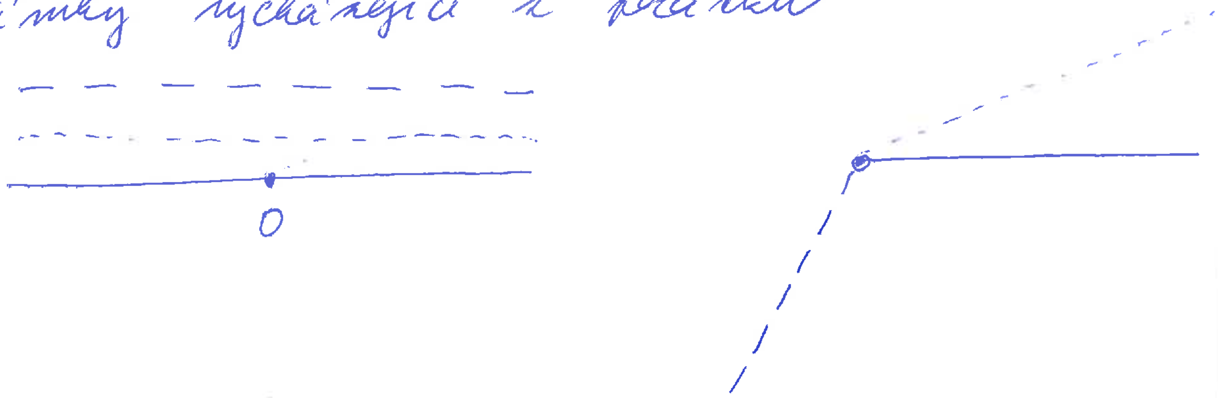
(tzv. Eulerova formule)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

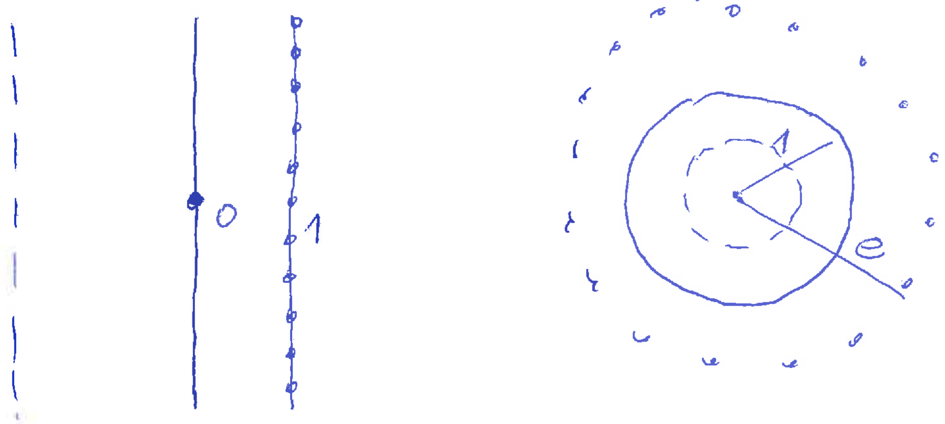
perioda $2\pi i$, posílá na



zobrazuje přímky rovnoběžné s osou x na polopřímky vycházející z počátku



přímky rovnoběžné s osou y na kružnice



- logaritmus jako inverze k e^z

$$Ln\, z = \ln|z| + i\, Arg\, z$$

$z = e^x(\cos y + i \sin y)$

multivalued function

$$Ln\, 1 = \{0, \pm i2\pi, \pm i4\pi, \dots\}$$

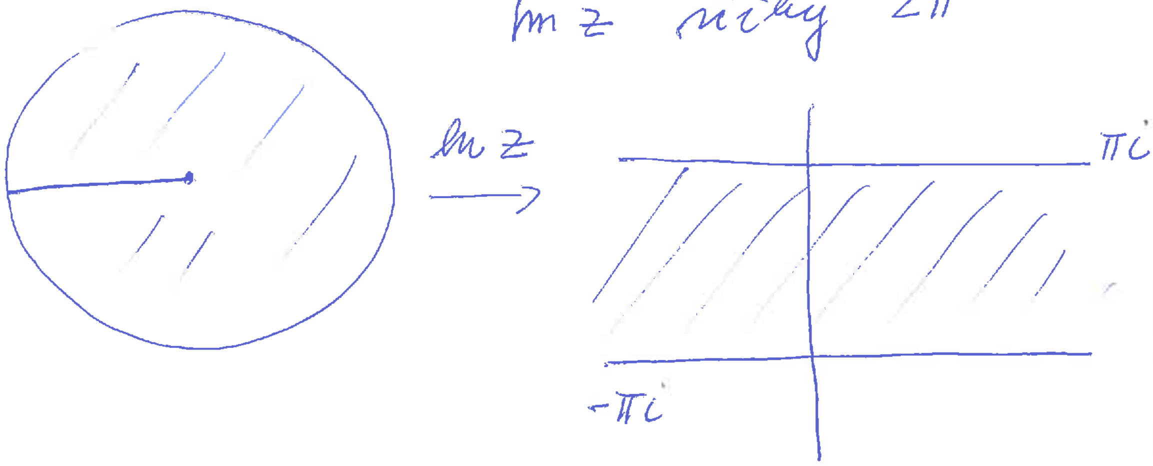
definiční obor $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\ln z$ jednoznačná funkce

dobře definovaná na $\mathbb{C} \setminus$ polopřímka

z počátku a hodnoty určeny v pásu

$Im\, z$ šířky 2π



- funkce $f(z) = z^a$ pro $a \in \mathbb{C}$

$$z^a = e^{a\, Ln\, z}$$

a celé ... shoduje se s definicí z^n

a reálné (obecné)

$$z^a = |z|^a \cdot e^{i\, Arg\, z \cdot a}$$

multivalued function

$$i^i = e^{i\, Ln\, i} = \{e^{i(0+i\frac{\pi}{2}+i2k\pi)}\} = \{e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}\}$$