Přednáška 6

Taylorova formule pro koeficienty

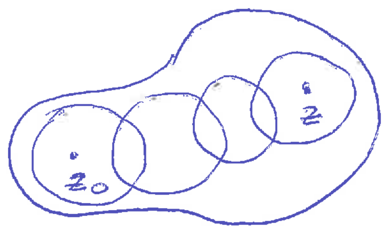
$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Dokázali jsme

- každá holomorfní funkce může být na okolí bodu zapsána jako mocninná řada.
- Obráceně – každá mocninná řada s nenulovým poloměrem konvergence určuje holomorfní funkci. Podle Weierstrassovy věty o konvergenci je stejnoměr-lokálně součet mocninné řady stejnoměr-nou limitou polynomů, které jsou holomorfní.

Důsledek

Jestliže má funkce holomorfní v Ω v bodě $z_0 \in \Omega$ všechny derivace v z_0 nulové, je konstantní.



Ω musí být souvislá

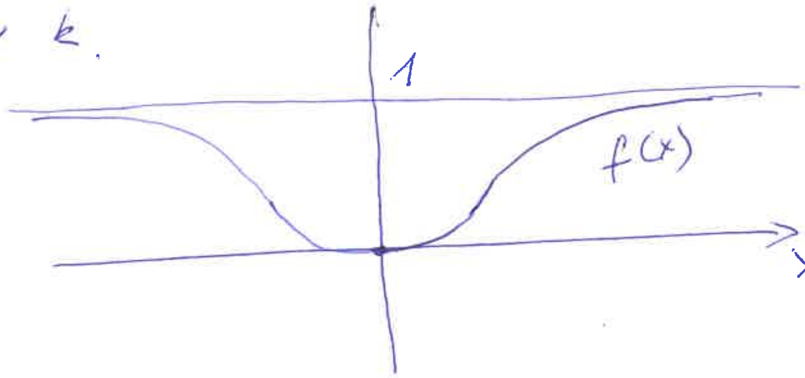
Poznámka: Toto opět neplatí pro hladké reálné funkce. Příkladem je

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f(0)=0.$$

Lze ukázat, že f má všechny derivace (včetně derivací v 0) a

$$f^{(k)}(0) = 0$$

pro všechna k.



Věta: Pro funkci $f: \Omega \to \mathbb{C}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) f je holomorfní v Ω,

(2) f je spojitá v Ω a platí pro ni Cauchyova formule.

(3) f lze psát v okolí každého bodu jako mocninnou řadu.

Bylo dokázáno v předchozím výkladu. Další ekvivalentní podmínka je

(4) f spojitá v Ω a platí $\int_{\varphi} f(z)dz = 0$ pro křivky kolem kontrahovatelných oblastí

Celé funkce – entire functions

jsou funkce holomorfní v celém $\mathbb{C}$.

Např. polynomy, e^z, $\sin z$, $\cos z$, řady s poloměrem konvergence ∞. (Každou celou funkci lze psát jako řadu s poloměrem ∞.)

Máme vyjádření

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

Liouville theorem – Liouvillova věta

Každá ohraničená celá funkce je konstantní.

(Bounded entire function is constant.)

Důkaz $\quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

Ukážeme, že $a_1 = a_2 = \dots = 0$. K tomu použijeme integrální formuli pro koeficienty. Nechť γ_r je kružnice o poloměru r kolem 0.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

Nechť $|f(z)| \leq K$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

Pro $n \geq 1$ lze $|a_n|$ odhadnout shora takto

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{K}{|z|^{n+1}} dz \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{K}{r^{n+1}} =$$

$$= \frac{K}{r^n}$$

Tedy $|a_n| \leq \lim_{r \to \infty} \frac{K}{r^n} = 0.$ ∎

Lze dokázat daleko víc. Každá celá funkce je buď konstantní nebo nabývá všech hodnot z $\mathbb{C}$ s možnou výjimkou jedné hodnoty.

Polynom nabývá všech hodnot, pokud je není konstantní.

e^z nabývá všech hodnot s výjimkou 0.

Hromadný bod množiny S = limit point of S

V komplexních číslech nechť $S \subseteq \mathbb{C}$, bod z_0 je hromadným bodem množiny S, jestliže existuje posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S$ taková, že

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \text{ a } z_n \neq z.$$

Věta o jednoznačnosti – Uniqueness theorem

Nechť f a g jsou holomorfní funkce v oblasti Ω. Jestliže $f(z)=g(z)$ na množině, která má v Ω aspoň jeden hromadný bod, pak

$$f(x)=g(x) \quad \text{pro všechna } x\in\Omega.$$

Důkaz: Nechť z_0 je onen hromadný bod.

Pak

$$f(z)-g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

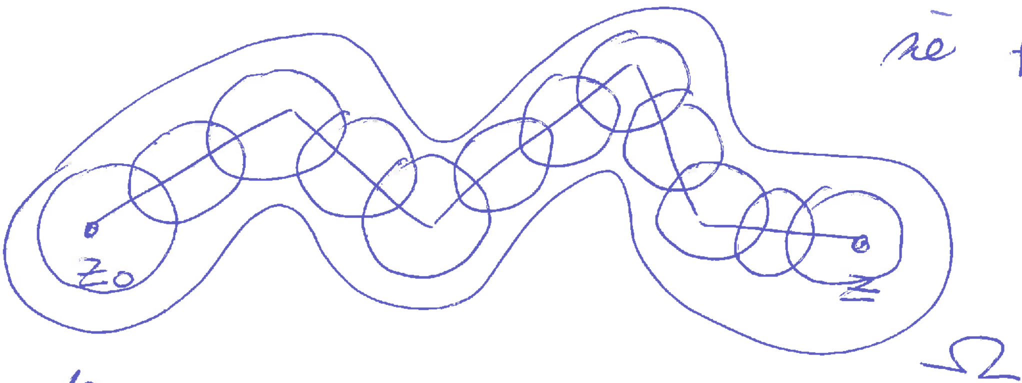
na nějakém okolí bodu z_0. Dokážeme, že všechna $a_n=0$. Kdyby a_m byl první koeficient různý od 0. Pak

$$f(z)-g(z) = (z-z_0)^m\left(a_m + a_{m+1}(z-z_0)^1 + a_{m+2}(z-z_0)^2+\dots\right)$$

$$= (z-z_0)^m g(z)$$

kde $g(z_0)\neq 0$. Proto $g(z)\neq 0$ na nějakém okolí z_0 a tedy na tomto okolí s výjimkou z_0 je $f(z)-g(z)\neq 0$. Spor s předpokladem.

Nyní rozšíříme platnost rovnosti $f(z)=g(z)$ na celé Ω. Nechť z je libovolný bod z Ω. Spojíme jej po částech lineární křivkou s bodem z_0. Dále ji pokryjeme kruhy, které leží celé v Ω. Těch je konečně mnoho. Podle první části postupně dokazujeme, že $f(z)=g(z)$ v těchto kruzích.



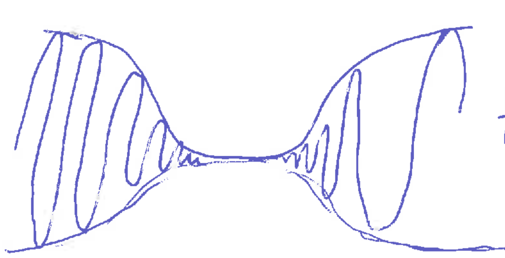
Tohle není zcela přesné – viz lepší důkaz na přednášce.

nebo jinak: $M=\{z\in\Omega,\ f(z)=g(z)\}$

je neprázdná a uzavřená. Podle 1. části důkazu musí být i otevřená. Protože Ω je souvislá, musí být $M=\Omega$. ▨

<u>Poznámka</u> Nic takového neplatí pro hladké reálné funkce.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x} \quad \text{pro } x\neq 0$$
$$= 0 \quad \text{pro } x=0$$
$$g(x) \equiv 0$$



Důsledky věty o jednoznačnosti

V komplexním oboru platí všechny formule pro goniometrické funkce jako v reálném oboru. Např. součtový vzorec

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Vezměme y pevné $(y \in \mathbb{R})$ a položme

$$f(x) = \sin(x+y)$$

$$g(x) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Rovnost $f(x) = g(x)$ platí pro $x \in \mathbb{R}$. Podle jednoznačnosti platí i pro $x \in \mathbb{C}$. Nyní vezměme $x \in \mathbb{C}$ pevné a položme

$$F(y) = \sin(x+y)$$

$$G(y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Rovnost $F(y) = G(y)$ platí pro všechna $y \in \mathbb{R}$, tedy platí i pro $y \in \mathbb{C}$.

Analogicky lze dokázat formule pro exponenciálu a logaritmus.

Taylorův rozvoj

Víme, že pro $x \in (-1,1)$ platí

$$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

~~Řad~~ Řada vpravo má poloměr konvergence 1. Položme pro $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \ln(1+z)$$

$$g(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Potom $f(z) = g(z)$ na reálném intervalu $(-1,1)$. Podle věty o jednoznačnosti je

$$f(z) = g(z) \quad \text{na } \{z \in \mathbb{C}, |z-1| < 1\}$$

Tedy dokážeme Taylorův rozvoj pro $\ln$.

Stejně lze obdržet Taylorův rozvoj pro e^z, $\cos z$, $\sin z$ (Už jsme dělali jiným způsobem)

Další důsledek

Je-li f holomorfní a ~~konstantní~~ nekonstantní v oblasti Ω, pak každý její nulový bod (tj. $z_0 \in \Omega$: $f(z_0)=0$) je izolovaný.

Order of holomorphic function – řád holomorfní funkce ~~je nejmenší~~ v bodě

$z_0 \in \Omega$ je nejmenší $m \geq 1$ takové, že $a_m \neq 0$. Tj.

$$f(z) = a_0 + a_m (z-z_0)^m + a_{m+1} (z-z_0)^{m+1}$$

Tedy $f(z) - f(z_0)$ se chová v okolí z_0 jako polynom $a_m (z-z_0)^m$.

Příklady nulový

$\sin z$ je v $z_0 = 0$ řádu 1

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots\right)$$

$1 - \cos z$ je $z_0 = 0$ řádu 2 nulový

$$1 - \cos z = 1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots = \frac{z^2}{2!}\left(1 - \frac{z^2}{4!} + \dots\right)$$

$e^z - 1$ je v $z_0 = 0$ řádu 1

$$e^z - 1 = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots - 1 = z\left(1 + \frac{z}{2!} + \dots\right)$$

$\tan z - z$ je $z_0 = 0$ řádu 3

$$\tan z - z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 - z = z^3\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{15} z^2 + \right)$$