Numerické metody
7. přednáška, 5. dubna 2019

Jiří Zelinka

Opakování

Polynomy

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0.$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ kořeny (reálné i komplexní) polynomu P.

- dělení polynomů se zbytkem
- Hornerovo schema
- zobecněné Hornerovo schema
- hranice kořenů
- počet reálných kořenů polynomu na intervalu – Sturmova věta

Hranice kořenů

Věta

Nechť

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0, \\ A &= \max\left(|a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\right), \\ B &= \max\left(|a_n|, \ldots, |a_1|\right), \end{aligned}$$

kde $a_0 a_n \neq 0$. Pak pro všechny kořeny $\xi_k, k = 0, 1, \ldots, n,$ polynomu P platí

$$\frac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}} \leq |\xi_k| \leq 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

Další kriteria

$$
\begin{aligned}
1.\ |\xi_k| &\le \max\left\{1, \sum_{j=0}^{n-1}\left|\frac{a_j}{a_n}\right|\right\}\\
2.\ |\xi_k| &\le 2\max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|, \sqrt{\left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|}, \sqrt[3]{\left|\frac{a_{n-3}}{a_n}\right|}, \dots, \sqrt[n]{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|}\right\}\\
3.\ |\xi_k| &\le \max\left\{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|, 1+\left|\frac{a_1}{a_n}\right|, \dots, 1+\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\right\}.
\end{aligned}
$$

Sturmova posloupnost

$$P_0(x) = P(x), \qquad P_1(x) = -P_0'(x)$$

a sestrojme další polynomy P_{i+1} rekurentně dělením polynomu P_{i-1} polynomem P_i:

$$P_{i-1}(x) = Q_i(x)P_i(x) - c_i P_{i+1}(x), \qquad i = 1, 2, \dots,$$

kde

$$\mathrm{st}\, P_i > \mathrm{st}\, P_{i+1}$$

a konstanty c_i jsou kladné, ale jinak libovolné. Lze říci, že P_{i+1} je záporně vzatý zbytek při dělení $P_{i-1} : P_i$.
Protože stupně polynomů klesají, musí algoritmus končit po $m \le n$ krocích.

Sturmova věta

Počet reálných kořenů polynomu P v intervalu $a \leq x < b$ je roven $W(b) - W(a)$, kde $W(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově posloupnosti $P_0(x), \ldots, P_m(x)$ v bodě x (z níž jsou vyškrtnuty nuly).

Konec opakování

Newtonova metoda a její modifikace

Problém – volba počáteční aproximace

Věta

Nechť $P \in \Pi_n$ je polynom stupně $n \geq 2$. Nechť všechny kořeny ξ_i,

$$\xi_1 \geq \xi_2 \geq \ldots \geq \xi_n,$$

jsou reálné. Pak posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ určená Newtonovou metodou je konvergentní klesající posloupnost pro každou počáteční aproximaci $x_0 > \xi_1$ a platí $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi_1$.

Příklad

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) \\ &= x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720 \end{aligned}$$

$$|\xi_i| < 1765$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 1765 \\ x_1 &\doteq 1\,226.8 \\ x_2 &\doteq 1\,022.9 \\ x_3 &\doteq 859.99 \\ x_4 &\doteq 711.41 \\ &\vdots \\ x_{10} &\doteq 287.99 \\ &\vdots \\ x_{20} &\doteq 49.48 \end{aligned}$$

Zdvojená Newtonova metoda

Pro velké x_k:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k)^n + \dots}{n(x_k)^{n-1} + \dots} \approx x_k \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

Věta

Nechť $P \in \Pi_n$, $n \geq 2$, a nechť všechny kořeny $\xi_i, i = 1, \dots, n$ polynomu P jsou reálné a $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n$. Nechť α_1 je největší kořen P':

$$\xi_1 \geq \alpha_1 \geq \xi_2.$$

Pro $n = 2$ předpokládejme $\xi_1 > \xi_2$. Pak pro každé $z > \xi_1$ jsou čísla

$$z' = z - \frac{P(z)}{P'(z)}, \qquad y = z - 2\frac{P(z)}{P'(z)}, \qquad y' = y - \frac{P(y)}{P'(y)}$$

definována a platí

$$\alpha_1 < y, \qquad \xi_1 \leq y' \leq z'.$$

Algoritmus

Začneme s počáteční aproximací $x_0 > \xi_1$ a zdvojenou metodou:

$$x_{k+1} = x_k - 2\frac{P(x_k)}{P'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, \dots$$

Mohou nastat dva případy:

1. $P(x_0)P(x_k) > 0$ pro všechna k. Pak

$$x_0 > x_1 > \dots > x_k > \dots \geq \xi_1, \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = \xi_1$$

2. Existuje x_k tak, že $P(x_k)P(x_0) < 0$, $P(x_{k-1})P(x_0) > 0$.
   V tomto případě tedy došlo k „přestřelení" bodu ξ_1 a platí

$$x_0 > x_1 > \dots > x_{k-1} > \xi_1 > x_k > \alpha_1 > \xi_2.$$

   Položme $y_0 = x_k$ a pokračujme dále klasickou Newtonovou metodou s touto počáteční aproximací:

$$y_{k+1} = y_k - \frac{P(y_k)}{P'(y_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Snižování stupně

$P_1(x) = \frac{P(x)}{x-\tilde{\xi}_1}$ – numerické nepřesnosti v koeficientech.

Příklad

P – polynom s kořeny $\xi_1 = 10, \ldots, \xi_{10} = 1$
Aproximace kořenů:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\xi}_1 &\doteq 10.000000040624446 \\
\tilde{\xi}_2 &\doteq 8.999999654991576 \\
\tilde{\xi}_3 &\doteq 8.000001300611824 \\
&\vdots \\
\tilde{\xi}_7 &\doteq 4.000018865503898 \\
&\vdots \\
\tilde{\xi}_{10} &\doteq 0.99999962963847448
\end{aligned}
$$

Maehlyova metoda

$$P_1(x) = \frac{P(x)}{x - \tilde{\xi}_1}, \quad P_1'(x) = \frac{P'(x)}{x - \tilde{\xi}_1} - \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1)^2},$$

Dosazením tohoto vyjádření do vzorce pro Newtonovu metodu pro polynom P_1 dostaneme:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{P_1(x_k)}{P_1'(x_k)} = x_k - \frac{P(x_k)}{P'(x_k) - \dfrac{P(x_k)}{x_k - \tilde{\xi}_1}}$$

Vhodná počáteční iterace pro Maehlyovu metodu:
iterace x_k, u níž došlo k „přestřelení“ kořene pro zdvojenou Newtonovou metodou.

Obecně, jestliže jsme již nalezli aproximace kořenů $\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_j$, postupujeme obdobně a sestrojíme polynom

$$P_j(x) = \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1) \ldots (x - \tilde{\xi}_j)},$$

$$P_j'(x) = \frac{P'(x)}{(x - \tilde{\xi}_1) \ldots (x - \tilde{\xi}_j)} - \frac{P(x)}{(x - \tilde{\xi}_1) \ldots (x - \tilde{\xi}_j)} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{x - \tilde{\xi}_i}$$

Newtonova metoda pro nalezení kořene ξ_{j+1} je tvaru

$$x_{k+1} = \Phi_j(x_k), \qquad \Phi_j(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x) - \sum_{i=1}^{j} \frac{P(x)}{x - \tilde{\xi}_i}}.$$

Vektory – prvky $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{C}^n$, sloupcové.

Normy vektorů

Vektorová norma na $\mathbb{C}^n$ je funkce $\|\cdot\|$ (z $\mathbb{C}^n$ do $\mathbb{R}$) s následujícími vlastnostmi:

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}, \quad \boldsymbol{o} = (0, \ldots, 0)^T$
3. $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{x}\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n.$

Příklady vektorových norem:

1. $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (eukleidovská norma)
2. $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (oktaedrická norma)
3. $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (krychlová norma)
4. $\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ (p norma)

Každá vektorová norma indukuje metriku danou vztahem $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

Konvergence v normě: $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \to 0$.

Matice

Nechť A je čtvercová matice řádu n s reálnými resp. komplexními prvky:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{M}_n$: třída všech matic tohoto typu.
Matici A lze považovat za vektor dimenze n^2. Mohli bychom tedy definovat normu matice jako normu vektoru. Ale potřebujeme i další vlastnosti:

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ – vlastní vektor matice AA, λ – příslušné vlastní číslo

Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu $\psi_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E - A)$, E – jednotková matice

Spektrální poloměr matice: $\rho(A) = \max\{|\lambda_k|; \lambda_k$ je vlastní číslo matice $A\}$

Stopa matice: $tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$

Normy matic

Maticová norma na množině $\mathcal{M}_n$ je reálná funkce $\| \cdot \|$ s těmito vlastnostmi:

1. $\|A\| \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$
2. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A$ je nulová matice
3. $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad A, B \in \mathcal{M}_n$
5. $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|, \quad A, B \in \mathcal{M}_n$

Vlastnost 5) se nazývá **multiplikativnost**.

Souhlasnost maticové a vektorové normy

Řekneme, že maticová norma $\|\cdot\|$ je *souhlasná* s danou vektorovou normou $\|\cdot\|_\varphi$, jestliže

$$\|A\boldsymbol{x}\|_\varphi \le \|A\|\,\|\boldsymbol{x}\|_\varphi, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n.$$

Přidružená norma

Nechť $\|\cdot\|_\varphi$ je vektorová norma na $\mathbb{C}^n$. Pak číslo

$$\|A\|_\varphi = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_\varphi = 1} \|A\boldsymbol{x}\|_\varphi$$

je maticová norma souhlasná s danou vektorovou normou $\|\cdot\|_\varphi$.

Pro jednotkovou matici E platí

$$\|E\|_\varphi = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_\varphi = 1} \|E\boldsymbol{x}\|_\varphi = 1$$

a pro souhlasnou maticovou normu platí $\|E\| \ge 1$.

Věta

Přidružená maticová norma je nejvýše rovna libovolné maticové normě souhlasné s danou vektorovou normou.

Věta

Nechť maticová norma $\|\ \cdot\ \|$ je souhlasná s danou vektorovou normou $\|\ \cdot\ \|_\varphi$. Pak pro všechna vlastní čísla λ matice A platí:

$$|\lambda| \leq \|A\|\,.$$

Přidružené maticové normy

Nechť $A \in \mathcal{M}_n$. Přidružené maticové normy k vektorovým normám $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_\infty$, $\| \cdot \|_2$ jsou dány vztahy

1. $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$,
2. $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$,
3. $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$, $\rho(A^* A)$ je spektrální poloměr $A^* A$, kde $A^* = \overline{A}^T$, pro reálné matice je $A^* = A^T$.

$\|A\|_2$ – spektrální norma matice

Frobeniova norma

$$\|A\|_F = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

- $\|A\|_F^2 = tr(A^* A)$
- $\|E\|_F = \sqrt{n}$.
- $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$
- $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$
- $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$.

Věta

Nechť $\|B\| < 1$, $\| \cdot \|$ je souhlasná s danou vektorovou normou. Pak matice $E - B$ je regulární a platí

$$\left\|(E - B)^{-1}\right\| \le \frac{\|E\|}{1 - \|B\|}.$$