Zápočtová písemka z Geometrie 3
Varianta A

Datum: 9. 5. 2018
Jméno:

1	2	3	Σ

1) (3 × 1 b.) *Zadejte rovnicemi libovolnou afinitu v* $\mathcal{A}_3$*, která (pokud takové afinní zobrazení neexistuje, podejte stručné vysvětlení, proč):*

(a) *nemá žádné samodružné body;*
(b) *zobrazuje přímku* $p : X = [0,0,0] + t(1,1,1)$ *na rovinu* $\alpha : X = [1,1,1] + s(1,1,1) + r(0,0,1)$
(c) *má právě přímku samodružných bodů.*

2) *O zobrazení* f *v* $\mathcal{A}_3$ *víte, že se jedná o shodnost, má samodružný bod* $O[3,2,0]$ *a vlastní směry* $(1,0,2), (1,1,1)$ *a* $(-2,1,1)$.

(a) (1 b.) *Určete, kolik takových zobrazení* f *existuje (včetně počtu jednotlivých druhů takových zobrazení)*
(b) (2 b.) *Napište rovnice jedné z rovinových souměrností, které vyhovují zadání.*

3) *Afinní zobrazení* f *v* $\mathcal{A}_3$ *je zadáno rovnicemi:*

$$\begin{aligned} f : x' &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + 2 \\ y' &= -\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z + 1 \\ z' &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{5}{6}z - 1 \end{aligned}$$

(a) (1 b.) *Vyšetřete samodružné body zobrazení* f.
(b) (2 b.) *Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory zobrazení* f.
(c) (1 b.) *Uveďte repér* $\mathcal{R}$*, ve kterém mají matice zobrazení* f *co nejjednodušší možný tvar, a rovnice zobrazení vůči tomuto repéru.*
(d) (1 b.) *Uveďte, o jaké zobrazení se jedná.*
(e) (1 b.) *Zobrazte přímku* $a : X = [1,2,3] + t(2,1,-1)$

Zápočtová písemka z Geometrie 3
Varianta B

Datum: 9. 5. 2018
Jméno:

1	2	3	Σ

---

1) $(3 \times 1\,\text{b.})$ *Zadejte rovnicemi libovolnou afinitu v* $\mathcal{A}_3$*, která (pokud takové afinní zobrazení neexistuje, podejte stručné vysvětlení, proč):*

(a) *má vlastní čísla 2, 3 a 4 a přímku samodružných bodů.*
(b) *je podobností a nemá počátek* $[0,0,0]$ *za samodružný bod.*
(c) *zobrazuje vektor* $(0,0,1)$ *na vektor* $(1,1,0)$ *a bod* $[0,0,0]$ *na bod* $[1,3,4]$.

2) *O zobrazení* f *v* $\mathcal{A}_3$ *víte, že se jedná o shodnost, má přímku samodružných bodů* $p : X = [3,0,1] + t(2,1,1)$*. Kromě toho má další dva vlastní vektory* $(1,0,1), (1,-1,-1)$.

(a) $(1\,\text{b.})$ *Určete, kolik takových zobrazení* f *existuje (včetně počtu jednotlivých druhů takových zobrazení)*
(b) $(2\,\text{b.})$ *Napište rovnice jedné z rovinových souměrností, které vyhovují zadání.*

3) *Zobrazení* f *v* $\mathcal{A}_3$ *je zadáno rovnicemi:*

$$\begin{aligned}\sigma : x' &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z + 1\\ y' &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}z + 1\\ z' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\end{aligned}$$

(a) $(1\,\text{b.})$ *Vyšetřete samodružné body zobrazení* f.
(b) $(2\,\text{b.})$ *Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory afinity* f.
(c) $(1\,\text{b.})$ *Uveďte repér* $\mathcal{R}$*, ve kterém mají matice afinity* f *co nejjednodušší možný tvar, a rovnice afinity vůči tomuto repéru.*
(d) $(1\,\text{b.})$ *Uveďte, o jaké zobrazení se jedná.*
(e) $(1\,\text{b.})$ *Zobrazte přímku* $a : X = [0,0,0] + t(1,-1,0)$

Řešení A

1. (a) Nejjednodušším příkladem je posunutí. Matice A je jednotková, matice B souřadnice vektoru, o který se posunuje.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

   (b) Neexistuje, protože takové zobrazení by nebylo bijektivní (podmínka afinity), dokonce by nebylo ani prosté.

   (c) Má-li mít zobrazení právě přímku samodružných bodů, bude jejímu směrovému vektoru (a žádnému jinému) příslušet vlastní číslo 1, tedy se vektor v asociavaném lineárním zobrazení zobrazí sám na sebe. Kdybychom měli informace o dalších vektorech, mohli bychom klasicky doplnit "dvojmatici"a upravit ji na $(E_n|A^T)$. To můžeme ale udělat i tak, prostě dva z řádků doplníme libovolně, jen s podmínkou, že se vektory v nich nezobrazí samy na sebe. Když navíc zvolíme za přímku samodružných bodů přímku procházející počátkem, zmizí nám dokonce matice B.
   Řekněme, že naše samodružná přímka bude $p : X = [0, 0, 0] + (1, 2, 3)$. Máme první řádek do matice, zbytek doplníme (skoro) libovolně:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

   A máme A^T.
   Ještě jednodušší je zvolit si za přímku SB jednu ze souřadných os. Její vektor se zobrazí sám na sebe, zbylé dva zobrazíme na libovolné jiné vektory, matici A^T, resp. A dostaneme okamžitě, počátek je opět samodružný a B tedy opět zmizí.

2. Stejný příklad, jen s jinými čísly se řešil na hodině.

   (a) 8: identita, 3 rovinové, 3 přímkové a 1 středová symetrie.

   (b) Pro rovinové symetrie vždy dvěma vektorům přísluší vlastní číslo 1, a tyto dva vektory spolu s bodem O budou určovat rovinu, podle které děláme souměrnost. Třetí vektor, k této rovině kolmý pak přísluší vlastnímu číslu -1. Z těchto informací už lze zjistit podobu matice A, B se zjistí zobrazením počátku (počátkem P vedu kolmici k rovině, zjistím průsečík, který je středem P a P',...)
   Samozřejmě lze taky vytvořit matice pomocí čtyř bodů, kde nejsnáze volím tři samodružné z příslušné roviny, za čtvrtý počátek a jeho obraz.
   Rovnice zobrazení pak jsou:

   - symetrie podle roviny $\varrho_1 : 2x - y - z - 4 = 0$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

   - symetrie podle $\varrho_2 : x + 2z - 3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

   - Symetrie podle $\varrho_3 : x + y + z - 5 = 0$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

3. (a) rovina SB $2x + y - z - 6 = 0$
   (b) $\lambda_1 = 0$ pro vektor $u_1 = (2, 1, -1)$, $\lambda_{23} = 1$ pro zaměření roviny SB, tedy např.vektory $u_2 = (1, 0, 2), u_3 = (-1, 2, 0)$
   (c) v repéru $\mathcal{R}\langle[SB\varrho], u_1, u_2, u_3\rangle$ je vyjádření f:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   (d) jde o rovnoběžnou projekci na rovinu SB $\varrho : 2x + y - z - 6 = 0$ ve směru vektoru $u_1 = (2, 1, -1)$
   (e) dosadí-li se bod $[1, 2, 3]$ do rovnic zobrazení, dostaneme, že se zobrazí na bod $[\frac{8}{3}, \frac{17}{6}, \frac{13}{6}]$. Protože je směrový vektor přímky zároveň směrem projekce (tj. vektorem příslušným vlastnímu číslu 0), zobrazí se celá přímka do tohoto bodu.

Řešení B

1. (a) Neexistuje, silně samodružné přímce by odpovídalo vlastní číslo 1.
   (b) Nejjednodušší podobností je stejnolehlost, tedy matice $A = \kappa E_n$. Nemá-li zobrazení počátek za SB, bude matice B nenulová. Například tedy:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (c) Matici A získáme podobně jako ve variantě A, tentokrát na zbylé vektory ale neklademe žádné podmínky. Třetí sloupeček matice A bude mít čísla 1,1,0, dále je v zadání dáno, že počátek se zobrazí na $[1,3,4]$, čímž je dána matice B.
   Mimochodem, velmi podobný příklad jako se objevil v písemkách z loňska, které jste měli k dispozici. Tam zadání zní: "udejte příklad afinity, která zobrazuje přímku $p : X = [0,0,1] + t(1,1,0)$ na $q : X = [0,0,-1] + t(2,-1,0)$". Víte-li, na co se zobrazuje počátek, je to varianta o půlku jednodušší.

2. (a) 4: identita, 2 rovinové (k dané přímce se vždy vybere jeden z dalších vektorů, aby byla určena rovina symetrie, ten bude mít vl. číslo 1, zbylý vektor bude mít vl. číslo -1), 1 přímková symetrie (symetrie podle zadané přímky)
   (b)
   - souměrnost podle $\varrho_1 : x - y - z - 2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

   - souměrnost podle $\varrho_2 : x + z - 4 = 0$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. (a) přímka $p_X : X = [1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}] + t(1, -1, 0)$
   (b) $\lambda_1 = 1, \mathbf{u}_1 = (1, -1, 0)$;
   $\lambda_{2,3} = \pm \mathrm{i}, \mathbf{u}_2 = (0, 0, 1), \mathbf{u}_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$
   (c) v repéru $\mathcal{R}\langle [bod p_X], u_1, u_2 \rangle$ tvar:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4. Jedná se o otočení kolem přímky SB p o úhel $\frac{\pi}{2}$.

5. Směrový vektor je vlastním vektorem zobrazení příslušný vl. číslu 1, přímka se tedy zobrazí na rovnoběžku. Stačí tedy dosadit počátek do původních rovnic. Zobrazí se na bod $[1, 1, 0]$.