Obecný postup pro afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_m$

K získání souřadnicového vyjádření afinního zobrazení

$$f : (X') = A(X) + B$$

je potřeba $n+1$ údajů. Matice A má n sloupců a m řádků, matice B je sloupcová (má m řádků). Matici B můžeme také interpretovat jako obraz počátku P_n v daném zobrazení f.
Afinní zobrazení f v zásadě zadáváme dvěma způsoby:

1. Pomocí $n+1$ nekolinearních bodů z $\mathcal{A}_n$ a jejich jejich obrazů. Vzory po řádcích sepíšeme do matice, přidáme sloupeček jedniček a za čáru zapíšeme k příslušným bodům jejich obrazy. Levou stranu upravíme na jednotkovou matici E_{n+1}, za čarou nám prvních n řádků určí matici A^T, poslední řádek je pak B^T.

$$\left(\begin{array}{cc|c} X_1 & 1 & X'_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n & 1 & X'_n \\ X_{n+1} & 1 & X'_{n+1} \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{c|c} & \text{A trans.} \\ \text{E} & \\ & \text{B trans} \end{array}\right)$$

2. Pomocí n lineárně nezávislých vektorů ze $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_n)$ (tedy vlastně nějakou bázi) a jejich obrazů v *asociovaném lineárním zobrazení* φ_f a jednoho bodu z $\mathcal{A}_n$ a jeho obrazu.
   Mezi zaměřeními zadaných podprostorů $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{A}_m$ existuje asociované lineární zobrazení $\varphi_f : \mathbf{u}' = A\mathbf{u}$, přičemž matice A je pro f a φ_f shodná. Dostaneme ji tak, že vlevo od dělící čáry do řádků zapíšeme vzory, napravo jejich obrazy. Pokud tuto dvojmatici upravíme tak, aby vlevo byla jednotková matice E_n, vpravo vyjde A^T. Psaní do řádků je univerzální, narozdíl od sepisování po sloupcích lze použít vždy.

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u'}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{u}_n & \mathbf{u'}_n \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(E_n | A^T\right)$$

   Po získání matice A už k určení matice B stačí dosadit bod a jeho obraz do maticové rovnice

$$(X') = A(X) + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

   z níž jednoduchým roznásobením dostaneme přímo čísla b_1 až b_m.
   Tento druhý postup se hodí zejména u shodností a jiných afinních zobrazení, u kterých známe vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory. V těchto případech se k dopočítání matice B hodí užití nějakého samodružného bodu.

Vyjádření některých afinních zobrazení

Rovnoběžná projekce ve směru s do nadroviny $\mathcal{N}$

Rovnoběžná projekce je dána nadrovinou $\mathcal{N}$ samodružných bodů a směrem projekce $\mathbf{s} \notin \mathcal{Z}(\mathcal{N})$. Pro každý bod X získáme X' následovně: bodem X vedeme přímku p ve směru $\mathbf{s}$ a určíme její průnik s danou nadrovinou. Tento průnik je hledaným X', tj. $X' = \mathcal{N} \cap \{X, L(\mathbf{s})\}$. Rovnoběžná projekce je zobrazení o hodnosti $h = n - 1$. Prvky pro sestrojení souřadnicového vyjádření zvolíme následovně:

1. Zvolíme n nekolineárních bodů v nadrovině $\mathcal{N}$. Tyto body jsou samodružné. Pro jeden bod mimo $\mathcal{N}$ sestrojíme obraz podle definice.

2. Vybereme $n - 1$ vektorů, které tvoří bázi $\mathcal{Z}(\mathcal{N})$. Jedná se o nadrovinu samodružných bodů, a tedy všechny vektory jejího zaměření jsou vlastní, příslušné vlastnímu číslu 1. Ve φ_f se zobrazí samy na sebe.
   I vektor $\mathbf{s}$ je vlastní, příslušný vlastnímu číslu 0, tj. $\mathbf{s}' = \mathbf{o}$.
   K dopočítání matice B použijeme některý ze samodružných bodů z $\mathcal{N}$.

Základní afinita s charakteristikou

Je určena nadrovinou $\mathcal{N}$ samodružných bodů a párem odpovídajících si bodů B, B', přičemž $\overrightarrow{BB'} \notin \mathcal{Z}(\mathcal{N})$. Charakteristikou nazýváme číslo $(B_0; B, B')$, což je vlastně vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru $\overrightarrow{BB'}$.

1. Máme pár odpovídajících si bodů B, B'. Zbylých n bodů vybereme z $\mathcal{N}$ samodružných bodů. Pozor, aby byly nekolineární.

2. Vektorům ze $\mathcal{Z}(\mathcal{N})$ přísluší vlastní číslo 1. Vektor $\overrightarrow{BB'}$ se zobrazí na svůj $(B_0; B, B')$-násobek. Potřebný bod vezmu samodružný, z nadroviny SB. Složitější.

Je-li $(B_0; B, B') = -1$, a přitom $\overrightarrow{BB'} \not\perp \mathcal{Z}(\mathcal{N})$, nazýváme tuto afinitu *šikmá symetrie*. Šikmou symetrii nacházíme například u elipsy. Každá elipsa je šikmo symetrická podle každého svého průměru ve směru průměru k němu sdruženému.

Elace-základní afinita bez charakteristiky

Je určena nadrovinou $\mathcal{N}$ samodružných bodů a párem odpovídajících si bodů B, B', přičemž $\overrightarrow{BB'} \in \mathcal{Z}(\mathcal{N})$.

1. Máme pár odpovídajících si bodů B, B'. Zbylých n bodů vybereme z $\mathcal{N}$ samodružných bodů. Pozor, aby byly nekolineární.

2. Nevhodné.

Stejnolehlost

Dána středem S a koeficientem κ. Střed S je jediným samodružným bodem. Pro všechna $X \neq S$ je $\overrightarrow{SX'} = \kappa \overrightarrow{SX}$. Všechny směry jsou tedy vlastní, příslušné právě vlastnímu číslu κ.

1. Máme jeden samodružný bod S, zbylých n bodů musíme zobrazit podle definice, tj. rozepsáním $X' - S = (X - S)\kappa \rightarrow X' = \kappa X + (1 - \kappa)S$, čímž jsme už našli vyjádření stejnolehnosti, aniž bychom těchto n bodů vlastně potřebovali.

2. Všechny směry jsou vlastní, tedy matice A bude diagonální, na diagonále bude právě κ. K dopočítání B použijeme střed S.

NĚKTERÉ SHODNOSTI

Shodnosti mohou mít vlastní čísla pouze ± 1, případně dvojice komplexně sdružených komplexních čísel, které jsou ale taktéž komplexními jednotkami. Podprostory, které tato vlastní čísla určují jsou navíc navzájem kolmé.

Posunutí

Je určeno (nenulovým) vektorem $\mathbf{u}$. Každému bodu X přiřazuje bod $X' = X + \mathbf{u}$, a žádný bod tedy není samodružný. Naopak Všechny směry samodružné jsou, přísluší vlastnímu číslu $+1$. Matice A je proto jednotková. Matice B je obrazem počátku, a tedy její koeficienty jsou přímo souřadnice vektoru posunutí.

Symetrie podle podprostoru $\mathcal{B}$

Obecně: Je zadán podprostor samodružných bodů $\mathcal{B}_k$ dimenze $k < n$. Zaměření tohoto prostoru tvoří vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1. Vektorový podprostor k němu totálně kolmý tvoří vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu -1.
Připomeňme, jak jednoduše získat bázi totálně kolmého podprostoru. Je-li $\mathcal{B}$ zadán neparametricky (soustavou rovnic), určují koeficienty u x_i v jedné rovnici souřadnice jednoho vektoru ze zaměření $\mathcal{B}^{\perp}$. Máme-li naopak $\mathcal{B}$ zadán pomocí báze, použijeme každý z bázových vektorů pro vytvoření jedné z rovnic zadávajících zaměření.
Pro všechny body $X \notin \mathcal{B}$ najdeme X' následovně: bodem X vedeme podprostor $\mathcal{B}^{\perp}$. Zjistíme bod $X_0 = \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^{\perp}$. Pro X' pak platí $\overrightarrow{XX_0} = -\overrightarrow{X'X_0}$.
Nejlepší je, prochází-li $\mathcal{B}$ počátkem: Protože je počátek samodružným bodem, matice B zmizí.

1. Zvolíme $k+1$ nekolineárních bodů v $\mathcal{B}$. Zbylých $n-k$ bodů volíme mimo $\mathcal{B}$ a zobrazíme podle postupu výše. Postup usnadní, zvolíme-li si za jeden z těchto bodů počátek souřadnic. Pozor na to, aby byly v obecné poloze!
   Hodí se vlastně jen pro symetrie podle nadroviny. Čím větší rozdíl $n-k$, tím horší. Lepší je:

2. Zvolíme bázi $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$, jejíž vektory se zobrazí samy na sebe, a bázi $\mathcal{Z}(\mathcal{B}^{\perp})$, jejíž vektory se zobrazí na vektory opačné. Pro získání matice B dosadíme nějaký samodružný bod z $\mathcal{B}$.

SYMETRIE V $\mathcal{E}_2$ a $\mathcal{E}_3$

- **Rovinná symetrie v** $\mathcal{E}_3$ Zadána rovinou ϱ samodružných bodů (rovinou symetrie), vektorům jejího zaměření přísluší vlastní číslo $+1$. Má i další vlastní vektor kolmý na zaměření roviny, příslušný vlastnímu číslu -1. Jedná se o nepřímou shodnost.

  1. Tři (nekolineární) body vybereme samodružné v rovině ϱ ($A = A', B = B', C = C'$). Čtvrtý bod D vybereme mimo rovinu a zobrazíme podle pravidel symetrie (vedeme bodem D kolmici $k \perp \varrho$, zjistíme bod $D_0 = k \cap \varrho$, $\overrightarrow{D'D_0} = -\overrightarrow{DD_0}$). Pokud rovina ϱ neprochází počátkem $[0,0,0]$, hodí se volit za bod D právě jej.
  2. Vektory zaměření ϱ se zobrazí v asociovaném lineárním zobrazení samy na sebe (vybereme z nich libovolně dva lineárně nezávislé), směr k němu kolmý se zobrazí na vektor opačný. Za bod volíme některý ze samodružných bodů, tj. bodů roviny ϱ.

- **Osová symetrie v $\mathcal{E}_2$** Zadána přímkou p samodružných bodů (osu symetrie), jejímuž směrovému vektoru přísluší vlastní číslo $+1$. Má i druhý vlastní vektor kolmý na směr přímky, příslušný vlastnímu číslu -1. Jedná se o nepřímou shodnost.

   1. Dva body vybereme samodružné na přímce p ($A = A', B = B'$). Třetí bod C vybereme mimo přímku a zobrazíme podle pravidel symetrie (vedeme bodem C kolmici $k \perp p$, zjistíme bod $C_0 = k \cap p$, $\overrightarrow{C'C_0} = -\overrightarrow{CC_0}$). Pokud přímka p neprochází počátkem $[0, 0]$, hodí se volit za bod C právě jej.
   2. Směr přímky se zobrazí sám na sebe, směr k němu kolmý na vektor opačný. Za bod volíme některý ze samodružných bodů, tj. bodů na přímce p.

- **Symetrie podle přímky p v $\mathcal{E}_3$** Zadána přímkou p samodružných bodů (osu symetrie), jejímuž směrovému vektoru přísluší vlastní číslo $+1$. Dále má vektorovou rovinu vlastních vektorů kolmou na směrový vektor osy, příslušných vlastnímu číslu -1. Jedná se o přímou shodnost.

   1. Zvolíme dva samodružné body $A = A', B = B'$ na p. Zvolíme bod $C \notin p$, vedeme jím pomocnou rovinu ϱ kolmou na p, zjistíme $C_0 = \varrho \cap p$ a dopočítáme C'. Bod D je nejlepší volit ne náhodně, ale také v rovině ϱ, je pak totiž $D_0 = C_0$, a odpadne nám jeden krok. Velký pozor je třeba dát na volbu nekolineárního D, je-li $C_0 = A \vee C_0 = B$.
   2. Směrový vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ přímky p se v asociovaném lineárním zobrazení zobrazí sám na sebe. Všechny vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ příslušné vlastnímu číslu -1 (zobrazí se na vektor opačný) pak vyhovují rovnici $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, vybereme nějaké dva lineárně nezávislé. Matici B určíme pomocí nějakého samodružného bodu na přímce p.

- **Středová symetrie v $\mathcal{E}_2$** Je dána jediným samodružným bodem, středem S. Všechny směry jsou vlastní, příslušné vlastnímu číslu -1. Jedná se o přímou shodnost.

   1. Máme samodružný bod S, k němu vybereme další dva body A, B (pozor, aby A, B, S neležely na jedné přímce). Ty zobrazíme podle pravidla $\overrightarrow{X'S} = -\overrightarrow{XS}$.
   2. Všechny směry jsou samodružné, matice A je diagonální s dvěma -1 na diagonále. Ke zjištění B dosadíme střed.

- **Středová symetrie v $\mathcal{E}_3$** Je dána jediným samodružným bodem, středem S. Všechny směry jsou vlastní, příslušné vlastnímu číslu -1. Jedná se o nepřímou shodnost.

   1. Máme samodružný bod S, k němu vybereme další tři body A, B, C (pozor, aby žádné tři neležely na jedné přímce). Ty zobrazíme podle pravidla $\overrightarrow{X'S} = -\overrightarrow{XS}$.
   2. Všechny směry jsou samodružné, matice A je diagonální se třemi -1 na diagonále. Ke zjištění B dosadíme střed.