Témata pro kolokvium

1. Simulujte růst populace strukturované do tří věkových tříd s externí variabilitou. Projekční matice populace je
$$\begin{pmatrix} 0 & h(t) & 5h(t) \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}.$$
Hodnota $h(t)$ je přitom realizace náhodné veličiny s logaritmicko-normálním rozložením se střední hodnotou 1 a rozptylem 0,05.
Výpočet pro časové rozpětí 0–50 proveďte alespoň padesátkrát. Zobrazte průměrnou celkovou velikost $N(t) = n_1(t) + n_2(t) + n_3(t)$ populace ze všech simulací a rozptyl této veličiny v závislosti na čase.

2. Simulujte růst populace strukturované do tří věkových tříd s interní variabilitou. Projekční matice populace je
$$\begin{pmatrix} 0 & g(N) & 5g(N) \\ 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}.$$
Přitom $N = N(t) = n_1(t) + n_2(t) + n_3(t)$ je celková velikost populace a funkce g je dána vztahem $g(N) = \mathrm{e}^{bN}$, kde b je kladná konstanta.
Výpočet proveďte pro časové rozpětí 0–50, hodnoty b volte 2, 20, 200, 400, 500. Zobrazte celkovou velikost $N(t)$ v závislosti na čase.

3. Uvažujte populaci strukturovanou do vývojových stadií, tj. populaci, jejíž vývoj je modelován pomocí projekční matice
$$\begin{pmatrix} Q_1 & F_2 & F_3 & F_4 & \dots & F_{k-1} & F_k \\ P_1 & Q_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & Q_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & Q_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{k-1} & Q_k \end{pmatrix}.$$
Určete stabilizovanou strukturu populace a vektor reproduktivních hodnot, najděte podmínku pro přežívání populace.

4. U populace členovců byly pozorovány abundance jednotlivých vývojových stadií v šesti časových okamžicích.

t	larvy	kukly	imaga
0	5,32	24,84	115,50
1	0,33	18,16	167,16
2	2,41	17,14	159,25
3	2,06	3,25	112,87
4	1,70	2,08	132,62
5	3,16	11,23	149,62

Najděte parametry modelu vývoje této populace metodou maximální věrohodnosti.

5. Uvažujte populaci jednoletých bylin, jejichž vývoj je rozčleněn podle ročních období. Rostliny kvetou a produkují semena na konci léta. Některá ze semen na podzim vyklíčí a přezimují jako sazeničky, jiná přezimují a vyklíčí až na jaře. Ozimé rostlinky mají náskok v růstu, takže z nich vyrostou střední nebo velké rostliny, z jarních pouze malé nebo střední. Matice

popisující jednotlivé fáze mohou být

$$\mathsf{B}_{\text{jaro}} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B}_{\text{léto}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{B}_{\text{pozdní léto}} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B}_{\text{zima}} = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Větší sazeničky (ozimé) tedy mají větší šanci vyrůst. Čím větší je rostlina, tím více semen produkuje. Rostlinka je mrazem méně zranitelná, než semeno. Tato populace rostlin je hypotetická, ale je inspirována reálnou populací. (A. R. Watkinson, The population ecology of winter annuals. in H. Synge (ed.) *The biological aspects of rare plant conservation,* Wiley, NY 1981, p. 253–265.)
Vypočítejte růstový koeficient populace, jeho citlivost na složky matic B_i, $i \in \{$jaro, léto, pozdní léto, zima$\}$, a jeho pružnost vzhledem k těmto složkám.

6. Uvažujte populaci potemníků, která se vyvíjí podle modelu

$$\begin{pmatrix} L(t+1) \\ P(t+1) \\ A(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b\mathrm{e}^{-c_{el}L(t)-c_{ea}A(t)} \\ 1-\mu_l & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-c_{pa}A(t)} & 1-\mu_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(t) \\ P(t) \\ A(t) \end{pmatrix},$$

kde $L(t)$, $P(t)$ a $A(t)$ označuje množství larev, kukel a dospělců v čase t. $b = 50$ je počet vajíček nakladených jednou samicí za jednotku času, $\mu_l = 0{,}5$ a $\mu_a = 0{,}3$ jsou přirozené úmrtnosti larev a dospělců, c_{el}, c_{ea}, c_{pa} vyjadřují „sílu kanibalismu“ larev na vajíčka, dospělců na vajíčka, dospělců na kukly.
Nakreslete průběh abundancí jednotlivých stadií a najděte takové hodnoty koeficientů c_{el}, c_{ea}, c_{pa}, že v modelu je stabilní rovnovážný bod a stabilní cyklus délky aspoň 2.

Possible colloquial projects

1. Simulate evolution of a population structured to three age classes with external variability. The projection matrix is
$$\begin{pmatrix} 0 & h(t) & 5h(t) \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$
The value $h(t)$ represents a representation of random variable with log-normal distribution with expected value 1 and deviation 0.05.
Simulate the evolution in the time range 0–50 at least 50 times. Plot the average total size of population $N(t) = n_1(t) + n_2(t) + n_3(t)$ and its deviance computed from the simulated data.

2. Simulate evolution of a population structured to three age classes with internal variability. The projection matrix is
$$\begin{pmatrix} 0 & g(N) & 5g(N) \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$
Here $N = N(t) = n_1(t) + n_2(t) + n_3(t)$ is the total size of population and the function g is defined by the formula $g(N) = \mathrm{e}^{bN}$, where b is a positive constant.
Provide the computation for the time range 0–50, values of the constant b chose 2, 20, 200, 400, 500. Plot the total size $N(t)$ of population dependent on time.

3. Consider a stage structured population, i.e. the population modeled by means of the projection matrix
$$\begin{pmatrix} Q_1 & F_2 & F_3 & F_4 & \dots & F_{k-1} & F_k \\ P_1 & Q_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & Q_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & Q_4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{k-1} & Q_k \end{pmatrix}.$$
Determine the stabilized structure and reproductive values of the distinct stages and try to find a condition for the population survival.

4. Abundances of the distinct developmental stages of an arthropod population were observed in six time instants.

t	larvae	puppae	adults
0	5.32	24.84	115.50
1	0.33	18.16	167.16
2	2.41	17.14	159.25
3	2.06	3.25	112.87
4	1.70	2.08	132.62
5	3.16	11.23	149.62

Estimate the parameters of the model using maximal likelihood method.

5. Consider a population of annual plants. The year is divided into four seasons. The life cycle starts in spring time with seedlings that may be small or large. In summer, the plants flower and they may be small, medium or large amount. The flowering plants produce seeds in autumn. During the winter, seeds or overwintering autumn seedlings survive. The surviving seedlings are large in the following spring, the overwintering seeds produce Small spring

seedlings. The matrices describing the indicated developmental phases are

$$\mathsf{B}_{\text{spring}} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.1 & 0.6 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B}_{\text{summer}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{B}_{\text{autumn}} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B}_{\text{winter}} = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

The greater seedlings have greater chance to survive. The greater plant produces greater amount of seeds. A seed is more easily injured by frost then a seedling. The described population is hypothetical but it is inspired by a real population. (A. R. Watkinson, The population ecology of winter annuals. in H. Synge (ed.) *The biological aspects of rare plant conservation,* Wiley, NY 1981, p. 253–265.)
Calculate the growth rate of the population, the sensitivity and the elasticity of it to changes in the entries of the matrices B_h.

6. Consider a population of flour beetles (genus *Tribolium*) that evolves according the model

$$\begin{pmatrix} L(t+1) \\ P(t+1) \\ A(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b\mathrm{e}^{-c_{el}L(t)-c_{ea}A(t)} \\ 1-\mu_l & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-c_{pa}A(t)} & 1-\mu_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(t) \\ P(t) \\ A(t) \end{pmatrix},$$

where $L(t)$, $P(t)$, and $A(t)$ denote larvae, pupae, and adults. The coefficient $b = 50$ denotes amount of eggs oviposited by one female during unit time interval, $\mu_l = 0.5$ and $\mu_a = 0.3$ are mortality rates for larvae and adults, c_{el}, c_{ea}, c_{pa} measure a rate of cannibalism of eggs by adults, eggs by larvae, and puppae by adults, respectively.
Plot the time dependent amount of the distinct stages and determine the values of the coefficients c_{el}, c_{ea}, c_{pa} such that the model posses stable equilibrium and stable 2-cycle.