5. PŘEDNÁŠKA

Opakování:

- f je holomorfní v oblasti $\Omega \Leftrightarrow f$ splňuje C-R podmínky
- Cauchyova věta $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pro přípustné uzavřené křivky ohraničující jednoduše souvislou oblast
- Cauchyova formule $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)$ pro přípustné kladně orientované křivky ohraničující jednoduše souvislou oblast, v níž leží bod z_0
- holomorfní funkce má všechny derivace

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

Definice stejnoměrné konvergence funkcí

Nechť $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je nějaká otevřená množina. Řekneme, že f_n konvergují stejnoměrně k funkci $f : \Omega \to \mathbb{C}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall z \in \Omega\ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

Zapisujeme $f_n \rightrightarrows f$.

Poznámka: rozdíl oproti bodové konvergenci $f_n \to f$

$$\forall z \in \Omega\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Platí věta: jestliže f_n jsou spojité a konvergují stejnoměrně k funkci f, pak f je spojitá.

V komplexní analýze platí

Weierstrassova věta (Weierstrass convergence theorem)

Jestliže $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ jsou holomorfní a konvergují stejnoměrně k funkci $f : \Omega \to \mathbb{C}$, pak f je holomorfní a navíc pro každé $k \geq 0$ je

$$f_n^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}.$$

Důkaz: Použijeme Cauchyovu formuli.

Nechť je φ kladně orientovaná kružnice kolem $z_0 \in \Omega$, jejíž vnitřek leží v Ω. Pak

$$f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f_n(z)}{z - z_0}\, dz$$

Protože f_n konvergují stejnoměrně k f na φ, můžeme provést limitní přechod v integrálu:

$$f(z_0) = \lim_{n \to \infty} f_n(z_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f_n(z)}{z - z_0}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{\lim\limits_{n \to \infty} f_n(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Pro f platí Cauchyova formule, tedy podle předchozího má f všechny derivace a navíc pro všechna k je limita

$$\lim_{n \to \infty} f_n^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz = \frac{k!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz$$

$= f^{k}(z_0)$ stejnoměrná. $\square$

<u>Poznámka</u> V reálné analýze něco takového NEPLATÍ! Vezměme funkce

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{n}}.$$

Pak na intervalu $(-1,1)$ platí

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

Tedy $f_n \rightrightarrows 0$ na $(-1,1)$. Derivace

$$f_n'(x) = -n\,2x\,\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{n}} = -2x\sqrt{n}\,e^{-nx^2}$$

má v $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ hodnoty

$$f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -2\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n}\,e^{-1} = -2e^{-1}$$

Tedy f_n' nemohou konvergovat stejnoměrně k nulové funkci.

Mocninné řady komplexních čísel

(Power series of complex numbers)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ budeme považovat za posloupnost částečných součtů $s_k(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n (z-z_0)^k$

kde $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$.

Řada konverguje, jestliže posloupnost částečných součtů konverguje.

Řada konverguje absolutně, jestliže

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z-z_0|^n$$

konverguje.

Řada konverguje stejnoměrně, jestliže posloupnost částečných součtů konverguje absolutně.

- jestliže řada konverguje absolutně, pak konverguje.

Absolutní konvergence řady $\sum a_n z^n$ znamená absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_n z^n) \quad a \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(a_n z^n).$$

Pak řady $\sum \mathrm{Re}(a_n z^n)$ a $\sum \mathrm{Im}(a_n z^n)$ konvergují a tedy konverguje i řada $\sum a_n z^n$.

- jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konverguje absolutně pro nějaké $\overline{z}$, pak konverguje absolutně pro všechna $z \in \mathbb{C}$ taková, že

$$|z| < |\overline{z}|.$$

Mocninné řady konvergují v kruzích. Jejich sjednocením je kruh, jehož poloměr se nazývá poloměr konvergence. Lze ho spočítat takto (Cauchy–Hadamard theorem)

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

Pro $|z| \leq$ ~~...~~ $r < R$ konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ stejnoměrně a absolutně, pro $z \in \mathbb{C}$

$|z| > R$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverguje.

Důkaz. Nechť $|z| \leq r < R$. Potom s výjimkou konečně mnoha n je

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{r_1}$$

kde $r < r_1 < R$. Proto pro $n \geq n_0$ je

$$|a_n z^n| \leq \frac{1}{r_1^n} \cdot r^n = \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$$

a řada $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$ konverguje, tedy řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$$

konverguje ~~absolutně~~ stejnoměrně, tedy $\sum a_n z^n$ konverguje stejnoměrně a absolutně.

Nechť $|z| > R$. Pak $|a_n| > \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^n$ pro nekonečně mnoho n, tedy

$$|a_n z^n| > \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^n R^n$$

a proto ~~[illegible]~~ členy posloupnosti $\{a_n z^n\}$ nekonvergují k 0, což je nutná podmínka pro konvergenci řady.

<u>Věta</u> Je-li f holomorfní v Ω a kruh $D = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\} \subseteq \Omega$. Pak

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

a řada konverguje stejnoměrně a absolutně v kruhu D.

Důkaz: Použijeme skutečnost, že řada

$$1 + y + y^2 + \dots = \frac{1}{1-y}$$

a její konvergence je stejnoměrná v kruhu o poloměru < 1. Pro ~~[illegible]~~ $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ je

$$\frac{1}{z_1 - z} = \frac{1}{(z_1 - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{z_1 - z_0} \, \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{z_1 - z_0}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^2 + \dots\dots\right)$$

a konvergence je stejnoměrná v kruhu kolem z_0 s poloměrem $< |z_1 - z_0|$

S použitím Cauchyovy formule dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa} \frac{f(z_1)}{z_1 - z}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa} \frac{f(z_1)}{z_1 - z_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^n\right) dz_1 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa}\frac{f(z_1)}{(z_1 - z_0)^{n+1}}\, dz_1\right)(z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa}\frac{f(z_1)}{(z_1 - z_0)^{n+1}}\, dz_1$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Cauchyova formule pro koeficienty

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa}\frac{f(z_1)}{(z_1 - z_0)^{n+1}}\, dz_1$$