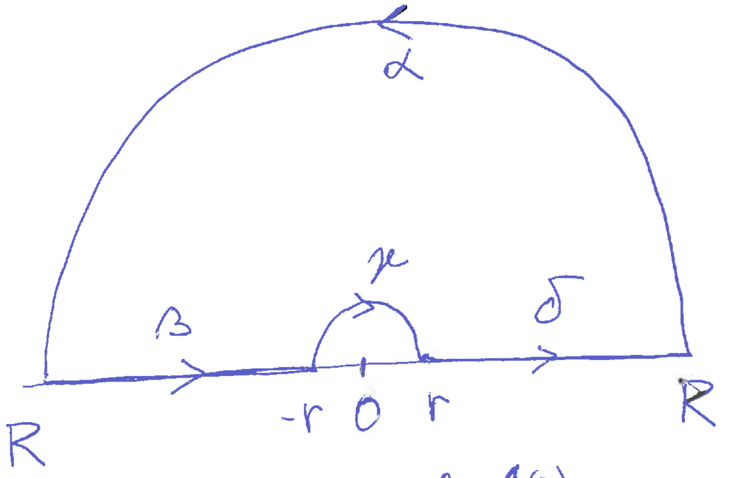
PŘEDNÁŠKA 10

Příklad $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$

Integrujme $f(z) = \dfrac{\ln z}{1+z^2}$, $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi$ přes křivku Γ:



$$2\pi i \operatorname{res}_i \frac{\ln(z)}{1+z^2} = \int_\Gamma \frac{\ln(z)}{1+z^2}\,dz = \int_\alpha + \int_\beta + \int_\gamma + \int_\delta$$

$$\left|\int_\alpha \frac{\ln(z)}{1+z^2}\,dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\ln Re^{it}}{1+R^2e^{i2t}} \cdot R\,i\,e^{it}\,dt\right|$$

$$\le \int_0^\pi \frac{|\ln R + it|}{R^2-1}\,R\,dt \le K\frac{R\ln R}{R^2-1} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } R \to \infty$$

$$\left|\int_\beta \frac{\ln z}{1+z^2}\,dz\right| = \int_0^\pi \frac{|\ln r + it|}{1-r^2}\,r\,dt \le K \ln r \cdot r \longrightarrow 0 \quad \text{pro } r \to 0_+$$

$$\int_\beta \frac{\ln z}{1+z^2}\,dz = \int_{-R}^{-r} \frac{\ln|x| + i\pi}{1+x^2}\,dx = \int_r^R \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + i\pi\int_r^R \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_\gamma \frac{\ln z}{1+z^2}\,dz = \int_r^R \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$$

Proto

$$2\pi i \operatorname{res}_i f(z) = 2\pi i \cdot i \frac{\pi}{2} \frac{1}{2i} = i \frac{\pi^2}{2}$$

$$= \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2 \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} =$$

Odtud $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0$

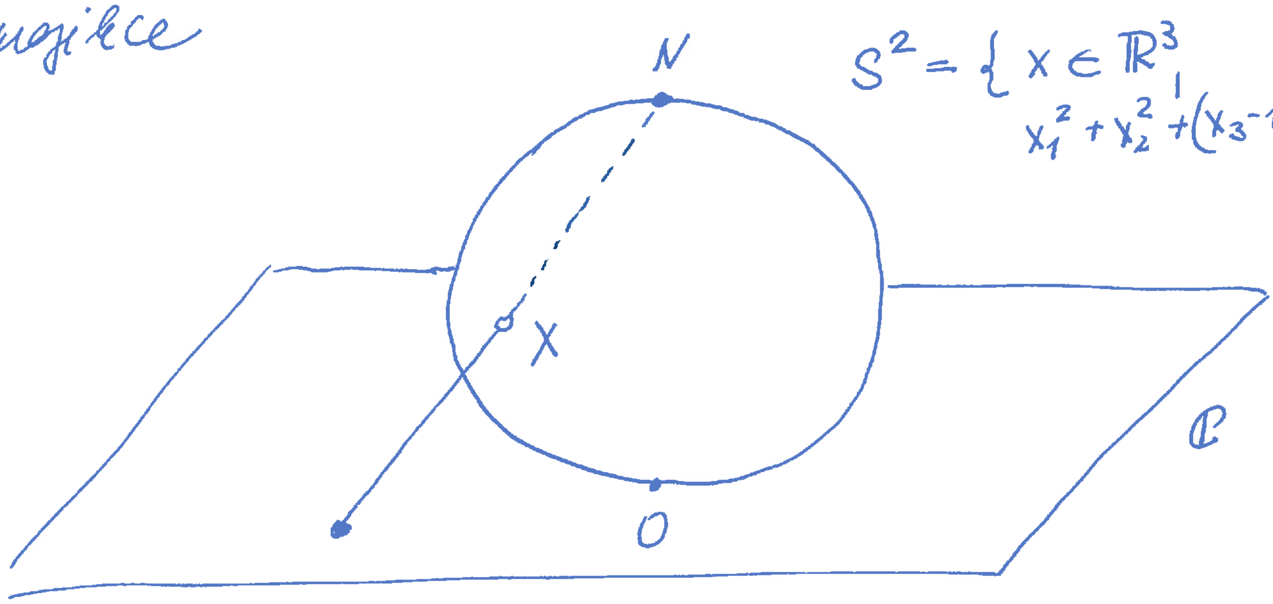
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

ROZŠÍŘENÁ KOMPLEXNÍ ROVINA
(Extended complex plane)

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Geometrická představa pomocí stereografické projekce

$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 + (x_3-1)^2 = 1\}$



Obrazem bodu X na sféře S^2 je průsečík polopřímky $\overrightarrow{NX}$ s rovinou $\mathbb{C}$. Bodu N odpovídá v $\overline{\mathbb{C}}$ bod ∞.

Topologie $\overline{\mathbb{C}}$ je stejná jako topologie S^2.

$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ právě když $\lim |z_n| = \infty$

pro $z_n \in \mathbb{C}$.

Pro funkce $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ můžeme definovat spojitost a limity.

__Příklady__ Funkce $f(z) = \frac{1}{z}$ lze považovat, že spojitou funkci $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ takovou, že

$$f(0) = \infty \quad a \quad f(\infty) = 0.$$

Funkce $g(z) = z^2$ je ~~~~ $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ s hodnotami

$$g(0) = 0, \quad g(\infty) = \infty$$

Funkce $h(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots$

má v nekonečnu hodnotu 1.

__Meromorfní funkce__ Nechť $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ je otevřená a $A \subset \Omega$ je konečná. Funkci $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$, která je holomorfní v $\Omega - A$ a v bodech A má póly nebo odstranitelné singularity nazýváme meromorfní funkcí v Ω.

<u>Pól funkce v ∞</u> Nechť f je holomorfní v okolí ∞, tj. v nějakém

$$\{z \in \mathbb{C}, r < |z|\}.$$

Pak

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Jestliže

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n + a_0 + a_1 z + \dots a_k z^k$$

říkáme, že f má v ∞ pól řádu k.

Platí: f má v ∞ pól řádu k právě když $f\left(\frac{1}{z}\right)$ má v 0 pól řádu k.

<u>Reziduum funkce f v ∞</u> je

$$\operatorname{res}_\infty f = -a_{-1}$$

Platí

$$\operatorname{res}_\infty f = -2\pi i \int_\gamma f(z)\,dz$$

kde $\gamma(t) = Re^{it}$ pro R dostatečně velké.

<u>Kritéria</u> $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \iff \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = A \iff \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = A$$

Singularita funkce f v ∞ je

(1) odstranitelná, jestliže $f\left(\frac{1}{z}\right)$ má odstranitelnou singularitu v 0.

(2) pól řádu k, jestliže $f\left(\frac{1}{z}\right)$ má pól řádu k v 0

(3) podstatná, jestliže $f\left(\frac{1}{z}\right)$ má podstatnou singularitu v

Laurentův rozvoj f v ∞

píšeme obvykle ve tvaru

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

Vidíme, že

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

V tomto zápisu je reziduum f v ∞ koeficient u $\frac{1}{z}$ tj a_1 se znaménkem $-$.

Příklady

Odstranitelná singularita v ∞ $\quad f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

Pól v ∞ $\quad f(z) = z^2$

Podstatná singularita v ∞ $\quad f(z) = e^{z}$.

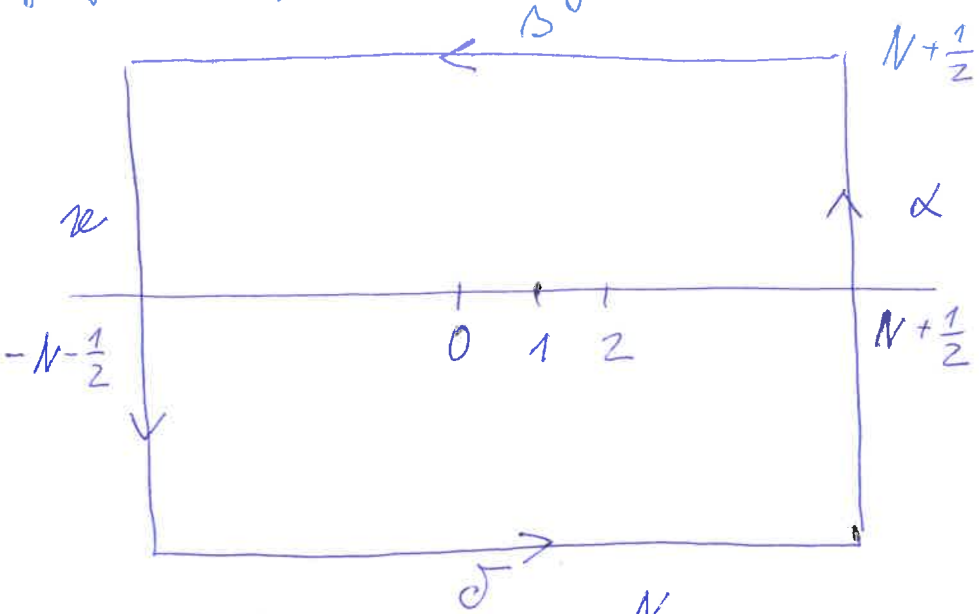
Podle Velké Picardovy věty nabývá funkce $f(z) = e^{z} : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ všech hodnot s výjimkou 0 a ∞.

Aplikace – součty řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Uvažujme funkci $f(z) = \dfrac{\operatorname{cotg} \pi z}{z^2}$, která má póly v $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Integrujeme přes křivky



Pak $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Pi_N} f(z)\,dz\right) = \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^{N} \operatorname{res}_n + \operatorname{res}_0$

Ukážeme, že

$$\int_{\Gamma_N} f(z)\,dz \longrightarrow 0 \quad \text{pro } N \to \infty$$

a dostaneme

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \operatorname{res}_n f(z) = -\operatorname{res}_0 f(z) \left(= \frac{\pi}{3}\right)$$

což nám dá $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Nyní výpočty residuí:

$$\operatorname{res}_n \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} = \lim_{z\to n} \frac{(z-n)}{\sin \pi z} \frac{\cos \pi z}{z^2} =$$

$$= \frac{\cos \pi n}{n^2} \lim_{z \to n} \frac{z-n}{\sin \pi z} \overset{\text{l'Hospitalovo pravidlo}}{=} =$$

$$= \frac{\cos \pi n}{n^2} \cdot \frac{1}{\pi \cos \pi z} = \frac{1}{\pi n^2}$$

$$\operatorname{res}_0 \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}$$

Funkce $\displaystyle\frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}$ má v 0 pól řádu 3

$$\frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} = \frac{a}{z^3} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z} + d + \dots$$

$$\cos \pi z = 1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} - \dots = \left(\frac{a}{z^3} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z} + d + \dots\right)\left(\pi z^3 - \frac{z^5 \pi^3}{3!} + \dots\right)$$

Odkud dostáváme

$$1 = a\pi \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{\pi}$$

$$-\frac{\pi^2}{2} = -\frac{a\pi^3}{3!} + c\pi \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{\pi}{3}$$

Tedy

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \operatorname{res}_n f(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} = -\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{\pi}{3}$$

Proto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

<u>Výpočet integrálu</u>

$$\left|\int_\alpha \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}\, dz\right| = \left|\int_\alpha i\,\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}\,\frac{1}{z^2}\, dz\right| =$$

$$z = N+\tfrac{1}{2} + iy \qquad y \in \left[-N-\tfrac{1}{2}, N+\tfrac{1}{2}\right]$$

$$= \left|\int_{\alpha} \frac{i}{z^2}\cdot \frac{e^{2i\pi z}+1}{e^{2i\pi z}-1}\, dz\right| \leq \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{1}{|z|^2} \left|\frac{e^{(2N+1)i\pi}\cdot e^{-2\pi y}+1}{e^{(2N+1)i\pi}\cdot e^{-2\pi y}-1}\right| dy$$

$$\leq \int_{-N+\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2+y^2}\cdot \frac{\left|-e^{-2\pi y}+1\right|}{\left|-e^{-2\pi y}-1\right|}\, dy$$

$$\leq (2N+1)\cdot \frac{1}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot 1 \longrightarrow 0 \text{ pro } N\to\infty$$

Obdobně se počítá s $\int_{\gamma}$.

$$\left|\int_{\beta} \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}\, dz\right| = \left|\int_{\beta} \frac{i}{z^2} \cdot \frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1}\, dz\right|$$

$$z = x + i\left(N+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\leq \int_{-N+\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{1}{|z|^2} \cdot \left|\frac{e^{-(2N+1)\pi} \cdot e^{i2\pi x}+1}{e^{-(2N+1)\pi} \cdot e^{i2\pi x}-1}\right| dx \leq$$

$$\leq \int_{-N+\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{1}{|z|^2} \, \frac{1+|e^{2\pi i x}|\,|e^{-\pi(2N+1)}|}{1-|e^{2\pi i x}|\,|e^{-\pi(2N+1)}|}\, dx \leq$$

$$\leq \int_{-N+\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2} \, \frac{1+1}{1-e^{-\pi}}\, dx \leq$$

$$\leq \frac{(2N+1)}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^2} \, \frac{2}{1-e^{-\pi}} \longrightarrow 0 \text{ pro } N \to \infty.$$

Příklad Pro počítání součtu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ bychom vzali funkci

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sin \pi z}$$

která má póly v $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$