Numerické metody
5. přednáška, 22. března 2019

Jiří Zelinka

Opakování

Newtonova metoda, metoda tečen

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newtonova metoda je metoda druhého řádu pro jednoduchý kořen ξ.

Metoda sečen

Derivaci v bodě x_i u Newtonovy metody nahradíme směrnicí sečny v bodech $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$ a $[x_k, f(x_k)]$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(k_i) - f(x_{k-1})} f(x_k), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Metoda je řádu $(1 + \sqrt{5})/2 \doteq 1{,}618$.

Metoda regula falsi

Předpokládejme $f(a)f(b) < 0$, $f \in C[a, b]$. Použijeme metodu sečen, přitom vybíráme iterace tak, aby ve dvou po sobě jdoucích měla f opačné znaménko:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_s}{f(x_k) - f(x_s)} f(x_k), \qquad k = 0, 1, \dots,$$

kde $s = s(k)$ je největší index takový, že $f(x_k)f(x_s) < 0$, přitom $f(x_0)f(x_1) < 0$ (tj. např. $x_0 = a$, $x_1 = b$).

Poznámka: pokud je funkce f konvexní nebo konkávní na $[a, b]$, je x_s jeden z krajní bodů intervalu.

Řád metody: 1

Kvazinewtonova metoda (plus/minus)

Tečnu u Newtonovy metody nahradíme sečnou procházející bodem $[x_k, f(x_k)]$ a bodem $[x_k + f(x_k), f(x_k + f(x_k))]$, respektive bodem $[x_k - f(x_k), f(x_k - f(x_k))]$.

Iterační funkce:

$$g(x) = x \pm \frac{f^2(x)}{f(x) - f(x \pm f(x))}$$

$$x_{k+1} = x_k \pm \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k \pm f(x_k))}$$

Metoda je řádu alespoň 2.

Iterační metody pro násobné kořeny

Kořen ξ násobnosti M

$$f(\xi) = 0, f'(\xi) = 0, \dots, f^{(M-1)}(\xi) = 0, \ f^{(M)}(\xi) \neq 0$$

Věta

Nechť kořen ξ má násobnost $M > 1$. Pak modifikovaná Newtonova metoda

$$x_{k+1} = x_k - M\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

je metoda druhého řádu.

Obecný postup: Newtonova metoda pro $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$

Urychlení konvergence – Aitkenova δ^2-metoda

Věta

Nechť je dána posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, $x_k \neq \xi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$, a nechť tato posloupnost splňuje podmínky

$$x_{k+1}-\xi = (C+\gamma_k)(x_k-\xi),\ k = 0, 1, 2, \dots,\ |C| < 1,\ \lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0.$$

Pak posloupnost

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

je definována pro všechna dostatečně velká k a platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\hat{x}_k - \xi}{x_k - \xi} = 0,$$

tj. posloupnost $\{\hat{x}_k\}$ konverguje k limitě ξ rychleji než posloupnost $\{x_k\}$.

Geometrická interpretace

Položme

$$\varepsilon(x_k) = x_k - x_{k+1} = x_k - \xi - (x_{k+1} - \xi) = (x_k - \xi)(1 - C + o(1))$$

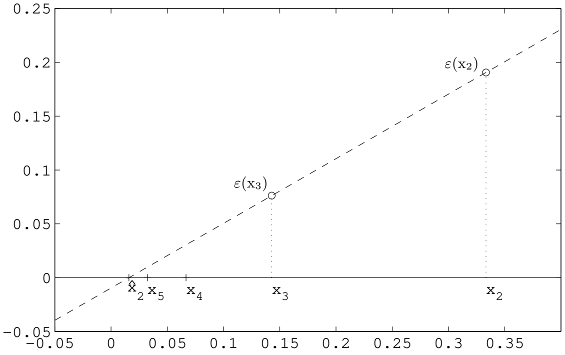
$\varepsilon(x_k)$ je tedy přibližně lineární funkcí chyby $x_k - \xi$.

Rovnice přímky procházející body $[x_k, \varepsilon(x_k)]$ a $[x_{k+1}, \varepsilon(x_{k+1})]$:

$$y = \frac{\varepsilon(x_k) - \varepsilon(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}(x - x_k) + \varepsilon(x_k)$$

Průsečík s osou x ($y = 0$) je bod $\hat{x}_k$

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{\varepsilon(x_k)(x_k - x_{k+1})}{\varepsilon(x_k) - \varepsilon(x_{k+1})} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}.$$



Vyjádření pomocí diferencí:

$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$
$\Delta^2 x_k = \Delta x_{k+1} - \Delta x_k = x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k$
$\Delta^3 x_k = \Delta^2 x_{k+1} - \Delta^2 x_k$
$\vdots$

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k}$$

Konec opakování

Steffensenova metoda

Buď g iterační funkce pro rovnici $x = g(x)$. Položme

$$y_k = g(x_k), \qquad z_k = g(y_k),$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}.$$

V tomto případě je tedy $\varepsilon(x_k) = x_k - y_k$, $\varepsilon(y_k) = y_k - z_k$.
Tato iterační metoda se nazývá **Steffensenova** a může být popsána iterační funkcí φ:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k),$$

kde

$$\varphi(x) = x - \frac{(g(x) - x)^2}{g(g(x)) - 2g(x) + x} = \frac{xg(g(x)) - g^2(x)}{g(g(x)) - 2g(x) + x}.$$

Věta

1. $\varphi(\xi) = \xi$ implikuje $g(\xi) = \xi$.
2. Jestliže $g(\xi) = \xi$, $g'(\xi)$ existuje a $g'(\xi) \neq 1$, pak $\varphi(\xi) = \xi$.

Věta

Nechť funkce g má spojité derivace až do řádu $p+1$ včetně v okolí bodu $x = \xi$. Nechť iterační metoda $x_{k+1} = g(x_k)$ je řádu p pro bod ξ.
Pak pro $p > 1$ je iterační metoda $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ řádu $2p-1$.
Pro $p = 1$ je tato metoda řádu alespoň 2 za předpokladu $g'(\xi) \neq 1$.

Souvislost Steffensenovy a kvazinewtonovy metody

$$f(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad g(x) = x + f(x)$$

Na funkci g aplikujeme Steffensenovu metodu:

$$y_k = g(x_k) = x_k + f(x_k), \quad z_k = g(y_k) = y_k + f(y_k)$$

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \\
&= x_k - \frac{(x_k + f(x_k) - x_k)^2}{(y_k + f(y_k) - y_k) - (x_k + f(x_k) - x_k)} \\
&= x_k - \frac{(f(x_k))^2}{f(y_k) - f(x_k)} \\
&= x_k + \frac{f^2(x_k)}{f(x_k) - f(x_k + f(x_k))}
\end{aligned}$$

Podobně varianta „minus“ pro $g(x) = x - f(x)$.

Müllerova metoda

Müllerova metoda je zobecněním metody sečen. U metody sečen aproximujeme funkci f přímkou procházející body $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, $[x_k, f(x_k)]$ a za další aproximaci bodu ξ vezmeme průsečík této přímky s osou x.

Müllerova metoda užívá tři aproximace x_{k-2}, x_{k-1}, x_k a křivku $y = f(x)$ aproximujeme parabolou určenou těmito body. Průsečík této paraboly s osou x, který je nejbližší k x_k, vezmeme za další aproximaci x_{k+1}. Touto metodou lze najít i násobné a komplexní kořeny.

x_{k-2}, x_{k-1}, x_k jsou již vypočtené aproximace. Sestrojme polynom

$$P(x) = a(x - x_k)^2 + b(x - x_k) + c$$

procházející body $[x_{k-2}, f(x_{k-2})]$, $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, $[x_k, f(x_k)]$, t.j. splňující podmínky $P(x^i) = f(x^i)$, $i = k-2, k-1, k$. Z nich plyne

$$\begin{aligned}
c &= f(x_k) \\
b &= \frac{(x_{k-2} - x_k)^2 \left[f(x_{k-1}) - f(x_k)\right] - (x_{k-1} - x_k)^2 \left[f(x_{k-2}) - f(x_k)\right]}{(x_{k-2} - x_k)(x_{k-1} - x_k)(x_{k-2} - x_{k-1})} \\
a &= \frac{(x_{k-2} - x_k) \left[f(x_{k-1}) - f(x_k)\right] - (x_{k-1} - x_k) \left[f(x_{k-2}) - f(x_k)\right]}{(x_{k-2} - x_k)(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k-2})}
\end{aligned}$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Znaménko u odmocniny vybereme tak, aby bylo shodné se znaménkem b. Tato volba znamená, že jmenovatel zlomku bude v absolutní hodnotě největší a tedy výsledná hodnota x_{k+1} bude nejbližší x_k. Je tedy

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2c}{b + (sign b)\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Newtonova metoda v komplexním oboru

$f(x) = x^2 + 1$

Newtonova metoda: $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2+1}{2x_k} = \frac{x_k^2-1}{2x_k}$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 + i \\
x_1 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i \\
x_2 &= -\frac{3}{40} + \frac{39}{40}i \\
x_3 &= \frac{7}{4000} + \frac{370}{371}i \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Polynomy

Π_n: třída polynomů stupně nejvýše n s reálnými koeficienty.
$\bar{\Pi}_n \subseteq \Pi_n$: třída polynomů s jedničkou u x^n.
$P \in \Pi_n$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0.$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ kořeny (reálné i komplexní) polynomu P.

Dělení polynomů se zbytkem

P, Q – polynomy, Pak existují polynomy S, R, že platí

$$P = Q \cdot S + R,$$

přičemž $st\, R < st\, Q$.

Hornerovo schema

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$, $c \in \mathbb{R}$.
Vydělíme polynom $P(x)$ lineárním polynomem $x - c$:

$$P(x) = (x - c)Q(x) + A,$$

kde

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0\,.$$

Koeficienty b_i, $i = 0, \ldots, n$ určíme z rekurentních vztahů:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{k-1} &= a_k + cb_k, \quad k = n-1, \ldots, 1 \\ A &= a_0 + cb_0\,. \end{aligned}$$

Pak je zřejmě $P(c) = A$.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
c	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_1	b_0	A

Označíme polynom Q jako Q_1 a hodnotu A jakožto A_0, v dalším kroku dostaneme podíl Q_2 a hodnotu A_1

$$Q_k(x) = (x - c) \cdot Q_{k+1}(x) + A_k.$$

Hornerovo schema pak (symbolicky zkráceno):

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & & & & P & & & \\
\hline
c & & & & Q_1 & & & A_0 \\
c & & & Q_2 & & & A_1 & \\
c & & Q_3 & & & A_2 & & \\
\vdots & & & \iddots & & & & \\
c & A_n & & & & & &
\end{array}$$

Pro polynom P pak dostáváme

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-c)Q_1(x) + A_0 = \\ &= (x-c)((x-c)Q_2(x) + A_1) + A_0 = \\ &= (x-c)^2 Q_2(x) + A_1(x-c) + A_0 = \\ &= (x-c)^2((x-c)Q_3(x) + A_2) + A_1(x-c) + A_0 = \\ &= (x-c)^3 Q_3(x) + A_2(x-c)^2 + A_1(x-c) + A_0 = \cdots = \\ &= A_n(x-c)^n + A_{n-1}(x-c)^{n-1} + \cdots + A_1(x-c) + A_0 \end{aligned}$$

Hodnoty $A_n, \ldots, A_0$ jsou tedy koeficienty polynomu P posunutého do bodu c – Taylorův rozvoj.

$$A_k = \frac{P^{(k)}(c)}{k!}$$

Hranice kořenů

Věta

Nechť

$$
\begin{aligned}
P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0, \\
A &= \max\left(|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\right), \\
B &= \max\left(|a_n|, \ldots, |a_1|\right),
\end{aligned}
$$

kde $a_0 a_n \neq 0$. Pak pro všechny kořeny $\xi_k, k = 1, \ldots, n$, polynomu P platí

$$
\frac{1}{1 + \dfrac{B}{|a_0|}} \leq |\xi_k| \leq 1 + \frac{A}{|a_n|}.
$$