

# Numerické metody

## 12. přednáška, 10. května 2019

Jiří Zelinka

## Choleského rozklad

### Věta

Nechť matice  $A$  je symetrická a její všechny hlavní minory matice  $A \in \mathcal{M}_n$  jsou různé od nuly, tj.

$$a_{11} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \dots, \quad \det A \neq 0.$$

Pak existuje taková horní trojúhelníková matice  $T \in \mathcal{M}_n$ , že  $A = T^T T$ .

Prvky matice  $T = (t_{ij})$ :

- $t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}, \quad j = 2, \dots, n,$

- $t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} t_{li}^2}, \quad i = 2, \dots, n$

- $t_{ij} = \frac{1}{t_{ii}}(a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} t_{li}t_{lj}), \quad j > i \quad t_{ij} = 0, \quad j < i$

## Příklad

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\-x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= -8\end{aligned}$$

Konec opakování

Rozklad třídiagonální matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = l_{11}$$

$$a_{i,i-1} = l_{i,i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$a_{ii} = l_{i,i-1}u_{i-1,i} + l_{ii}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

$$a_{i,i+1} = l_{ij}u_{i,i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

## Věta

Nechť  $A \in \mathcal{M}_n$  je třídiagonální matice s vlastnostmi:

$$\left. \begin{aligned} a_{i,i-1}a_{i,i+1} &\neq 0, & i &= 2, 3, \dots, n-1, \\ |a_{11}| &> |a_{12}|, \\ |a_{ii}| &\geq |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}|, & i &= 2, \dots, n-1, \\ |a_{nn}| &> |a_{n,n-1}|. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} A - \text{řádkově diagon.} \\ \text{dominantní} \end{array}$$

Pak matice  $A$  je regulární a hodnoty  $l_{ii}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , vypočtené ze uvedených vztahů jsou různé od nuly.

## Důsledek

Jsou-li splněny předpoklady věty, lze matici  $A$  rozložit na součin dolní a horní trojúhelníkové matice v uvedeném tvaru.

## Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_3 + 2x_4 &= 1.5 \end{aligned}$$

# Výpočet inverzní matice a determinantu

Výpočet inverzní matice k matici  $A$  je ekvivalentní řešení systému

$$AX = E,$$

Pak řešit systém  $AX = E$  znamená řešit  $n$  systémů tvaru

$$A \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

K řešení lze užít některou z přímých metod (např. maticové rozklady).

Výpočet inverzní matice je třikrát „dražší“ než řešení systému  $Ax = b$ .

## Výpočet determinantu:

GEM – pamatujeme si počet výměn řádků.



## Výpočet inverzní matice při malé změně $A$ : Shermanův-Morrisonův vzorec.

Nechť  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  jsou vektory,  $A \in \mathcal{M}_n$  je regulární matice. Pak

$$(A - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = A^{-1} + \alpha(A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}),$$

kde

$$\alpha = \frac{1}{(1 - \mathbf{v}^T A^{-1} \mathbf{u})},$$

za předpokladu  $\mathbf{v}^T A^{-1} \mathbf{u} \neq 1$ .

## Woodburyho vzorec.

Nechť  $A, U, V \in \mathcal{M}_n$ ,

$$(A - UV^T)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(E - V^T A^{-1}U)^{-1}V^T A^{-1},$$

za předpokladu, že  $E - V^T A^{-1}U$  je regulární.

## Definice

Algoritmus pro řešení  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  se nazývá *stabilní*, jestliže vypočtené řešení  $\hat{\mathbf{x}}$  je takové, že

$$(A + \mathcal{E})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b},$$

kde  $\mathcal{E}$  a  $\delta\mathbf{b}$  jsou malé;  $\mathcal{E}$  se nazývá *chybová matice*.

## Definice

Pro libovolnou přidruženou maticovou normu definujeme *číslo podmíněnosti* matice  $A$  vztahem

$$k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

Řekneme, že *matice  $A$  je dobře podmíněna*, jestliže  $k(A) \approx 1$  a *špatně podmíněna*, jestliže  $k(A)$  je podstatně větší než 1.

## Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 10 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_1 = 111$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 101 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A^{-1}\|_1 = 111$$

Tedy  $k(A) = 111^2 = 12321$ ,  $A$  je špatně podmíněna.

## Příklad – Hilbertova matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

Pro  $n = 10$  vzhledem k normě  $\|\cdot\|_1$  je  $k(A) = 3,5353 \cdot 10^{13}$ .

## Věta

Jestliže řešíme systém  $Ax = b$  v pohyblivé řádové čárce se zaokrouhlováním na  $t$  desetinných míst a  $k(A) \approx 10^\alpha$ , pak vypočtené řešení  $\tilde{x}$  je správné na  $(t - \alpha - 1)$  desetinných míst.

**$A$  – pozitivně definitní matice**

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^T A)} = \varrho(A)$$

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$$

a

$$\|A^{-1}\|_2 = \left( \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \right)^{-1}.$$

$$k(A) = \frac{\max \lambda_i}{\min \lambda_i}.$$