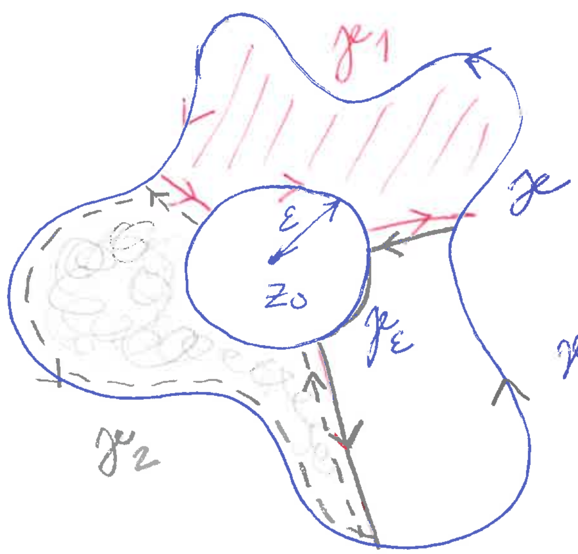
4. PŘEDNÁŠKA

Důkaz: Prvně ukážeme (za pomoci Cauchyovy věty), že integrál podél γ je roven integrálu podle malé kružnice se středem z_0 a poloměru $\varepsilon > 0$. Označme ji γ_ε

$$\gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it} \qquad t \in [-\pi, \pi].$$



Křivky $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ se skládají každá ze 4 křivek. Protože funkce $\frac{f(z)}{z-z_0}$ jsou holomorfní v oblastech ohraničených těmito křivkami, je podle Cauchyovy integrální věty

$$\int_{\gamma_i} \frac{f(z)}{z-z_0} = 0$$

Na části křivky γ_1 a γ_2 je opačná orientace, proto je příspěvek integrálu podél této křivky do $\int_{\gamma_1}$ a $\int_{\gamma_2}$ „stejný" ale s opačným znaménkem. Proto dostaneme

$$0 = \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Nyní stačí spočítat, že $\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i\, f(z_0)\right| = \left|\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right|$$

používáme příklad na str. 15

$$= \left|\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z_0+\varepsilon e^{it})-f(z_0)}{\varepsilon e^{it}}\,\varepsilon e^{it} i\,dt\right|$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(z_0+\varepsilon e^{it})-f(z_0)|}{\varepsilon}\,\varepsilon\,dt \leq \max |f(z_0-\varepsilon e^{it})-f(z_0)|$$

Poslední výraz konverguje k 0 pro $\varepsilon \to 0$. Ale

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \text{ nezávisí na } \varepsilon,$$

proto $$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0.$$

Věta: Holomorfní funkce v oblasti Ω má v Ω všechny derivace.

Poznámka: Něco takového neplatí pro reálné funkce. Vezmeme například funkci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \in [0,\infty) \\ -x^2 & \text{pro } x \in [-\infty,0] \end{cases}$$

$$\int_{\gamma} (u\,dx - v\,dy) = \iint_{D} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx\,dy$$

$$\int_{\gamma} (v\,dx + u\,dy) = \iint_{D} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Podle Cauchy–Riemannových podmínek jsou výrazy vpravo rovny 0 pro všechna $z = x + iy \in D$, tedy integrály jsou rovny 0 a rovněž

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0. \qquad \blacksquare$$

<u>Konvence</u> Říkáme, že f je holomorfní v $\overline{D}$, jestliže f je holomorfní na nějaké otevřené množině obsahující $\overline{D}$.

<u>Cauchyova integrální formule = Cauchy integral formula</u>

Nechť je γ uzavřená přípustná křivka ohraničující jednoduše souvislou ~~[illegible]~~ oblast D. Nechť f je holomorfní v $\overline{D}$ a nechť $z_0 \in D$. Je-li γ orientovaná proti směru hodinových ručiček, pak

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0).$$

její derivace je
$$f'(x) = 2x \quad \text{pro } x \in [0,\infty)$$
$$f'(x) = -2x \quad \text{pro } x \in (-\infty,0]$$

Ale druhá derivace je
$$f''(x) = 2 \quad \text{pro } x \in (0,\infty)$$
$$f''(x) = -2 \quad \text{pro } x \in (-\infty,0)$$
$$f''_+(0) = \lim_{x\to 0_+} f''(x) = 2$$
$$f''_-(0) = \lim_{x\to 0_-} f''(x) = -2$$

Tedy f nemá druhou derivaci v 0.

Důkaz věty provedeme tak, že dokážeme

Cauchyův vzorec pro n-tou derivaci
Cauchy formula for n-th derivative

Nechť f je holomorfní v oblasti Ω. Nechť je φ je příp. je přípustná křivka v Ω, kladně orientovaná a ohraničující jednoduše souvislou oblast D. Pak pro $z_0 \in D$ platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

Důkaz

: Pro f platí Cauchyova formule

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)} \, dz$$

To je předchozí vzorec pro $n = 0$. Funkce $\frac{f(z)}{z - z_0}$ závisí na parametru z_0 a je diferencovatelná podle z_0. Je-li korektní záměna derivace podle parametru a integrálu, dostaneme

$$\frac{df}{dz_0}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \frac{d}{dz_0}\left(\frac{1}{z - z_0}\right) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, dz$$

Derivováním této rovnosti, dostaneme

$$\frac{d^2 f}{dz_0^2}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \frac{d}{dz_0}\left(\frac{1}{(z - z_0)^2}\right) dz$$

$$= \frac{2}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \frac{1}{(z - z_0)^3} \, dz$$

atd.

Záměna integrálu a derivace je v tomto případě korektní. Platí tedy:

Lemma 1 Nechť $g : [a,b] \times (x_0-\delta, x_0+\delta) \times (y_0-\delta, y_0+\delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a existují spojité parc. derivace $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$. Pak

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b g(t,x,y)\,dt = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(t,x,y)\,dt$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b g(t,x,y)\,dt = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(t,x,y)\,dt$$

Důkaz: Počítejme

$$\int_a^b \left\{ \frac{g(t,x+h,y) - g(t,x,y)}{h} - \frac{\partial g}{\partial x}(t,x,y) \right\} dt$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(t, x+\tau h, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(t,x,y) \right\} dt$$

Protože funkce za integrálem je stejnoměrně spojitá na $[a,b] \times$ uzavřené okolí x $\times$ uzavřené okolí y a pro $h \to 0$ konverguje stejnoměrně k 0, je i $\lim_{h\to 0} \int_a^b$ rovna 0.

Lemma 2 Nechť $f: [a,b] \times \{w \in \mathbb{C}, |w - z_0| < \delta\} \to \mathbb{C}$ je spojitá a holomorfní ve w. Nechť $\frac{d}{dw} f$ je spojitá. Pak

$$\frac{d}{dw} \int_a^b f(t,w)\,dt = \int_a^b \frac{df}{dw}(t,w)\,dt$$

Důkaz: Ukážeme, že $\int_a^b f(t,w)\,dt$ je holomorfní. Platí pro ni totiž C-R podmínky. Pro $w = x+iy$ je podle předchozí věty

$$i\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(t,x,y)\,dt = \int_a^b i\frac{\partial}{\partial x} f(t,x,y)\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(t,x,y)\,dt = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^b f(t,x,y)\,dt$$

Potom $\frac{d}{dw} \int_a^b f(t,x,y)\,dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(t,x,y)\,dt$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t,x,y)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dw} f(t,w)\,dt.$$

Závěr: V integrálu $\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz =$

$= \int_a^b \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z_0}\gamma'(t)\,dt$ můžeme derivovat libovolně podle z_0, pokud toto leží v oblasti ohraničené křivkou γ.

Z
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$
plyne
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d}{dz_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$
$$= \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Z lemmatu 2 rovněž plyne

Věta Nechť f je funkce spojitá v oblasti Ω. Následující tvrzení jsou ekvivalentní

(1) f je holomorfní v Ω

(2) Pro každou přípustnou křivku γ ohraničující oblast D, která je jednoduše souvislá, platí Cauchyova formule $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ pro $z_0 \in D$.

Důkaz f holomorfní $\Rightarrow$ Cauchyova formule jsme udělali.

Cauchyova formule $\Rightarrow$ holomorfnost plyne derivováním podle parametru z_0 v Cauchyově formuli.