Tvar iteračnej funkcie

Príklad 1.1. Nájdite vhodný tvar iteračnej funkcie $g(x)$ pre riešenie rovnice

$$f(x) = x^2 - 5 = 0, \quad x \in [2,3].$$

Riešenie. Budeme vychádzať zo všeobecného tvaru iteračnej funkcie

$$g(x) = x - Mf(x), \quad M \neq 0. \tag{1.1}$$

Hodnotu konštanty M určíme na základe podmienok pre iteračnú funkciu.

Skôr než uvedieme riešenie pomocou „všeobecného tvaru“ (1.1) iteračnej funkcie, pozrieme sa na vyjadrenie funkcie $g(x)$, ktoré môžeme získať jednoduchšie a priamo pomocou $f(x)$. Musíme však overiť platnosť podmienok kladených na iteračnú funkciu. V tom prípade máme zaručenú konvergenciu pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu x^0.

1. $x = g_1(x) = x + x^2 - 5$.

- Funkcia $g_1(x)$ je spojitá na intervale $[2,3]$ (ide o polynóm).
- Platí $g_1 : [2,3] \to [2,3]$?

$$g_1(2) = 2 + 2^2 - 5 = 1.$$

Táto podmienka nie je splnená.

2. $x = g_2(x) = \frac{5}{x}$.

- Funkcia $g_2(x)$ je spojitá na intervale $[2,3]$ (nie je definovaná iba v bode 0).
- Platí $g_2 : [2,3] \to [2,3]$?

$$g_2(2) = \frac{5}{2} = 2,5;$$

$$g_2(3) = \frac{5}{3} \approx 1,667.$$

Opäť táto podmienka nie je splnená.

Vidíme, že ani jedna z dvoch „prirodzených“ možností nie je vhodná. Mohli by sme ešte uvažovať daný problém na odlišnom intervale, na ktorom by teoreticky funkcie $g_1(x)$ a $g_2(x)$ spĺňali podmienky. Pri zložitejších funkciách by hľadanie krajných bodov intervalu, v ktorom leží daný koreň, mohlo byť náročnejšie. Interval $[2,3]$ pritom nie je príliš „veľký“. Vráťme sa preto k problému (1.1).

Hľadajme iteračnú funkciu $g(x)$ v tvare

$$g(x) = x - M(x^2 - 5), \quad M \neq 0,\ x \in [2,3]. \tag{1.2}$$

1. Funkcia $g(x)$ je určite spojitá na $[2,3]$ pre každú hodnotu M.
2. Pozrime sa na podmienku $|g'(x)| < 1$ (až potom na zobrazenie intervalu do seba).

Počítajme

$$g'(x) = 1 - 2Mx.$$

Preto chceme, aby

$$\begin{gathered} -1 < 1 - 2Mx < 1, \\ -2 < -2MX < 0, \\ 0 < Mx < 1. \end{gathered}$$

Funkcia Mx je na intervale $[2,3]$ monotónna a preto o maximálnej veľkosti rozhodujú funkčné hodnoty v krajných bodoch. Keďže uvažujeme $x \in [2,3]$, hodnota $M > 0$, inak by neplatila nerovnosť $0 < Mx < 1$. Stačí teda, ak uvážime $x = 3$ (pretože Mx tam dosahuje maximum a dáva nám to užšie obmedzenie než pre hodnotu $x = 2$) a získame prvé obmedzenie na M, a síce

$$0 < 3M < 1 \Rightarrow 0 < M < 1/3. \tag{1.3}$$

3. Chceme, aby platilo $g : [2,3] \to [2,3]$.

Pozrieme sa na krajné body intervalu a zároveň na bod(y) extrému funkcie g.

V krajnom bode $x = 2$ platí $g(2) = 2 - M(-1) = 2 + M$. Hodnota $2 + M$ má byť v intervale $[2,3]$. Preto

$$\begin{gathered} 2 \leq 2 + M \leq 3, \\ 0 \leq M \leq 1. \end{gathered}$$

Uvážme krajný bod $x = 3$. $g(3) = 3 - 4M$. Potom

$$\begin{gathered} 2 \leq 3 - 4M \leq 3, \\ -1 \leq -4M \leq 0, \\ 0 \leq M \leq \frac{1}{4}. \end{gathered}$$

Z 2. podmienky a uvedených nerovností zatiaľ máme obmedzenie $M \in (0, 1/4]$.

Pozrieme sa ešte na body extrému funkcie $g(x)$. Využijeme na to prvú deriváciu

$$g'(x) = 1 - 2Mx = 0.$$

Vidíme, že extrém nastáva v bode

$$\hat{x} = \frac{1}{2M}.$$

Pre ktoré hodnoty konštanty M vôbec bude bod $\hat{x} \in [2,3]$? Respektíve, v ktorých prípadoch musíme brať ohľad na bod extrému pri riešení nášho problému? Odpoveď dávajú nerovnosti

$$2 \leq \hat{x} \leq 3,$$
$$2 \leq \frac{1}{2M} \leq 3,$$
$$\frac{1}{6} \leq M \leq \frac{1}{4}.$$

Takže iba pre hodnoty $M \in [1/6, 1/4]$ je bod extrému z intervalu $[2,3]$. Ak uvážime konštantu M mimo interval $[1/6, 1/4]$, funkcia $g(x)$ extrém na intervale $[2,3]$ nebude nadobúdať, respektíve bude na danom intervale monotónna. O zobrazení intervalu do seba preto rozhodujú krajné body, pomocou ktorých sme podmienky už stanovili. Celkovo môžeme vziať $M \in (0, 1/6)$ a vieme, že na základe predchádzajúcich úvah budú podmienky 1. – 3. splnené.

Uveďme príklad pre $M = 1/7$. Funkcia (1.2) má tvar

$$g(x) = x - \frac{1}{7}\left(x^2 - 5\right), \quad x \in [2,3].$$

Overme podmienky pre danú iteračnú funkciu.

1. Spojitosť funkcie g na intervale $[2,3]$ je zrejmá.

2. Platí $g : [2,3] \to [2,3]$?

Hodnta $g(2) \approx 2,14286$.
Hodnota $g(3) \approx 2,4286$.
Funkcia $g'(x) = 1 - 2/7x$.

Na intervale $[2,3]$ je funkcia $g'(x)$ stále kladná, je preto funkcia $g(x)$ na danom intervale rastúca a sledujeme krajné body intervalu, ktoré sme pred chvíľou overili.

3. Platí $|g'(x)| < 1$?

Na to, aby sme mohli urobiť tento záver, potrebujeme vyšetriť funkciu $g'(x) = 1 - 2/7x$.

$$g''(x) = -\frac{2}{7}.$$

Druhá derivácia je záporná, preto funkcia $g'(x)$ je klesajúca a stačí sa pozrieť na funkčné hodnoty v krajných bodoch. To jest

$$g'(2) = 1 - \frac{4}{7} = 3/7,$$

$$\text{v druhom krajnom bode je } \; g'(3) = 1 - \frac{6}{7} = 1/7.$$

Celkovo vidíme, že platí $|g'(x)| < 1$.
(Možno až zbytočne formálne overenie. Stačila by krátka úvaha, keďže od čísla 1 odčítame $2/7x$ a $x \in [2,3]$. Tým pádom sme určite pod hodnotou 1 a zároveň nad 0.)

Takto odvodená iteračná funkcia spĺňa požadované podmienky a môžeme ju použiť ako iteračnú funkciu pre hľadanie koreňa rovnice $f(x) = 0$. Splnením podmienok máme zaručenú konvergenciu iteračnej metódy pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $x^0 \in [2,3]$.

That's it.

Využitím funkcie `prosta_iterace` v Matlabe získame:

```
>> format long %ak chceme vypísať väčší počet desatinných miest
>> [koren, iterace] = prosta_iterace(g,2,3,2.5,50,0.0001)
>> koren =
             2.236247581474379
>>iterace =
              7
```