SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES FONCTIONS GÉNÉRATRICES D'ABEL

PAR

M. LERCH

À FRIBOURG (SUISSE).

Dans les Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin pour l'année 1885 WEIERSTRASS a démontré un théorème auquel on attribue une grande importance, à savoir que toute fonction continue d'une variable réelle peut, pour toutes les valeurs de cette variable contenues dans un intervalle fini, être représentée par une série uniformément convergente dont les termes sont des fonctions entières.

Présenté sous sa forme la plus simple ce théorème n'a apporté rien de nouveau à ceux qui avaient accepté sans critique la méthode d'interpolation pour les fonctions arbitraires. Mais cette dernière méthode n'étant pas établie avec une rigueur suffisante, le théorème de WEIERSTRASS signifie un grand progrès dans la théorie de la représentation analytique des fonctions, malgré la circonstance que sa méthode paraît échapper à la pratique.

Dans deux notes qui ont paru dans les mémoires de l'Académie de Prague[1] j'ai fait usage du théorème de WEIERSTRASS pour établir un théorème fondamental de la théorie des fonctions génératrices d'ABEL, définies par les intégrales de la forme

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \varphi(x) dx, \tag{1}$$

---

[1] Rozpravy české Akademie, 2^e classe, T. I, n° 33 (1892) et T. II, n° 9 (1893).

la fonction (déterminante) $\varphi(x)$ étant supposée indépendante de la quantité a. Dans son mémoire posthume[1] le grand géomètre ne s'est pas borné à cette forme spéciale des fonctions génératrices, mais c'est cependant elle qui avait surtout attiré l'attention des géomètres. Nous verrons qu'à une fonction génératrice donnée ne corresponde pas toujours une fonction déterminante, mais notre attention est consacrée surtout à la question si, lorsque la déterminante existe, elle soit unique. C'est en effet cette question qui paraît la plus importante pour les applications et nous avons démontré, dans les notes citées, que la réponse est affirmative.

Mais l'équation en question

$$\int_0^\infty e^{-ax}\varphi_1(x)dx = \int_0^\infty e^{-ax}\varphi_2(x)dx \tag{2}$$

revenant à la suivante

$$\int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)dx = 0 \tag{2^0}$$

où $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, nous sommes amenés à la question quand l'intégrale $J(a)$ s'annule. Nous verrons que si l'équation $J(a) = 0$ est satisfaite par une infinité de valeurs positives de a qui forment une suite arithmétique $a = b + km$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, on aura en général $\varphi(x) = 0$, une exception ne pouvant se présenter que pour des valeurs de x qui constituent un certain ensemble intégrable. C'est de ce théorème général que résulte l'impossibilité de mettre sous la forme (1) les fonctions

$$\sin ka\,,\ \cos ka\,, \frac{1}{\Gamma(b-ka)}\,, \ (k > 0)\,,$$

car elles possèdent une infinité de zéros positifs qui forment des séries arithmétiques.

---

[1] Oeuvres, édition SYLOW et LIE, p. 67 et suiv.

I.

Je commence l'exposition des résultats annoncés par une démonstration élémentaire du théorème de WEIERSTRASS. Celle que j'avais adoptée en 1892 consiste en ce qu'on inscrit à la courbe qui représente géométriquement la fonction $y = f(x)$ une ligne brisée polygonale à des arrêtes suffisamment petites et qu'on développe la fonction définie par l'ordonnée de cette ligne polygonale d'après le théorème de FOURIER. Mais le point de vue sous lequel je me place aujourdhui est que le théorème de WEIERSTRASS est d'une nature plus élémentaire que les raisonnements classiques par lesquels LEJEUNE-DIRICHLET avait établi le développement de FOURIER et que, dans un enseignement convenablement arrangé, on peut pour les applications analytiques les plus élégantes substituer au théorème de FOURIER un autre plus particulier et plus facile à établir. L'espace me manque pour en parler davantage et je me borne à indiquer succinctement la démonstration que j'ai en vue.

Au moyen des formules

$$\frac{1}{2} - x = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\mu x\pi}{\mu\pi}, \quad (0 < x < 1),$$

et

$$x^2 - x + \frac{1}{6} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos 2\mu x\pi}{\mu^2\pi^2}, \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

on vérifie aisément que sous les hypothèses $0 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1$ l'expression suivante

$$(3) \quad L\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{matrix}\right) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_1 \sin 2\nu\pi(x - x_1) - y_2 \sin 2\nu\pi(x - x_2)}{\nu\pi}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\nu\pi(x - x_1) - \cos 2\nu\pi(x - x_2)}{\nu^2\pi^2}$$

représente la fonction linéaire

$$y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

lorsque la variable x est intérieure à l'intervalle $(x_1 \dots x_2)$, tandis qu'elle se réduit à zéro pour les points qui lui sont extérieurs en restant intérieurs à l'intervalle $(0 \dots 1)$. La représentation géométrique de la fonction (3) se compose donc du segment de droite M_1M_2 qui joint les points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ et de deux segments de l'axe des abscisses $(0 \dots x_1)$ et $(x_2 \dots 1)$.

Cela étant, soient $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ des quantités réelles qui satisfont aux inégalités

$$0 \leqq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leqq 1,$$

et faisons-leur correspondre des quantités réelles choisies à volonté $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. On aura de la sorte dans le plan $n+1$ points M_a aux coordonnées respectives x_a et y_a $(\alpha = 0, 1, 2, \dots, n)$, lesquels définissent une ligne brisée polygonale $M_0M_1M_2 \dots M_n$ que je désigne par L. La somme suivante des quantités telles que (3)

$$y = \sum_{a=0}^{n-1} L\left(x \left| \begin{matrix} x_a x_{a+1} \\ y_a y_{a+1} \end{matrix} \right.\right)$$

est, en général, égale à l'ordonnée du point de la ligne L correspondant à l'abscisse x. Une exception pourra avoir lieu pour les points des intervalles $(0 \dots x_0)$ et $(x_n \dots 1)$ où la quantité y s'annule, et aux sommets $M_0M_1 \dots M_n$ de la ligne L.

Je désigne par

$$L\left(x \left| \begin{matrix} x_0 x_1 \dots x_n \\ y_0 y_1 \dots y_n \end{matrix} \right.\right)$$

cette quantité y et j'observe que l'on a

$$L\left(x \left| \begin{matrix} x_0 x_1 \dots x_n \\ y_0 y_1 \dots y_n \end{matrix} \right.\right) = \frac{1}{2} \sum_{a=0}^{n-1} (y_a + y_{a+1})(x_{a+1} - x_a)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_0 \sin 2\nu\pi(x - x_0) - y_n \sin 2\nu\pi(x - x_n)}{\nu\pi}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2\pi^2} \sum_{a=0}^{n-1} \frac{y_{a+1} - y_a}{x_{a+1} - x_a} [\cos 2\nu\pi(x - x_{a+1}) - \cos 2\nu\pi(x - x_a)].$$

Ici évidemment le second membre reste continu tant que $x_0 < x < x_n$, d'où il suit que la quantité $L\left(x\left|\begin{matrix}x_0 \dots x_n\\ y_0 \dots y_n\end{matrix}\right.\right)$ donne l'ordonnée de la ligne L même aux points $M_1 M_2 \dots M_{n-1}$. Sous l'hypothèse $x_0 < x < x_n$ on peut effectuer la sommation de la première série et il vient

$$(4) \qquad L\left(x\left|\begin{matrix}x_0 x_1 \dots x_n\\ y_0 y_1 \dots y_n\end{matrix}\right.\right) = \left(\frac{1}{2} - x + x_0\right) y_0 + \left(\frac{1}{2} - x_n + x\right) y_n$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{a=0}^{n-1} (y_a + y_{a+1})(x_{a+1} - x_a)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2\pi^2} \sum_{a=0}^{n-1} \frac{y_{a+1} - y_a}{x_{a+1} - x_a}[\cos 2\nu\pi(x - x_{a+1}) - \cos 2\nu\pi(x - x_a)] .$$

Je prendrai désormais $x_0 = 0$, $x_n = 1$, de sorte que la ligne L recouvre tout l'intervalle $(0 \dots 1)$ et j'observe que le second membre reste continu dans tout cet intervalle sans exception. Cette expression (4) sera alors partout égale à l'ordonnée de la ligne L.

Ce point établi, la démonstration du théorème de Weierstrass s'achève comme dans ma note de 1892. Soit en effet $f(x)$ une fonction continue, définie dans l'intervalle $(0 \dots 1)$, choisissons sur la ligne qui représente cette fonction un nombre assez grand de points suffisamment approchés $M_1 M_2 \dots M_{n-1}$ et soient $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ leurs abscisses, en supposant $x_1 > 0$, $x_{n-1} < 1$. En prenant encore $x_0 = 0$ et $x_n = 1$ et posant $y_a = f(x_a)$, la quantité (4) formée au moyen de ces valeurs-là sera telle que la différence

$$f(x) - L\left(x\left|\begin{matrix}x_0 x_1 \dots x_n\\ y_0 y_1 \dots y_n\end{matrix}\right.\right)$$

sera en valeur absolue plus petite qu'une quantité $\frac{\delta}{3}$ donnée d'avance.

Cela étant, arrêtons la série infinie qui figure au second membre de (4) et qui est uniformément convergente, à un nombre fini k de termes, dont on dispose de la sorte que le reste de la série qu'on obtient ainsi soit en valeur absolue plus petit que $\frac{\delta}{3}$; en désignant par $L_k(x)$ la quantité qui résulte de (4) en supprimant le reste en question, on aura donc

$$|L(x) - L_k(x)| < \frac{\delta}{3},$$

et l'inégalité précédente

$$|f(x) - L(x)| < \frac{\delta}{3}$$

permet de conclure

$$|f(x) - L_k(x)| < \frac{2\delta}{3}.$$

La quantité $L_k(x)$ est une expression finie de la forme

$$L_k(x) = \big(f(0) - f(1)\big)\left(\frac{1}{2} - x\right) + A_0 + \sum_{\nu=1}^{k} (A_\nu \cos 2\nu x\pi + B_\nu \sin 2\nu x\pi)$$

et on a par conséquent ce théorème que toute fonction continue dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ peut être représentée, avec l'approximation donnée, par une expression telle que $L_k(x)$. Sans m'arrêter à des applications qui ont quelque importance méthodique je me borne à observer que $L_k(x)$ étant une fonction transcendante entière, on pourra arrêter son développement par la série de MAC LAURIN à un certain nombre de termes de la sorte que le reste sera, pour $0 \leqq x \leqq 1$, plus petit en valeur absolue que $\frac{\delta}{3}$. La fonction $L_k(x)$ sera ainsi remplacée par la fonction rationnelle entière $G(x)$ telle que

$$|L_k(x) - G(x)| < \frac{\delta}{3}$$

et il s'ensuit

$$|f(x) - G(x)| < \delta.$$

Donc, $f(x)$ étant continue dans tout l'intervalle $(0 \ldots 1)$, on pourra prendre, le long de cet intervalle, $G(x)$ comme la valeur approchée de $f(x)$, l'erreur étant dans tout cet intervalle plus petite que δ, c'est à dire qu'une quantité donnée d'avance. C'est le théorème de WEIERSTRASS sous sa forme la plus simple.[1]

---

[1] Je me réserve de revenir sur le rôle que jouit la fonction $L\left(x \middle| \begin{matrix} x_0 \ldots x_n \\ y_0 \ldots y_n \end{matrix}\right)$ dans la théorie de la représentation des fonctions discontinues.

II.

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x, définie dans tout l'intervalle $(0 \ldots \infty)$ et telle que l'intégrale

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)dx \tag{5}$$

existe pour une certaine valeur $a = c$. Je vérifie d'abord qu'elle existe alors pour toute valeur de a plus grande que c. En effet, $J(a)$ est la limite pour w infini de la quantité

$$J(a, w) = \int_0^w e^{-ax}\varphi(x)dx,$$

et en posant $a = c + a'$, $a' > 0$, puis

$$\psi(x) = \int_0^x e^{-cz}\varphi(z)dz,$$

$\psi(x)$ sera finie et continue et la limite pour x infini est, par hypothèse, une quantité bien déterminée $J(c)$. On en conclut en intégrant par parties l'équation

$$J(a, w) = \psi(w)e^{-a'w} + a'\int_0^w \psi(x)e^{-a'x}dx$$

d'où pour w infini

$$J(a) = (a - c)\int_0^\infty e^{-(a-c)x}\psi(x)dx, \tag{5°}$$

ce qui démontre l'existence de $J(a)$.

Si la fonction $J(a)$ s'évanouit pour une infinité de valeurs positives formant une suite arithmétique $a = b + \mu\alpha$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$, il résulte de (5°) que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a'x}\psi(x)dx$$

s'évanouira pour les valeurs $a' = b - c + \mu a$ également en suite arithmétique et l'on aura

$$\int_0^\infty e^{-\mu a x} e^{-(b-c)x} \psi(x)\, dx = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

équation qui après la substitution $e^{-ax} = z$ prend la forme

$$\int_0^1 z^{\mu-1} \chi(z)\, dz = 0, \tag{6} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

en posant pour abréger

$$\chi(z) = e^{\frac{b-c}{a} \log z} \psi\left(\frac{1}{a} \log \frac{1}{z}\right).$$

Cette fonction est évidemment finie et continue dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ puisqu'elle est infiniment petite avec z, c'est à dire pour x infini, si l'on suppose, ce qui est permis, que $b > c$.

Cela étant, choisissons une constante δ d'une petitesse arbitraire et formons la fonction rationnelle entière $G(z)$ dont l'existence a été établie plus haut, c'est à dire telle que l'on ait

$$|\chi(z) - G(z)| < \delta;$$

posant

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m,$$

écrivons l'inégalité précédente sous la forme

$$G(z) = \chi(z) - \vartheta\delta, \; (-1 < \vartheta < 1), \tag{7}$$

où ϑ est évidemment une fonction continue.

Cela étant, on tire de l'équation (6) en y faisant successivement $\mu = 1, 2, \ldots, m + 1$ et ajoutant après avoir multiplié par $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, l'équation suivante

$$\int_0^1 \chi(z)\, G(z)\, dz = 0.$$

Faisant usage de la valeur (7), j'en tire

$$\int_0^1 \chi(z)^2 dz = \delta \int_0^1 \vartheta \chi(z)\, dz$$

d'où enfin

$$\int_0^1 \chi(z)^2 dz < \delta \int_0^1 |\chi(z)| dz .$$

Cette inégalité devient impossible, si $\chi(z)$ n'étant pas identiquement nulle, on prend pour δ une quantité plus petite que le quotient

$$\int_0^1 \chi(z)^2 dz : \int_0^1 |\chi(z)| dz .$$

Il faut donc que l'on ait partout $\chi(z) = 0$, ce qui donne $\psi(x) = 0$, c'est à dire

$$\int_0^x e^{-cz} \varphi(z) dz = 0$$

pour chaque valeur positive de x. Cela exige que l'on ait, tout au plus à l'exception d'un certain ensemble intégrable, partout $\varphi(x) = 0$.

On vient de démontrer le théorème d'importance capitale annoncé plus haut, et qui s'exprime:

»Si l'intégrale définie

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \varphi(x) dx$$

correspondant à une fonction déterminante $\varphi(x)$ intégrable, continue ou discontinue, existe pour une certaine valeur de a, elle existera pour toute valeur plus grande. Elle ne peut pas s'annuler pour une infinité de valeurs positives de a qui forment une suite arithmétique sans que l'on ait identiquement $J(a) = 0$ et, en général, $\varphi(x) = 0$.»

Soit maintenant $f(a)$ une fonction de la variable réelle et positive a, qui à partir d'une certaine limite reste finie pour chaque valeur finie de a sans être identiquement nulle. Alors les produits

$$f(a) \sin ka , \; f(a) \cos ka , \; \frac{f(a)}{\Gamma(b - ka)},$$

formés à l'aide d'une constante positive k, ne pourront pas être mis sous la forme de l'intégrale (5) pour a variable et illimité, car ces fonctions de a possèdent une infinité de zéros formant une suite arithmétique.

Soit maintenant $J(a)$ l'intégrale (5), je dis que si l'équation

$$(a+r)^s J(a) = k$$

peut être satisfaite pour une infinité de valeurs de a formant une suite arithmétique, k, r, s étant des constantes dont la dernière soit positive, on aura nécessairement

$$\varphi(x) = \frac{k}{\Gamma(s)} e^{-rx} x^{s-1}.$$

Car en effet notre équation s'écrit

$$\int_0^\infty e^{-ax} \varphi(x) dx = \frac{k}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-(a+r)x} x^{s-1} dx$$

et le reste de la démonstration est évident.

Il y a des propositions analogues au sujet des expressions

$$(a^2+b^2)J(a), \qquad \left(a+\frac{b}{a}\right)J(a)$$

et plusieures autres.

III.

Les applications du théorème fondamental qu'on vient d'établir sont nombreuses, mais l'espace manquant, je me borne à une seule. Je veux obtenir la valeur de l'intégrale

$$\Phi(u, \varepsilon) = \int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2} + \varepsilon u x\right) \frac{x^{s-1}\, dx}{1+x^2}$$

pour $\varepsilon = \pm 1$, u étant réel et positif, tandis que s peut être complexe, mais sa partie réelle restant positive et ne dépassant pas deux.

Pour ce but je considère la fonction génératrice

$$J = \int_0^\infty \Phi(u) e^{-au} du$$

qui a pour valeur, comme cela se voit aisément, l'intégrale définie suivante

$$J = \varepsilon \cos \frac{s\pi}{2} \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{(a^2 + x^2)(1 + x^2)} + a \sin \frac{s\pi}{2} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{(a^2 + x^2)(1 + x^2)}.$$

En faisant usage de l'identité

$$\frac{1}{(a^2 + x^2)(1 + x^2)} = \frac{1}{a^2 - 1}\left(\frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{a^2 + x^2}\right),$$

puis employant les formules

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{c^2 + x^2} = \frac{\pi c^{s-2}}{2 \sin \frac{s\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{c^2 + x^2} = \frac{\pi c^{s-1}}{2 \cos \frac{s\pi}{2}}$$

pour $c = a$ et pour $c = 1$, nous aurons

$$J = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a^2 - 1}\left[(a + \varepsilon) - (1 + \varepsilon) a^{s-1}\right]$$

ou bien

$$J = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a - \varepsilon} - \frac{1 + \varepsilon}{a^2 - 1} a^{s-1}\right).$$

Dans le cas où $\varepsilon = -1$ on a

$$J = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a + 1} = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-au} e^{-u}\,du,$$

ce qui démontre la formule de Cauchy

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2} - ux\right) \frac{x^{s-1}\,dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-u}, \quad (u > 0). \tag{8}$$

Le deuxième cas, où $\varepsilon = 1$, donne le résultat un peu plus compliqué

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a - 1} - 2 \frac{a^{s-1}}{a^2 - 1}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a - 1} - \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2\nu+1-s}} \end{aligned}$$

et il s'ensuit la formule que nous avons obtenue dans le second mémoire cité plus haut

$$(9)\qquad \int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2}+ux\right)\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^u-\pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{u^{2\nu-s}}{\Gamma(2\nu+1-s)}.$$

En ajoutant et retranchant avec la formule précédente on obtient

$$2\sin\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty\frac{\cos ux}{1+x^2}x^{s-1}\,dx=\pi\cos\mathrm{hyp}\,u-\pi S$$

$$2\cos\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty\frac{\sin ux}{1+x^2}x^{s-1}\,dx=\pi\sin\mathrm{hyp}\,u-\pi S$$

$$S=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u^{2\nu+2-s}}{\Gamma(2\nu+3-s)}.$$

En prenant les dérivées par rapport à s des deux membres dans les équations précédentes et en posant $s=1$ ou $s=2$, on obtient les formules que Schloemilch a données au sujet du logarithme intégral.

En mettant a au lieu de $2-s$ et faisant pour un moment

$$\varphi(u)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u^\nu}{\Gamma(a+\nu+1)},$$

on aura évidemment

$$S=\frac{1}{2}u^a[\varphi(u)+\varphi(-u)];$$

cela étant, la fonction $\varphi(u)$ peut se transformer au moyen de la formule d'Euler plusieurs fois retrouvée

$$\varphi(u)=\frac{1}{\Gamma(a)}e^u\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu u^\nu}{\underline{|\nu}(a+\nu)}$$

d'où l'on tire

$$S=\frac{1}{2\Gamma(a)}\left[e^u\int_0^u e^{-x}x^{a-1}dx+e^{-u}\int_0^u e^x x^{a-1}dx\right].$$

Changeant donc s en $s + 1$ nos formules deviendront

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
& 2\cos\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty \frac{x^s \cos ux}{1 + x^2}\,dx = \pi \cos \operatorname{hyp} u \\
& \qquad\qquad \frac{\pi}{2\Gamma(1 - s)}\Big[e^u \int_0^u e^{-x} x^{-s}\,dx + e^{-u}\int_0^u e^x x^{-s}\,dx\Big], \\
& 2\sin\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty \frac{x^s \sin ux}{1 + x^2}\,dx = -\pi \sin \operatorname{hyp} u \\
& \qquad\qquad + \frac{\pi}{2\Gamma(1 - s)}\Big[e^u \int_0^u e^{-x} x^{-s}\,dx + e^{-u}\int_0^u e^x x^{-s}\,dx\Big].
\end{aligned}
\right.
$$