Numerické metody
8. přednáška, 12. dubna 2019

Jiří Zelinka

Opakování

Normy matic

Souhlasnost maticové a vektorové normy

Řekneme, že maticová norma $\|\cdot\|$ je *souhlasná* s danou vektorovou normou $\|\cdot\|_\varphi$, jestliže

$$\|A\boldsymbol{x}\|_\varphi \leq \|A\|\,\|\boldsymbol{x}\|_\varphi, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n.$$

Přidružená norma

Nechť $\|\cdot\|_\varphi$ je vektorová norma na $\mathbb{C}^n$. Pak číslo

$$\|A\|_\varphi = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_\varphi = 1} \|A\boldsymbol{x}\|_\varphi$$

je maticová norma souhlasná s danou vektorovou normou $\|\cdot\|_\varphi$.

Věta

Přidružená maticová norma je nejvýše rovna libovolné maticové normě souhlasné s danou vektorovou normou.

Věta

Nechť maticová norma $\|\cdot\|$ je souhlasná s danou vektorovou normou $\|\cdot\|_\varphi$. Pak pro všechna vlastní čísla λ matice A platí:

$$|\lambda| \leq \|A\| .$$

Věta

Nechť $\|B\| < 1$, $\| \cdot \|$ je souhlasná s danou vektorovou normou. Pak matice $E - B$ je regulární a platí

$$\left\|(E - B)^{-1}\right\| \leq \frac{\|E\|}{1 - \|B\|}.$$

Konec opakování

Iterační metody řešení systémů lineárních rovnic

Systém
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
převedeme na
$$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$$
$\boldsymbol{x}^*$ – řešení
$\boldsymbol{x}^* = (E - T)^{-1}\boldsymbol{g}$ za předpokladu, že $E - T$ je regulární.

$\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ – libovolná počáteční aproximace. Posloupnost $\left\{\boldsymbol{x}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ určená rekurentně vztahem
$$\boldsymbol{x}^{k+1} = T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{g}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$
se nazývá **iterační posloupnost** a matice T se nazývá **iterační matice**

Problémy:

1. Jak zvolit iterační matici T, tj. jakým způsobem převést systém $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ na systém $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$?
2. Za jakých předpokladů posloupnost $\left\{\boldsymbol{x}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci k přesnému řešení $\boldsymbol{x}^*$?

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^1 &= T\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{g}, \\
\boldsymbol{x}^2 &= T\boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{g} = T(T\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{g}) + \boldsymbol{g} = T^2\boldsymbol{x}^0 + (T + E)\boldsymbol{g}, \\
\boldsymbol{x}^3 &= T\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{g} = T^3\boldsymbol{x}^0 + (T^2 + T + E)\boldsymbol{g}, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{x}^{k+1} &= T^{k+1}\boldsymbol{x}^0 + (T^k + T^{k-1} + \ldots + E)\boldsymbol{g}.
\end{aligned}
$$

Definice

Řekneme, že matice H je **konvergentní**, jestliže

$$\lim_{k\to\infty} H^k = O,$$

kde O je nulová matice, konvergence je bodová.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. H je konvergentní matice.
2. $\lim_{k\to\infty} \|H^k\| = 0$ pro nějakou přidruženou maticovou normu.
3. $\rho(H) < 1$ ($\rho(H)$ je spektrální poloměr H).
4. $\lim_{k\to\infty} H^k \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ pro libovolný vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Lemma

Nechť $\rho(T) < 1$. Pak $E - T$ je regulární a platí

$$(E - T)^{-1} = E + T + T^2 + \dots$$

Hlavní věta o konvergenci iteračního procesu

Posloupnost $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ určená iteračním procesem $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\rho(T) < 1$, přičemž

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}^*, \; \boldsymbol{x}^* = T\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{g}$$

Důsledek

Nechť pro nějakou přidruženou maticovou normu platí $\|T\| < 1$. Pak posloupnost $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná iteračním procesem $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}$ konverguje k řešení $\boldsymbol{x}^* = (E - T)^{-1}\boldsymbol{g}$ pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Dále platí

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^k\| &\leq \|T\|^k \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0\|, \\ \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^k\| &\leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^0\|. \end{aligned}$$

Kriteria pro zastavení výpočtu

1. $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\| / \|\boldsymbol{x}^k\| < \varepsilon$
2. $\|\boldsymbol{r}^{k+1}\| \leq \varepsilon(\|A\| \, \|\boldsymbol{x}^{k+1}\| + \|\boldsymbol{b}\|)$, kde $\boldsymbol{r}^{k+1} = A\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{b}$

maticová norma je přidružená dané vektorové normě, $\varepsilon > 0$ je požadovaná přesnost.

Jacobiova iterační metoda

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matici A zapišme ve tvaru

$$A = D + L + U,$$

kde

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
L &= \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \\
U &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

D je diagonální matice, L je dolní trojúhelníková matice s nulami na diagonále a U je horní trojúhelníková matice s nulami na diagonále.

$$Ax = (D + L + U)x = b$$

$$Dx = -(L + U)x + b.$$

Pokud $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, je matice D regulární a z předchozí rovnice lze vypočítat

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b.$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix},$$

Maticový tvar Jacobiovy iterační metody

Jacobiova iterační matice: $T_J = -D^{-1}(L+U)$

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = T_J \boldsymbol{x}^k + D^{-1}\boldsymbol{b},$$

$T_J = (t_{ij})$, $t_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ pro $i \neq j$, $t_{ii} = 0$ pro $i = 1, \dots, n$.

$$T_J = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Realizace výpočtu:

Z první rovnice vypočteme x_1:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n)$$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - \ldots - a_{1n}x_n^k),$$

z druhé rovnice vypočteme x_2:

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \ldots - a_{1n}x_n^k),$$

obecně z i-té rovnice vypočteme x_i:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}},$$

až z n-té rovnice vypočteme x_n, a na pravé straně takto získaného systému jsou prvky matice T_J.

Věta o konvergenci Jacobiovy iterační metody:
Posloupnost $\left\{\boldsymbol{x}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná metodou $\boldsymbol{x}^{k+1} = T_J\boldsymbol{x}^k + D^{-1}\boldsymbol{b}$ konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\varrho(T_J) < 1$.

Odhad chyby:

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^k\|_\infty \leq \frac{\|T_J\|_\infty^k}{1 - \|T\|_\infty}\|\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^0\|_\infty.$$

Příklad

Geometrický význam

Silné řádkové sumační kriterium:

Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Pak Jacobiova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Silné sloupcové sumační kriterium:

Nechť matice A je ryze sloupcově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |a_{ik}|, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Pak Jacobiova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Gaussova-Seidelova iterační metoda

Z první rovnice vypočteme x_1:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n = b_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2-\ldots-a_{1n}x_n)$$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - \ldots - a_{1n}x_n^k),$$

z druhé rovnice vypočteme x_2, pro x_1 použijme novou iteraci:

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \ldots - a_{1n}x_n^k),$$

ze třetí rovnice vypočteme x_3, pro x_1 a x_2 použijme novou iteraci:

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - a_{34}x_4^k \ldots - a_{1n}x_n^k),$$

Obecně

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Maticový zápis:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (D + L + U)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ (D + L)\boldsymbol{x} &= -U\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

$a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, $\quad \Rightarrow$ matice $D + L$ je regulární a

$$\boldsymbol{x} = -(D + L)^{-1} U\boldsymbol{x} + (D + L)^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Položme $T_G = -(D + L)^{-1} U$, Gaussova-Seidelova iterační metoda je tvaru

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = T_G \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{g}, \qquad \boldsymbol{g} = (D + L)^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Věta

Posloupnost $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ generovaná Gaussovou-Seidelovou iterační metodou $\boldsymbol{x}^{k+1} = -(D+L)^{-1}U\boldsymbol{x}^k + (D+L)^{-1}\boldsymbol{b}$. konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\varrho(T_G) < 1$.

Silné řádkové sumační kriterium:

Nechť matice A je ryze řádkově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Pak Gaussova-Seidelova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Silné sloupcové sumační kriterium:

Nechť matice A je ryze sloupcově diagonálně dominantní, tj.

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |a_{ik}|, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Pak Gaussova-Seidelova iterační metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

Příklad

Geometrický význam

Věta (Stein-Rosenberg)

Nechť pro prvky matice A platí $a_{ij} \leq 0$ pro všechna $i \neq j$ a $a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Pak platí právě jedno z následujících tvrzení:

- $0 < \varrho(T_G) < \varrho(T_J) < 1$
- $1 < \varrho(T_J) < \varrho(T_G)$
- $\varrho(T_J) = \varrho(T_G) = 0$
- $\varrho(T_J) = \varrho(T_G) = 1.$

To znamená, že konvergují-li obě metody, Gaussova-Seidelova metoda konverguje rychleji.

Věta

Nechť A je pozitivně definitní matice. Pak Gaussova-Seidelova metoda konverguje pro každou počáteční aproximaci.