

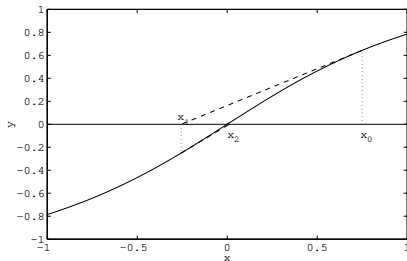
Numerické metody

4. přednáška, 15. března 2019

Jiří Zelinka

Newtonova metoda, metoda tečen

Uvažujme rovnici $f(x) = 0$. Zvolme x_0 a řešení hledáme na tečně k f v bodě x_0 jako její průsečík s osou x .



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Iterační funkce:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Podobně pokračujeme dál: x_{k+1} je průsečík tečny k funkci f v bodě x_k s osou x .

Newtonova metoda je metoda druhého řádu pro jednoduchý kořen ξ .

Věta

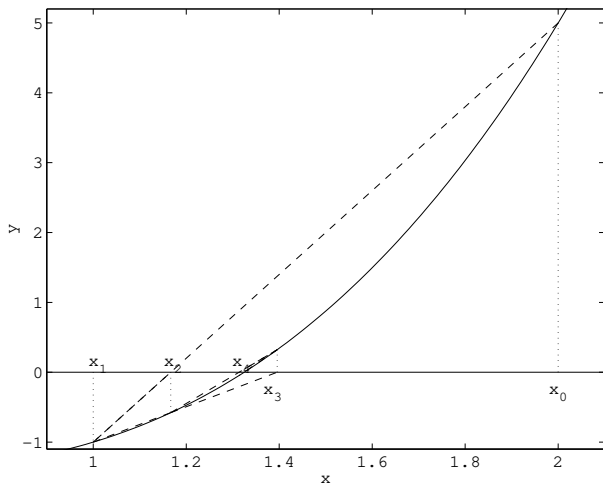
Nechť $f \in C^2[a, b]$ a necht' rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu jediný kořen ξ . Necht' f' , f'' nemění znaménka na intervalu $[a, b]$, přičemž $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$. Necht' počáteční aproximace x^0 je ten z krajních bodů a, b , v němž znaménko funkce je stejné jako znaménko f'' na intervalu $[a, b]$. Pak posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou konverguje monotonně k bodu ξ .

Derivaci v bodě x_k u Newtonovy metody nahradíme směrnici sečny v bodech $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ a $[x_k, f(x_k)]$.

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Výsledná iterační metoda

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad i = 1, 2, \dots$$



Pozor! Při pokusu o co nejpřesnější výpočet může dojít k nedefinovanému výrazu typu $0/0$.

Věta

Nechť rovnice $f(x) = 0$ má kořen ξ a nechť derivace f' , f'' jsou spojité v okolí bodu ξ , přičemž $f'(\xi) \neq 0$. Posloupnost určená metodou sečen konverguje ke kořenu ξ , pokud zvolíme počáteční aproximace x_0, x_1 dostatečně blízko bodu ξ a metoda je řádu $(1 + \sqrt{5})/2 \doteq 1,618$.

Metoda regula falsi

Předpokládejme $f(a)f(b) < 0$, $f \in C[a, b]$. Použijeme metodu sečen, přitom vybíráme iterace tak, aby ve dvou po sobě jdoucích měla f opačné znaménko:

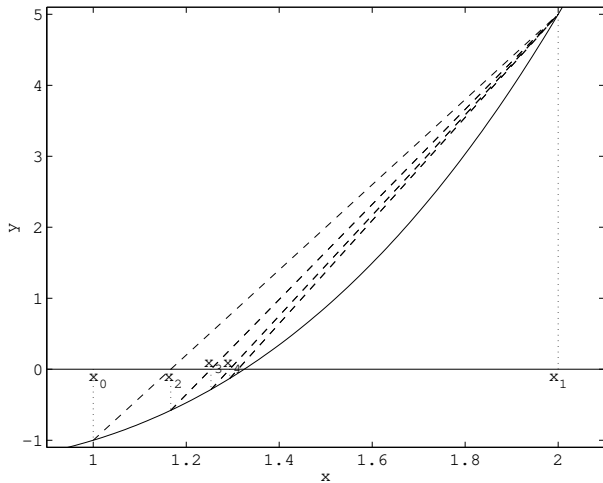
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_s}{f(x_k) - f(x_s)} f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

kde $s = s(k)$ je největší index takový, že $f(x_k)f(x_s) < 0$, přitom $f(x_0)f(x_1) < 0$ (tj. např. $x_0 = a$, $x_1 = b$).

Poznámka: pokud je funkce f konvexní nebo konkávní na $[a, b]$, je x_s jeden z krajní bodů intervalu.

Řád metody: 1

Metoda regula falsi



Konec opakování

Kvazinevtonova metoda (plus/minus)

Tečnu u Newtonovy metody nahradíme sečnou procházející bodem $[x_k, f(x_k)]$ a bodem $[x_k + f(x_k), f(x_k + f(x_k))]$, respektive bodem $[x_k - f(x_k), f(x_k - f(x_k))]$. Přitom pokud je bod x_k blízko hledaného kořene ξ , pak hodnota $f(x_k)$ je blízká nule a sečna procházející uvedenými body je blízká tečně vedené bodem x_k .

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}{x_k - (x_k \pm f(x_k))} = \frac{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}{\mp f(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{\mp f(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))} = x_k \pm \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}$$

Iterační funkce:

$$g(x) = x \pm \frac{f^2(x)}{f(x) - f(x \pm f(x))}$$

Poznámka:

Kvazinewtonova metoda se také někdy nazývá Steffensenova - viz příště.

Věta

Nechť $f \in C^1[a, b]$, $\xi \in [a, b]$ nechť je řešením rovnice $f(x) = 0$ a $f'(\xi) \neq 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná kvazinewtonovou metodou konverguje k bodu ξ pro každou počáteční aproximaci $x^0 \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \cap [a, b]$. Pokud má funkce f v okolí bodu ξ spojitou druhou derivaci, je řád metody alespoň 2.

Důkaz: L'Hospitalovo pravidlo.

Kořen ξ násobnosti M

$$f(\xi) = 0, f'(\xi) = 0, \dots, f^{(M-1)}(\xi) = 0, f^{(M)}(\xi) \neq 0$$

Věta

Nechť kořen ξ má násobnost $M > 1$. Pak modifikovaná Newtonova metoda

$$x_{k+1} = x_k - M \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

je metoda druhého řádu.

Násobnost kořene zpravidla neznáme \implies univerzální volba:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Funkce u má stejné kořeny jako funkce f , ale násobnosti 1, takže můžeme použít Newtonovu metodu pro funkci u .

Tento postup nefunguje pro funkci, která má všechny derivace nulové – např. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Pro tuto funkci selhávají i kriteria zastavení konvergence:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon, \quad \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon, \quad |f(x_k)| < \varepsilon$$

Urychlení konvergence – Aitkenova δ^2 -metoda

Věta

Nechť je dána posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, $x_k \neq \xi$, $k = 0, 1, 2, \dots$,
 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$, a necht' tato posloupnost splňuje podmínky

$$x_{k+1} - \xi = (C + o(1))(x_k - \xi), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad |C| < 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} o(1) = 0$$

Pak posloupnost

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

je definována pro všechna dostatečně velká k a platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\hat{x}_k - \xi}{x_k - \xi} = 0,$$

tj. posloupnost $\{\hat{x}_k\}$ konverguje k limitě ξ rychleji než
posloupnost $\{x_k\}$.

Důkaz:

Korektnost výrazu pro velká k :

$$\begin{aligned}x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k &= (x_{k+2} - \xi) - 2(x_{k+1} - \xi) + (x_k - \xi) = \\&= (x_{k+1} - \xi)(C + o(1)) - 2(x_k - \xi)(C + o(1)) + (x_k - \xi) = \\&= (x_k - \xi)(C + o(1))^2 - 2(x_k - \xi)(C + o(1)) + (x_k - \xi) = \\&= (x_k - \xi)(C^2 - 2C + 1 + o(1)) = (x_k - \xi)((C - 1)^2 + o(1))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_k - \xi &= x_k - \xi - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} = (x_k - \xi) - \frac{(x_{k+1} - \xi - (x_k - \xi))^2}{(x_k - \xi)((C - 1)^2 + o(1))} = \\&= (x_k - \xi) - \frac{(x_k - \xi)^2(C - 1 + o(1))^2}{(x_k - \xi)((C - 1)^2 + o(1))} = (x_k - \xi) \left(1 - \frac{(C - 1 + o(1))^2}{(C - 1)^2 + o(1)} \right)\end{aligned}$$

a odtud

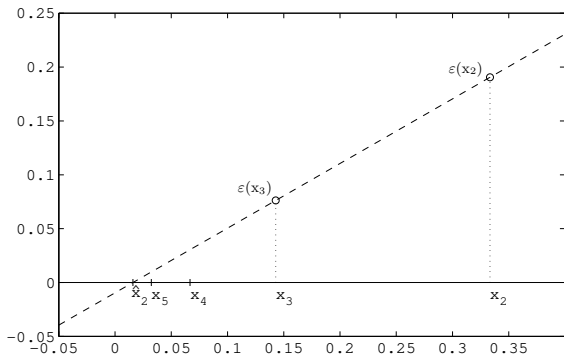
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\hat{x}_k - \xi}{x_k - \xi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(C - 1 + o(1))^2}{(C - 1)^2 + o(1)} \right) = 0.$$

Geometrická interpretace

Položme

$$\varepsilon(x_k) = x_k - x_{k+1} = x_k - \xi - (x_{k+1} - \xi) = (x_k - \xi)(1 - C + o(1))$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_{k+1}) &= x_{k+1} - x_{k+2} = (x_{k+1} - \xi)(1 - C + o(1)) = \\ &= (x_k - \xi)(C + o(1))(1 - C + o(1)) = \varepsilon(x_k)(C + o(1))\end{aligned}$$



Rovnice přímky:

$$y - \varepsilon(x_k) = \frac{\varepsilon(x_k) - \varepsilon(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}(x - x_k)$$

Průsečík s osou x ($y = 0$) je bod \hat{x}_k

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{\varepsilon(x_k)(x_k - x_{k+1})}{\varepsilon(x_k) - \varepsilon(x_{k+1})} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}.$$

Vyjádření pomocí diferencí:

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$$

$$\Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k = x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k$$

$$\Delta^3 x_k = \Delta^2 x_{k+1} - \Delta^2 x_k$$

\vdots

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k}$$