PŘEDNÁŠKA 7

Základní Hlavní věta algebry – main theorem of algebra

Každý nekonstantní polynom $p(z)$ má kořen v $\mathbb{C}$.

Důkaz sporem: Předpokládejme, že p nemá kořen, $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$.

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots \frac{a_0}{z^n} \right)$$

Pro $|z| \to \infty$ je

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq |a_n| + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \dots$$

Tedy $\lim\limits_{|z| \to \infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots \frac{a_0}{z^n} \right) = a_n$

a $\lim\limits_{|z| \to \infty} |p(z)| = \infty$.

Proto $\frac{1}{p(z)}$ je omezená na ~~nějaké~~ $\{z \in \mathbb{C}, |z| > r\}$. $\frac{1}{p(z)}$ je rovněž omezená na kompaktní množině $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$.

Tedy existuje K tak, že

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq K$$

Současně $\frac{1}{p(z)}$ je holomorfní na $\mathbb{C}$, tedy celá.

(Zde nevužijeme předpoklad, že p nemá nulový bod.) Podle Liouvilleovy věty je $\frac{1}{p(z)} = \text{const}$

Tedy $p(z) = \text{const}$,

což je spor s předpokladem. ■

Laurent series – Laurentova řada

je řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Část $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ se nazývá hlavní část
principal part

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ se nazývá regulární část
regular part

Definice Laurentova řada konverguje, jestliže obě její části konvergují. Součtem Laurentovy řady je součet obou jejích částí.

Abelova věta pro řady

Jestliže řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konverguje pro nějaké z, pak konverguje absolutně a stejnoměrně pro všechna $x \in \mathbb{C}$, $|x-z_0|<r<|z-z_0|$. Jestliže řada pro nějaké z diverguje, pak diverguje pro všechna $x \in \mathbb{C}$, $|x-z_0|>|z-z_0|$.

Poloměr konvergence řady je R, kde

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

Nyní uvažujme hlavní část Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$.

Položme $\frac{1}{y} = (z-z_0)$. Pak dostaneme řadu v y

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\, y^k$$

a na ni můžeme aplikovat Abelovu větu.

Jestliže $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ konverguje pro nějaké $z \in \mathbb{C}$, pak konverguje absolutně a stejnoměrně pro všechna $x \in \mathbb{C}$ taková, že $|x-z_0|>r>|z-z_0|$.

Jestliže $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ ~~konverguje~~ div pro nějaké $z \in \mathbb{C}$, pak diverguje pro všechna $x \in \mathbb{C}$, $|x-z_0|<|z-z_0|$.

Hlavní část Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$$

určuje vnitřní poloměr konvergence

$$r = \limsup_{n \to -\infty} |a_n|^{\frac{1}{|n|}}$$

$$= \limsup_{n \to \infty} |a_{-n}|^{\frac{1}{n}}$$

Pak řada $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ konverguje absolutně na $\{z \in \mathbb{C},\ |z-z_0| > r\}$ a diverguje v $\{z \in \mathbb{C},\ |z-z_0| < r\}$.

<u>Věta</u>: Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konverguje v mezikruží (annulu)

$$\{z \in \mathbb{C},\ r < |z-z_0| < R\},$$

kde vnitřní poloměr konvergence je

$$r = \limsup_{n \to \infty} |a_{-n}|^{\frac{1}{n}}$$

a vnější poloměr konvergence je R

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Tato konvergence je stejnoměrná na všech annulech typu

$$\{ z \in \mathbb{C}, r < \rho_1 \leq |z-z_0| \leq \rho_2 < R \}.$$

Důsledek ~~Věta~~: Součet Laurentovy řady $\sum a_n (z-z_0)^n$ je v mezikruží $\{ z \in \mathbb{C}, r < |z-z_0| < R\}$ holomorfní funkce.

Dokážeme obrácené tvrzení

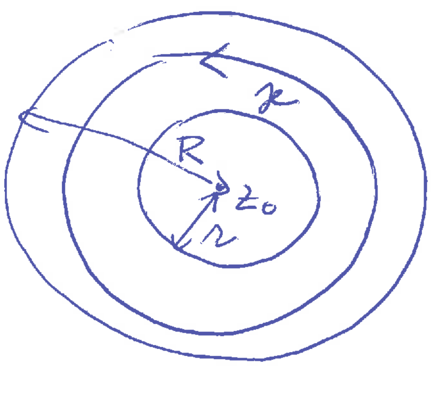
Věta Je-li $f(z)$ funkce holomorfní v mezikruží $\{ z \in \mathbb{C}, r < |z-z_0| < R\}$ pak

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

kde

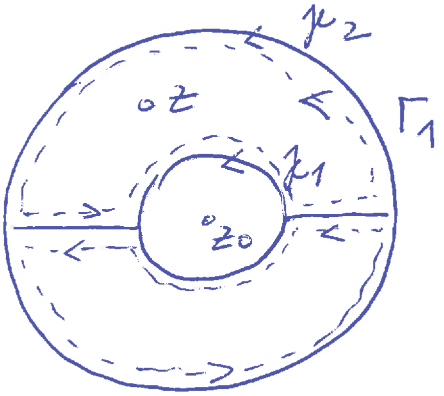
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}$$

kde je φ kladně orientovaná přípustná uzavřená křivka v mezikruží.



Důkaz se provádí v podstatě stejně, jako pro funkci $f(z)$ holomorfní v kruhu.

Nechť $r < \rho_1 < |z-z_0| < \rho_2 < R$. Nechť γ_1 a γ_2 jsou kružnice se středem z_0 a poloměry ρ_1 a ρ_2 kladně orientované.



Podle Cauchyovy formule a podle Cauchyovy věty máme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \right) (z-z_0)^n + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \right) (z-z_0)^{-n}$$

neboť

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^n} \quad \text{pro} \quad |z-z_0| < |\xi - z_0| < R$$

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(z-z_0)-(\xi-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi-z_0)^m}{(z-z_0)^{m+1}} \qquad \text{pro } r<|\xi-z_0|<|z-z_0|.$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\xi-z_0)^{-n+1}}\,(z-z_0)^{-n}.$$

~~Důkaz~~ Odtud dostáváme

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_2} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi \qquad n \geq 0$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi \qquad n \leq -1$$

Formule (pro koeficienty) z věty má ~~platit~~ integraci přes jedinou křivku. Důkaz provedeme na základě toho, že

$$\int_K \frac{1}{(\xi-z_0)^n}\,d\xi = 0 \quad \text{pro} \quad n \neq 1$$

a

$$\int_K \frac{1}{\xi-z_0}\,d\xi = 2\pi i$$

Nechť $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Pak

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-k-1}$$

vzhledem ke stejnoměrné konvergenci dokážeme pro každou kladně orientovanou uzavřenou přípustnou křivku φ v mezikruží $\{z \in \mathbb{C},\ r < |z-z_0| < R\}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_\varphi (z-z_0)^{n-k-1}\,dz$$

$$= \frac{a_k}{2\pi i}\, 2\pi i = a_k \qquad \blacksquare$$

V daném mezikruží je Laurentův rozvoj funkce určen jednoznačně. Holomorfní funkce však může mít různé rozvoje v různých mezikružích, i když by mají stejný střed.

<u>Příklad</u> $f(z) = \dfrac{1}{z^3-1} =$

není holomorfní v bodech $1,\ e^{i\frac{2\pi}{3}},\ e^{i\frac{4\pi}{3}}$.