Zkoušková písemka z Geometrie 3
Varianta A

Datum: 26. 5. 2016
Jméno a UČO:

1	2	3	4	Σ

1) (5×1 b.) *Udejte příklad (pokud takový příklad neexistuje, podejte stručné vysvětlení, proč):*
   (a) *homotetie v $\mathcal{A}_3$, která není stejnolehlostí;*
   (b) *podobnosti s modulem $m = -64$;*
   (c) *elace v $\mathcal{A}_2$;*
   (d) *afinního zobrazení $\mathcal{A}_2$ do $\mathcal{A}_2$, ke kterému neexistuje inverzní zobrazení;*
   (e) *involutorní shodnosti v $\mathcal{E}_3$.*

2) *Afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ je zadáno obrazem bodu A a obrazy lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ v příslušném asociovaném lineárním zobrazení φ_f:*

$$\begin{aligned} A &= [1, 2, -1] & f(A) &= [0, 6, 0] \\ \mathbf{u}_1 &= (0, -3, -4) & \varphi_f(\mathbf{u}_1) &= (-4, -1, 9) \\ \mathbf{u}_2 &= (3, -3, 0) & \varphi_f(\mathbf{u}_2) &= (6, -6, -6) \\ \mathbf{u}_3 &= (2, -3, 1) & \varphi_f(\mathbf{u}_3) &= (5, -9, -8) \end{aligned}$$

   (a) (2 b.) *Vyjádřete zobrazení f rovnicemi vůči standardní bázi.*
   (b) (1 b.) *Určete samodružné body zobrazení f.*
   (c) (3 b.) *Určete rovnice zobrazení f v repéru $\langle X; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$, kde $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$ a $\mathbf{v}_3 = (0, 0, -3)$. Bod X zvolte tak, aby tyto rovnice neměly žádné absolutní členy, a svou volbu zdůvodněte.*

3) *V $\mathcal{E}_3$ je rovnicemi zadána podobnost h.*

$$\begin{aligned} h : x' &= x + y + z\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ y' &= x + y - z\sqrt{2} - \sqrt{2} \\ z' &= x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

   (a) (2 b.) *Určete samodružné body, vlastní čísla a vlastní vektory podobnosti h.*
   (b) (2 b.) *Rozložte podobnost h na stejnolehlost s se středem v počátku souřadného systému a shodnost σ.*
   (c) (2 b.) *Klasifikujte shodnost σ a uveďte konkrétně její určující prvky.*

4) (3 b.) *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC a kružnice $k(O, r)$, kde k leží ve vnější oblasti trojúhelníka ABC a $k \cap \triangle ABC = \emptyset$. Určete všechny přímky $p \parallel AB$ takové, že je velikost tětivy, kterou vytíná přímka p na kružnici k, stejná jako velikost úsečky vyťaté přímkou p na trojúhelníku ABC. Napište jen rozbor, stručný postup konstrukce a možné počty řešení úlohy.*

Řešení

2. (a)

$$\begin{aligned} f: x' &= 2x \qquad\quad + z \ \ - 1 \\ y' &= x \quad + 3y - 2z - 3 \\ z' &= -x + y \ \ - 3z - 4 \end{aligned}$$

   (b) $X = [\frac{11}{3}, -3, -\frac{8}{3}]$, počátek repéru v dalším podúkolu.

   (c)

$$\begin{aligned} f: x' &= 5x \quad - y \ \ + 6z \\ y' &= -6x + 5y - 15z \\ z' &= -\frac{5}{3}x + 3y - 8z \end{aligned}$$

3. (a) $\lambda_{1,2} = 2, \mathbf{u}_1 = (1,1,0), \mathbf{u}_2 = (\sqrt{2}, 0, 1);$
   $\lambda_3 = -2, \mathbf{u}_3 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$
   $X = [-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{5}{3}]$

   (b)

$$\begin{aligned} s: x' &= 2x \\ y' &= 2y \\ z' &= 2z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma: x' &= \frac{1}{2}x \quad + \frac{1}{2}y \quad + \frac{\sqrt{2}}{2}z + \sqrt{2} \\ y' &= \frac{1}{2}x \quad + \frac{1}{2}y \quad - \frac{\sqrt{2}}{2}z - \sqrt{2} \\ z' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \qquad\quad + 1 \end{aligned}$$

   (c) Zobrazení σ je rovinovou souměrností s rovinou samodružných bodů

$$\varrho: X = \left[-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{5}{3}\right] + s(1,1,0) + t(\sqrt{2}, 0, 1)$$

.

4. Viz Petáková, 80/47; až tři možná řešení.