Kapitola 13

Trojúhelníky a mnohoúhelníky

1. Rozhodněte, zda body $A = [1; 2]$, $B = [-3; 14]$ a $C = [5; 5]$ tvoří vrcholy trojúhelníku. V kladném případě vypočtěte $|\sphericalangle ACB|$, najděte souřadnice jeho těžiště, určete velikost výšky v_b a zjistěte obsah S trojúhelníku ABC. Výsledky vyjádřete s přesností na jednotky minut, resp. na jedno desetinné místo.

2. Nechť jsou dány body $A = [5; -5; 2]$, $B = [-7; 7; -4]$ a $C = [-2; 5; 0]$. Určete souřadnice bodu D tak, aby $ABCD$ (v tomto pořadí vrcholů) byl lichoběžník, ve kterém platí $AB \parallel CD$ a $|AB| = 3\,|CD|$. Dále dokažte, že lichoběžníku $ABCD$ lze opsat kružnici.

3. Bod A, který je v Gaussově rovině obrazem komplexního čísla

$$z_A = \frac{\left(\sqrt{3} + i^{117}\right)^9}{2^{\frac{15}{2}}},$$

je jedním z vrcholů pravidelného osmiúhelníku $ABCDEFGH$, který má střed v počátku Gaussovy roviny. Určete komplexní čísla z_B, z_C, z_D, z_E, z_F, z_G a z_H, která jsou v Gaussově rovině obrazy zbylých vrcholů tohoto osmiúhelníku. Výpočet doplňte i náčrtem pravidelného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ v Gaussově rovině.

4. Dokažte, že deltoid je tečnový čtyřúhelník.

5. Lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) je vepsána kružnice se středem O. Dokažte, že

   a) $|\sphericalangle AOD| = 90°$,

   b) $|\sphericalangle DOC| = |\sphericalangle DAO| + |\sphericalangle ABO|$.

6. Tečny vedené ke kružnici $k(O, r)$ z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech T a U. Třetí tečna protíná úsečky AT a AU po řadě v bodech B a C. Určete obvod trojúhelníku ABC, je-li $|AT| = 12$ cm.

7. Nechť je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$) s ostrými úhly α a β. Nechť na základně AB existuje bod E takový, že kružnice opsané trojúhelníkům AED a

EBC mají vnější dotyk. Dokažte, že čtyřúhelník $ECVD$, kde V značí průsečík přímek $\overleftrightarrow{AD}$ a $\overleftrightarrow{BC}$, je tětivový.

8. V trojúhelníku ABC je při obvyklém značení dáno $\beta = 120°$, $a = 6$ cm a $c = 10$ cm. Vypočtěte délku strany b, velikost úhlu α, obsah S, poloměr r kružnice opsané trojúhelníku ABC a velikost jeho výšky v_c.

9. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a. Sestrojte řez této krychle rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$, kde body K, L a M značí po řadě středy hran AE, AB a HG. Pojmenujte mnohoúhelník, který je tímto řezem a vypočtěte jeho obvod a obsah.

10. Zjistěte, zda existuje konvexní n-úhelník, jehož nejmenší úhel je pravý a každý následující úhel má pak velikost o 12° větší než úhel předcházející. Najděte všechna n, pro něž takový n-úhelník existuje.

11. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány délky jeho těžnic t_b a t_c a dále velikost úhlu γ. Udělejte pouze náčrt a rozbor, postup konstrukce ani rys provádět nemusíte. Uveďte a zdůvodněte, jaký počet řešení může daná úloha mít; závislost počtu řešení úlohy na volbě hodnot zadaných parametrů diskutovat nemusíte.

12. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno α a $e + f = |AC| + |BD|$. Udělejte pouze náčrt a rozbor, postup konstrukce ani rys provádět nemusíte. Uveďte a zdůvodněte, jaký počet řešení může mít daná úloha v závislosti na volbě hodnot zadaných parametrů (předpokládejte přitom, že $\alpha < 180°$ a $e + f > 0$).

13. V rovině jsou dány body C, V, U takové, že $|CV| = 3\,\text{cm}$, $|VU| = 3,5\,\text{cm}$ a $|CU| = 4,5$ cm. Sestrojte ostroúhlý trojúhelník ABC tak, aby byl V průsečík jeho výšek a úsečka AU tvořila průměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Návody a výsledky:

1. Platí

$$\cos(\sphericalangle ACB) = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{(-4;-3)\cdot(-8;9)}{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-8)^2+9^2}} =$$
$$= \frac{32-27}{5\cdot\sqrt{145}} = \frac{1}{\sqrt{145}} \quad\Rightarrow\quad |\sphericalangle ACB| = 85°14',$$

což znamená, že ABC je trojúhelník. Dále platí, že $\overrightarrow{AS_{AB}} = \overrightarrow{S_{AB}B}$, odkud po úpravě dostáváme, že $S_{AB} = \frac{A+B}{2}$. Neboť $3\overrightarrow{S_{AB}T} = \overrightarrow{S_{AB}C}$, obdržíme odtud pro těžiště T užitím předchozího vztahu $T = \frac{A+B+C}{3}$. Po dosazení máme $T = [1;7]$. Velikost výšky v_b je výhodné určit jako vzdálenost bodu B od přímky $\overleftrightarrow{AC}$. Za tímto účelem nejprve najdeme obecnou rovnici přímky $\overleftrightarrow{AC}$; ta má tvar $3x - 4y + 5 = 0$. Proto

$$v_b = v(B, \overleftrightarrow{AC}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3\cdot(-3) - 4\cdot 14 + 5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \ldots = 12.$$

Obsah S trojúhelníku ABC můžeme určit pomocí vektorového součinu $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. K tomu je ale třeba uvažovat zadaný trojúhelník v prostoru. Toho snadno formálně docílíme tak, že ke každému zadanému bodu přidáme stejnou (např. nulovou) třetí souřadnici, takže $A = [1;2;0]$, $B = [-3;14;0]$ a $C = [5;5;0]$. Pak $\overrightarrow{AB} = (-4;12;0)$, $\overrightarrow{AC} = (4;3;0)$ a $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (0;0;-60)$. Proto $S = 30$.

2. Dle zadání musí platit $3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (nikoliv $3\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$). Odtud $D = C + \frac{A-B}{3} = [2;1;2]$. Pokud lze lichoběžníku opsat kružnici, znamená to, že se musí jednat o tětivový čtyřúhelník, tzn. že součet jeho protějších vnitřních úhlů musí být 180°. Toto platí právě v rovnoramenném lichoběžníku. Snadno ověříme, že $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = 3\sqrt{5}$, což znamená, že $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník.

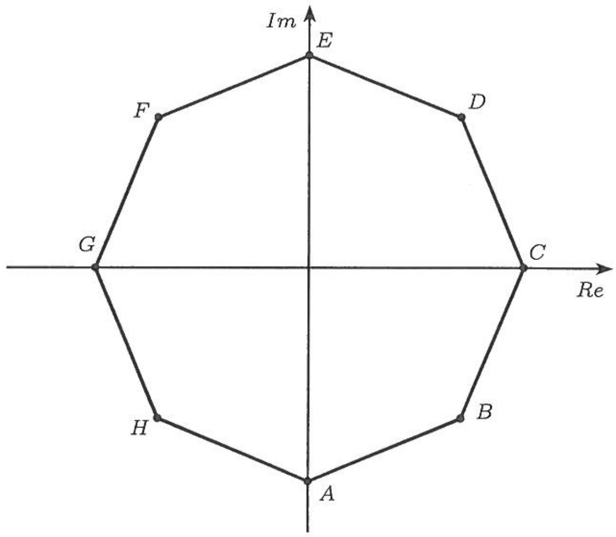
3. Upravujme

$$z_A = \frac{\left(\sqrt{3}+i^{117}\right)^9}{2^{\frac{15}{2}}} = \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}{2^7\cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^9}{2^7\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{2^9\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}{2^7\sqrt{2}} = \frac{-2^2 i}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}i.$$

To znamená, že bod z_A, který lze rovněž vyjádřit ve tvaru

$$z_A = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

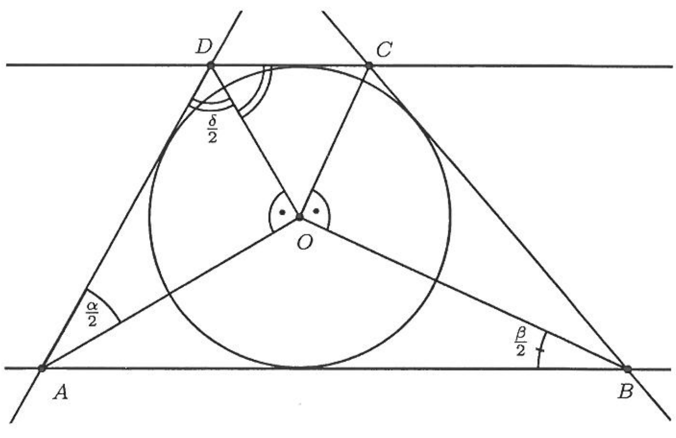
leží na záporné části imaginární osy. Všechny vrcholy hledaného osmiúhelníku mají stejnou absolutní hodnotu a jejich argumenty dostaneme tak, že k argumentu $-\frac{\pi}{2}$ budeme postupně přičítat $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Takto najdeme hledané body $z_B = 2 - 2i$, $z_C = 2\sqrt{2}$, $z_D = 2 + 2i$, $z_E = 2\sqrt{2}i$, $z_F = -2 + 2i$, $z_G = -2\sqrt{2}$, $z_H = -2 - 2i$. Rovněž lze využít symetrii osmiúhelníku (viz obrázek).



Obrázek 13.1: K řešení úlohy 3

4. Je třeba pouze ukázat, že $a + c = b + d$, což deltoid zřejmě splňuje.

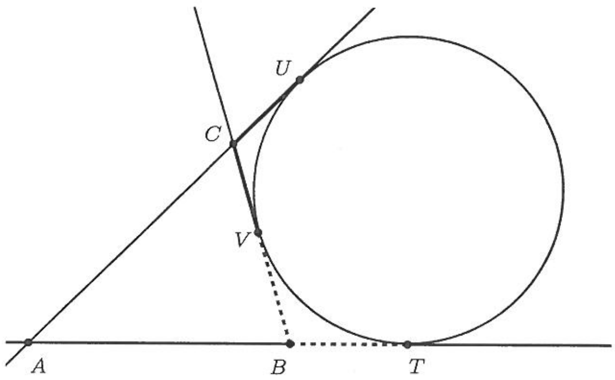
5. a) Stačí si uvědomit, že přímka $\overleftrightarrow{AO}$ je osou úhlu u vrcholu A (označme jeho velikost α), podobně přímka $\overleftrightarrow{DO}$ je osou úhlu u vrcholu D (označme jeho velikost δ). Protože $\alpha + \delta = 180°$, platí, že $|\sphericalangle AOD| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2} = 90°$. Poznamenejme, že analogicky bychom dokázali, že pravý je i úhel $\sphericalangle BOC$.



Obrázek 13.2: K řešení úlohy 5

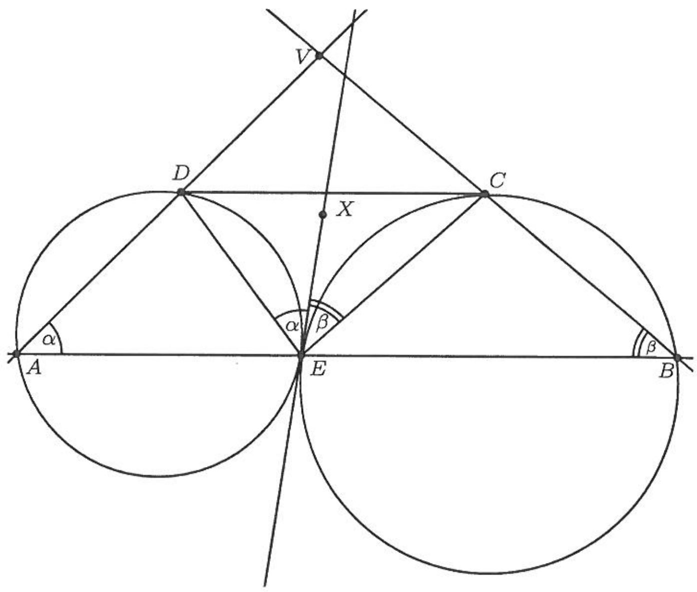
b) Z právě dokázaného plyne, že $|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle DOC| = 180°$. Součtem všech vnitřních úhlů v trojúhelníku AOB v souladu s předchozím značením dostáváme $|\sphericalangle AOB| = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$, přičemž β značí velikost vnitřního úhlu u vrcholu B. Z posledních dvou uvedených rovností vyplývá, že $|\sphericalangle DOC| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Protože však $|\sphericalangle DAO| = \frac{\alpha}{2}$ a $|\sphericalangle ABO| = \frac{\beta}{2}$, dostáváme rovnost $|\sphericalangle DOC| = |\sphericalangle DAO| + |\sphericalangle ABO|$, kterou jsme měli dokázat.

6. Označme V dotykový bod tečny $\overleftrightarrow{BC}$ a kružnice k. Protože platí $|BT| = |BV|$, je $|AB| + |BV| = 12\,\mathrm{cm}$. Podobně $|UC| = |CV|$, takže $|AC| + |CV| = 12\,\mathrm{cm}$. Obvod trojúhelníku ABC je tedy $24\,\mathrm{cm}$.



Obrázek 13.3: K řešení úlohy 6

7. Označme obvyklým způsobem α (resp. β) velikost vnitřního úhlu u vrcholu A (resp. B) lichoběžníku $ABCD$. Společná tečna obou zmíněných kružnic se jich dle zadání dotýká v bodě E. Pro zjednodušení dalšího popisu ještě zvolme na této tečně libovolný bod X, který je vnitřním bodem lichoběžníku $ABCD$.



Obrázek 13.4: K řešení úlohy 7

Podle známého tvrzení o obvodových a úsekových úhlech platí $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle DEX| = \alpha$ a $|\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle CEX| = \beta$. Proto $|\sphericalangle DEC| = \alpha + \beta$. Pomocí součtu všech vnitřních úhlů v trojúhelníku ABV pak dostáváme $|\sphericalangle AVB| = 180° - \alpha - \beta$. To ale znamená, že $|\sphericalangle DEC| + |\sphericalangle AVB| = 180°$, což dokazuje, že čtyřúhelník $ECVD$ je tětivový.

8. Podle kosinové věty platí

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \Rightarrow \quad b = 14\,\text{cm}\,.$$

Užitím sinové věty v základním tvaru pak dostáváme

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \doteq 12°22'\,.$$

Poznamenejme, že výsledek je zde jednoznačný (hodnota $\alpha \doteq 167°38'$ nevyhoví), neboť díky tomu, že úhel β je tupý, musí být úhel α ostrý. Užitím trigonometrického vzorce pro obsah trojúhelníku dále obdržíme

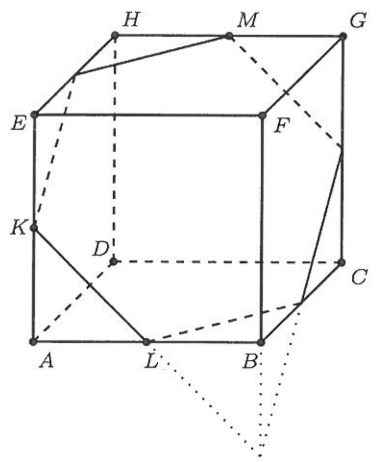
$$S = \frac{1}{2}ac\sin\beta \quad \Rightarrow \quad S = 15\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \doteq 26\,\text{cm}^2\,.$$

Poloměr r kružnice opsané trojúhelníku ABC získáme pomocí sinové věty v rozšířeném tvaru, např.

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{b}{2\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{14}{\sqrt{3}}\,\text{cm} \doteq 8,1\,\text{cm}\,.$$

Konečně užitím goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku dostaneme

$$\frac{v_c}{a} = \sin(180° - \beta) = \sin\beta \quad \Rightarrow \quad v_c = a\sin\beta = 3\sqrt{3}\,\text{cm} \doteq 5,2\,\text{cm}\,.$$



Obrázek 13.5: K řešení úlohy 9

9. Body K a L lze spojit, neboť oba leží v rovině přední stěny krychle. Dostáváme tím část řezu v této rovině. Bodem M vedeme rovnoběžku p s přímkou $\overleftrightarrow{KL}$ a

získáváme tak část řezu v rovině zadní stěny krychle. Přímka p protíná hranu CG v jejím středu. Abychom mohli sestrojit část řezu v pravé boční stěně krychle, potřebujeme v ní najít ještě další bod, který leží i v rovině řezu (tj. v rovině $\overleftrightarrow{KLM}$). Hledaný bod však leží v průsečíku přímek $\overleftrightarrow{KL}$ a $\overleftrightarrow{BF}$. Nyní již snadno řez dokončíme. Řezem je pravidelný šestiúhelník, který spojuje po řadě středy hran AE, AB, BC, CG, GH, EH. Délka jeho strany je $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, proto jeho obvod je $3\sqrt{2}a$ a pro obsah S vychází

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cdot \sin 60° = \frac{3}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Obsah rovnostranného trojúhelníku o straně délky $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ byl počítán užitím trigonometrického vzorce pro obsah trojúhelníku.

10. Dle zadání tvoří velikosti vnitřních úhlů hledaného n-úhelníku aritmetickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 90$ a diferencí $d = 12$. Pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí

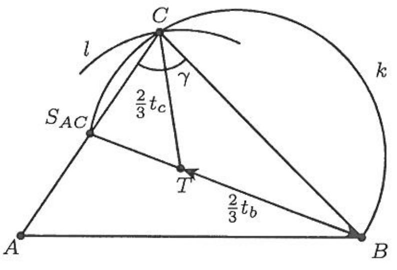
$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n\,, \tag{13.1}$$

kde $a_n = a_1 + (n-1)d$. Pro součet číselných hodnot velikostí všech vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku též platí

$$s_n = (n-2) \cdot 180\,. \tag{13.2}$$

Porovnáním pravých stran rovnic (13.1) a (13.2) a dosazením číselných hodnot dostaneme po úpravě rovnici $n^2 - 16n + 60 = 0$, která má kořeny $n_1 = 6$ a $n_2 = 10$. Provedením zkoušky zjišťujeme, že vyhoví pouze první hodnota, protože v desetiúhelníku by existovaly hned dva úhly, které by byly větší než 180°. Zadání úlohy vyhoví pouze šestiúhelník (s vnitřními úhly 90°, 102°, 114°, 126°, 138° a 150°).

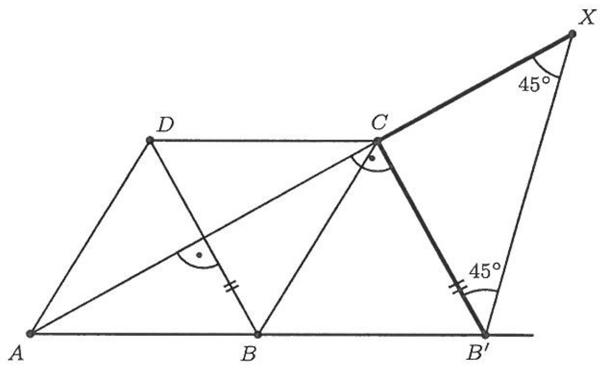
11. Uvažme trojúhelník $S_{AC}BC$, kde S_{AC} značí střed strany AC. Na úsečce $S_{AC}B$ leží těžiště T trojúhelníku ABC a to tak, že platí $2\,|S_{AC}T| = |TB| = \frac{2}{3}t_b$. Navíc $|TC| = \frac{2}{3}t_c$ a $|\sphericalangle S_{AC}CB| = \gamma$. Trojúhelník $S_{AC}BC$ lze tedy sestrojit.



Obrázek 13.6: K řešení úlohy 11

Začneme úsečkou $S_{AC}B$, na které najdeme (např. pomocí redukčního úhlu) polohu těžiště T. Bod C pak musí ležet na množině všech bodů, z nichž je vidět úsečku $S_{AC}B$ pod úhlem γ (kruhový oblouk k) a na kružnici $l\,(T; \frac{2}{3}t_c)$. Bod A pak získáme jako obraz bodu C ve středové souměrnosti se středem S_{AC}. Počet průsečíků k a l pak rozhoduje o počtu řešení. Úloha tedy může mít ve zvolené polorovině 0 až 2 řešení.

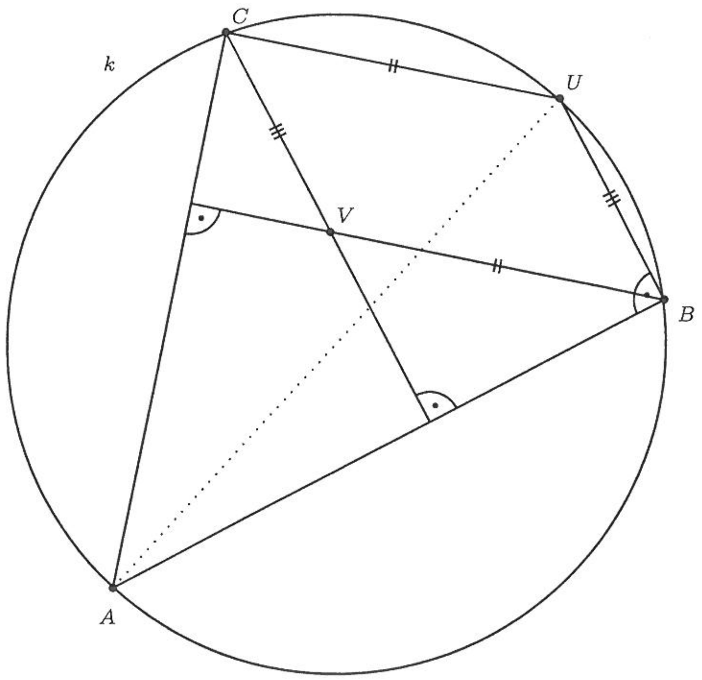
12. Úsečku DB zobrazme v posunutí o vektor $\overrightarrow{AB}$ do úsečky CB'. Platí tedy $|DB| = |CB'| = f$, přičemž $DB \parallel CB'$. Neboť $AC \perp BD$ (úhlopříčky v kosočtverci jsou na sebe kolmé), plyne ze zmíněné rovnoběžnosti i kolmost úseček AC a CB'. Na polopřímce opačné k polopřímce $\overrightarrow{CA}$ ještě uvažme bod X tak, aby platilo $|CX| = |CB'|$. Trojúhelník CXB' je tedy pravoúhlý a rovnoramenný, což znamená, že $|\sphericalangle CXB'| = |\sphericalangle AXB'| = 45°$. Vzhledem k tomu, že úhlopříčky v kosočtverci půlí jeho vnitřní úhly, platí i $|\sphericalangle XAB'| = \frac{\alpha}{2}$. Trojúhelník AXB' tedy můžeme sestrojit podle věty *usu*.



Obrázek 13.7: K řešení úlohy 12

Bod B najdeme jako střed úsečky AB'. Bod C pak sestrojíme například jako průsečík osy úsečky XB' s úsečkou AX. Konečně bod D lze získat posunutím bodu C o vektor $\overrightarrow{BA}$. Veškeré konstrukce byly jednoznačné, úloha má vždy jediné řešení.

13. Označme k kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Neboť trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží bod U na k uvnitř toho oblouku BC, který neobsahuje bod A. Podle Thaletovy věty jsou úhly $\sphericalangle UCA$ a $\sphericalangle UBA$ pravé. Jelikož výška BV je kolmá na stranu AC, platí $BV \parallel UC$. Analogicky lze ukázat, že $CV \parallel UB$, takže $BUCV$ je rovnoběžník. Odtud již plyne konstrukce. Zadaný trojúhelník UCV doplníme na zmíněný rovnoběžník $BUCV$, bod A pak sestrojíme jako průsečík kolmice k přímce BV procházející bodem C a kolmice k přímce CV procházející bodem B. Snadno se ověří, že takto sestrojený trojúhelník má všechny požadované vlastnosti. Úloha má za zadaných podmínek právě jedno řešení.



Obrázek 13.8: K řešení úlohy 13