3. PREDNÁŠKA

Křivky v komplexní rovině (Curves)

lze chápat dvojím způsobem

- zobrazení $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$
- jako obraz zobrazení γ, tj. podmnožinu v $\mathbb{C}$

Budeme uvažovat pouze po částech hladké křivky, tj. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ a $\gamma : [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{C}$ je spojitě diferencovatelná.

Dále požadujeme $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ s možnou výjimkou $\gamma(a) = \gamma(b)$. V tomto případě hovoříme o uzavřené křivce.

Integrace po křivkách

Nechť f je holomorfní funkce v oblasti Ω, nechť $\gamma : [a,b] \to \Omega$ je spojitě diferencovatelná. Definujeme

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Pro γ po částech hladkou γ

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Změna parametrizace křivky

$$\varphi : [c,d] \to [a,b]$$

$\varphi'(\tau)$ je spojitá a kladná. Pak

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,dz = \int_c^d f((\gamma\circ\varphi)(\tau))\,(\gamma\circ\varphi)'(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_c^d f(\gamma(\varphi(\tau)))\,\gamma'(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

je-li $\varphi'(t)<0$ změní integrál znaménko.

nejde o nic jiného než křivkový integrál

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ $\quad z = x+iy \quad \gamma = \alpha + i\beta$

$$\mathrm{Re} \int_\gamma f(z)\,dz =$$

$$= \mathrm{Re} \int_a^b \big(u(\alpha(t),\beta(t)) + i v(\alpha(t),\beta(t))\big)\big(\alpha'(t)+i\beta'(t)\big)\,dt$$

$$= \int_a^b \{u(\alpha(t),\beta(t))\,\alpha'(t) - v(\alpha(t),\beta(t))\,\beta'(t)\}\,dt = \int_\gamma (u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy)$$

Analogicky

$$\operatorname{Im} \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \{u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx\}$$

Vlastnosti

stejné jako u křivkového integrálu (linearita)

Nechť holomorfní funkce f má primitivní funkci (antiderivative) F, tj.

$$F'(z) = f(z).$$

Potom pro $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ dostaneme

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

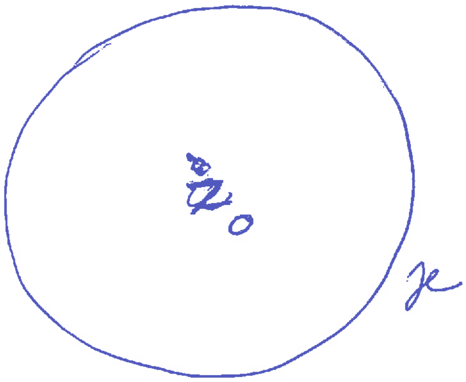
Důkaz: Platí $\frac{d}{dt}\big(F(\gamma(t))\big) = F'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) = f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$. Tedy $F(\gamma(t))$ je primitivní funkce k funkci $f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ na intervalu $[a,b]$. Tedy

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Důležitý příklad

Nechť $f(z) = (z - z_0)^n$, $z_0 \in \mathbb{C}$, kde $n \in \mathbb{Z}$. Spočítáme $\int_\gamma f(z)\,dz$, kde $\gamma(t) = z_0 + \cos t + i \sin t$, $t \in [-\pi,\pi]$ je kružnice.

15



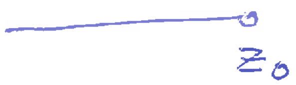
Pro $n \neq -1$ má $(z-z_0)^n$ primitivní funkci (v $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$)

$$F(z)=\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$$

Proto je integrál po uzavřené křivce roven 0

$$\int_\gamma (z-z_0)^n\,dz = F(z_0-1)-F(z_0-1)=0$$

Pro $n=-1$, má $f(z)=(z-z_0)^{-1}$ primitivní funkci $F(z)=\ln(z-z_0)$ v oblasti $\mathbb{C}$ bez polopřímky vyznačené na obrázku



Potom

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \lim_{t\to\pi_-}\ln(\gamma(t)-z_0)-\lim_{t\to-\pi_+}\ln(\gamma(t)-z_0)$$

$$=\lim_{t\to\pi_-}\ln(\cos t+i\sin t)-\lim_{t\to-\pi_+}\ln(\cos t+i\sin t)$$

$$=\ln|\cos\pi+i\sin\pi|+\lim_{t\to\pi_+} i\arg(\cos t+i\sin t)$$

$$-\ln|\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)|-\lim_{t\to-\pi_-} i\arg(\cos t+i\sin t)$$

$$=2\pi i$$

Poznámka Výsledek výpočtu by byl stejný, kdybychom integrovali po kružnici kolem z_0 s poloměrem menším než 1.

Cauchyova (integrální) věta (Cauchy integral theorem)

Nechť je γ přípustná uzavřená křivka, která ohraničuje jednoduše souvislou oblast D. Nechť f je holomorfní na okolí uzávěru $\overline{D}$ oblasti D.

Potom

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Důkaz Nechť $f = u+iv$ a $z = x+iy$. Za předpokladu, že parciální derivace u a v jsou spojité lze větu dokázat pomocí Greenovy věty a Cauchy-Riemannových podmínek.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy)$$

Podle Greenovy věty je

$$\int_\gamma (u\,dx - v\,dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy$$

$$\int_\gamma (v\,dx + u\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Podle Cauchy-Riemannových podmínek jsou výrazy vpravo rovny 0 pro všechna $z = x+iy \in D$, tedy integrály jsou rovny 0 a rovněž

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0. \qquad \blacksquare$$

<u>Konvence</u> Říkáme, že f je holomorfní v $\overline{D}$, jestliže f je holomorfní na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{D}$.

<u>Cauchyova integrální formule = Cauchy integral formula</u>

Nechť je γ uzavřená přípustná křivka ohraničující jednoduše souvislou oblast D. Nechť f je holomorfní v $\overline{D}$ a nechť $z_0 \in D$. Je-li γ orientovaná proti směru hodinových ručiček, pak

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0).$$