λ - vl. číslo x - přísl. vl. vektor

$Ax = \lambda \cdot x \quad x \neq 0$

Důkazy vět z předch. hodiny

$\|\lambda x\|_\varphi = \|A \cdot x\|_\varphi \leq \|A\| \cdot \|x\|_\varphi$

$|\lambda| \cdot \|x\|_\varphi \Rightarrow |\lambda| \leq \|A\|$

$\|B\| < 1 \Rightarrow |\lambda| < 1$ pro všechna vl. čísla B

vl. čísla $E - B$ jsou $1-\lambda \Rightarrow$ jsou nenulová $\Rightarrow E - B$ je regulární

Platí $(E-B)\cdot(E + B + B^2 + \dots + B^m) = E - B^{m+1} \Rightarrow (E-B)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} B^m$

$$\|(E-B)^{-1}\| = \lim_{m\to\infty} \left\|\sum_{k=0}^{m} B^k\right\| \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \|B^k\| \leq \lim_{m\to\infty} \left(\|E\| + \sum_{k=1}^{m} \|B\|^k\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{\|E\| - \|B\|^{m+1}}{1 - \|B\|} = \frac{\|E\|}{1 - \|B\|}$$

dub 12-8:02

Hlavní věta o konvergenci

$$x^{k+1} = Tx^k + g = \underbrace{T^{k+1}}_{\to\, 0} x^0 + \underbrace{(T^k + T^{k-1} + \dots + T + E)}_{\to\, (E-T)^{-1}} g$$

$\lim_{k\to\infty} x^{k+1} = (E-T)^{-1} g = x^*$ - řešení

$x = Tx + g$

Odhad přesnosti iterace

$x^* - x^k = Tx^* + g - Tx^{k-1} - g = T(x^* - x^{k-1}) = \dots = T^k(x^* - x^0)$

$\|x^* - x^k\| \leq \|T\|^k \|x^* - x^0\|$

dub 12-8:38

$x^{k+1} - x^k = Tx^k + g - Tx^{k-1} - g = T(x^k - x^{k-1}) = \dots = T^k(x^1 - x^0)$

$x^{k+m} - x^k = (x^{k+m} - x^{k+m-1}) + (x^{k+m-1} - x^{k+m-2}) + \dots + (x^{k+1} - x^k) =$

$= T^{k+m-1}(x^1 - x^0) + T^{k+m-2}(x^1 - x^0) + \dots T^k(x^1 - x^0) =$

$= (T^{m-1} + T^{m-2} + \dots + E)\, T^k (x^1 - x^0)$

$\|x^{k+m} - x^k\| \leq \|T^{m-1} + T^{m-2} + \dots + E\| \cdot \|T\|^k \|x^1 - x^0\| \leq (\|T\|^{m-1} + \|T\|^{m-2} + \dots + 1)\, \|T\|^k \|x^1 - x^0\|$

$\lim_{m\to\infty} \|x^{k+m} - x^k\| = \|x^* - x^k\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|} \|T\|^k \|x^1 - x^0\|$

dub 12-8:47

Maticový tvar G-S metody

$A = D + L + U$

$a_{11} x_1^{k+1} = -a_{12} x_2^k - a_{13} x_3^k - \dots - a_{1n} x_n^k + b_1$

$a_{21} x_1^{k+1} + a_{22} x_2^{k+1} = -a_{23} x_3^k - a_{24} x_4^k - \dots - a_{2n} x_n^k + b_2$

$a_{31} x_1^{k+1} + a_{32} x_2^{k+1} + a_{33} x_3^{k+1} = -a_{34} x_4^k - a_{35} x_5^k - \dots a_{3n} x_n^k + b_3$

$\vdots$

$(D+L)x^{k+1} = -Ux^k + b$

$x^{k+1} = -(D+L)^{-1} U x^k + (D+L)^{-1} b$

dub 12-9:20