

Numerické metody

6. přednáška, 29. března 2019

Jiří Zelinka

Polynomy

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0.$$

Věta – hranice kořenů

Nechť

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_1 x + a_0,$$

$$A = \max(|a_{n-1}|, \dots, |a_0|),$$

$$B = \max(|a_n|, \dots, |a_1|),$$

kde $a_0 a_n \neq 0$. Pak pro všechny kořeny ξ_k , $k = 0, 1, \dots, n$, polynomu P platí

$$\frac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}} \leq |\xi_k| \leq 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

Polynom s kořeny $\xi_1 = 1, \dots, \xi_5 = 5$

$$\begin{aligned}P(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) \\ &= x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120\end{aligned}$$

$$A = B = 274, \quad \frac{1}{1 + \frac{274}{|120|}} = \frac{60}{197} \leq |\xi_k| \leq 275.$$

Polynom s kořeny $\xi_1 = 1, \dots, \xi_5 = 5$

$$\begin{aligned}P(x) &= (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) \\ &= x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120\end{aligned}$$

$$A = B = 274, \quad \frac{1}{1 + \frac{274}{|120|}} = \frac{60}{197} \leq |\xi_k| \leq 275.$$

Věta

1. $|\xi_k| \leq \max \left\{ 1, \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right| \right\}$
2. $|\xi_k| \leq 2 \max \left\{ \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|, \sqrt{\left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right|}, \sqrt[3]{\left| \frac{a_{n-3}}{a_n} \right|}, \dots, \sqrt[n]{\left| \frac{a_0}{a_n} \right|} \right\}$
3. $|\xi_k| \leq \max \left\{ \left| \frac{a_0}{a_n} \right|, 1 + \left| \frac{a_1}{a_n} \right|, \dots, 1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right\}.$

Předchozí příklad:

$$P(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$$

1. $|\xi_k| \leq \max \{1, 719\} = 719$
2. $|\xi_k| \leq 2 \max \{30, 18.44, 12.16, 8.14, 5.21\} = 60$
3. $|\xi_k| \leq \max \{120, 275, 226, 86, 16\} = 275.$

Věta

1. $|\xi_k| \leq \max \left\{ 1, \sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right| \right\}$
2. $|\xi_k| \leq 2 \max \left\{ \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|, \sqrt{\left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right|}, \sqrt[3]{\left| \frac{a_{n-3}}{a_n} \right|}, \dots, \sqrt[n]{\left| \frac{a_0}{a_n} \right|} \right\}$
3. $|\xi_k| \leq \max \left\{ \left| \frac{a_0}{a_n} \right|, 1 + \left| \frac{a_1}{a_n} \right|, \dots, 1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right\}.$

Předchozí příklad:

$$P(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$$

1. $|\xi_k| \leq \max \{1, 719\} = 719$
2. $|\xi_k| \leq 2 \max \{30, 18.44, 12.16, 8.14, 5.21\} = 60$
3. $|\xi_k| \leq \max \{120, 275, 226, 86, 16\} = 275.$

Poznámka - odstranění násobných kořenů

Jestliže P má kořen ξ násobnosti $k > 1$, pak ξ je kořenem P' násobnosti $k - 1$. Takže dělením polynomu P největším společným dělitelem P a P' dostaneme polynom, který má stejné kořeny jako P , ale všechny jednoduché.

Příklad: $P(x) = (x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

Definice

Nechť c_1, \dots, c_m je posloupnost reálných čísel různých od nuly.

Řekneme, že pro dvojici c_k, c_{k+1} **nastává znaménková změna**, jestliže $c_k c_{k+1} < 0$.

Řekneme, že dvojice c_k, c_{k+1} **zachovává znaménko**, jestliže $c_k c_{k+1} > 0$.

Poznámka - odstranění násobných kořenů

Jestliže P má kořen ξ násobnosti $k > 1$, pak ξ je kořenem P' násobnosti $k - 1$. Takže dělením polynomu P největším společným dělitelem P a P' dostaneme polynom, který má stejné kořeny jako P , ale všechny jednoduché.

Příklad: $P(x) = (x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

Definice

Nechť c_1, \dots, c_m je posloupnost reálných čísel různých od nuly.

Řekneme, že pro dvojici c_k, c_{k+1} **nastává znaménková změna**, jestliže $c_k c_{k+1} < 0$.

Řekneme, že dvojice c_k, c_{k+1} **zachovává znaménko**, jestliže $c_k c_{k+1} > 0$.

Poznámka - odstranění násobných kořenů

Jestliže P má kořen ξ násobnosti $k > 1$, pak ξ je kořenem P' násobnosti $k - 1$. Takže dělením polynomu P největším společným dělitelem P a P' dostaneme polynom, který má stejné kořeny jako P , ale všechny jednoduché.

$$\text{Příklad: } P(x) = (x - 1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

Definice

Nechť c_1, \dots, c_m je posloupnost reálných čísel různých od nuly.

Řekneme, že pro dvojici c_k, c_{k+1} **nastává znaménková změna**, jestliže $c_k c_{k+1} < 0$.

Řekneme, že dvojice c_k, c_{k+1} **zachovává znaménko**, jestliže $c_k c_{k+1} > 0$.

Definice

Posloupnost reálných polynomů

$$P = P_0, P_1, \dots, P_m$$

se nazývá **Sturmovou posloupností** příslušnou polynomu P ,
jestliže

- Všechny reálné kořeny polynomu P_0 jsou jednoduché.
- Je-li ξ reálný kořen polynomu P_0 , pak
 $\text{sign}P_1(\xi) = -\text{sign}P_0'(\xi)$.
- Pro $i = 1, 2, \dots, m - 1$,

$$P_{i+1}(\alpha)P_{i-1}(\alpha) < 0,$$

jestliže α je reálný kořen polynomu P_i .

- Poslední polynom P_m nemá reálné kořeny.

Definice

Posloupnost reálných polynomů

$$P = P_0, P_1, \dots, P_m$$

se nazývá **Sturmovou posloupností** příslušnou polynomu P ,
jestliže

- Všechny reálné kořeny polynomu P_0 jsou jednoduché.
- Je-li ξ reálný kořen polynomu P_0 , pak
 $\text{sign}P_1(\xi) = -\text{sign}P_0'(\xi)$.
- Pro $i = 1, 2, \dots, m - 1$,

$$P_{i+1}(\alpha)P_{i-1}(\alpha) < 0,$$

jestliže α je reálný kořen polynomu P_i .

- Poslední polynom P_m nemá reálné kořeny.

Definice

Posloupnost reálných polynomů

$$P = P_0, P_1, \dots, P_m$$

se nazývá **Sturmovou posloupností** příslušnou polynomu P ,
jestliže

- Všechny reálné kořeny polynomu P_0 jsou jednoduché.
- Je-li ξ reálný kořen polynomu P_0 , pak
 $\text{sign}P_1(\xi) = -\text{sign}P_0'(\xi)$.
- Pro $i = 1, 2, \dots, m - 1$,

$$P_{i+1}(\alpha)P_{i-1}(\alpha) < 0,$$

jestliže α je reálný kořen polynomu P_i .

- Poslední polynom P_m nemá reálné kořeny.

Definice

Posloupnost reálných polynomů

$$P = P_0, P_1, \dots, P_m$$

se nazývá **Sturmovou posloupností** příslušnou polynomu P ,
jestliže

- Všechny reálné kořeny polynomu P_0 jsou jednoduché.
- Je-li ξ reálný kořen polynomu P_0 , pak
 $\text{sign}P_1(\xi) = -\text{sign}P_0'(\xi)$.
- Pro $i = 1, 2, \dots, m - 1$,

$$P_{i+1}(\alpha)P_{i-1}(\alpha) < 0,$$

jestliže α je reálný kořen polynomu P_i .

- Poslední polynom P_m nemá reálné kořeny.

Definice

Posloupnost reálných polynomů

$$P = P_0, P_1, \dots, P_m$$

se nazývá **Sturmovou posloupností** příslušnou polynomu P ,
jestliže

- Všechny reálné kořeny polynomu P_0 jsou jednoduché.
- Je-li ξ reálný kořen polynomu P_0 , pak
 $\text{sign}P_1(\xi) = -\text{sign}P_0'(\xi)$.
- Pro $i = 1, 2, \dots, m - 1$,

$$P_{i+1}(\alpha)P_{i-1}(\alpha) < 0,$$

jestliže α je reálný kořen polynomu P_i .

- Poslední polynom P_m nemá reálné kořeny.

Konstrukce Sturmovy posloupnosti

$$P_0(x) = P(x), \quad P_1(x) = -P_0'(x)$$

a sestrojme další polynomy P_{i+1} rekurentně dělením polynomu P_{i-1} polynomem P_i :

$$P_{i-1}(x) = Q_i(x)P_i(x) - c_i P_{i+1}(x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

kde

$$\text{st } P_i > \text{st } P_{i+1}$$

a konstanty c_i jsou kladné, ale jinak libovolné. Lze říci, že P_{i+1} je záporně vzatý zbytek při dělení $P_{i-1} : P_i$.

Protože stupně polynomů klesají, musí algoritmus končit po $m \leq n$ krocích.

Konstrukce Sturmovy posloupnosti

$$P_0(x) = P(x), \quad P_1(x) = -P'_0(x)$$

a sestrojme další polynomy P_{i+1} rekurentně dělením polynomu P_{i-1} polynomem P_i :

$$P_{i-1}(x) = Q_i(x)P_i(x) - c_iP_{i+1}(x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

kde

$$\text{st } P_i > \text{st } P_{i+1}$$

a konstanty c_i jsou kladné, ale jinak libovolné. Lze říci, že P_{i+1} je záporně vzatý zbytek při dělení $P_{i-1} : P_i$.

Protože stupně polynomů klesají, musí algoritmus končit po $m \leq n$ krocích.

Sturmova věta

Počet reálných kořenů polynomu P v intervalu $a \leq x < b$ je roven $W(b) - W(a)$, kde $W(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti $P_0(x), \dots, P_m(x)$ v bodě x (z níž jsou vyškrtnuty nuly).

Důkaz

Kořen polynomu P_i nemůže být kořenem P_{i+1} .

Vliv malé změny hodnoty a na počet znaménkových změn $W(a)$ v posloupnosti pro a , které je kořenem některého z polynomů P_i , $i = 0, 1, \dots, m - 1$:

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_0	-	0	+
P_1	-	-	-
$W(x)$	0	0	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_0	+	0	-
P_1	+	+	+
$W(x)$	0	0	1

Sturmova věta

Počet reálných kořenů polynomu P v intervalu $a \leq x < b$ je roven $W(b) - W(a)$, kde $W(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti $P_0(x), \dots, P_m(x)$ v bodě x (z níž jsou vyškrtnuty nuly).

Důkaz

Kořen polynomu P_i nemůže být kořenem P_{i+1} .

Vliv malé změny hodnoty a na počet znaménkových změn $W(a)$ v posloupnosti pro a , které je kořenem některého z polynomů P_i , $i = 0, 1, \dots, m - 1$:

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_0	-	0	+
P_1	-	-	-
$W(x)$	0	0	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_0	+	0	-
P_1	+	+	+
$W(x)$	0	0	1

Sturmova věta

Počet reálných kořenů polynomu P v intervalu $a \leq x < b$ je roven $W(b) - W(a)$, kde $W(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti $P_0(x), \dots, P_m(x)$ v bodě x (z níž jsou vyškrtnuty nuly).

Důkaz

Kořen polynomu P_i nemůže být kořenem P_{i+1} .

Vliv malé změny hodnoty a na počet znaménkových změn $W(a)$ v posloupnosti pro a , které je kořenem některého z polynomů P_i , $i = 0, 1, \dots, m - 1$:

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_0	-	0	+
P_1	-	-	-
$W(x)$	0	0	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_0	+	0	-
P_1	+	+	+
$W(x)$	0	0	1

Sturmova věta

Počet reálných kořenů polynomu P v intervalu $a \leq x < b$ je roven $W(b) - W(a)$, kde $W(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti $P_0(x), \dots, P_m(x)$ v bodě x (z níž jsou vyškrtnuty nuly).

Důkaz

Kořen polynomu P_i nemůže být kořenem P_{i+1} .

Vliv malé změny hodnoty a na počet znaménkových změn $W(a)$ v posloupnosti pro a , které je kořenem některého z polynomů P_i , $i = 0, 1, \dots, m - 1$:

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_0	-	0	+
P_1	-	-	-
$W(x)$	0	0	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_0	+	0	-
P_1	+	+	+
$W(x)$	0	0	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_{i-1}	-	-	-
P_i	-	0	+
P_{i+1}	+	+	+
$W(x)$	1	1	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_{i-1}	+	+	+
P_i	-	0	+
P_{i+1}	-	-	-
$W(x)$	1	1	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_{i-1}	-	-	-
P_i	+	0	-
P_{i+1}	+	+	+
$W(x)$	1	1	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_{i-1}	+	+	+
P_i	+	0	-
P_{i+1}	-	-	-
$W(x)$	1	1	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_{i-1}	-	-	-
P_i	-	0	+
P_{i+1}	+	+	+
$W(x)$	1	1	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_{i-1}	+	+	+
P_i	-	0	+
P_{i+1}	-	-	-
$W(x)$	1	1	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_{i-1}	-	-	-
P_i	+	0	-
P_{i+1}	+	+	+
$W(x)$	1	1	1

	$\alpha - h$	α	$\alpha + h$
P_{i-1}	+	+	+
P_i	+	0	-
P_{i+1}	-	-	-
$W(x)$	1	1	1

Příklad

Určete počet reálných kořenů polynomu

$$P(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Řešení. Sestrojíme Sturmovu posloupnost příslušnou polynomu $P(x)$. Je

$$P_0(x) = x^3 - 3x + 1, \quad P_0'(x) = 3x^2 - 3,$$

$$P_1(x) = -x^2 + 1.$$

Polynom P_2 je záporně vzatý zbytek při dělení polynomu P_0 polynomem P_1 , tj. $P_2(x) = 2x - 1$ a dále $P_3(x) = -3/4$.

Příklad

Určete počet reálných kořenů polynomu

$$P(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Řešení. Sestrojíme Sturmovu posloupnost příslušnou polynomu $P(x)$. Je

$$P_0(x) = x^3 - 3x + 1, \quad P'_0(x) = 3x^2 - 3,$$

$$P_1(x) = -x^2 + 1.$$

Polynom P_2 je záporně vzatý zbytek při dělení polynomu P_0 polynomem P_1 , tj. $P_2(x) = 2x - 1$ a dále $P_3(x) = -3/4$.

$$P_0(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$P_1(x) = -x^2 + 1$$

$$P_2(x) = 2x - 1$$

$$P_3(x) = -3/4$$

Sestavíme tabulku pro určení počtu reálných kořenů.

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$W(x)$
$-\infty$	-	-	-	-	0
0	+	+	-	-	1
$+\infty$	+	-	+	-	3
-2	-	-	-	-	0
-1	+	0	-	-	1
1	-	0	+	-	2
2	+	-	+	-	3

Věta (Descartes)

Počet kladných kořenů polynomu P (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů a_0, \dots, a_n nebo o sudé číslo menší.

Jsou-li všechny koeficienty a_0, \dots, a_n různé od nuly, pak počet záporných kořenů je roven počtu zachování znamének v této posloupnosti nebo o sudé číslo menší.

Příklad

$$P(x) = x^6 - 2x^5 + 8x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 10$$

Posloupnost koeficientů: 1, -2, 8, 3, -1, 1, -10

Počet kladných kořenů: 5 nebo 3 nebo 1

Počet záporných kořenů: 1

Věta (Descartes)

Počet kladných kořenů polynomu P (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů a_0, \dots, a_n nebo o sudé číslo menší.

Jsou-li všechny koeficienty a_0, \dots, a_n různé od nuly, pak počet záporných kořenů je roven počtu zachování znamének v této posloupnosti nebo o sudé číslo menší.

Příklad

$$P(x) = x^6 - 2x^5 + 8x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 10$$

Posloupnost koeficientů: 1, -2, 8, 3, -1, 1, -10

Počet kladných kořenů: 5 nebo 3 nebo 1

Počet záporných kořenů: 1