PŘEDNÁŠKA 9 – REZIDUA

Pro f holomorfní v okolí bodu z_0, definujeme reziduum f v bodě z_0 jako

$$\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} f(z)\,dz$$

kde a_{-1} je koeficient v Laurentově rozvoji a φ je kladně orientovaná kružnice kolem z_0.

Reziduum funkce, která má v z_0 pól řádu n

<u>Věta</u>: Má-li f v z_0 pól řádu n, pak

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{(n-1)}.$$

<u>Důkaz</u>:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + \dots$$

$$\left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{n-1} = (n-1)!\,a_{-1} + n(n-1)\cdots 2\,a_0(z-z_0) + \dots$$

$$\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]^{n-1} = (n-1)!\,a_{-1}$$

Příklad Spočtěte reziduum funkce $f(z)=\frac{\cot g\, z}{z^2}$

v bodě 0. $\cot g\, z$ má v 0 pól řádu 1,

stejně jako $\frac{1}{\sin z}$. $f(z)$ má v 0 pól řádu 3.

Tedy

$$\operatorname{res}_0 f = \lim \frac{1}{2!}\left[z^3 \frac{\cot g\, z}{z^2}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(z \cot g\, z\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\cot g\, z - \frac{z}{\sin^2 z}\right)' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{-1}{\sin^2 z} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin^2 z - z\, 2\sin z \cos z}{\sin^4 z}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}$$

$$\left(\frac{-\sin^2 z - \sin^2 z + z \sin 2z}{\sin^4 z}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{-2\sin z + 2z\cos z}{\sin^3 z}\right)$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{-\sin z + z\cos z}{z^3} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{-z + \frac{z^3}{3!} - \dots}{}\right.$$

$$\left.\frac{\dots + z - \frac{1}{2!}z^3 + \dots}{z^3}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + z \dots\right)$$

$$= -\frac{1}{3}$$

Residue theorem – Reziduová věta

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast, $M \subset \Omega$ konečná množina, f holomorfní na $\Omega - M$. Nechť je φ uzavřená křivka, která je kladně orientovaná a ohraničuje oblast, v níž leží celá množina M. Pak

$$\int_{\varkappa} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_i \in M} \operatorname{res}_{z_i} f$$

Důkaz indukcí podle počtu bodů množiny M

je-li M prázdná, pak podle Cauchyovy věty

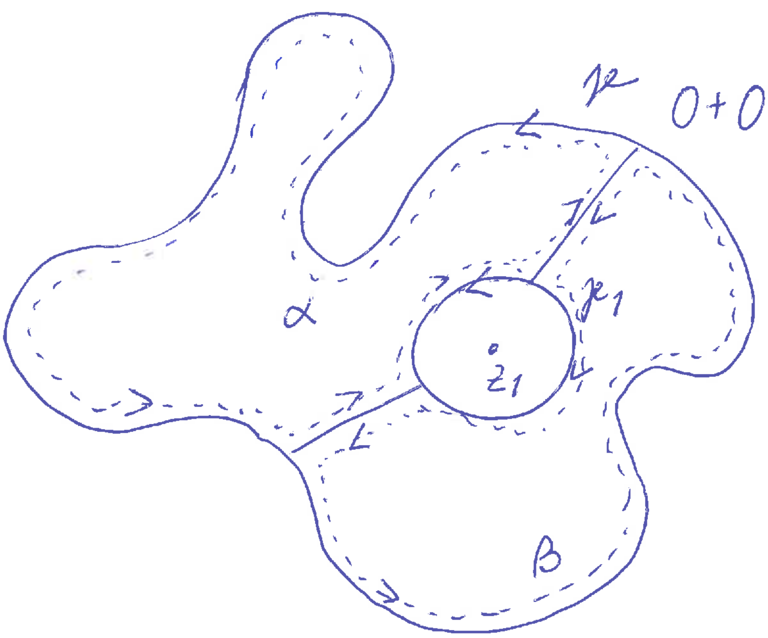
$$\int_{\varkappa} f(z)\,dz = 0.$$

Jestliže M obsahuje jediný bod z_0 dokážeme, že

$$\int_{\varkappa} f(z)\,dz = \int_{\varkappa_1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} f$$

kde $\varkappa_1$ je kružnice kladné orientace kolem z_1 s poloměrem menším než R, kde f je holomorfní v $\{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z - z_1| < R\}$.

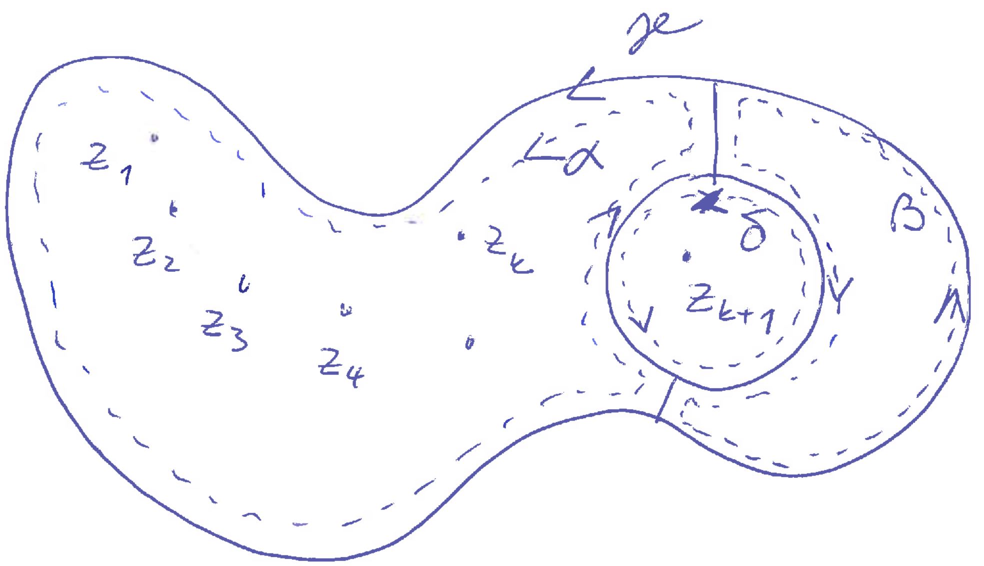
Platí totiž



$$0 + 0 = \int_{\alpha} f(z)\,dz + \int_{\beta} f(z)\,dz = \int_{\varkappa} f(z)\,dz - \int_{\varkappa_1} f(z)\,dz$$

Nechť věta platí k-prvkovou množinu M.

Nechť mějme $M = \{z_1, \dots z_k, z_{k+1}\}$



$$\int_{\varkappa} f(z)dz = \int_{\alpha} f(z)dz + \int_{\beta} f(z)dz + \int_{\delta} f(z)dz$$

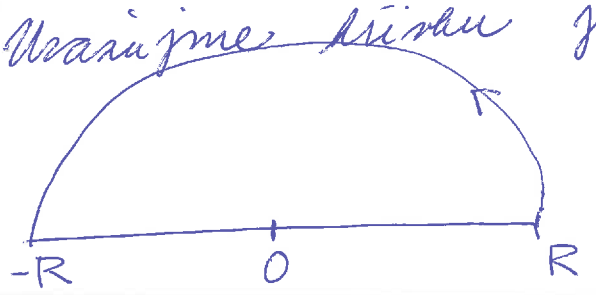
$$= 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \operatorname{res}_{z_i} f + 0 + 2\pi i \operatorname{res}_{z_{k+1}} f.$$

$\blacksquare$

Aplikace

Příklad Výpočet integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$

Funkce $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$ ~~má~~ je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Uvažujme křivku $\varkappa$



Platí $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$

Dále integrál přes půlkružnici $\gamma_R(t) = Re^{it}$ pro $t \in [0,\pi]$ má limitu

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma} \frac{1}{(1+z^2)^2}\,dz \right| \le \lim_{R\to\infty} \pi R \frac{1}{(R^2-1)^2} = 0$$

Proto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma} \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \lim_{R\to\infty} 2\pi i \operatorname{res}_i f$$

$$= 2\pi i \operatorname{res}_i f$$

a stačí spočítat reziduum v bodě i.

$f(z)$ má v i pól řádu 2 neboť

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \text{hol fce v } i$$

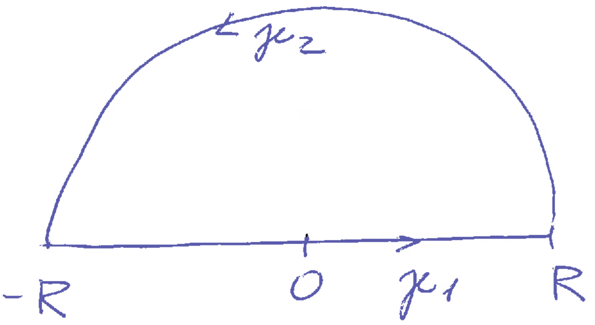
$$\operatorname{res}_i f = \lim_{z\to i} \left[(z-i)^2 \cdot \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} \right]' =$$

$$= \lim_{z\to i} \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right)' = \lim_{z\to i} \frac{-2}{(z+i)^3} = -\frac{i}{4}$$

Tedy $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^2} = 2\pi i \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

Příklad $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx$

Uvažujme stejnou křivku jako v předchozím



$$\int_{\varphi_1} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx \quad \text{pro } R \to \infty$$

$$\left| \int_{\varphi_2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \int_{\varphi_2} \underbrace{|e^{iz}|}_{= e^{\mathrm{Re}(iz)}}\,dz =$$

$z = R(\cos t + i \sin t)$

$$= \frac{1}{R^2-1} \int_0^{\pi} e^{-R\sin t} R\,dt \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \longrightarrow 0$$

Tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} = \mathrm{Re}\left(2\pi i \operatorname{res}_i \frac{e^{iz}}{1+z^2}\right)$$

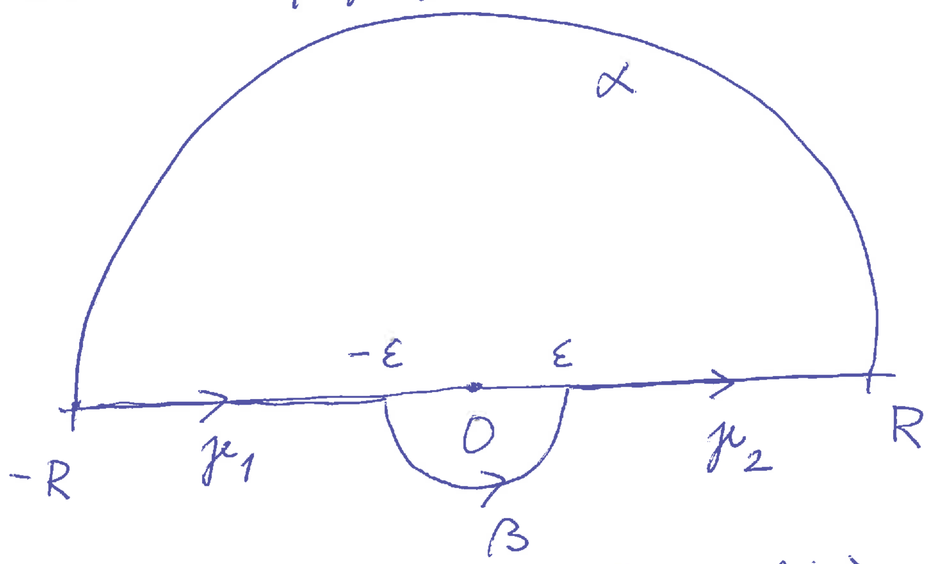
$$= \mathrm{Re}\left(2\pi i \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}}{z+i}\right) = \mathrm{Re}$$

$$\left(2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i}\right) = \underline{\underline{\pi e^{-1}}}$$

Příklad $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx$

Integrujeme $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ přes křivku Γ, která má části α, γ_1, β a γ_2:

f má pól pouze v 0



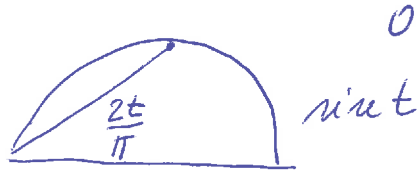
Platí $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_0 f(z) = 2\pi i$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \text{ pro } \begin{array}{l} R\to\infty \\ \varepsilon\to 0 \end{array}$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \longrightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \text{ pro } \begin{array}{l} R\to\infty \\ \varepsilon\to 0 \end{array}$$

$$\left|\int_\alpha f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{e^{i(\cos t + i\sin t)R}}{R(\cos t + i\sin t)} R(\sin t - i\cos t)\,dt\right| \le$$

$$\le \int_0^\pi \left| \qquad \right| dt = \int_0^\pi e^{-\sin t \cdot R}\,dt \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2t}{\pi}R}\,dt$$



$$= 2\left[-\frac{\pi}{2R}\, e^{-\frac{2t}{\pi}R}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{R}\left(1-e^{-R}\right) \longrightarrow 0$$

pro $R \longrightarrow \infty$.

Konečně v okolí 0 je $f(z) = \frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + g(z)$

kde $g(z)$ je holomorfní v 0.

$$\int_{\beta} f(z)\,dz = \int_{\beta} \frac{1}{z}\,dz + \int_{\beta} g(z)\,dz$$

$$\int_{\beta} \frac{1}{z}\,dz = \pi i$$

$$\left|\int_{\beta} g(z)\,dz\right| \leq K\cdot\varepsilon \longrightarrow 0 \text{ pro } \varepsilon \to 0$$

Proto

$$2\pi i = \int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz + \pi i$$

Proto $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \pi i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \underline{\underline{\pi}}$$