Newtonova metóda

Príklad 1.1. Newtonovou metódou nájdite kladný koreň rovnice $u(x) = 0$, kde

$$u(x) = \frac{x^2 - 3}{8x}, \quad x \in [1, 2].$$

Overte Fourierove podmienky a spočítajte prvé 3 iterácie.

Riešenie. Fourierove podmienky konvergencie sú nasledovné:

- $u \in C^2[1, 2]$, teda $u(x)$, $u'(x)$ a $u''(x)$ sú spojité na intervale $[1, 2]$;
- $u'(x)$ a $u''(x)$ nemenia znamienko na intervale $[1, 2]$ ($u'(x) \neq 0, \ \forall x \in [1, 2]$);
- $x^0 \in \{1, 2\} : u(x^0)u''(x^0) > 0$ (znamienko pôvodnej funkcie a druhej derivácie má byť v bode x^0 rovnaké).

Splnením Fourierových podmienok je zaručená konvergencia postupnosti $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ získanej Newtonovou metódou k riešeniu rovnice, bodu ξ.

Najskôr môžeme overiť či sa kladný koreň na danom intervale vôbec nachádza. Počítajme

$$u(1)u(2) = -\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{16} < 0.$$

Funkcia $u \in C[1, 2]$, a preto sa koreň na intervale $[1, 2]$ skutočne nachádza.

Môžeme sa teda pozrieť na Fourierove podmienky.

- Ako sme uviedli, funkcia $u(x)$ je spojitá na intervale $[1, 2]$. Prvá a druhá derivácia sú rovné

$$u'(x) = \frac{x^2 + 3}{8x^2} > 0, \quad \forall x \in [1, 2];$$
$$u''(x) = -\frac{3}{4x^3} < 0, \quad \forall x \in [1, 2].$$

  Prvá aj druhá derivácia sú spojité funkcie a nemenia na danom intervale znamienko.

- Voľba počiatočnej aproximácie x^0:

  Keďže $u''(x) < 0$, bod x^0 je ten krajný bod, v ktorom je záporná funkčná hodnota. Preto $x^0 = 1$. Potom platí $u(x^0) \cdot u''(x^0) > 0$.

Máme overené Fourierove podmienky a môžeme teda vypočítať prvé tri iterácie pomocou Newtonovej metódy

$$x^{k+1} = x^k - \frac{u(x^k)}{u'(x^k)}.$$

$$x^0 = 1;$$
$$x^1 = 1 - \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 1,5;$$
$$x^2 \approx 1,71428;$$
$$x^3 \approx 1,73196.$$

Týmto máme zadanie splnené. Samozrejme, pri výpočte pomocou MATLABu by sme využili niektoré z kritérií na zastavenie výpočtu a získali presnejšiu aproximáciu. Skutočný koreň funkcie $u(x)$ je číslo $\sqrt{3}$.

Newtonova metóda konverguje v danom prípade aj pre počiatočnú aproximáciu $x^0 = 2$. To však nevyvracia našu teóriu, pretože Fourierove podmienky sú postačujúce pre konvergenciu. Pri ich nesplnení metóda môže a nemusí konvergovať.