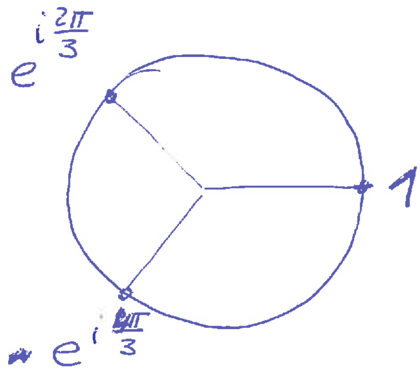
8. PŘEDNÁŠKA



Rozvoj $f(z) = \dfrac{1}{z^3-1}$ v kruhu $\{z \in \mathbb{C};\ |z|<1\}$

$$f(z) = -\frac{1}{1-z^3} = -\left(1+z^3+z^6+\dots\right) = -1-z^3-z^6-z^9-\dots$$

Rozvoj $f(z)$ v mezikruží $\{z \in \mathbb{C},\ 1<|z|\}$

$$f(z) = \frac{1}{z^3\left(1-\frac{1}{z^3}\right)} = \frac{1}{z^3}\left(1+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^9}+\dots\right)$$

$$= \frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^9}+\dots$$

Rozvoj funkce $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ v bodě $b \neq a$ na $\{z \in \mathbb{C},\ |z-b| < |a-b|\}$ je

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-b+b-a} = -\frac{1}{(a-b)-(z-b)}$$

$$= -\frac{1}{a-b}\,\frac{1}{1-\frac{z-b}{a-b}} = -\frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-b)^n}{(a-b)^n}\right)$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+1}} \,.$$

Izolované singularity holomorfní funkce

f jsou body $z_0 \in \mathbb{C}$ takové, že f je holomorfní na $\{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z - z_0| < R\}$ pro nějaké R kladné.

Examples $\quad f(z) = \dfrac{\sin z}{z}, \quad f(z) = \dfrac{1}{z^k} \quad k \geq 1,$

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

3 types of isolated singularities
= 3 typy izolovaných singularit

– podle Laurentova rozvoje funkce v $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - z_0| < R\}$

(1) Laurentův rozvoj nemá hlavní část, tj

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

(2) Laurentův rozvoj má hlavní část konečnou s aspoň jedním členem

$$f(z) = a_{-k}\frac{1}{(z - z_0)^k} + a_{-k+1}\frac{1}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots a_{-1}\frac{1}{z - z_0}$$

$$+ a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

kde $a_{-k} \neq 0$.

(3) Laurentův rozvoj má hlavní část nekonečnou, pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ je $a_{-n} \neq 0$.

Vlastnosti těchto singularit:

① $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existuje v $\mathbb{C}$ a je rovna a_0

mluvíme o odstranitelné singularitě

(removable singularity)

② $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ neboť

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{1}{(z-z_0)^k} \left(a_{-k} + a_{-k+1} (z-z_0)^1 + \dots \right) \right|$$

$$= \lim \frac{1}{|z-z_0|^k} \cdot \lim \left| a_{-k} + a_{-k+1} (z-z_0) + \dots \right|$$

$$= \infty \cdot a_{-k} = \infty \quad \text{pro } a_{-k} \neq 0$$

Této singularitě se říká pól (pole).

Věta Má-li f v bodě z_0 singularitu a je-li na okolí tohoto bodu omezená, pak jde o odstranitelnou singularitu (typu ①).

Důkaz: Dokážeme, že koeficienty $a_{-1}, a_{-2}, \dots$ v L. rozvoji jsou rovny 0. Pro vhodné kružnice o poloměru ε kolem z_0 je

$$|a_{-1}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\varepsilon} f(z)\, dz \right| = \frac{1}{2\pi} \int |f(z)|\, dz \leq \frac{2\pi\varepsilon}{2\pi} K$$

Tedy $|a_{-1}| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2\pi\varepsilon}{2\pi} k = 0.$

$$|a_{-2}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)(z-z_0)\,dz \right| \le \frac{2\pi\varepsilon}{2\pi} k \cdot \varepsilon \to 0$$

atd.

② Pól řádu k v z_0

$$f(z) = a_{-k} \frac{1}{(z-z_0)^k} + a_{-k+1} \frac{1}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^k} \left(a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \dots \right)$$

$$= \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$$ kde g je holomorfní a $g(z_0) \neq 0$.

③ V tomto případě singularity z_0 nazýváme podstatná singularita (essential singularity).

Věta (Casorati-Sokhotski-Weierstrass)
Je-li z_0 podstatná singularita funkce f, pak každé $A \in \mathbb{C}$ je limitou $f(z_n)$, kde $z_n \to z_0$.

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A.$$

Důkaz: Předpokládejme, že nějaké $A \in \mathbb{C}$ není hromadným bodem. Pak existuje okolí z_0 v $\mathbb{C}$ tak, že $|f(z)-A| > k > 0$ pro ~~[illegible]~~ z ~~[illegible]~~ z tohoto okolí.

Proto
$$g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$$
je holomorfní na okolí z_0 a omezená, neboť
$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-A|} < \frac{1}{k}$$

Tedy z_0 je izolovaná singularita $g(z)$, tedy $g(z)$ lze rozšířit holomorfně na z_0 a
$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + A$$
a buď $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existuje v $\mathbb{C}$, pokud $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$

a $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$ pokud $\lim_{z\to z_0} g(z) = g(z_0) = 0$.

Tedy f má v z_0 odstranitelnou singularitu nebo pól. ~~[illegible]~~

(~~[illegible]~~ Jde o nepřímý důkaz: Nějaké A není hromadný bod $\Rightarrow$ f má v z_0 odstranitelnou singularitu nebo pól.) ∎

<u>Důsledek</u> V podstatné singularitě nemá f limitu.

<u>Poznámka</u> Obdobně můžeme ukázat, že v podstatné singularitě existuje posloupnost $z_n \to z_0$, že $\lim |f(z_n)| = \infty$.

(Kdyby neexistovala, byla by f omezená a měla v z_0 odstranitelnou singularitu.)

<u>Shrnutí</u>

<u>Věta</u> Singularita v bodě z_0 funkce je

(1) odstranitelná ~~odstraněná~~ právě když $\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

(2) pól, právě když $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$

(3) podstatná, právě když $\lim_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje.

$\Uparrow$

To je velice důležité !

<u>Platí víc než jen Casorati-Weierstrassova věta</u>

<u>Velká Picardova věta</u> V každém okolí podstatné singularity z_0 nabývá f všech komplexních hodnot s možnou výjimkou jedné.

Reziduum funkce f v bodě z_0. Nechť f je holomorfní v okolí bodu z_0. Pak REZIDUEM (residue) funkce f v bodě z_0 nazýváme koeficient $a_{-1} \in \mathbb{C}$ v Laurentově rozvoji funkce f

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Platí

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} f(z)\,dz$$

kde je φ kladně orientovaná uzavřená přípustná křivka kolem z_0. Označujeme $\operatorname{res}_{z_0} f$.

Příklady $\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \dots$

Reziduum je 0. $\operatorname{res}_0\left(\cos\frac{1}{z}\right) = 0$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots$$

$$\operatorname{res}_0\left(\sin\frac{1}{z}\right) = 1$$