2. PŘEDNÁŠKA

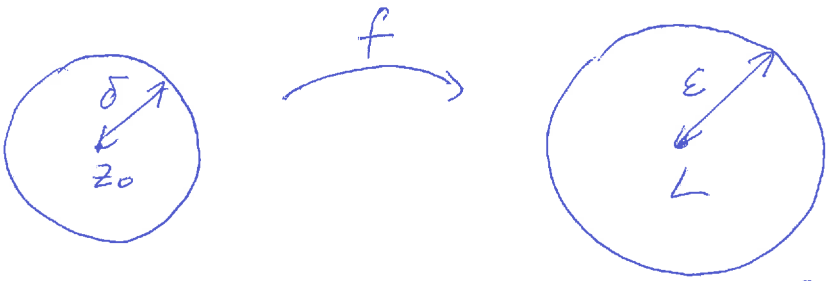
Komplexní derivace

Uvažujme funkce definované na okolí čísla z_0 v $\mathbb{C}$ s hodnotami v $\mathbb{C}$.

Limita $$\lim_{z \to z_0} f(z_0) = L \quad , \quad z_0 \in \mathbb{C},\ L \in \mathbb{C}$$

znamená

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$$



$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má <u>derivaci</u> v $z \in \mathbb{C}$, jestliže existuje

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} =: f'(z) \in \mathbb{C}$$

Diferenciál (differential) f v z je lineární funkce označovaná $df(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a definovaná pro všechna $h \in \mathbb{C}$ předpisem

$$df(z)(h) = f'(z) \cdot h$$

s vlastností

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - df(z)(h)}{h} = 0$$

Zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Každou komplexní funkci lze chápat jako funkci z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$z = x+iy$ $\qquad f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

kde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ a $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Diferenciál zobrazení $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ v každé (x,y) je

lineární zobrazení $d\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$d\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y)(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

které „dobře" aproximuje rozdíl

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x+h_1, y+h_2) - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y).$$

Má-li funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplexní derivaci v $z = x+iy$, pak má f jako zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ parciální derivace podle x a y neboť

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy) = \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_1 \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+h_1) - f(z)}{h_1}$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x+iy) = \lim_{\substack{h_2 \to 0 \\ h_2 \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+ih_2) - f(z)}{h_2} =$$

$$= \lim_{h_2 \to 0} i \, \frac{f(z+ih_2) - f(z)}{ih_2} =$$

$$= i \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = i f'(z)$$

Odtud jako nutná podmínka pro existenci derivace v bodě z plyne

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$$

Co pomocí reálné složky $\underline{u}$ a imaginární složky v lze psát

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (*)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

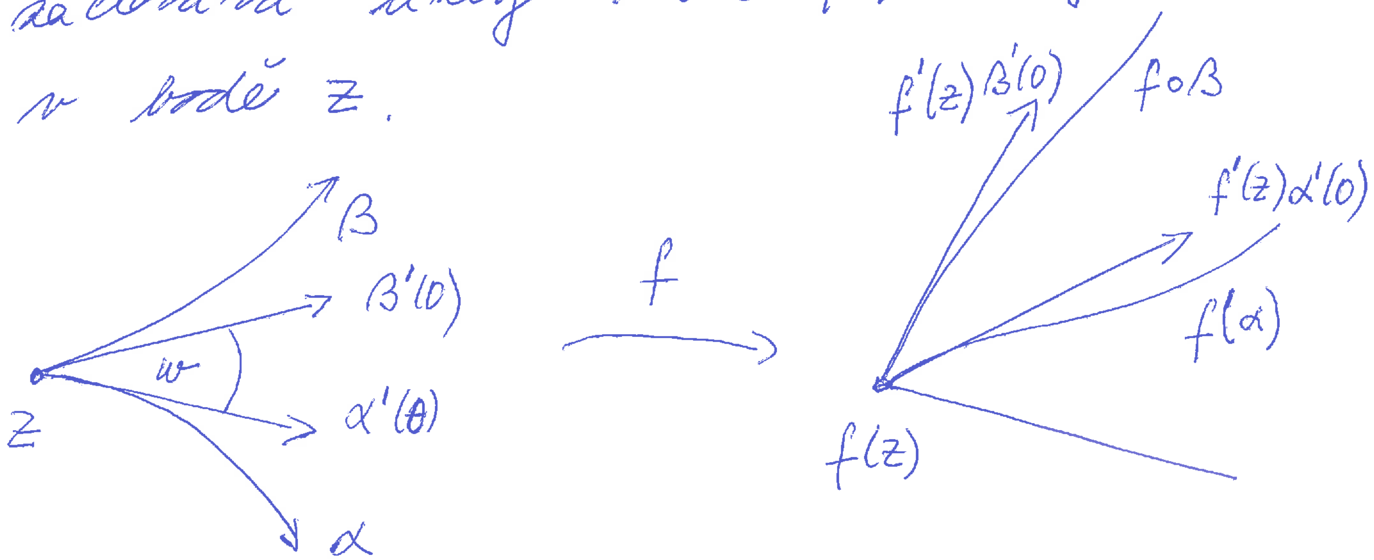
Tyto podmínky se nazývají Cauchyovy-Riemannovy podmínky (Cauchy-Riemann conditions)

<u>Věta</u>: Nutná a postačující podmínka pro to, aby funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ byla $\mathbb{C}$-diferencovatelná v bodě z je, aby f měla v $z = x+iy$ jako funkce z $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciál a parciální derivace splňovaly Cauchy-Riemannovy podmínky $(*)$.

Domain = oblast = otevřená a souvislá podmnožina v $\mathbb{C}$

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je oblast. Řekneme, že funkce $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je <u>holomorfní v oblasti Ω</u>, jestliže f má komplexní derivaci v každém bodě $z \in \Omega$.

Je-li $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfní a $f'(z) \neq 0$, pak f zachovává úhly křivek, protínajících se v bodě z.



Úhel křivek α a β je dán úhlem, který svírají tečné vektory $\alpha'(0)$ a $\beta'(0)$

Úhel křivek $f \circ \alpha$ a $f \circ \beta$ je dán úhlem, který svírají vektory (opět tečné) $f'(z) \cdot \alpha'(0)$ a $f'(z) \cdot \beta'(0)$

$f'(z)$ je nenulové komplexní číslo. Násobení tímto číslem je geometricky složení otočení a roztažení (stejnolehlosti). Proto jsou vektory $f'(z)\alpha'(0)$ a $f'(z)\beta'(0)$ „pouze" ~~otočené a stejno-~~ stejnolehlé s otočenými vektory $\alpha'(0)$ a $\beta'(0)$.

Zobrazení, které zachovávají úhly se nazývá **konformní**. Holomorfní funkce jsou v bodech, ~~[illegible]~~ kde mají derivaci různou od nuly, konformní.

Počítání s derivacemi v $\mathbb{C}$ je stejné jako počítání s derivacemi v $\mathbb{R}$

$$(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$$

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad \text{pro } g(z) \neq 0$$

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

je-li f^{-1} inverzní funkce k f, pak

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \quad \text{je-li jmenovatel } \neq 0$$

Holomorfnost a derivace elementárních funkcí

- Polynomy $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad (z^n)' = n z^{n-1}$

- Racionální lomené funkce

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}\text{, kde } p \text{ a } q \text{ jsou polynomy}$$

je holomorfní v $\mathbb{C}\setminus\{\text{kořeny polynomu } q\}$.

- $f(z)=\sqrt[n]{z}$ na okolí z a jedné hodnoty $\sqrt[n]{z}$ je prostá. Výpočet podle inverzní funkce k funkci z^n

$$f'(z)=\frac{1}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n}\,z^{\frac{1}{n}-1}$$

- exponenciála

$$f(z)=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

Cauchy–Riemannovy podmínky

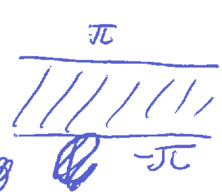
$$\frac{\partial f}{\partial y}(z)=i\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{jsou splněny}$$

$$e^x(-\sin y+i\cos y)=e^x(i\cos y-\sin y)$$

Potom $$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z$$

- $\operatorname{Ln} z$ je inverzní funkce k e^z ve vhodných oblastech vezměme

$$\ln z : \mathbb{C}\setminus[-\infty,0] \longrightarrow$$



$$(\ln z)' = \frac{1}{\exp'(\ln z)} = \frac{1}{e^{\ln z}} = \frac{1}{z}.$$

- Definice goniometrických funkcí na $\mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

Pro z reálné plynou oba vztahy z definice

$$y \in \mathbb{R}: \quad e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y$$

Z definice je vidět, že cos a sin jsou holomorfní na $\mathbb{C}$. Jednoduše spočítáme, že

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

<u>Příklad</u>: Určete holomorfní funkci $f(z)$ splňující podmínky

$$\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3y^2x + 2, \quad f(0) = 2+i$$

$$z = x+iy$$

Nápověda – použijte Cauchy-Riemannovy podmínky.