

Jan Paseka

Matematická ekonomie

Učební texty



Úvod

Matematickou ekonomii bychom mohli definovat jakožto oblast vědy, která *obsahuje různé aplikace matematických pojmů a technik pro ekonomii, zejména pak pro ekonomické teorie*. Alternativní přístup pak je, že provedeme výčet všech součástí matematické ekonomie.

V tomto úvodu je historie matematické ekonomie rozdělena do tří širokých a částečně se překrývajících období: období marginalistů (1837-1947), období množinově-teoretických/lineárních modelů (1948-1960) a současné období integrace (1961-nyní).

1. Období marginalistů: 1838-1947

Počáteční období matematické ekonomie bylo to, ve kterém si ekonomie vypůjčila metodologii přírodních věd a nástroje matematiky, aby vyvinula formální teorii založenou na matematické analýze. Za předpokladu dostatečně hladkých funkcí (např. funkce užitečnosti a výrobní funkce) a maximalizujícího chování účastníků byla vyvinuta dostatečně úplná teorie chování mikroekonomických agentů a teorie obecné rovnováhy.

Základním prostředkem byl kalkulus - tj. diferenciální a integrální počet, zejména použití totální a parciální derivace a metody Lagrangeových multiplikátorů pro charakterizaci maxim. Zároveň byly v tomto období vyvinuty moderní teorie spotřeby, výroby, oligopolu a obecné rovnováhy.

Původní prací, kterou můžeme považovat za počáteční bod matematické ekonomiky, byla Cournotova práce z roku 1838. Cournotův přínos lze rozdělit na dva hlavní směry: teorie podniků - firem a interakce firem a spotřebitelů v jednoduché tržní ekonomice. Cournotova základní hypotéza byla, že firmy si vybírají tak, aby

maximalizovaly svůj zisk. Cournot studoval a přesně definoval případy dokonalé soutěže a monopolu. Zároveň zavedl rovnost mezi nabídkou a poptávkou v jednoduché tržní ekonomice a studoval problém oligopolu, kde je omezena soutěživost prodávajících. Cournotovo řešení oligopolu zůstalo standardním přístupem a jeho vhodné zobecnění hraje důležitou roli v teorii her.

Teorie firmy: Cournotova maximalizační hypotéza byla rozšířena v rámci zkoumání výrobní funkce v poslední čtvrtině 19. století tak, že mohla vzniknout úplná teorie poptávky po vstupech a nabídky výstupů. Vývoj byl sdílen mnoha autory jako jsou např. Walras (1874), Wicksteed (1894), Wicksell (1893) a J.B. Clark (1889).

Teorie spotřebitele: Rozvoj teorie spotřebitele závisící na maximalizaci funkce užitečnosti při omezeném rozpočtu spotřeby byl započat v roce 1854 Gossenem a dále studován Jevonsem (1871), Walrasem (1874) a dále dopracován Marshalllem (1890). Úplné odvození vlastností funkce užitečnosti bylo provedeno Slutským (1915) a dále studováno Hicksem a Allenem (1934) aj. Základy teorie užitečnosti byly prohloubeny několika způsoby: nahrazení kardinální užitečností ordinální přináležející Fisherovi (1892) a Paretovi (1909); axiomatizace kardinální užitečnosti je dílem Frische (1926, 1932) a Alta (1936); přístup pomocí preferencí byl započat Samuelsonem (1938) a dále rozvíjen Houthakkerem (1950) a Uzawou (1960).

Obecná rovnováha: Základní pojetí, že trhy jsou ve vzájemném vztahu a že proto je rovnovážný stav ekonomie charakterizován současně existující rovností mezi nabídkou a poptávkou na všech trzích, přináležejí Walrasovi (1874). Toto pojetí bylo dále rozvinuto a vyloženo Paretem (1896, 1909). To, že rovnovážný stav může být dosažen, bylo dokázáno tím, že počet rovnic byl rovný počtu neznámých (viz Marshall (1890)). Optimalita konkurenční rovnováhy byla diskutována jak Walrasem tak Paretem.

Stabilita rovnováhy: V případě rovnováhy jednoduchého trhu byly podmínky stability diskutovány Cournotem (1838) a Marshalllem (1890). Otázky stability obecné rovnováhy byly diskutovány rozsáhle Walrasem (1874). První diskuse z přesného pohledu se objevila v Hicksovi (1939a) a Samuelsonem (1941). Z posledních prací jmenujme práce Arrowa, Hahna, Hurwicze aj.

Optimální alokace zdrojů: První systematický výpočet užitků a nákladů přináležejí Dupuitovi (1844). Jasná definice optimality v případě mnoha účastníků byla podána Paretem (1909). Charakterizace optimálních a

částečně optimálních stavů je nyní známa jakožto tzv. ekonomie blahobytu, tuto syntézu provedli Hotelling, Bergson a Hicks. Speciální problém optimalizace v čase byl poprvé studován Ramseyem (1928) a následovně Hotellingem (1931).

Zobecněné vyjednávání: Edgeworth (1881) jakožto první studoval výstupy ekonomie, ve které mohly být realizovány všechny druhy dohod o zboží, nikoliv toliko ty možné v cenovém systému. Množina možných výstupů se nazývala *smluvní křivka*. Obecná verze tohoto pojmu, nyní známá jakožto *jádro*, byla dále studována v plné obecnosti v teorii her.

Vyvrcholení školy marginalistů založené na kalkulu, které zkombinovalo mnoho předcházejících výsledků s novějším vývojem, lze najít ve dvou klasických knihách, které jsou stále velmi důležité: Hicks (1946) a Samuelson (1947).

2. Období množinově teoretického/lineárního modelu: 1948-1960

Období množinově teoretického/lineárního modelu bylo období po 2. světové válce, ve kterém byl dřívější kalkul matematické analýzy nahrazen množinově-teoretickými základy a lineárními modely. Použití teorie množin znamená větší obecnost v tom, že klasické předpoklady hladkosti funkcí mohly být nahrazeny podstatně obecnějšími funkcemi. Použití lineárního modelu znamená zacházení s pojmy, které nešlo vyjádřit pomocí hladkých funkcí, tj. např. vrcholy polyedrů.

Tento nový přístup byl ve skutečnosti započat důležitým článkem von Neumanna (1937) v období ekonomického růstu. Přitom v tomto článku je metodologie podstatně důležitější než jeho obsah. Jiná práce, která hrála důležitou roli v rozvoji množinově-teoretického přístupu byla Arrowova kniha o axiomatizaci teorie sociálního výběru a individuálním ohodnocení (1951). Byly v ní použity množinově-teoretické metody, které umožnily vytvoření systému pro studium problémů obecné teorie rovnováhy.

Dva z velmi důležitých článků pro rozvoj teorie obecné rovnováhy byly Wald (1933-34), který provedl první přesnou analýzu obecné rovnováhy, a Arrow s Debreuem (1954), kteří pomocí množinově-teoretických prostředků formulovali problém existence konkurenční rovnováhy a dokázali její existenci za patřičných podmínek. Problém existence byl dále analyzován McKenziem, Galem, Nikaidou a Debreuem. Důležitým nástrojem byla Kakutanioho věta o pevném bodě (1941) – zobecnění Brouwerovy věty o pevném bodě.

V rámci teorie spotřebitele byly pro další axiomatický rozvoj důležité články Debreua a Radera. Aplikace množinově-teoretických pojmů kulminovala pak v klasické Debreuově knize (1959) a jejíž úloha je srovnatelná s pracemi Samuelsona a Hickse pro klasické období.

Lineární model pro meziodvětvové vztahy byl vyvinut Leontievem (1941, 1966). Další příbuzné aktivity na tomto poli patří Koopmansovi, Morgensternovi a Kantorovičovi. Dále byl studován von Neumannův mnohaodvětvový model růstu. Tento model hrál důležitou roli jak v obecné teorii rovnováhy tak v teorii růstu. Zároveň bylo v tomto období vyvinuto lineární programování, vycházející z prací Dantziga. Tento přístup kulminoval v pracích Dorfmana, Samuelsona, Solowa a Galeho. Tyto práce přitom neobsahovaly pouze lineární programování, nýbrž lineární modely obecné rovnováhy a lineární růstové modely. Jedním z nejdůležitějších modelů je pak Malinvaudův model akumulace kapitálu.

Teorie her byla rovněž založena na analýze lineárních modelů. Její počátky se datují k von Neumannovi (1928), ale základní vývoj se objevil v práci von Neumanna s Morgensternem (1947) a Nashe (1950).

3. Současné období integrace: 1961-nyní

Současné období je obdobím integrace, ve kterém moderní matematická ekonomie kombinuje prvky kalkulu, teorie množin a lineárních modelů. Je zároveň obdobím, ve kterém byly matematické idee rozšířeny potencionálně do všech oblastí ekonomie. V současné době jsou mnohé odvětví matematické ekonomie ve vývoji a tento vývoj se ukazuje být nanejvýš přínosným. Zmiňme mj. 11 důležitých témat ve vývoji v této etapě.

(1) *Nejistota a informace*: Toto téma sestává z teorie averze k riskování (viz práce Pratta a Arrowa); rovnovážný stav při nejistotě (viz práce Diamonda a Radnera); mikroekonomické aplikace (viz práce McCalla); pojištění dle Borche aj.

(2) *Globální analýza*: Toto téma obsahuje matematické metody, které kombinují kalkulus a topologii, a jsou použity ke studiu vlastností ekonomických rovnovážných stavů a jejich změně v dané ekonomii. Debreu (1970) byl průkopníkem v tomto studiu za podmínek, že máme pouze konečný počet rovnovážných stavů.

(3) *Teorie duality*: Tato teorie používá a kombinuje množinově-teoretické metody a metody kalkulu, zejména v mikroekonomice. Připomeňme mj. práce Hotellinga, Roye, McKenzieho, Shepharda, Samuelsona a Diewerta.

(4) *Agregovaná funkce poptávky*: Teorie spotřebitele ukazuje, že funkce poptávky jednotlivců maximalizujících užitek musí splňovat jisté omezující podmínky. Sonnenschein (1973) jako první podal argument, že agregované funkce poptávky nejsou omezeny podmínkou, že individuální funkce poptávky vznikají z maximalizace užitku. Dále zmiňme práce Mantela (1974) a Debreua (1974).

(5) *Jádro ekonomie a trhy s kontinuem obchodníků*: Intuitivní pojem velkého počtu obchodníků spolu s předpokladem dokonalé soutěže vedl k tomu, že počet obchodníků konverguje k nekonečnu nebo že máme kontinuum obchodníků. Připomeňme práce Shubika (1959), Scarfa a Debreua (1962) aj.

(6) *Dočasná rovnováha*: Pojem dočasné rovnováhy byl zaveden Hicksem (1939). V takovéto rovnováze se obchod uskutečňuje sekvencionálně tak, že každý účastník předpovídá svůj budoucí zisk na základě současného a minulého stavu ekonomie. Rovnováha může obsahovat všechny ceny pohybuující se dostatečně rychle k vyprodání všech trhů, nebo jinak řečeno dovolí přidělový systém.

(7) *Výpočet rovnovážných cen*: To je speciální případ výpočtu pevných bodů zobrazení, pro která je pevný bod interpretován jako rovnovážný cenový vektor, přičemž získané rozdělení je přijatelné, pokud se vyprodají všechny trhy. Hlavní práce jsou Scarf (1967, 1973).

(8) *Teorie sociálního výběru*: Teorie sociálního výběru se zabývá agregací preferencí jednotlivců do sociálního výběru. Základy byly položeny Arrowem (1951), v této knize jsou položeny základní kameny teorie a dokázány věty o možnosti resp. nemožnosti takového výběru.

(9) *Optimální zdanění*: První práce z této oblasti patří Ramseyovi (1937) a Hotellingovi (1938), nejdůležitější články pak Boiteuxovi (1956), Mirrleesovi (1971) a Diamondovi s Mirrleesem (1971).

(10) *Teorie optimálního růstu*: Toto téma bylo studováno zejména Samuelsonem se Solowem (1956), Samuelsonem (1965), Koopmansem, Galem a dalšími. Původně byl tento problém formulován jakožto problém optimálních úspor Ramseyem (1928). Tento problém byl pak zobecněn a zkombinován s meziodvětvovým modelem růstu. Matematické základy jsou založeny na teorii dynamických systémů a teorii řízení.

(11) *Teorie organizování*: Tato oblast obsahuje teorii týmové práce, decentralizace, plánování a problém stimulace. Z novějších prací připomeňme práce Marschaka a Hurwicze.

Tento učební text si neklade žádné nároky na úplnost či původnost. Případné komentáře či kritické připomínky k textu očekávám nejlépe na e-mailové adrese

`paseka@math.muni.cz`

či jinou formou. Text je průběžně doplňován a měněn a je umístěn k volnému použití na ftp serveru oboru matematika PřF MU. Části textu jsou tvořeny referáty zpracovanými studenty Pavel Janík ml., Monika Ryn-
dová, Libuše Tománková v rámci stejnomenné přednášky na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. Veškerá zodpovědnost za styl a obsah je na autorovi.

Obsah

1	MATEMATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ S APLIKACEMI V EKONOMII	17
1	Úvod a přehled	17
2	Úloha matematického programování a způsoby jejího řešení	18
2.1	Weierstrassova věta	19
2.2	Věta o lokálním a globálním maximu	20
3	Úloha bez omezení	21
3.1	Věta o podmínkách prvního řádu	21
3.2	Věta o podmínkách 2. řádu	22
3.3	Věta o postačujících podmínkách	22
3.4	Příklad : Kvadratické účelové funkce	23
4	Klasické programování: Lagrangeovy multiplikátory	24
4.1	Věta o Lagrangeových multiplikátorech	24
4.2	Věta o ohraničené Hessově matici	27
4.3	Věta o postačujících podmínkách pro klasické programování	28
4.4	Příklad: Kvadraticko-lineární úloha	29
5	Nelineární programování - Kuhn-Tuckerovy podmínky	30
5.1	Věta o Kuhn-Tuckerových podmínkách	31

5.2	Věta Kuhn-Tuckera o sedlovém bodě	34
5.3	Příklad: Úloha kvadratického programování	35
6	Lineární programování	36
6.1	Věta o existenci	38
6.2	Věta o dualitě	38
6.3	Slabá doplňující věta	38
7	Mikroekonomie: matematické programování a teorie srovnávací stability	39
7.1	Věta srovnávací stability	40
8	Neoklasická teorie domácnosti	43
8.1	Věta o poptávce	45
8.2	Slutského věta	47
9	Neoklasická teorie firmy	49
9.1	Věta o nabídce	51
9.2	Teorie srovnávací stability firmy	52
10	Závěry	55
2	Teorie spotřebitele	57
1	Komodity a ceny	57
2	Spotřebitelé	58
3	Preference	59
4	Funkce užitečnosti	63
5	Vlastností preferencí a funkcí užitečnosti	65
5.1	Monotonie, nenasycenost a konvexnost	66
5.2	Separabilita	67
5.3	Spojité poptávka	69
5.4	Poptávka bez tranzitivity	71

5.5	Poptávka za předpokladů separability	73
6	Funkce nákladů a nepřímé funkce užítku	74
7	Vlastnosti diferencovatelné funkce užítku	77
7.1	Diferencovatelná poptávka	83
3	Teorie ekonomické rovnováhy	87
1	Základní pojmy	87
1.1	Prostor komodit	87
1.2	Cenový prostor	88
1.3	Agenti	88
1.4	Existence rovnováhy	89
1.5	Walrasův zákon	90
1.6	Aproximace vícehodnotových zobrazení	91
1.7	Vlastnosti konvexních množin a obalů	92
2	Výrobce	95
2.1	Úvod	95
2.2	Vlastnosti produkčních množin	96
2.3	Maximalizace zisku	97
3	Spotřebitel	98
3.1	Úvod	98
3.2	Vlastnosti spotřebních množin	98
3.3	Preference spotřebitele	99
3.4	Užitková funkce	100
3.5	Rozpočtové omezení	100
3.6	Rovnováha spotřebitele	101
4	Rovnováha ekonomiky	102
4.1	Definice rovnováhy	102

4.2	Arrowova-Debreuova věta	103
4	Globální analýza a ekonomie	127
1	Existence rovnovážného stavu	127
2	Ekonomika úplné směny: existence rovnovážného stavu	142
3	Paretova optimalita	151
4	Základní věta ekonomiky blahobytu	157
5	Existence rovnováhy v konkurenční ekonomice	167
1	Úvod	167
2	Simultánní optimalizační přístup	168
3	Přebytek poptávky	190
6	Dynamické systémy s aplikacemi v ekonomii	203
1	Základní pojmy	203
1.1	Dynamický systém v R^n	203
1.2	Dynamické systémy na varietách	205
2	Základní nástroje	207
2.1	Existence, jednoznačnost a spojitost řešení	208
2.2	Existence rovnováhy	209
2.3	Jednoznačnost rovnováhy	210
2.4	Lokální stabilita rovnováhy	212
2.5	Globální stabilita rovnováhy	213
2.6	Existence cyklů	215
3	Některé speciální druhy dynamických systémů	216
3.1	Systémy gradientů	216
3.2	Hamiltonovské systémy	219
4	Některé nové techniky	220

4.1	Strukturální stabilita	220
4.2	Teorie katastrof	221
7	Dualita v mikroekonomii	223
1	Úvod	223
2	Dualita mezi nákladovou (výdajovou) a produkční (užitkovou) funkcí: Zjednodušený pohled	225
3	Dualita mezi nákladovými a agregačními (produkčními nebo užitkovými) funkcemi	243
4	Dualita mezi přímými a nepřímými agregačními funkcemi	247
5	Dualita mezi přímými agregačními a distančními nebo deflačními funkcemi	252
6	Další věty o dualitě	255
7	Minimalizace nákladů a derivovaná poptávka po vstupech	260
8	Funkce zisku	264
9	Dualita a nesoutěživé přístupy k mikroekonomické teorii	269
9.1	První přístup: Problém monopolu	269
9.2	Druhý přístup: Problém monopsonu	270
9.3	Třetí přístup: Problém monopolu jinak	272
9.4	Čtvrtý přístup: Problém monopolu ještě jednou	273
9.5	Historické poznámky	274
10	Závěr	275
8	Teorie výroby	277
1	Technologie výroby	278
1.1	Vlastnosti množiny produkčních technologií a produkční funkce	278
1.2	Neoklasická teorie firmy	279
2	Škálování, substitute faktorů, technické změny: několik definic	284
2.1	Elasticita substitute	288

2.2	Technický pokrok	290
3	Vlastnosti produkčních funkcí a dualita	291
3.1	Homogenita, aditivita a separabilita	292
3.2	Funkční separabilita produkčních funkcí	293
3.3	Dualita produkční technologie a nákladové a ziskové funkce	295
3.4	Nějaké definice a vlastnosti nákladové funkce	295
3.5	Aplikace principů duality: Zisková a nákladová funkce	298
4	Funkcionální forma produkční funkce: Agregace zásoby kapitálu	304
4.1	Tvary produkčních funkcí	304
4.2	Agregace zásoby kapitálu : Spor Cambridge – Cambridge	316

9 Teorie oligopolu 323

1	Prvopočátky studia oligopolu - modely s jedním obdobím	324
1.1	Cournotův model	324
1.2	Nový důkaz o existenci a jednoznačnosti Cournotovy rovnováhy	331
1.3	Bertrandova kritika	334
1.4	Diferencovaný produkt s cenami jako proměnnými - Chamberlinova modifikace	335
1.5	Kooperativní versus nekooperativní rovnováhy	342
2	Stabilita a reakční funkce - první kroky směrem k modelům více období	343
2.1	Cournotovy reakční křivky a Bowleyho hypotetická variace	344
2.2	Behaviorální hypotézy Sweezyho a Stackalberga	345
3	Dynamické modely	349
3.1	Zpožděné funkčně reakční modely	349
3.2	Modely s rychlou reakcí (odezvou) nebo náklady na dohodu	355
3.3	Model upřednostňující spolupracující rovnováhy bez kartelů	360
3.4	Modely se strukturou závislou na čase	362
4	Oligopoly a teorie her	363

5	Vstup a výstup v modelech oligopolu	363
6	Bilaterální monopol	365
7	Oligopol v modelech všeobecné rovnováhy	366
7.1	Základy teoretického přístupu	366
10	MODELY A METODY TEORIE HER V POLITICKÉ EKONOMII	369
1	Metody modelování	369
1.1	Preference, užitek a výnos	370
1.2	Extenzivní forma	370
1.3	Hry v normálním tvaru	373
1.4	Hry ve formě charakteristické funkce nebo v koaliční formě	375
1.5	Kontinua strategií, času, hráčů a zboží	379
2	Řešení	380
2.1	Předběžná řešení	380
2.2	Řešení při spolupráci	384
2.3	Řešení hry s nekooperujícími hráči	393
2.4	Jiná řešení	395
3	Aplikace	397
3.1	Oligopolní trh	397
3.2	Duopoly	398
3.3	Oligopoly	399
3.4	Bilaterální monopol a vyjednávání	401
3.5	Simulace hrou	403
3.6	Aukce a nabídka	404
3.7	Řešení, tržní hry a cenový systém	405
3.8	Veřejné statky, externality, ekonomika blahobytu	405
3.9	Peníze a finanční instituce	406

3.10	Další aplikace	407
------	--------------------------	-----

Literatura		407
-------------------	--	------------

Kapitola 1

MATEMATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ S APLIKACEMI V EKONOMII

1 Úvod a přehled

Matematické programování se vztahuje k základnímu matematickému problému maximalizace funkce *. Podstata tohoto problému a způsoby jeho řešení jsou diskutovány v části 2. Historicky má tento problém kořeny v rozvoji početních metod. Odtud tedy jeho první využití bylo ve zpracování nejjednoduššího typu matematického programování, a sice hledání nevázaného extrému (maximalizace), což je probráno v části 3. Základní motivací pro další rozvoj početních metod byla snaha vyřešit obecnější úlohu mat. programování. To se často nazývá úloha *klasického programování*, ve které se hledá maximum funkce při omezení množinou rovnic. Některé úlohy matematického programování, které byly ovlivněny studiem ekonomických problémů se však nepodařilo vyřešit ani ve 20. století. Mezi tyto úlohy například patří *úlohy nelineárního matematického*

*Úlohy jsou zde řešeny jako maximalizace funkce. Pokud chceme funkci minimalizovat, stačí pouze změnit znaménko funkce a jinak postupovat stejně.

programování kde se hledá maximum funkce při omezení množinou nerovnic, viz část 5. Speciální případ, důležitý sám o sobě, a který měl značný vliv na rozvoj teorie matematického programování, je *úloha lineárního programování* tj. maximalizace lineární funkce při omezení množinou lineárních nerovnic, viz část 6.

Aplikace matematického programování má širší uplatnění, např. v ekonomii našla řadu uplatnění. Vedla také k různým srovnávacím analýzám stability, které sloužily k porovnávání její účinnosti. Matematické programování vedlo zejména k hlubšímu náhledu do oblasti *mikroekonomie*, jak je dále diskutováno v části 7. Aplikace matematického programování jsou rozděleny do dvou úseků, na *neoklasickou teorii domácností* v části 8 a *neoklasickou teorii firmy* v části 9.

Kromě použití v základní matematické teorii (část 2 - 6) a aplikacích v ekonomii (část 7 - 8), má také matematické programování využití v jiných oblastech (např. fyzika, chemie, aj.). O těch se zde však nebudeme zmiňovat, odkaz na ně je možné najít v literatuře citované na konci. Také opomineme různá specifika matematického programování, jako je celočíselné programování, vícekritériální programování, odkaz je opět uveden v literatuře.

2 Úloha matematického programování a způsoby jejího řešení

Obecná forma *úlohy matematického programování* může být zapsaná ve tvaru:

$$\max_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

kde \mathbf{x} je sloupcový vektor n vybraných proměnných,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)', \quad (2.2)$$

$F(\mathbf{x})$ je funkce reálných proměnných,

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.3)$$

a X je podmnožina n -rozměrného euklidovského prostoru,

$$X \subseteq E^n. \quad (2.4)$$

Obecně budeme předpokládat, že X je neprázdná, tj., že existuje *přípustný* vektor \mathbf{x} , kde \mathbf{x} je přípustný právě tehdy, když $\mathbf{x} \in X$. V ekonomii se vektor \mathbf{x} často nazývá *vektor nástrojů*, funkce $F(\mathbf{x})$ *účelová funkce* a množina X *množina příležitostí*.

Základní ekonomický problém alokace vzácných zdrojů mezi navzájem si konkurujícími potřebami může být interpretován jako problém matematického programování, kde jednotlivá alokace zdroje je reprezentována příslušným výběrem vektoru nástrojů; vzácnost zdrojů je reprezentována množinou příležitostí, odrážející omezenost nástrojů. Potřeby jsou reprezentovány účelovou funkcí, jejichž výsledky jsou hodnoty příslušné ke každé alternativní alokaci. Funkce 2.1 může být tudíž interpretována v ekonomickém jazyku, jako výběr nástroje v rámci množiny příležitostí, tedy jako maximalizace účelové funkce. Existuje více způsobů řešení problému 2.1. *Globální maximum* funkce F je vektor \mathbf{x}^* takový, že

$$\mathbf{x}^* \in X \quad \text{a} \quad F(\mathbf{x}^*) \geq F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X \quad (2.5)$$

Řešení je tedy vektor nástrojů, získaný jako hodnota účelové funkce, která je větší nebo rovna než hodnota v libovolném jiném vektoru nástrojů. *Ostré globální maximum* je vektor \mathbf{x}^* , který splňuje:

$$\mathbf{x}^* \in X \quad \text{a} \quad F(\mathbf{x}^*) > F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*. \quad (2.6)$$

2.1 Weierstrassova věta

Věta 2.1 Weierstrassova věta

Je-li funkce $F(\mathbf{x})$ spojitá a množina X je uzavřená a ohraničená tj. kompaktní a navíc neprázdná, pak existuje globální maximum.

Důkaz. Důkaz této věty je založen na faktu, že obraz X v zobrazení F je definován jako

$$F(X) = \{F(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\}, \quad (2.7)$$

což je uzavřená a ohraničená množina na reálné ose, a tedy musí obsahovat i maximální prvek, což je $F(\mathbf{x}^*)$. Měli by jsme však dát pozor na to, že podmínky věty jsou dostatečné, ale ne nutné pro existenci maxima. Maximum tedy může existovat, aniž jsou tyto podmínky splněny. (Např. maximalizace x^2 na intervalu $0 < x \leq 2$ má řešení). Weirstrassova věta může být zesílena za předpokladu, že $F(\mathbf{x})$ bude shora polospojitá. ■

2.2 Věta o lokálním a globálním maximu

Lokální maximum je vektor $\mathbf{x}^* \in X$ takový, že existuje nějaké $\varepsilon > 0$, přičemž

$$F(\mathbf{x}^*) \geq F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X \cap N_\varepsilon(\mathbf{x}^*). \quad (2.8)$$

Zde $N_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ je nějaké ε -okolí bodu \mathbf{x}^* . Maximum je lokální, poněvadž vektor nástrojů získaný jako hodnota účelové funkce není menší než hodnota v jakémkoliv jiném bodě náležejícím X a dostatečně blízko (tj. v $N_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$). Ostré lokální maximum je vektor $\mathbf{x}^* \in X$, který splňuje pro nějaké $\varepsilon > 0$

$$F(\mathbf{x}^*) > F(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in X \cap N_\varepsilon(\mathbf{x}^*), \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*. \quad (2.9)$$

Zřejmě, globální maximum je zároveň lokální (což však neplatí obráceně). Ostré (globální, resp. lokální) maximum je také (globální resp. lokální) maximum, opět to neplatí obráceně. Ostré lokální maximum je jednoznačně určeno.

Věta 2.2 Věta o lokálním a globálním maximu *Je-li účelová funkce $F(\mathbf{x})$ konkávní funkce a množina příležitostí X konvexní množina, pak každé lokální maximum je i zároveň globální a množina všech takovýchto řešení je konvexní. Je-li navíc $F(\mathbf{x})$ ostře konkávní funkce, pak řešení je jediné. Je-li $F(\mathbf{x})$ ostře*

kvazikonkávnní, je lokální maximum jediné a zároveň globální[†].

Věta 2.2 je velice důležitá, neboť prakticky všechny metody řešící úlohu matematického programování spíše identifikují lokální než globální maximum. S použitím této věty je možné usuzovat na základě vlastností konkávnosti a konvexity, že lokální optimum je také globální.

3 Úloha bez omezení

Úloha maximalizace bez omezení je ta, že vybereme hodnoty z n proměnných tak, že maximalizujeme funkci F těchto proměnných:

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

V tomto případě je množina příležitostí X (z 2.1) celý prostor E^n (nebo otevřená podmnožina E^n).

3.1 Věta o podmínkách prvního řádu

Věta 3.1 Věta o podmínkách prvního řádu *Je-li $F(\mathbf{x})$ diferencovatelná funkce, pak nutné podmínky prvního řádu proto, aby bod \mathbf{x}^* byl bodem lokálního maxima funkce $F(\mathbf{x})$ jsou, že \mathbf{x}^* je stacionární bod funkce $F(\mathbf{x})$, ve kterém jsou všechny první parciální derivace nulové.*

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*), \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \right) = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

[†]Funkce $F(\mathbf{x})$ je kvazikonkávnní funkce právě tehdy, když pro $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$, kde $F(\mathbf{x}^1) \geq F(\mathbf{x}^2)$ platí $F(\alpha \mathbf{x}^1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}^2) \geq F(\mathbf{x}^2)$ pro všechna α , $0 \leq \alpha \leq 1$. Funkce F je ostře kvazikonkávnní právě tehdy, když pro $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X, \mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$, kde $F(\mathbf{x}^1) \geq F(\mathbf{x}^2)$ platí stejná nerovnost jako pro kvazikonkávnní funkci, ale ostrá, pro všechna $\alpha, 0 < \alpha < 1$. Všimněme si, že konkávnní funkce je kvazikonkávnní, ale kvazikonkávnní funkce nemusí být konkávnní.

$(\partial F/\partial \mathbf{x})(\mathbf{x}^*)$ je vektor gradientů tj., $(1 \times n)$ řádkový vektor všech 1. parciálních derivací $F(\mathbf{x})$ a $\mathbf{0}$ je $(1 \times n)$ -rozměrný vektor nul. Tedy, je-li $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ lokální maximum, pak

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Důkaz. Důkaz této věty může být proveden pomocí Taylorova rozvoje pro hodnotu funkce kolem x^* . ■

3.2 Věta o podmínkách 2. řádu

Věta 3.2 Věta o podmínkách 2. řádu Je-li $F(\mathbf{x})$ spojitě diferencovatelná do 2. řádu, pak podmínka nutná proto, aby \mathbf{x}^* byl bodem lokálního maxima funkce $F(\mathbf{x})$, je, že příslušná Hessova matice typu $(n \times n)$ a tvaru

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

je v bodě x^* negativně semidefinitní.

Důkaz. Důkaz může být opět proveden pomocí Taylorova rozvoje. ■

3.3 Věta o postačujících podmínkách

Věta 3.3 Je-li funkce $F(\mathbf{x})$ spojitě diferencovatelná do 2. řádu a podmínky 1. řádu jsou splněny pro vektor gradientů 3.2 a navíc platí zesílené podmínky 2. řádu tj. 3.4 je negativně definitní, pak \mathbf{x}^* je (ostré) lokální maximum pro $F(\mathbf{x}^*)$.

Důkaz. V důkazu opět využijeme Taylorovu větu. ■

■

Tyto tři podmínky uvedené pro úlohu bez omezení jsou analogické pro úlohu s omezením, která je diskutována v části 4 a 5.

3.4 Příklad : Kvadratické účelové funkce

Jako příklad úlohy bez omezení si uvedeme maximalizaci *kvadratické účelové funkce*

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j, \quad (3.5)$$

kde \mathbf{c} je n -rozměrný vektor a Q je symetrická matice řádu $(n \times n)$. První část účelové funkce je lineární $\mathbf{c}\mathbf{x}$, druhá část je kvadratická $\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x}$ (vydělená dvěma pro pozdější snadnější úpravy). Z nutné podmínky 2. řádu pro existenci lokálního maxima 3.2 dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c} + \mathbf{x}^{*'}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

Z nutných podmínek 2. řádu 3.4 dostáváme, že \mathbf{Q} je negativně semidefinitní. Z věty o postačujících podmínkách víme, že je-li \mathbf{Q} negativně definitní, pak \mathbf{x}^* je ostré lokální maximum. Tedy \mathbf{Q} je negativně definitní, pak $F(\mathbf{x})$ je ostře konkávní a \mathbf{x}^* je globální maximum. Mimo to, je-li \mathbf{Q} regulární, pak pro x^* dostáváme

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}'. \quad (3.7)$$

Maximum účelové funkce potom je

$$F(\mathbf{x}^*) = -\mathbf{c}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}' + \frac{1}{2}(\mathbf{c}\mathbf{Q}^{-1})\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}') = -\frac{1}{2}\mathbf{c}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}' > 0, \quad (3.8)$$

protože Q je negativně definitní.

4 Klasické programování: Lagrangeovy multiplikátory

Úloha klasického programování je ta, že vybereme hodnoty z n proměnných tak, že maximalizujeme funkci těchto proměnných na množině stejných omezení.

$$\max_x F(\mathbf{x}) \quad \text{pro} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \quad (4.1)$$

Tento vektor nástrojů \mathbf{x} a hlavní (cílová, účelová) funkce $F(\mathbf{x})$ jsou stejné, jako v 2.1, kde $F(\mathbf{x})$ je reálná funkce definovaná na E^n . Vektor reálných funkcí $g(\mathbf{x})$ je zobrazení z E^n do E^m , znázorňující m -omezené fce a sloupcový vektor \mathbf{b} je $m \times 1$ rozměrný vektor omezujících konstant,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

V termínech primárního (základního) problému 2.1 klasický problém matematického programování koresponduje s případem, ve kterém množina příležitostí může být zapsána jako

$$\begin{aligned} X &= \{\mathbf{x} \in E^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\} \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n)' \mid g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, i = 1, 2, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.1 Věta o Lagrangeových multiplikátorech

Popis řešení klasického problému programování, který je analogický s Větou o podmínkách 1. řádu pro neomezené úlohy, je získán pomocí Věty o Lagrangeových multiplikátorech. Pro tuto větu zavedeme řádkový vektor m -dodatečných nových proměnných nazývaných Lagrangeovy multiplikátory,

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m), \quad (4.4)$$

a to jeden pro každé dané omezení, *Lagrangeova funkce* je pak definována jako následující reálná funkce n -původních a m -přidaných proměnných,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= F(\mathbf{x}) + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m y_i (b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)), \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde poslední výraz je skalárním součinem řádkového vektoru Lagrangeových multiplikátorů a sloupcového vektoru složeného z rozdílu omezujících konstant a omezujících funkcí. Potom, v souladu s větou o Lagrangeových multiplikátorech, předpokládáme, že $n > m$ (kde $n - m$ je stupeň volnosti), $F(\mathbf{x})$ a $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ je $m + 1$ funkcí se spojitými prvními parciálními derivacemi a omezující podmínky jsou lineárně nezávislé v řešení, tj. jestliže \mathbf{x}^* je lokální maximum úlohy,

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \right) = \rho \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix} = m, \quad (4.6)$$

(tj. Jacobiho matice složená z 1. parciálních derivací omezujících funkcí rozměru $m \times n$ má plnou řádkovou hodnost), nutné podmínky 1. řádu tvoří pak $m + n$ nulovacích podmínek prvních parciálních derivací Lagrangeovy funkce $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (n \text{ podmínek}), \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (m \text{ podmínek}), \quad (4.8)$$

kde posledních m podmínek vyžaduje, aby omezení bylo nalezeno právě v \mathbf{x}^* .

Věta 4.1 Věta o Lagrangeových multiplikátorech *Je-li \mathbf{x}^* bod lokálního maxima (extrému), pak existuje m -rozměrný vektor Lagrangeových multiplikátorů \mathbf{y}^* takový, že dle 4.7 je gradient $F(\mathbf{x})$ v \mathbf{x}^* je lineární*

kombinací gradientů funkcí $g_i(\mathbf{x})$ v tomto bodě, přičemž Lagrangeovy multiplikátory budou koeficienty této lineární kombinace, a to

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^m y_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.9)$$

Důkaz. Tato věta je obvykle dokazována užitím věty o implicitní funkci. ■

■

Těchto n podmínek je analogických s podmínkami 1. řádu 3.2 nulování vektoru gradientu. Ve skutečnosti proto věta redukuje na Větu o podmínkách 1. řádu v případě, že $m = 0$, což je právě neomezený případ.

Druhá část věty o Lagrangeových multiplikátorech nám dává interpretaci těchto m dodatečných proměnných. Nezahrnuje jednu úlohu klasického programování, ale celou množinu takových úloh, které jsou charakterizovány omezujícími konstantami \mathbf{b} . Jestliže se některá z těchto konstant změní, změní se i hodnota maximalizující účelové funkce. Maximální hodnotu dostaneme jako

$$F^* = F(\mathbf{x}^*) = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*), \quad (4.10)$$

kde druhá rovnost vychází z faktu, že omezení vyhovují řešení 4.8. Lagrangeovy multiplikátory v jejich optimálních hodnotách \mathbf{y}^* měří stupeň přírůstku maximalizované hodnoty F^* , podle toho, jak se příslušné omezující konstanty mění,

$$\mathbf{y}^* = \partial F^* / \partial \mathbf{b} \quad \text{tj.} \quad y_i^* = \partial F^* / \partial b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.11)$$

Tedy každý Lagrangeův multiplikátor měří citlivost maximalizované hodnoty účelové funkce na změny příslušných omezujících konstant, přičemž celá další část úlohy zůstává stejná. V ekonomických úlohách, ve kterých F má rozměr hodnoty (cena x množství) zisku či důchodu a \mathbf{b} má rozměr množství jako vstup či výstup, Lagrangeovy multiplikátory \mathbf{b}^* interpretujeme jako cena, nazýváme ji *stínová cena*, z toho důvodu, abychom ji odlišili od tržní ceny. Měří přitom přírůstek hodnoty v případě změny omezení.

Geometrickou interpretaci a charakter řešení můžeme pro klasické programování získat přes Lagrangeovy multiplikátory. Rovnost omezení definuje množinu příležitostí X v 4.3, které za předpokladu 4.6 má rozměr $n - m$. Nezávislost předpokladu v 4.6 implikuje, že v řešení \mathbf{x}^* , každá směřnice $d\mathbf{x}$ vyhovující

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ tj. } \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) dx_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.12)$$

leží v tečné nadrovině k X v bodě \mathbf{x}^* . Gradienty vektorů omezujících funkcí $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)$ jsou ortogonální k této tečné nadrovině v bodě x^* . Podmínky 1. řádu 4.9 znamenají geometricky, že gradient vektoru účelové funkce $(\partial F/\partial x)(x^*)$, pro kterou funkční hodnoty bodů $F(\mathbf{x})$ ve směru gradientu zvětší směrem k x^* , je vážená kombinací gradientů vektorů omezujících funkcí, váhy jsou Lagrangeovy multiplikátory \mathbf{y}^* . Tedy $(\partial F/\partial x)(x^*)$ je také ortogonální k tečné nadrovině k X v bodě \mathbf{x}^* a to ve směru $d\mathbf{x}$ v tečné nadrovině,

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x} = \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x} = 0. \quad (4.13)$$

4.2 Věta o ohraničené Hessově matici

Analogií v případě klasického programování k větě o podmínkách 2.řádu pro neomezené problémy je věta o ohraničené Hessově matici. Podle této věty Hessova matice druhých partiálních derivací Lagrangeovy funkce

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

musí být negativně semidefinitní na množině vektorů $d\mathbf{x}$ určené splněním m podmínek

$$d\mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) d\mathbf{x} = 0, \quad (4.15)$$

kde (x^*, y^*) je bod lokálního maxima.

4.3 Věta o postačujících podmínkách pro klasické programování

Poslední analogií je věta o postačujících podmínkách. Podle věty o postačujících podmínkách pro klasické programování, jestliže je splněno $n + m$ podmínek 1.řádu 4.7 a 4.8 pro bod \mathbf{x}^* , potom zesílené podmínky ohraničené Hessovy matice, které zaručí, že Hessova matice v 4.14 je negativně definitní na množině určené 4.15, nám zajistí, že \mathbf{x}^* je bod lokálního maxima pro funkci $F(\mathbf{x})$ s m omezujícími podmínkami.

Ekvivalentně, podmínky vyžadují aby ohraničená Hessova matice, definovaná jako Hessova matice funkce $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ na všech proměnných

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}'}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \dots \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \dots \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \dots \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

kde $\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{x}$ je Jacobiho matice z 4.6, splní $n - m$ podmínek tak, že v posledních $n - m$ hlavních mineorch se střídají znaménka, přičemž znaménko prvního bude $(-1)^{m+1}$. Poznamenejme, že obě tyto věty, tato i předcházející, se redukuje na odpovídající věty pro neomezený případ, kdy $m = 0$.

4.4 Příklad: Kvadraticko-lineární úloha

Příklad klasického programování, který vychází z oddílu 3.4, je kvadraticko-lineární úloha:

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} \quad \text{pro} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (4.17)$$

Zde je účelová funkce stejná jako v 3.5, a omezení je m lineárních rovnic,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{tj.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.18)$$

určených maticí A typu $m \times n$ a sloupcovým vektorem \mathbf{b} typu $m \times 1$. Lagrangeova funkce je pak

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}), \quad (4.19)$$

kde \mathbf{y} je vektor Lagrangeových multiplikátorů. Použitím $n + m$ podmínek 1.řádu 4.7, 4.8,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c} + \mathbf{x}'\mathbf{Q} - \mathbf{y}^*\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{0}. \quad (4.21)$$

Těchto $n + m$ podmínek vyžaduje, aby platilo

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{c}' - \mathbf{A}'\mathbf{y}^*). \quad (4.22)$$

Lagrangeův multiplikátor může být získán vynásobením maticí A a užitím omezení

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}' + (\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')\mathbf{y}^* = \mathbf{b}. \quad (4.23)$$

Najděme tedy řešení pro vektor Lagrangeových multiplikátorů

$$\mathbf{y}^* = (\mathbf{b}' + \mathbf{c} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}')(\mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}')^{-1}, \quad (4.24)$$

a dosazením tohoto řešení do 4.22 obdržíme

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{c}' - \mathbf{A}'(\mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{b}' + \mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{c}')]. \quad (4.25)$$

Označíme-li $\bar{\mathbf{x}}^*$ řešení úlohy bez omezení v 3.1 dané 3.7, řešení omezeného problému může být psát jako

$$\mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{x}}^* + \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}'(\mathbf{A} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{b}' - \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}^*). \quad (4.26)$$

Tedy, jestliže $\bar{\mathbf{x}}^*$ odpovídá omezujícím podmínkám, potom to je také řešení úlohy s omezením. Mimo to rozdíl mezi řešením úlohy s omezením a bez omezení, $\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}^*$ je lineární funkcí množství, pro která řešení úlohy bez omezení nevyhovuje omezující podmínce $\mathbf{b} - \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}^*$.

5 Nelineární programování - Kuhn-Tuckerovy podmínky

Úloha nelineárního programování spočívá ve volbě nezáporných hodnot n proměnných tak, aby maximalizovaly funkci těchto n proměnných, které splňují m nerovností,

$$\max_x F(\mathbf{x}) \quad \text{pro} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (5.1)$$

Zde *vektor nástrojů* \mathbf{x} a *účelová funkce* $F(\mathbf{x})$ jsou stejné jako v 2.1, kde $F(\mathbf{x})$ je reálná spojitě diferencovatelná funkce definovaná na E^n . Hodnoty vektorové *omezující funkce* $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ a *vektor omezení* \mathbf{b} jsou stejné jako v 3.1, kde $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ je spojitě diferencovatelné zobrazení z E^n do E^m . Z hlediska základního problému 2.1, úloha nelineárního programování koresponduje s případem, ve které množina příležitostí může být zapsaná jako:

$$\begin{aligned}
X &= \{\mathbf{x} \in E^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \\
&= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m, \\
&\quad x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n\}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Tato úloha je zevšeobecnění úlohy klasického programování 4.1, protože rovnosti jsou speciálním případem nerovností.

5.1 Věta o Kuhn-Tuckerových podmínkách

Charakteristika řešení úlohy nelineárního programování, která je analogická jak s Větou o podmínkách 1.řádu pro úlohy bez omezení a s Větou o Lagrangeových multiplikatorech pro klasické programování, je zajištěna Větou o Kuhn-Tuckerových podmínkách. Stejně jako v případě klasického programování zavedeme řádkový vektor m dodatečných nových proměnných, nazývaných Lagrangeovy multiplikátory,

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m), \tag{5.3}$$

a to pro každé omezení. Lagrangeova funkce může být definována jako následující reálná funkce o n původních a m přidaných proměnných:

$$\begin{aligned}
l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= F(\mathbf{x}) + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\
&= F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m y_i(b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

stejně jako v 4.5. *Kuhn-Tuckerovy podmínky* jsou potom definovány v bodech $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$, jako $2n + 2m$ nerovností a 2 rovnosti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) &\leq \mathbf{0}, & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) &\geq \mathbf{0} & (n + m \text{ podmínek}), \\
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\mathbf{x}^* &= \mathbf{0}, & \mathbf{y}^* \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) &= \mathbf{0} & (2 \text{ podmínky}), \\
\mathbf{x}^* &\geq \mathbf{0} & \mathbf{y}^* &\geq \mathbf{0} & (n + m \text{ podmínek}).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Z toho $n + m$ nerovností reprezentuje omezení původního problému:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0} \quad (m \text{ podmínek}), \quad (5.6)$$

$$\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0} \quad (n \text{ podmínek}), \quad (5.7)$$

zatímco přidaných $n + m$ nerovností vyžaduje

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0} \quad (n \text{ podmínek}), \quad (5.8)$$

$$\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0} \quad (m \text{ podmínek}), \quad (5.9)$$

Přitom n podmínek v 5.8 je napsáno raději jako nerovnosti než rovnosti ve 4.7, kvůli nezáporným omezením na \mathbf{x} v 5.7, nebo, více všeobecně, protože hraniční řešení jsou přípustná. Dalších m podmínek v 5.9 vyžaduje nezápornost Lagrangeova multiplikátoru, je to z toho důvodu, že omezení v 5.6 jsou psaná raději jako nerovnosti než rovnosti: jestliže omezení je rovnost, potom příslušný element \mathbf{y}^* je neomezený stejně jako v klasickém případě programování.

Dvě podmínky rovnosti Kuhna-Tuckera:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) \right) x_j^* = 0, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{y}^* \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \sum_{i=1}^m y_i^* (b_i - g_i(\mathbf{x}^*)) = 0, \quad (5.11)$$

dohromady s ostatními podmínkami, je vyžadováno, aby všechny výrazy v obou těchto sumách byly nulové. Tedy jestliže jedna z nerovností vyhovuje řešení i v případě, že je ostrá, potom je odpovídající (duální) proměnná rovna nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) < 0 \quad \text{implikuje} \quad x_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.12)$$

$$g_i(\mathbf{x}^*) < b_i \quad \text{implikuje} \quad y_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.13)$$

Tyto podmínky jsou známé jako *slabé doplňující podmínky nelineárního programování*. Podmínka 5.11 také implikuje, že pro řešení je hodnota Lagrangiánu zároveň maximální hodnota účelové funkce.

$$L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = F(\mathbf{x}^*) = F^*. \quad (5.14)$$

Podle podmínek Věty Kuhna-Tuckera platí, že jestliže je splněno vhodné silné omezení, pak Kuhn-Tuckerovy podmínky jsou nutné podmínky pro úlohy nelineárního programování, takže když \mathbf{x}^* je řešením 5.1, pak zde existuje vektor Lagrangeových multiplikátorů \mathbf{y}^* splňující 5.5.

Stejně jako v případě klasického programování, řešení metodou Lagrangeových multiplikátorů interpretujeme jako citlivosti maximalizované hodnoty účelové funkce na změny omezujících konstant,

$$\mathbf{y}^* = \frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{b}} \quad \text{i.e.} \quad y_i^* = \frac{\partial F^*}{\partial b_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5.15)$$

kde F^* je definována jako

$$F^* = F(\mathbf{x}^*) = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*). \quad (5.16)$$

Přesněji, z doplňujících podmínek 5.13 vyplývá, že když v řešení je ostrá nerovnost, pak příslušný Lagrangeův multiplikátor je roven nule a tedy růst omezující konstanty o vhodně malou hodnotu nezmění maximalizovanou hodnotu účelové funkce.

5.2 Věta Kuhn-Tuckera o sedlovém bodě

Věta, která je analogická Větě o postačujících podmínkách pro úlohy bez omezení a Větě o postačujících podmínkách úlohy klasického programování, je reprezentována Kuhn-Tuckerovou větou o sedlovém bodu. Vezmeme-li Lagrangeovu funkci definovanou v 5.4, pak sedlový bod je definován jako:

$$\max_x \min_y L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (5.17)$$

Tudíž \mathbf{x}^* , \mathbf{y}^* řeší úlohu o sedlovém bodě právě tehdy, když pro všechna $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ platí,

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \quad (5.18)$$

Podle Kuhna-Tuckerovy věty o sedlovém bodu, postačující podmínka pro \mathbf{x}^* , řešící úlohu nelineárního programování 5.1 je, když existuje \mathbf{y}^* takové, že \mathbf{x}^* , \mathbf{y}^* splňuje podmínku 5.17. Tedy jestliže \mathbf{x}^* , \mathbf{y}^* splňuje podmínky sedlového bodu v 5.18, potom \mathbf{x}^* řeší úlohu nelineárního programování. Zatímco tato část věty nevyžaduje žádnou konvexnost nebo omezující předpoklady, obrácení věty takové předpoklady vyžaduje.

Podle druhé části věty platí, že když \mathbf{x}^* řeší úlohu nelineárního programování a předpokládá se, že podmínka vhodné kvalifikace omezení je splněna a že se jedná o *úlohu konkávního programování*, ve které $F(\mathbf{x})$ je konkávní funkce a každá omezující funkce $g_i(\mathbf{x})$ je konvexní funkce, potom zde existuje nenulový vektor \mathbf{y}^* takový, že \mathbf{x}^* , \mathbf{y}^* je řešením problému nalezení sedlového bodu.

Tudíž za těchto předpokladů jsou obě úlohy shodné. Měli bychom dávat pozor na to, že žádná část věty o sedlovém bodě nevyžaduje předpoklad diferencovatelnosti $F(\mathbf{x})$ nebo $g(\mathbf{x})$.

Bude-li diferencovatelná, pak se jedná o úlohu konkávního programování, Kuhn-Tuckerovy podmínky jsou dostačujícími podmínkami tak, že když \mathbf{x}^* , \mathbf{y}^* vyhovují 5.5, pak \mathbf{x}^* je řešení 5.1.

Tudíž, pro úlohu konkávního programování, ve kterém vhodná omezující podmínka je splněna, Kuhn-Tuckerovy podmínky jsou nutné a postačující pro \mathbf{x}^* řešící úlohu nelineárního programování.

Například je-li úloha úlohou konkávního programování, potom za předpokladu, že \mathbf{x}^* , \mathbf{y}^* splňuje Kuhn-Tuckerovy podmínky, \mathbf{x}^* , \mathbf{y}^* také řeší úlohu o sedlovém bodě a \mathbf{x}^* řeší úlohu nelineárního programování.

Když je navíc splněna vhodná omezující podmínka, potom všechny tři úlohy jsou shodné.

Jako v případě klasického programování, geometrická interpretace může být dána pro úlohu nelineárního programování a jeho řešení pomocí dvou vět Kuhna-Tuckera.

Z podmínek Kuhna-Tuckera 5.8 a 5.9, ve vnitřním řešení, kde všechna $\mathbf{x}^* > 0$ (nebo když nezápornost \mathbf{x} není částí úlohy), podmínky 5.8 a 5.9, když všechna $\mathbf{x}^* > 0$ (nebo když nezápornost \mathbf{x} není část problému).

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}. \quad (5.19)$$

Tudíž gradient účelové funkce musí být v řešení nezáporná vážená kombinace gradientů omezující funkce. Vektor gradientu účelové funkce musí proto ležet v kuželu generovaném normálami k množině příležitostí v bodě \mathbf{x}^* .

5.3 Příklad: Úloha kvadratického programování

Příkladem úlohy nelineárního programování je úloha kvadratického programování (jako v 4.17, kde omezení jsou ve formě množiny nerovností)

(5.20)

$$\max_x F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} \quad \text{pro} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (5.20)$$

Zde \mathbf{c} je daný $1 \times n$ řádkový vektor, Q je daná $n \times n$ negativně semidefinitní symetrická matice, A je daná $m \times n$ matice a \mathbf{b} je daný $m \times 1$ sloupcový vektor. Lagrangián (Lagrangeho polynom) je daný v 4.19 a Kuhn - Tuckerovy podmínky jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{c} + \mathbf{x}'\mathbf{Q} - \mathbf{y}^*\mathbf{A} \leq \mathbf{0}_{1 \times n}, & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} &= \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}_{m \times 1}, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^* &= (\mathbf{c} + \mathbf{x}'\mathbf{Q} - \mathbf{y}^*\mathbf{A})\mathbf{x}^* = \mathbf{0}, & \mathbf{y}^*\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} &= \mathbf{y}^*(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}^* &\geq \mathbf{0}, & \mathbf{y}^* &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Tyto podmínky charakterizují řešení úlohy. Protože Q je negativně semidefinitní, účelová funkce $F(\mathbf{x})$ je konkávní a lineární transformace $A\mathbf{x}$ je konvexní. Mimoto jsou splněny omezující kvalifikované podmínky. Úloha je jedna z úloh konkávního programování, ve které Kuhn - Tuckerovy podmínky 5.21 jsou obě nutné a dostačující. Vektor \mathbf{x}^* tak řeší úlohu kvadratického programování 5.20 právě tehdy, když \mathbf{y}^* je takové, že \mathbf{x}^* , \mathbf{y}^* vyhovují Kuhn - Tuckerovým podmínkám 5.21.

6 Lineární programování

Úloha lineárního programování je to, že vybereme nezáporné hodnoty n proměnných tak, že maximalizujeme lineární tvar těchto proměnných, za podmínek omezení m lineárními nerovnicemi.

$$\max_x \mathbf{c}\mathbf{x} \quad \text{pro} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (6.1)$$

\mathbf{x} je vektor nástrojů stejně jako v 2.1, 3.1 a 4.1; A je daná $m \times n$ matice (a_{ij}) ; \mathbf{b} je daný sloupcový vektor s m prvky jako v 4.1 a 5.1; a \mathbf{c} je daný řádkový n -rozměrný vektor. Z pohledu úlohy nelineárního programování 5.1 lineární úloha odpovídá případu, ve kterém je účelová funkce v lineárním tvaru.

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (6.2)$$

a každá z omezujících funkcí je rovněž v lineárním tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{tj.} \quad g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.3)$$

Úloha je tedy speciálním případem úlohy nelineárního programování a je dvojnásobně lineární proto, že je lineární jak v účelové funkci, tak i v omezujících podmínkách. Poněvadž lineární tvar je jak konkávní,

tak i konvexní, úloha, uvažovaná jako speciální případ úlohy nelineárního programování, je ekvivalentní s úlohou sedlového bodu

$$\max_x \min_y L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (6.4)$$

S každou úlohou lineárního programování souvisí duální úloha. Jestliže primární úloha je daná jako v 6.1, pak duální úloha je

$$\min_y \mathbf{y}\mathbf{b} \quad \text{pro } \mathbf{y}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (6.5)$$

Tato úloha je rovněž hledáním extrémů lineární formy s omezujícími podmínkami množiny lineárních nerovností omezené výběrem nezáporných hodnot proměnných. Proměnné duální úlohy, \mathbf{y} , jsou Lagrangeovými multiplikátory primární úlohy. Duální úloha duální úlohy je primární úloha, duální úlohou minimalizační úlohy je maximalizační úloha, v duální úloze omezující konstanty se stávají koeficienty účelové funkce, zatímco koeficienty účelové funkce se stávají omezujícími konstantami.

Úloha sedlového bodu pro duální úlohu je

$$\min_y \max_x L(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{y}\mathbf{b} + (\mathbf{c} - \mathbf{y}\mathbf{A})\mathbf{x} \quad \text{pro } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (6.6)$$

a tedy Lagrangeova funkce je stejná jak pro primární, tak pro duální úlohu

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{b} - \mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (6.7)$$

Kuhn - Tuckerovy podmínky, které jsou stejné jak pro primární, tak pro duální úlohu, jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{c} - \mathbf{y}^* \mathbf{A} \leq \mathbf{0}_{1 \times n}, & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} &= \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}_{m \times 1}, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^* &= (\mathbf{c} - \mathbf{y}^* \mathbf{A})\mathbf{x}^* = \mathbf{0}, & \mathbf{y}^* \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} &= \mathbf{y}^*(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}^* &\geq \mathbf{0}, & \mathbf{y}^* &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Tři hlavní věty lineárního programování - *věta o existenci*, *věta o dualitě* a *slabá doplňující věta* – mohou být dokázány na základě těchto Kuhn-Tuckerových podmínek.

6.1 Věta o existenci

Podle věty o existenci platí, že když přípustné body existují jak pro primární, tak pro duální úlohu, pak optimální řešení existují pro obě úlohy. Tedy jestliže existují \mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 takové, že

$$\mathbf{Ax}^0 \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}^0 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^0 \mathbf{A} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y}^0 \geq \mathbf{0}, \quad (6.9)$$

pak existují \mathbf{x}^* , \mathbf{y}^* řešící jak primární, tak i duální úlohu.

6.2 Věta o dualitě

Z věty o dualitě vyplývá že, pro každé přípustné vektory \mathbf{x}^0 , \mathbf{y}^0 jak pro primární, tak duální úlohu platí

$$\mathbf{cx}^0 \leq \mathbf{y}^0 \mathbf{b}. \quad (6.10)$$

Mimoto přípustné vektory, které vyhovují těmto nerovnostem a rovnostem, poskytují řešení \mathbf{x}^* , \mathbf{y}^* duální úlohy, kde

$$\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^* \mathbf{b}. \quad (6.11)$$

6.3 Slabá doplňující věta

Podle této věty \mathbf{x}^* , \mathbf{y}^* , které jsou přípustnými vektory duální úlohy, jsou řešením této úlohy tehdy a jen tehdy, když vyhovují dvěma podmínkám rovnosti Kuhn - Tuckerových podmínek 6.8, dané jako

$$(\mathbf{c} - \mathbf{y}^* \mathbf{A})\mathbf{x}^* = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}^*(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}^*) = \mathbf{0}. \quad (6.12)$$

Z těchto podmínek optimalizované hodnoty duální účelové funkce jsou si rovny navzájem a rovněž hodnotám obou Lagrangeových funkcí v tomto řešení

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b} = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = L(\mathbf{y}^*, \mathbf{x}^*). \quad (6.13)$$

Spolu s ostatními Kuhn - Tuckerovými podmínkami podmínky v 6.12 znamenají, že když jedna z omezujících nerovností je vyhovující v řešení jako ostrá nerovnost, pak odpovídající duální proměnné jsou nulové, tj.

$$\begin{aligned} (c_j - \sum y_i^* a_{ij}) < 0 & \text{ implikuje } x_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ (b_i - \sum a_{ij} x_j^*) > 0 & \text{ implikuje } y_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Tyto podmínky jsou známé jako slabé doplňující podmínky lineárního programování.

Stejně jako v posledních dvou sekcích, můžeme úlohu lineárního programování a její řešení interpretovat i geometricky. Množina příležitostí je polyedr - uzavřená konvexní množina, poněvadž to je průsečík $m + n$ poloprostorů definovaný m nerovnostmi a n nezápornými omezeními. Vrstevnice účelové funkce jsou nadroviny a problém je řešen nejvyšší nadrovinou uvnitř polyedru. Toto řešení nemůže být ve vnitřním bodě. Řešení se musí nacházet ve vrcholu (v tomto případě je jednoznačné) nebo podél hraniční plochy (v tom případě je nejednoznačné).

7 Mikroekonomie: matematické programování a teorie srovnávací stability

Mikroekonomické úlohy jsou typicky formulované pro ekonomické subjekty (jako jsou např. domácnosti, firmy), které se pokoušejí maximalizovat účelovou funkci při jistých omezeních. Proto jsou formulované jako úlohy matematického programování. Teorie matematického programování je pak používána pro analýzu těchto problémů - tj., specificky charakterizovat rovnovážné řešení a určit jak se řešení mění při změně parametrů úlohy. Posledně zmíněné vymezení - tj., jak změny v parametrech ovlivňují řešení - je nazýváno

srovnávací stabilita, protože porovnává dvě rovnovážné situace - počáteční rovnováhu a rovnováhu po jedné nebo více změnách v parametrech.

Charakteristika řešení je obvykle založena na podmínkách 1. řádu úlohy matematického programování a analýza srovnávací statistiky je založena na rozdílu podmínek 1. řádu. Výsledek kvalitativního nebo kvantitativního určení o tom, jak parametry ovlivňují řešení, dává jisté omezení v řešení.

7.1 Věta srovnávací stability

Předpokládaná úloha jistého ekonomického subjektu může být charakterizována jako výběr jistých proměnných \mathbf{x} stejně jako v úloze klasického programování 4.1 s jednoduchým omezením. Účelová funkce a omezení mohou záviset na q -rozměrném sloupcovém vektoru parametrů \mathbf{a} , a tedy úloha může být vyjádřena jako

$$\max_x F(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \quad \text{pro} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = b. \quad (7.1)$$

Řešení této úlohy je charakterizováno podmínkami 1. řádu 4.7 a 4.8, které zde jsou ve tvaru

$$b - g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0, \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - y \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad (7.3)$$

kde y je jednoduchý Lagrangeův multiplikátor odpovídající jednoduchému omezení. Řešení \mathbf{x}^* , y^* závisejí celkově na $q + 1$ parametrech úlohy (\mathbf{a}, b)

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{a}, b), \quad (7.4)$$

$$y^* = y^*(\mathbf{a}, b). \quad (7.5)$$

Vložení tohoto řešení do podmínek 1. řádu dostáváme $n + 1$ identit

$$b - g(\mathbf{x}(\mathbf{a}, b), \mathbf{a}) \equiv 0, \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(\mathbf{a}, b), \mathbf{a}) - y(\mathbf{a}, b) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(\mathbf{a}, b), \mathbf{a}) \equiv 0. \quad (7.7)$$

Předpokládané funkce $F(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ jsou spojitě diferencovatelné, identity 7.6 a 7.7 můžeme diferencovat do tvaru

$$db - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}} d\mathbf{a} = 0, \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{a}} d\mathbf{a} - \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right)' dy - y \frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x} - y \frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{a}} d\mathbf{a} = 0, \quad (7.9)$$

kde

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial g}{\partial a_1}, \frac{\partial g}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial a_q} \right), \quad (7.10)$$

$$d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)', \quad (7.11)$$

$$d\mathbf{a} = (da_1, da_2, \dots, da_n)', \quad (7.12)$$

Řešení pro $d\mathbf{x}$ a dy dává, v maticovém zápisu,

$$\begin{pmatrix} dy \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right)' \\ -\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right)' & \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}} d\mathbf{a} - d\mathbf{b} \\ -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{a}}\right) d\mathbf{a} \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

kde předpokládáme, že ohraničená Hessova matice je regulární.

S užitím tohoto výsledku a s předpoklady, že $F(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ jsou spojitě diferencovatelné, je zde přípustný bod a ohraničená Hessova matice je regulární, srovnávací statická věta udává, že existuje téměř vždy zobecněná Slutského rovnice ve formě

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right)_{comp} + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}} \right). \quad (7.14)$$

Zde "comp" značí, že je kompenzována parciální derivace podle a a b tak, že F je konstantní. Tuto zobecněnou rovnici lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} \right)_{comp} + \frac{1}{y} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} = S(\mathbf{a}, b). \quad (7.15)$$

Zde jsou výrazy vlevo "pozorovatelné", derivace vybraných proměných podle $q + 1$ parametrů, derivace podle b , vážená derivací g dle \mathbf{a} . Výrazy vpravo jsou "nepozorovatelné", první je matice kompenzované parciální derivace a druhá je nepozorovatelná, když je účelová funkce jedinečná pouze na monotóní transformaci. Matice $n \times q$ vpravo, $S(a, b)$, je zobecněná matice substitučního efektu. Druhá část věty dává, že pokud $q = n$, tedy $S(\mathbf{a}, b)$ je čtvercová, potom je symetrická tehdy a jen tehdy, když obě funkce, účelová funkce $F(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ a omezující funkce $g(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ mohou být zapsány jako

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = A_F \mathbf{a}' \mathbf{x} + \beta_F(\mathbf{x}) + \gamma_F(\mathbf{x}), \quad (7.16)$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = A_g \mathbf{a}' \mathbf{x} + \beta_g(\mathbf{x}) + \gamma_g(\mathbf{x}), \quad (7.17)$$

kde A_F a A_g jsou konstanty. Konečně, kvadratická forma $S(a, b)$ je negativně semidefinitní, pokud platí

$$A_F - y A_g \geq 0 \quad (7.18)$$

8 Neoklasická teorie domácnosti

Domácnost a firma jsou dva velmi důležité mikroekonomické subjekty. Stejně jako u ekonomického subjektu, je u domácnosti předpokládáno chování vedoucí k maximalizaci užitečnosti podřízené rozpočtovému omezení. Předpokládejme n dostupných druhů zboží (a služeb), označme \mathbf{x} sloupcový vektor množství zboží nakupovaného a spotřebovávaného domácností

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'; \quad (8.1)$$

$U(x)$ označme funkci užitečnosti pro domácnost,

$$U(\mathbf{x}) = U(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (8.2)$$

udávající užitečnost jako funkci spotřebovaného množství; \mathbf{p} buď řádkový vektor (kladných) daných cen zboží,

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n); \quad (8.3)$$

a I buď (kladný) daný dostupný příjem domácnosti. Problém domácnosti pak lze zapsat

$$\max_x U(\mathbf{x}) \quad \text{pro} \quad \mathbf{p}\mathbf{x} \leq I, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (8.4)$$

Domácnost vybírá nezáporná množství zboží \mathbf{x} tak, aby maximalizovala funkci užitečnosti při respektování rozpočtového omezení

$$\mathbf{p}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n p_j x_j \leq I \quad (8.5)$$

což říká, že celkové výdaje na n druhů zboží nemohou překročit příjem domácnosti. Jde o úlohu nelineárního programování, která vede k zavedení Lagrangeova multiplikátoru y a definuje Lagrangian jako

$$L(\mathbf{x}, y) = U(\mathbf{x}) + y(I - \mathbf{p}\mathbf{x}). \quad (8.6)$$

Kuhn-Tuckerovy podmínky dávají pro řešení \mathbf{x}^* a y^*

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - y\mathbf{p} \leq \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = I - \mathbf{p}\mathbf{x} \geq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - y\mathbf{p} \right) \mathbf{x} = 0, \quad y \frac{\partial L}{\partial y} = y(I - \mathbf{p}\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Navíc y^* má interpretaci marginální užitečnosti peněz (nebo marginální užitečnosti příjmu), MU_m ,

$$y^* = \partial U^* / \partial I = MU_m, \quad (8.8)$$

kde U^* je maximalizovaná hodnota užitečnosti

$$U^* = U(\mathbf{x}^*). \quad (8.9)$$

Totíž při konstantním y^* máme z předchozího vztahu 8.7 $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}^*(I) = y^* I$. Derivujeme-li dle I , obdržíme pak $\partial U^* / \partial I = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}(I)}{\partial I} = y^*$.

Jsou-li ceny a příjem kladné a užitečnost je monotónně rostoucí ve všech spotřebních úrovních

$$\partial U / \partial x_j = MU_j > 0, \quad (8.10)$$

kde MU_j je (kladná) marginální užitečnost zboží j , můžeme pak odvodit, že růst příjmu umožní domácnosti nakoupit více zboží a tak zvýšit užitek. Takže y^* , marginální užitečnost zvýšení příjmu, je kladná a, ze slabé doplňující podmínky

$$\mathbf{p}\mathbf{x}^* = I \quad (8.11)$$

plyne, že celý příjem je utracen.

Z Kuhn-Tuckerových podmínek plyne, že produkt marginální užitečnosti příjmu a cena zboží určují horní hranici pro marginální užitečnost každého zboží

$$MU_j \leq y^* p_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.12)$$

Ze slabé doplňující podmínky plyne, že pokud je zboží nakupováno ($x_j^* > 0$), podmínka 8.12 přechází v rovnost. Takže je-li j -té zboží nakupováno

$$MU_j/p_j = y^* = MU_m, \quad (8.13)$$

takže poměr marginální užitečnosti k ceně je tentýž pro všechny druhy zboží, které jsou aktuálně nakupovány, tento poměr nazveme marginální užitečností peněz. Pokud 8.12 dává ostrou nerovnost, pak dle komplementární podmínky není dané zboží nakupováno ($x_j^* = 0$).

8.1 Věta o poptávce

V souladu s větou o poptávce zde existuje řešení pro požadované nakupované zboží \mathbf{x}^* a marginální užitečnost peněz y^* , jež mohou být považovány za funkci $n + 1$ parametrů, jmenovitě n cen a příjmů, \mathbf{p} a I ,

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I), \quad (8.14)$$

$$y^* = y^*(\mathbf{p}, I), \quad (8.15)$$

předpokládáme $\mathbf{x}^* > 0$, $U(x)$ spojitě diferencovatelná do druhého řádu včetně v nejbližším okolí \mathbf{x}^* , $\mathbf{p}\mathbf{x}^* = I$ (nenasyčení) a Hessova matice

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (8.16)$$

je regulární. Funkce 8.14 je poptávková funkce pro n druhů zboží, její existence plyne z teorii implicitní funkce. Omezíme-li pozornost na zboží, které je aktuálně poptáváno, podmínka prvního řádu, užívaje řešení, může být zapsána jako $n + 1$ identit

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)) \equiv y^*(\mathbf{p}, I)\mathbf{p}, \quad (8.17)$$

$$\mathbf{p}\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I) \equiv I. \quad (8.18)$$

(Omezení pozornosti na zboží, které je aktuálně poptáváno, nepřipouští situaci, ve které při změně parametru zboží, jež není poptáváno, může toto již být poptáváno). V souladu s teorií, podmínky charakterizují rovnovážný stav domácnosti. Pokud poptávková funkce $U(x)$ je ostře konkávní, jsou obě nutnými a dostačujícími podmínkami pro rovnováhu. Dále podle teorie je n poptávkových funkcí v 8.14 pozitivně homogenních stupně nula v cenách a příjmu,

$$\mathbf{x}^*(\lambda\mathbf{p}, \lambda I) = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I), \quad \forall \lambda, \quad \lambda > 0 \quad (8.19)$$

jestliže změna p, I na $\lambda \cdot p, \lambda \cdot I$ nezmění úlohu pokud $\lambda > 0$. (Pouze donucení je ovlivněno, a $\lambda \cdot p \cdot x \leq \lambda \cdot I$ je ekvivalentní k $\mathbf{p} \cdot x \leq I$ při $\lambda > 0$.) Zvolíme-li $\lambda = 1/I$, poptávková funkce může být psána

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*\left(\frac{1}{I}\mathbf{p}\right) = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}^*), \quad (8.20)$$

kde \mathbf{p}^* je vektor cen relativně vztažených k důchodu,

$$\mathbf{p}^* = (p_1/I, p_2/I, \dots, p_n/I) \quad (8.21)$$

Zde poptávka závisí pouze na cenách relativně vztažených k důchodu. Teorie poptávky potom charakterizuje poptávkové funkce, určuje jejich homogenitu a indikuje jejich závislost na relativních cenách.

8.2 Slutského věta

Slutského věta sumarizuje porovnávací statiku domácnosti, obdrženu jako diferenciaci podmínek 8.17 a 8.18 podle cen a důchodu. Dle kapitoly 7 dostáváme *základní maticovou rovnici teorie domácnosti*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^*}{\partial I} & \frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} & \left(\frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{comp} \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} & \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} & \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{comp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{p} \\ -\mathbf{p}' & \mathbf{H} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{x}^{*'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & y^* \mathbf{I}_n & y^* \mathbf{I}_n \end{pmatrix}, \quad (8.22)$$

kde výsledky porovnávací stability jsou sumarizovány dle změn v řešení y^* , \mathbf{x}^* jako parametrů změn I a p ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^*}{\partial I} &= \frac{\partial^2 U^*}{\partial I^2}, \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} &= \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial I}, \frac{\partial x_2^*}{\partial I}, \dots, \frac{\partial x_n^*}{\partial I} \right), \\ \frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} &= \left(\frac{\partial y^*}{\partial p_1}, \frac{\partial y^*}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial y^*}{\partial p_n} \right), \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n} \end{pmatrix},$$

a všechny proměnné a derivace jsou počítány pro hodnoty řešení y^* , \mathbf{x}^* . Zde "comp" značí, že je kompenzována parciální derivace podle cen, kde důchod je kompenzován tak, že poptávka je konstantní; H je Hessova matice dle 8.16, u níž je předpokládána negativní definitnost a invertibilita, hraniční Hessova matice je regulární a

I_n je identická matice typu $n \times n$. Řešení základní rovnosti, při invertování rozložených matic, dává Slutského rovnost,

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{comp} - \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} \right) \mathbf{x}^* \quad \text{tj.} \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} \right)_{comp} - \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial I} \right) x_k^* \quad \forall j, k,$$

vyjadřující, že celkový efekt změny ceny na poptávku je součtem substitučního efektu kompenzované změny na poptávku a důchodového efektu změny důchodu na poptávku, kde důchodový efekt postihuje vážené $-\mathbf{x}^*$. Tato rovnice je první částí Slutského věty. Druhá část teorie uvádí, že matice substitučního efektu je symetrická a negativně semidefinitní,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{comp} \text{ je symetrická} \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} + \frac{\partial x_j^*}{\partial I} x_k^* = \frac{\partial x_k^*}{\partial p_j} + \frac{\partial x_k^*}{\partial I} x_j^* \quad \forall j, k, \quad (8.25)$$

$$\mathbf{z} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} \right)_{comp} \mathbf{z}' \leq 0 \quad \text{a} \quad = 0 \text{ pro } \mathbf{z} = \alpha \mathbf{p}. \quad (8.26)$$

Poslední část věty je *Engelova podmínka agregace*

$$\mathbf{p} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} \right) = 1 \quad \text{tj.} \quad \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial I} = 1; \quad (8.27)$$

Cournotova podmínka agregace

$$\mathbf{p} \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} \right) + \mathbf{x}^{*'} = \mathbf{0} \quad \text{tj.} \quad \sum_{j=1}^n p_j \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l} \right) + x_l^* = 0, \quad \forall l; \quad (8.28)$$

a *podmínka homogenity*

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}'} \mathbf{p}' + \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} I = \mathbf{0} \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_j^*}{\partial I} I = 0, \quad \forall j. \quad (8.29)$$

9 Neoklasická teorie firmy

O firmě jako ekonomickém subjektu předpokládáme, že se chová tak, aby maximalizovala zisk za předpokladu technologických omezení produkční funkce. Za předpokladu, že firma používá n vstupů na produkci jediného výstupu, nechť \mathbf{x} je sloupcový vektor vstupů

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'; \quad (9.1)$$

q je výstup, $f(\mathbf{x})$ je produkční funkce firmy

$$q = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (9.2)$$

kde výstup je funkcí vstupů. \mathbf{w} je řádkový vektor kladných vah vstupů

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n); \quad (9.3)$$

a p je kladná cena výstupu. Problém konkurenční firmy je pak

$$\max_{q, \mathbf{x}} \pi = pq - \mathbf{w}\mathbf{x} \quad \text{pro} \quad q = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (9.4)$$

Firma zvolí odpovídající hodnotu vstupů a výstupu tak, aby maximalizovala zisk π , uvedený ve vztahu 9.4 jako rozdíl mezi příjmy pq a náklady, které jsou dané jako celkové výdaje za všechny vstupy

$$\mathbf{w}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n w_j x_j. \quad (9.5)$$

Produkční funkce může být dosazena přímo do účelové funkce, takže problém může být zapsán

$$\max_x \pi(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}) - \mathbf{w}\mathbf{x} \quad \text{pro } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (9.6)$$

Kuhn - Tuckerovy podmínky pak vyjadřují řešení x^*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{x}} &= p \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{w} \leq \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} &= (p \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{w}) \mathbf{x} = 0, \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Pak poměr vstupní hodnoty k výstupní udává horní limit marginální (mezní) produkce každého vstupu

$$MP_j \equiv \partial f / \partial x_j \leq w_j / p, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.8)$$

Ze slabé doplňkové podmínky vyplývá, že pokud je vstup j nakoupen (tj. $x_j > 0$), podmínka 9.8 se stává rovností, tedy je-li vstup j nakoupen, platí

$$MP_j = w_j / p, \quad (9.9)$$

a tedy poměr marginální produkce k bohatství (hodnota vstupu) je stejný pro všechny aktuálně nakoupené vstupy, běžný poměr bývá převrácená hodnota výstupní hodnoty (ceny).

9.1 Věta o nabídce

Podle věty o nabídce existuje řešení pro nakoupené vstupy x^* , které mohou obsahovat funkce z $n + 1$ parametrů, tedy n vah \mathbf{w} a výstupní cena p

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{w}, p), \quad (9.10)$$

za předpokladu $\mathbf{x}^* > 0$, $f(\mathbf{x})$ je dvojnásobně spojitě diferencovatelná funkce v okolí \mathbf{x}^* a Hessova matice

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (9.11)$$

je regulární. Funkce v 9.10 jsou vstupní poptávkové funkce, jejichž existence je zaručena. Výstupní nabídková funkce je pak

$$q^* = q^*(\mathbf{w}, p) = f(\mathbf{x}^*). \quad (9.12)$$

Omezeníme-li pozornost na vstupy, které jsou aktuálně nakoupeny, podmínky 1. řádu, použité při řešení, jsou identity

$$p \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(\mathbf{w}, p)) \equiv \mathbf{w}, \quad (9.13)$$

$$q^*(\mathbf{w}, p) \equiv f(\mathbf{x}^*(\mathbf{w}, p)). \quad (9.14)$$

(Je to podobné jako u domácnosti. Omezená pozornost vstupů, které jsou aktuálně nakoupeny, vyloučí případ, ve kterém díky změně parametrů vstup, který nebyl nakoupen, může být nakoupen.)

Podle věty o nabídce tyto podmínky charakterizují rovnováhu firmy. Jestli produkční funkce $f(\mathbf{x})$ je ostře konkávní, jsou obě podmínky nutné a postačující pro rovnováhu. Navíc podle teorie n vstupní poptávková

funkce 9.10 a výstupní nabídková funkce 9.12 jsou pozitivní homogenní stupně 0 pro všechny hodnoty vstupu a výstupní ceny

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(\lambda \mathbf{w}, \lambda p) &= \mathbf{x}^*(\mathbf{w}, p), \\ q^*(\lambda \mathbf{w}, \lambda p) &= q^*(\mathbf{w}, p), \end{aligned} \quad \forall \lambda > 0, \quad (9.15)$$

protože změna \mathbf{w}, p na $\lambda \mathbf{w}, \lambda p$ změni pouze π ve vztahu 9.4 a maximalizací $\lambda \pi$ dostáváme stejné řešení jako maximalizací π za předpokladu $\lambda > 0$. Výběrem $\lambda = 1/p$ pak vstupní poptávkové funkce a výstupní nabídková funkce mohou být zapsány

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}^*\left(\frac{1}{p} \mathbf{w}\right) = \mathbf{x}^*(\mathbf{w}^*), \\ q^* &= q^*\left(\frac{1}{p} \mathbf{w}\right) = q^*(\mathbf{w}^*), \end{aligned} \quad (9.16)$$

kde \mathbf{w}^* je vektor reálných hodnot vstupu (bohatství), tj. relativní hodnoty k výstupní ceně

$$\mathbf{w}^* = (w_1/p, w_2/p, \dots, w_n/p). \quad (9.17)$$

Pak vstupní poptávka závisí pouze na n reálných vahách. Věta o nabídce proto charakterizuje jak vstupní poptávkovou tak i výstupní nabídkovou funkci, udává jejich homogenitu a ukazuje jejich závislost na reálných vahách.

9.2 Teorie srovnávací stability firmy

Teorie srovnávací stability firmy je získaná pomocí rozdílů podmínek první nabídky 9.13 a 9.14 s ohledem na vstupní ceny \mathbf{w} a výstupní cenu p . Sledující přístup z odstavce 7 obdržíme *základní maticovou rovnicí teorie firmy*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q^*}{\partial p} & \left(\frac{\partial q^*}{\partial \mathbf{w}}\right)' \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial p} & \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{0} & p\mathbf{H} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)' & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}, \quad (9.18)$$

kde srovnávací stabilita řešení je shrnuta pomocí změny na řešení q^* , \mathbf{x}^* taktéž s parametry p a \mathbf{w} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^*}{\partial p} & \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial p} &= \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p}, \frac{\partial x_2^*}{\partial p}, \dots, \frac{\partial x_n^*}{\partial p} \right)', \\ \frac{\partial q^*}{\partial \mathbf{w}} &= \left(\frac{\partial q^*}{\partial w_1}, \frac{\partial q^*}{\partial w_2}, \dots, \frac{\partial q^*}{\partial w_n} \right)', \end{aligned} \quad (9.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_n} \end{pmatrix}$$

a všechny proměnné a derivace jsou vypočteny v hodnotách řešení q^* , \mathbf{x}^* . Derivací $\partial f/\partial \mathbf{x}$ je zde vektor marginálních produktů, \mathbf{H} je Hessova matice 9.11, o které předpokládáme, že je negativně definitní a \mathbf{I}_n je identická matice typu $n \times n$. Řešení základní rovnice vede na vztah

$$q^*/\partial \mathbf{w} = -\partial \mathbf{x}^*/\partial p \quad \text{t.j.} \quad \partial q^*/\partial w_j = -\partial x_j^*/\partial p, \quad \forall j, \quad (9.20)$$

což nám říká, že efekt jakékoliv hodnoty na výstupu je identický, ale s opačným znaménkem než efekt výstupu ceny na stejný vstup. Tato rovnice je první částí věty. Druhá část věty uvádí, že matice efektů vah vstupních poptávek je symetrická a negativně definitní

$$\partial \mathbf{x}^*/\partial \mathbf{w} \quad \text{je symetrická} \quad \text{t.j.} \quad \partial x_j^*/\partial w_k = \partial x_k^*/\partial w_j, \quad \forall j, k, \quad (9.21)$$

$$\mathbf{z}(\partial \mathbf{x}^* / \partial \mathbf{w}) \mathbf{z}' \leq 0 \quad \text{a} \quad = 0 \quad \text{pro} \quad \mathbf{z} = \alpha \mathbf{w}. \quad (9.22)$$

Poslední část věty tvrdí, že vzrůst výstupní ceny bude zvyšovat nabídku výstupu

$$\partial q^* / \partial p > 0. \quad (9.23)$$

Firma může použít teorii lineárního programování. V takovém případě firma produkuje n výstupů x_1, \dots, x_n s využitím m vstupů b_1, \dots, b_m . Produkce jedné jednotky výstupu j požaduje a_{ij} jednotek na vstupu i . Předpokládejme, že krátkodobě všechny vstupy jsou fixní, potom výběr firmy pouze je rozhodnout, jaký mix výstupů produkce je dán těmito vstupy. Úloha je pak úloha klasického lineárního programování

$$\max_x \mathbf{c} \mathbf{x} \quad \text{pro} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (9.24)$$

jako v 6.1. Účelová funkce maximalizace je celkový příjem, daný vztahem

$$\mathbf{c} \mathbf{x} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \quad (9.25)$$

kde c_j je daná cena a x_j je vybraná úroveň výstupu j . Pak m omezení je ve formě

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9.26)$$

což nám říká, že celkové množství vstupu i použité k produkci výstupového vektoru x nemůže přesáhnout úroveň dostupného vstupu i , což je b_i . Úloha je pak výběr nezáporných výstupů tak, aby maximalizoval zisk, v dané technologii a dostupnými vstupy.

Duální úloha je

$$\min_y \mathbf{y} \mathbf{b} \quad \text{pro} \quad \mathbf{y} \mathbf{A} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad (9.27)$$

jako v 6.5. Tato úloha může být interpretován jako výběr nezáporných hodnot (*stínové ceny*) pro vstupy y_1, y_2, \dots, y_m tak, aby minimalizoval náklady vstupů

$$\mathbf{y}\mathbf{b} = y_1b_1 + y_2b_2 + \dots + y_mb_m, \quad (9.28)$$

kde y_i je vybraná hodnota a b_i je daná úroveň vstupu i . Pak n omezení je ve tvaru

$$y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \dots + y_ma_{mj} \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9.29)$$

který nám říká, že jednotkové náklady na zboží j , získané sečtením nákladů produkce jedné jednotky ze všech vstupů, není menší než cena tohoto zboží. Duální problém k problému rozdělení, primární úloha 9.24 je proto problém ohodnocení, duální úloha k 9.27. Podle doplňující podmínky 6.14, jestliže pro nějaký výstup j je nerovnost 9.29 ostrou nerovností, tak nákladová jednotka překročí cenu (výstup je produkován se ztrátou), pak tento výstup není produkován ($x_j^* = 0$). Podobně, jestliže pro nějaký vstup i je nerovnost 9.26 ostrá nerovnost, tak není celý vstup využit (přeroste nám nabídka), pak tento vstup je zboží zdarma ($y_i^* = 0$). A navíc z 6.13

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}, \quad (9.30)$$

pak při řešení duální úlohy celkové příjmy z výstupu se rovnají celkovým nákladům vstupů, tj. firma vyrábí s nulovým ziskem.

10 Závěry

Z tohoto shrnutí matematického programování s aplikací na ekonomii nám vyjdou dva závěry.

1. Různé problémy matematického programování, které zde jsou zpracována - úloha bez omezení, klasické programování, nelineární programování a lineární programování - všechny jsou vzájemně uzavřeny, s analogickými teoriemi ve všech případech.

2. Stejné problémy matematického programování jsou důležité při aplikaci v ekonomii, zvláště v mikroekonomické teorii domácností a firem. Řešení matematického programování vede u obou k charakteristice rovnováhy každého z těchto subjektů a analýza jejich srovnávací statistiky odpovídá změně parametrů, jako jsou ceny a důchod.

Kapitola 2

Teorie spotřebitele

Hlavním účelem teorie spotřebitele je určení vlivu pozorovatelných komoditních požadavků při alternativních předpokladech na cíle a pravidla chování uživatele a na omezení, která přijímá při tvorbě rozhodnutí. Tradiční model spotřebitele je založen na preferencích při možných výběrech, které popisují cíle spotřebitele. Přitom jeho pravidla chování jsou určena maximalizací těchto preferencí při omezení danými rozpočtem, která určují směnné možnosti. Hlavní výsledek naší teorie sestává z kvalitativních aspektů pozorovaných požadavků při změně jejich parametrů, které určují rozhodnutí spotřebitele.

Historický vývoj teorie spotřebitele vyjadřuje dlouhou tradici zájmu ekonomů v tomto předmětu zkoumání, který prošel podstatnými koncepčními změnami až do jeho současné podoby.

1 Komodity a ceny

Komodity lze rozdělit na zboží a služby. Každá komodita je zcela popsána svými fyzikálními charakteristikami, svým umístěním a časem, ve kterém je dostupná. V případě, že uvažujeme chování komodit při jistém stupni nejasnosti, lze pak přidat ještě dodatečné upřesnění. Tradiční teorie obvykle předpokládá, že existuje

l komodit, přičemž pro zkoumaný problém stačí konečný počet fyzikálních charakteristik, umístění atd. *Komoditní svazek* je posloupnost reálných čísel (x_h) , $h = 1, \dots, l$ vyjadřujících množství každé komodity, lze jej tedy popsat jako l -dimenzionální vektor $x = (x_1, \dots, x_l)$, tj. jako bod l -dimenzionálního euklidovského prostoru R^l , tzv. *komoditního prostoru*. Za předpokladu dokonalé dělitelnosti všech komodit je možné vzít každé reálné číslo jako množství každé komodity, tj. každý bod komoditního prostoru R^l je možným komoditním svazkem. Konečná specifikace počtu komodit přitom vylučuje aplikaci situací, ve kterých se charakteristika může měnit spojitě. Přitom takovéto situace vznikají přirozeným způsobem v kontextu výběru komodit na základě kvality resp. v teorii umístění, kdy je vhodným kritériem skutečná vzdálenost na povrchu. *Cena* p_h komodity h , $h = 1, \dots, l$ je reálné číslo, které nám vyjadřuje množství placené při výměně jedné jednotky této komodity. Lze tedy cenový systém (cenový vektor) $p = (p_1, \dots, p_l)$ reprezentovat jako bod v euklidovském prostoru R^l . *Hodnota* komoditního svazku x při daném cenovém vektoru p je pak $p \cdot x = \sum_{h=1}^l p_h x_h$.

2 Spotřebitelé

Některé svazky komodit jsou spotřebitelem vyloučeny na základě fyzikálních nebo logických omezení. Množina všech možných spotřebních svazků, které jsou možné, se nazývá *spotřební množina*. To je pak neprázdná podmnožina komoditního prostoru, kterou budeme označovat jako X . Obvykle jsou vstupy spotřeby popsány pozitivními množstvými a výstupy negativními. To pak zejména implikuje, že všechny složky práce spotřebního svazku x jsou nekladné. Obvykle budeme předpokládat, že spotřební množina X je uzavřená, konvexní a omezená zdola. Přitom omezení zdola je odůvodněno konečnými omezeními na množství práce, kterou je spotřebitel schopen vykonat. Spotřebitel si musí vybrat svazek ze své spotřební množiny, aby si zajistil existenci.

Je-li dán cenový vektor p , hodnota $p \cdot x$ pro $x \in X$ nám označuje *čisté náklady*, tj. příjmy spojené se svazkem x odečtené od příslušných výdajů. Protože navíc spotřebitel obchoduje na trhu, jsou jeho možné výběry omezeny požadavkem, že hodnota jeho spotřeby by neměla převýšit jeho počáteční bohatství (příjem). To lze zadat ve tvaru pevného nezáporného čísla w . Navíc může mít spotřebitel k dispozici pevný vektor $\omega \in R^l$ počátečních zdrojů. Nutně pak $w = p \cdot \omega$. Množina možných spotřebních svazků, jejichž hodnota

nepřevyšší počáteční bohatství spotřebitele se nazývá *rozpočtová množina* a je určena vztahem

$$\beta(p, w) = \{x \in X : p \cdot x \leq w\}. \quad (2.1)$$

Konečné rozhodnutí spotřebitele pro výběr svazku ze spotřební množiny závisí na jeho zálibách a přáních. Ty jsou pak reprezentovány jeho *relací preference* \succeq , což je binární relace na X . Pro každé dva svazky x a y , $x, y \in X$, $x \succeq y$ znamená, že x je alespoň tak dobré jako y . Vzhledem k těmto preferencím si spotřebitel vybere nejvíce preferovaný svazek v rozpočtové množině jako svůj *požadavek* (poptávku). Ten je pak definován jako

$$\varphi(p, w) = \{x \in \beta(p, w) : x' \in \beta(p, w) \implies (x \succeq x' \text{ nebo neplatí } x' \succeq x)\}. \quad (2.2)$$

Větší část teorie spotřebitele je založena spíše na popisu chování spotřebitele pomocí maximalizace funkcí užitečnosti než maximalizací preferencí. Přitom pojem relace preference je základnější pojem v teorii spotřebitele a je tedy brán jako výchozí bod každé analýzy chování spotřebitele. Vztah mezi relací preference a funkcí užitečnosti je hlavní kámen základů teorie spotřebitele. Následující analýza je proto založena na dvou částech. V první části se budeme věnovat axiomatickým základům teorie preferencí a teorie užitku spolu se základním poznatkem o spotřebitelových požadavcích. V následující části se budeme spíše věnovat klasičtějším výsledkům v kontextu diferencovatelnosti funkcí požadavků.

3 Preference

Mezi alternativními svazky komodit ze spotřební množiny máme vztah určený relací preference \succeq na X . Pro dva svazky x a y z X budeme číst výrok $x \succeq y$ jako svazek komodit x je alespoň tak dobrý jako svazek komodit y . Obvykle předpokládáme tři základní axiomy vložené na relaci preference, které často považujeme za definici racionálního spotřebitele.

Axiom 1 (Reflexivita)

Pro všechna $x \in X$ platí $x \succeq x$, tj. každý svazek je alespoň tak dobrý jako on sám.

Axiom 2 (Tranzitivita)

Pro každé tři svazky $x, y, z \in X$ takové, že $x \succeq y$, $y \succeq z$ platí $x \succeq z$.

Axiom 3 (Úplnost)

Pro každé dva svazky $x, y \in X$ platí buď $x \succeq y$ nebo $y \succeq x$.

Relace preference \succeq , která splňuje výše uvedené tři axiomy, se nazývá *úplné předuspořádání* a my budeme mluvit o *preferenčním uspořádání*. Přitom lze z preferenčního uspořádání odvodit dva jiné vztahy – relaci ostré preference \succ a relaci indiference \sim .

Definice. Svazek x je *ostře preferován* před svazkem y , tj. $x \succ y$ právě tehdy, když $x \succeq y$ a neplatí $y \succeq x$. Svazek x je indiferentní se svazkem y , tj. $x \sim y$ právě tehdy, když $x \succeq y$ a $y \succeq x$.

Protože je preferenční uspořádání reflexivní a tranzitivní, je nutně relace *ostré preference* ireflexivní a tranzitivní. Budeme dále předpokládat, že existují alespoň dva svazky x' a x'' tak, že $x' \succ x''$. Relace *indiference* definuje na X relaci ekvivalence, tj. je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Platnost těchto tří axiomů není zpochybňována ve většině teorií spotřebitele. Tyto axiomy nám představují předpoklady, které většinou odpovídají empirickým pozorováním. Občas ale některé chování spotřebitele vykazuje nekonzistenci zejména s tranzitivitou a úplností. Totiž, někteří ekonomové argumentují tím, že je příliš moc požadovat po spotřebiteli porovnat všechny možné svazky, když jeho skutečná rozhodnutí budou realizována pouze na jisté podmnožině spotřební množiny. Empirická pozorování nebo experimentální výsledky často indikují netranzitivitu výběru. To může nastat v důsledku jednoduchých chyb, které jednotlivci dělají v reálném životě. Z druhé strany, tranzitivita může být narušena jako důsledek jistých teoretických příčin. Například, jestliže množina spotřebitelů tvoří domácnost, kde se rozhoduje podle pravidla většiny, relace preference může být netranzitivní. Přitom lze místo tranzitivity použít slabší axiomy, abychom dostali smysluplnou teorii.

Možnost definování ostré preference \succ ze slabšího preferenčního uspořádání a obráceně, indikuje v principu možný alternativní přístup vyjít z relace ostré preference a odvození \succeq a \sim . To lze považovat za vhodný přístup v některých situacích, který je o něco obecnější, protože axiom úplnosti nemá takovou roli jako pro preferenční uspořádání. Přitom však odvozená relace indiference nemusí být tranzitivní. Z empirického pohledu je však pojem preferenčního uspořádání přirozenější. Pozorovaný výběr svazku x před svazkem y lze interpretovat ve smyslu preferenčního uspořádání a ne ve smyslu ostré preference.

Axiomy 1-3 popisují vlastnosti uspořádání relace preference, které mají intuitivní význam v teorii výběru. Přitom je nutno předpokládat jisté topologické vlastnosti relace \succeq .

Nejvíce používaný je následující:

Axiom 4 (Spojitost)

Pro všechna $x \in X$ jsou množiny $\uparrow(x) = \{y \in X : y \succeq x\}$ a $\downarrow(x) = \{y \in X : x \succeq y\}$ uzavřené vzhledem k množině X .

Množina $\uparrow(x)$ se nazývá hlavní filtr a množina $\downarrow(x)$ se nazývá hlavní ideál. Intuitivně axiom 4 požaduje, aby se spotřebitel choval konzistentně v malém okolí tj. je-li dána nějaká posloupnost $y_n \rightarrow y \in X$, $y_n \in \downarrow(x)$ pro všechna n , je i $y \in \downarrow(x)$. Podobně i duálně. Zároveň dostáváme, že pro preferenční uspořádání \succeq je průnik hlavního filtru a hlavního ideálu *třída indiference* $I(x) = \{y \in X : y \sim x\}$ uzavřená množina vzhledem k množině X na základě axiomu 4. Alternativní svazky indiferentní s x tvoří známé *křivky indiference* pro případ, kdy $X \subseteq R^2$. Mimo to okamžitě z axiomů 1-4 dostáváme, že množiny $\uparrow_s(x) = \{y \in X : y \succ x\}$ a $\downarrow_s(x) = \{y \in X : x \succ y\}$ jsou otevřené vzhledem k množině X . Mluvíme pak o ostrém hlavním filtru a ostrém hlavním ideálu.

Připomeňme, že mnoho známých relací preference nemá vlastnost spojitosti. Nejznámějším příkladem je lexikografické uspořádání, což je ve skutečnosti relace ostré preference, jejíž třídy indiference jsou jednoprvkové.

Definice. Buďte $x = (x_1, \dots, x_l)$, $y = (y_1, \dots, y_l) \in R^l$. Pak říkáme, že x je *lexikograficky větší* než y a píšeme $x \text{Lex} y$, jestliže existuje k , $1 \leq k \leq l$ tak, že

$$\begin{aligned} x_j &= y_j & \text{pro } j < k \\ x_k &> y_k. \end{aligned}$$

Snadno se pak ověří, že filtr $\uparrow(x)$ není ani uzavřený ani otevřený.

Věta 3.1 [Schmeidler (1971)] *Bud' \succeq tranzitivní binární relace na souvislém topologickém prostoru X . Definujme sdruženou relace ostré preference \succ předpisem $x \succ y$ právě tehdy, když $x \succeq y$ a neplatí $y \succeq x$. Zároveň předpokládejme, že relace ostré preference je neprázdná tj. existuje alespoň jedna dvojice \bar{x}, \bar{y} tak, že $\bar{x} \succ \bar{y}$. Jsou-li navíc všechny hlavní filtry a hlavní ideály uzavřené a všechny ostré hlavní filtry a ostré hlavní ideály otevřené, je relace \succeq úplná.*

Důkaz. Důkaz zásadně využívá tu skutečnost, že jediná neprázdná obojetná množina (tj. zároveň uzavřená i otevřená) je celý topologický prostor X . Ukažme tedy nejprve, že máme-li dva prvky x a y tak, že $x \succ y$, je nutně

$$X = \{z : z \succ y\} \cup \{z : x \succ z\}.$$

Evidentně,

$$\{z : z \succ y\} \cup \{z : x \succ z\} \subseteq \{z : z \succeq y\} \cup \{z : x \succeq z\}.$$

Zejména pak levá strana inkluze je otevřená množina a pravá strana je uzavřená množina. Stačí tedy dokázat jejich rovnost. Předpokládejme, že prvek $u \in \uparrow(y)$, $u \notin \uparrow_s(y)$. Tedy nutně $y \sim u$ tj. $y \succeq u$. Protože $x \succ y$, je i $x \succ u$ tj. $u \in \downarrow_s(x)$. Analogicky, nechť prvek $u \in \downarrow(x)$, $u \notin \downarrow_s(x)$ tj. $u \succeq x$. Pak i $u \succ y$ tj. $u \in \uparrow_s(y)$.

Předpokládejme nyní, že existují dva nesrovnatelné prvky v X , řekněme v a w . Protože existuje alespoň jedna dvojice prvků \bar{x}, \bar{y} tak, že $\bar{x} \succ \bar{y}$, je nutně

$$X = \{z : z \succ \bar{y}\} \cup \{z : \bar{x} \succ z\}.$$

Nutně tedy buď $v \succ \bar{y}$ nebo $\bar{x} \succ v$. Předpokládejme nejprve, že $v \succ \bar{y}$. Odtud pak

$$X = \{z : z \succ \bar{y}\} \cup \{z : v \succ z\}.$$

Protože v a w nejsou srovnatelné, je $w \succ \bar{y}$ a $v \succ \bar{y}$. Přitom množiny $\downarrow_s(v)$ a $\downarrow_s(w)$ jsou otevřené, tedy i jejich průnik je otevřená množina. Protože $\bar{y} \in \downarrow_s(v) \cap \downarrow_s(w)$, je průnik neprázdný a protože v a w jsou nesrovnatelné, nemohou oba prvky ležet v průniku.

Ukažme, že

$$\{z : v \succ z\} \cap \{z : w \succ z\} = \{z : v \succeq z\} \cup \{z : w \succeq z\}.$$

Nechť $v \succ z$, $w \succ z$ a z neleží v průniku tj. např. neleží v $\{s : v \succ s\}$. Tedy $z \succeq v$. Z tranzitivity pak $w \succeq v$, což je spor. Podobně, neleží-li z v $\{s : w \succ s\}$, je $z \succeq w$ a tedy $v \succeq w$, což je opět spor. Celkem je pak $\{z : v \succ z\} \cap \{z : w \succ z\}$ uzavřená, neprázdná. Je tedy rovna X , což je opět spor. Jsou tedy v a w srovnatelné. ■

4 Funkce užitečnosti

Problém reprezentace relace preference pomocí číselné funkce byl vyřešen v publikacích Eilenberga (1941), Debreua (1954, 1959 a 1964), Radera (1963) a Bowena (1968). Z historického pohledu pojem funkce užitečnosti je základní pojem pro míru spotřebitelovy spokojenosti. Pareto (1896) byl první, který rozpoznal, že libovolná rostoucí transformace dané funkce užitečnosti zajistí identické maximalizační chování spotřebitele. Jejich důležitost a metodologické důsledky rozpoznali Slutsky (1915) a Wold (1943-1944), kteří provedli první vážnou studii problému reprezentace.

Definice. Buď X množina a \succeq binární relace na X . Pak funkce $u : X \rightarrow R$ je *reprezentace* relace \succeq tj. *funkce užitečnosti* pro preferenční relaci \succeq , jestliže pro všechny prvky $x, y \in X$ platí:

$$u(x) \geq u(y) \quad \text{právě tehdy, když} \quad x \succeq y.$$

Je jasné, že pro každou funkci užitečnosti u a každou rostoucí transformaci $f : R \rightarrow R$ je složení $v = f \circ u$ také funkce užitečnosti pro tutéž relaci preference \succeq . Poznamenejme pro úplnost, že v literatuře byly zavedeny zobecnění výše uvedené definice. Jejich použití v teorii spotřebitele se však neukázalo užitečné.

Základní požadavek na funkci užitečnosti pro aplikace v teorii spotřebitele je, že funkce užitečnosti má být spojitá. Snadno je pak vidět, že axiomy 1-4 jsou nutné podmínky pro existenci spojitě funkce užitku.

Totíž axiomy 1-3 přímo plynou z definice reprezentace. Abychom dokázali nutnost axiomu 4 o spojitosti funkce u , stačí pozorovat, že pro každý bod $x \in X$ platí

$$\uparrow x = \{z \in X : u(z) \geq u(x)\} \text{ a } \downarrow x = \{z \in X : u(z) \leq u(x)\},$$

což jsou uzavřené množiny ze spojitosti funkce u .

Základní výsledek teorie užitečnosti je, že axiom 4 kombinovaný s nějakými slabými předpoklady na množinu X je dostatečnou podmínkou pro spojitost funkce u .

Přitom platí následující tvrzení dokázané Debreuem (1964). Připomeňme, že *dírou* množiny $S \subseteq [-\infty, \infty]$ je maximální nedegenerovaný interval obsažený v doplňku množiny S , který má horní a dolní závorku obsažené v množině S .

Věta 4.1 *Je-li $S \subseteq [-\infty, \infty]$, pak existuje rostoucí funkce $g : S \rightarrow [-\infty, \infty]$ tak, že všechny díry množiny $g(S)$ jsou otevřené.*

Věta 4.2 *Bud' X topologický prostor se spočetnou bází (resp. souvislý nebo separabilní topologický prostor). Dále bud' \succeq spojitě preferenční uspořádání definované na X . Pak existuje spojitá funkce užitečnosti pro relaci \succ .*

Důkaz. Dokažme tvrzení pro případ, kdy X má spočetnou bázi. Nejprve najděme vhodnou funkci užitečnosti. Nechť tedy O_1, O_2, \dots jsou otevřené množiny obsažené ve spočetné bází. Pro každé x uvažme množinu $N(x) = \{n : x \succ z \text{ pro všechna } z \in O_n\}$ a definujme

$$v(x) = \sum_{n \in N(x)} \frac{1}{2^n}.$$

Je-li $y \succeq x$, pak je i $N(x) \subseteq N(y)$ a tedy i $v(x) \leq v(y)$. Obráceně, je-li $y \succ x$, pak existuje $n \in N(y)$ tak, že $x \in O_n$, ale neplatí $n \in N(x)$. Proto je i $N(x) \not\subseteq N(y)$. Je tedy v funkce užitečnosti.

Definujme nyní novou funkci $u = g \circ v$, kde g je funkce z věty 4.1. Pak jsou dle této věty všechny díry množiny $u(X) = g(v(X))$ otevřené.

Abychom ověřili spojitost funkce u , stačí ukázat, že pro všechna $t \in [-\infty, \infty]$ jsou množiny $u^{-1}([t, \infty])$ a $u^{-1}([-\infty, t])$ uzavřené.

Je-li $t \in u(X)$, pak existuje $y \in X$ tak, že $u(y) = t$. Pak zejména $u^{-1}([t, \infty]) = \{x \in X : x \succeq y\}$ a $u^{-1}([-\infty, t]) = \{x \in X : y \succeq x\}$. Obě tyto množiny jsou uzavřené na základě spojitosti relace \succeq .

Pokud $t \notin u(X)$ a není-li t obsaženo v nějaké díře, nutně platí

- (a) $t \leq \inf\{u(x) : x \in X\}$, nebo
- (b) $t \geq \sup\{u(x) : x \in X\}$, nebo
- (c) $[t, \infty] = \bigcap\{[\alpha, \infty] : \alpha \in u(X), \alpha < \infty\}$
 $[-\infty, t] = \bigcap\{[-\infty, \alpha] : \alpha \in u(X), \alpha < \infty\}$.

Platí-li (a), je nutně $u^{-1}([t, \infty]) = X$ a $u^{-1}([-\infty, t]) = \emptyset$. Platí-li (b), je zřejmě $u^{-1}([t, \infty]) = \emptyset$ a $u^{-1}([-\infty, t]) = X$. Přitom jak X tak \emptyset jsou uzavřené množiny. Platí-li (c), je

$$u^{-1}([t, \infty]) = \bigcap u^{-1}(\{[\alpha, \infty] : \alpha \in u(X), \alpha < \infty\})$$

$$u^{-1}([-\infty, t]) = \bigcap u^{-1}(\{[-\infty, \alpha] : \alpha \in u(X), \alpha < \infty\}).$$

Přitom množiny na pravé straně jsou evidentně uzavřené, je tedy uzavřený i jejich průnik.

Nechť tedy t leží v otevřené díře, tj. $t \in]a, b[$, kde $a, b \in u(X)$. Pak

$$u^{-1}([t, \infty]) = u^{-1}([b, \infty])$$

$$u^{-1}([-\infty, t]) = u^{-1}([-\infty, a]).$$

Opětovně, množiny na pravé straně jsou nutně uzavřené. ■

5 Vlastností preferencí a funkcí užitečnosti

V aplikacích se často přidávají dodatečné předpoklady na relace preference a funkce užitečnosti. Budeme v dalším diskutovat ty nejvíce rozšířené.

5.1 Monotonie, nenasycenost a konvexnost

Definice. Relace preference \succeq na R^l se nazývá *monotonní*, jestliže $x \geq y$ a $x \neq y$ implikuje $x \succ y$.

Tato vlastnost vyjadřuje, že je preferované více zboží před méně zbožím tj. všechna zboží jsou žádaná. Sdružená funkce užitečnosti monotonního preferenčního uspořádání je rostoucí funkce na R^l .

Definice. Bod $x \in X$ se nazývá *bod nasyčenosti* pro preferenční uspořádání \succeq , jestliže $x \succeq y$ pro všechna $y \in X$.

Je tedy bod nasyčenosti maximální prvek vzhledem k relaci preference. Větší díl teorie spotřebitele se věnuje situacím, ve kterých takováto globální maxima neexistují nebo alespoň diskutím o problémech poptávky, pokud zlepšení situace spotřebitele může být dosaženo změnou jeho spotřebitelského svazku. Jinak řečeno, situace, které budou diskutovány, budou nenasycené body.

Můžeme-li pro jistý bod x najít v jeho blízkém okolí zlepšení situace spotřebitele, řekneme, že spotřebitel je lokálně nespokojený v bodě x . Přesněji:

Definice. Řekneme, že spotřebitel je *lokálně nespokojený* v bodě $x \in X$, jestliže pro každé okolí V bodu x existuje bod $z \in V$ tak, že $z \succ x$.

Z této vlastnosti vyplývá, že je vyloučena existence třídy indiference bodu x s neprázdným vnitřkem a že je tedy funkce užitečnosti nekonstantní v okolí bodu x .

Definice. Relace preference \succeq na množině $X \subseteq R^l$ se nazývá *konvexní*, jestliže je množina $\{y \in X : y \succeq x\}$ konvexní pro všechny body $x \in X$.

Připomeňme, že funkce $u : X \rightarrow R$ se nazývá *kvazikonkávní*, jestliže platí $\min\{u(x), u(y)\} \leq u(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ pro všechna $x, y \in X$ a všechna $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$. Evidentně pak je funkce užitečnosti u pro preferenční uspořádání \succeq kvazikonkávní právě tehdy, když je preferenční uspořádání konvexní. Je tedy kvazikonkávnost vlastnost přímo spojená s uspořádáním a je zachovávána při rostoucích transformacích. O takovýchto vlastnostech funkce užitečnosti mluvíme jako o *ordinálních vlastnostech* na rozdíl od *kardinálních vlastností*, které jsou spojené s určitou reprezentací u . Konkávnost je pak takováto kardinální vlastnost.

Definice. Relace preference se nazývá *ostře konvexní*, jestliže pro všechna $x, x' \in X, x \neq x', x \succeq x', 0 < \lambda < 1$ implikuje $\lambda x + (1 - \lambda)x' > x'$. Přidružená funkce užitečnosti ostře konvexní relace preference je vždy ostře kvazikonkávní. Přitom ostrá konvexnost nám zaručuje neexistenci takových relací preference, pro které příslušná relace preference a třída indiference nemá vnitřní body.

Je lehce vidět, že hlavní filtry kvazikonkávní funkce jsou konvexní. Je proto funkce užitečnosti pro preferenční uspořádání \succeq kvazikonkávní právě tehdy, když je preferenční uspořádání konvexní. Je proto kvazikonkávnost zachována při rostoucích transformacích. Takové vlastnosti jako kvazikonkávnost jsou nazývány *ordinální* na rozdíl od kardinálních vlastností, které jsou vztaženy ke specifické funkci užitečnosti u . Takovou vlastností je například konkávnost.

Definice. Preferenční uspořádání se nazývá *ostře konvexní*, jestliže pro každé dva svazky x a $x', x \neq x', x \succeq x'$ a pro $0 < \lambda < 1, \lambda x + (1 - \lambda)x' \succ x'$.

5.2 Separabilita

Bud' $N = \{N_j\}_{j=1}^k$ rozklad množiny $\{1, \dots, l\}$ a předpokládejme, že spotřební množina X má tvar $X = \prod_{j=1}^k X_j$. Takovéto rozklady vznikají přirozeným způsobem, pokud uvažujeme spotřebu vzhledem k různé době, místě apod. Řečeno jednoduše, separabilita pak implikuje, že preference pro svazky v každém členu rozkladu (tj. pro každou dobu, místo apod.) jdou nezávislé na spotřebních úrovních mimo tento člen rozkladu.

Bud' $J = \{1, \dots, k\}$ a pro všechna $j \in J, x \in X$ definujeme

$$x_{\dot{j}} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k).$$

Pro každé pevné $x_{\dot{j}}^0$ preferenční uspořádání \succeq na X indukuje preferenční uspořádání $\succeq_{x_{\dot{j}}^0}$ tak, že $x_j \succeq_{x_{\dot{j}}^0} x'_j$ právě tehdy, když $(x_{\dot{j}}^0, x_j) \succeq (x_{\dot{j}}^0, x'_j)$ pro všechna $x_j, x'_j \in S_j$.

Přitom takovéto indukované uspořádání bude záviset na speciálním výběru $x_{\dot{j}}$. První pojem separability tvrdí, že tato uspořádání pro pevně zvolený index j nezávisí na výběru $x_{\dot{j}}$.

Definice. Preferenční uspořádání \succeq na množině $X = \prod_{j=1}^k X_j$ se nazývá *slabě separabilní*, jestliže pro všechna $j \in J$, $x_j^0, y_j^0 \in X = \prod_{i \neq j} X_i$, $\succeq_{x_j^0} = \succeq_{y_j^0}$. Indukované uspořádání budeme značit jako \succeq_j .

Podobně, funkce užitečnosti $u : \prod_{j=1}^k X_j \rightarrow R$ se nazývá *slabě separabilní*, jestliže existují spojité funkce $v_j : S_j \rightarrow R$, $j \in J$ a $V : R^k \rightarrow R$ tak, že $u(x) = V(v_1(x_1), \dots, v_k(x_k))$.

Věta 5.1 *Bud' \succeq spojité uspořádání preference. Pak je \succeq slabě separabilní právě tehdy, když je každá spojité reprezentace \succeq slabě separabilní.*

Definice. Funkce užitečnosti $u : \prod_{j=1}^k X_j \rightarrow R$ se nazývá *silně separabilní*, jestliže existují spojité funkce $v_j : S_j \rightarrow R$, $j \in J$ a $V : R \rightarrow R$, V rostoucí tak, že $u(x) = V\left(\sum_{j \in J} v_j(x_j)\right)$.

Protože je funkce V rostoucí a spojité, je funkce $V^{-1} \circ u$ aditivní a reprezentuje stejnou relaci preference. Je tedy problém nalezení podmínek na relaci preference, aby byla silně separabilní, ekvivalentní k nalezení podmínek, za nichž existuje aditivní reprezentace.

Nechť tedy $u(x) = \sum_{j \in J} v_j(x_j)$ označuje aditivní funkci užitečnosti vzhledem k rozkladu N . Uvažujme nějakou neprázdnou vlastní podmnožinu $I \subseteq J$ a dva svazky x a x' takové, že všechny jejich komponenty x_j a x'_j mají stejnou hodnotu x_j^0 pro $j \in J - I$. Můžeme proto psát $x = (x_I, x_{J-I}^0)$ a $x' = (x'_I, x_{J-I}^0)$. Je-li u aditivní, je bezprostředně zřejmé, že indukovaná funkce na součinu $\prod_{j \in I} S_j$ je nezávislá na speciálním výběru hodnot x_{J-I}^0 a tedy je indukované preferenční uspořádání nezávislé na výběru x_{J-I}^0 . Tato vlastnost evidentně platí pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu $I \subseteq J$ a je zároveň motivujícím prvkem pro definici silně separabilní relace uspořádání.

Definice. Preferenční uspořádání \succeq na množině $X = \prod_{j=1}^k X_j$ se nazývá *silně separabilní*, jestliže je slabě separabilní vzhledem ke všem vlastním rozkladům všech možných sjednocení množin N_1, \dots, N_k . To je ekvivalentní s tím, že preferenční uspořádání je silně separabilní, jestliže pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu $I \subseteq J$ je indukované preferenční uspořádání nezávislé na zvláštním výběru hodnot x_{J-I}^0 .

Věta 5.2 *Bud' \succeq spojitě uspořádaní preference. Pak je \succeq silně separabilní právě tehdy, když je každá spojitá reprezentace \succeq silně separabilní.*

5.3 Spojitá poptávka

Je-li dán cenový vektor $p \neq 0$ a počáteční bohatství w , spotřebitel si vybírá nejlepší svazek ze své rozpočtové množiny jako svou poptávku. Pro preferenční uspořádání splňující axiomy 1-3 evidentně každý maximální prvek vzhledem k relaci preference zároveň maximalizuje odpovídající funkci užitečnosti a obráceně, každý bod maxima funkce užitečnosti maximalizuje relaci preference. Zejména tedy oba přístupy vedou ke stejným svazkům poptávky. Budeme nyní studovat závislost poptávky na dvou vnějších parametrech, ceně a bohatství.

Rozpočtová množina spotřebitele byla definována jakožto $\beta(p, w) = \{x \in X : p \cdot x \leq w\}$. Necht' $S \subseteq R^{l+1}$ označuje množinu dvojic cena-bohatství, pro které je příslušná rozpočtová množina neprázdná. Pak β popisuje korespondenci z S do R^l (tj. množinovou funkci z S do $\mathcal{P}(R^l)$).

Definice. Korespondence ψ z S do T , kde T je kompaktní podmnožina z R^l , se nazývá *horní hemispojité* v bodě $y \in S$, jestliže pro všechny posloupnosti $z_n \rightarrow z$, $y_n \rightarrow y$ takové, že $z_n \in \psi(y_n)$ platí, že $z \in \psi(y)$.

Výše uvedená definice je ekvivalentní s tím, že funkce ψ má uzavřený graf. Přitom evidentně každá horní hemispojité korespondence ψ taková, že $\psi(y)$ je jednoprvková množina, je ve skutečnosti spojitá funkce.

Definice. Korespondence ψ z S do T , kde T je podmnožina z R^l , se nazývá *dolní hemispojité* v bodě $y \in S$, jestliže pro každý bod $z_0 \in \psi(y)$ a pro každou posloupnost $y_n \rightarrow y$ existuje posloupnost $z_n \rightarrow z_0$ tak, že $z_n \in \psi(y_n)$ pro všechna n .

Korespondence se nazývá *spojité*, je-li jak horní hemispojité tak dolní hemispojité. Snadno lze přitom dokázat následující dvě lemmata.

Lemma 5.3 *Korespondence rozpočtové množiny $\beta : S \rightarrow \mathcal{P}(X)$ má uzavřený graf a její dolní hemispojité v každém bodě (p, w) , pro který platí $\min\{p \cdot x : x \in X\} < w$.*

Přitom podmínka $\min\{p \cdot x : x \in X\} < w$ se obvykle nazývá *podmínka minimálního bohatství*.

Již dříve bylo poznamenáno, že maximalizace pomocí preferenční relace či funkce užitečnosti vedou ke stejné množině poptávkových svazků, je-li preferenční relace reflexivní, tranzitivní a úplná. Je-li tedy $u : X \rightarrow R$ funkce užitečnosti, lze definovat *poptávku* uživatele jako

$$\varphi(p, w) = \{x \in \beta(p, w) : u(x) \geq u(x'), x' \in \beta(p, w)\}, \quad (5.1)$$

což je ekvivalentní definici 2.2. Pokud navíc bude funkce užitečnosti spojitá a rozpočtová množina $\beta(p, w)$ kompaktní, bude poptávková množina $\varphi(p, w)$ neprázdná. Pak, aplikujeme-li Bergeho větu, obdržíme následující lemma.

Lemma 5.4 *Pro každou spojitou funkci užitečnosti $u : X \rightarrow R$ je poptávková korespondence $\varphi : S \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tak, že $\varphi(p, w) \neq \emptyset$ a ϕ je horní hemispojité v každém bodě $(p, w) \in S$ takovém, že $\beta(p, w)$ je kompaktní a $\min\{p \cdot x : x \in X\} < w$.*

Z definice rozpočtové a poptávkové korespondence bezprostředně plyne, že $\varphi(\lambda p, \lambda w) = \varphi(p, w)$ pro každé $\lambda > 0$ a pro každou dvojici cena-bohatství (p, w) . Totiž, $x \in \beta(p, w) \iff p \cdot x \leq w \iff (\lambda p) \cdot x \leq (\lambda w) \iff x \in \beta(\lambda p, \lambda w)$. Podobně, $x \in \varphi(p, w) \iff x \in \beta(p, w)$ a zároveň $u(x) \geq u(x')$ pro všechna $x' \in \beta(p, w) \iff x \in \beta(\lambda p, \lambda w)$ a zároveň $u(x) \geq u(x')$ pro všechna $x' \in \beta(\lambda p, \lambda w) \iff x \in \varphi(\lambda p, \lambda w)$.

Pro konvexní preferenční uspořádání bude korespondence poptávky bude pak $\varphi(p, w)$ konvexní množina, což je vlastnost, která hraje podstatnou roli v existenčních důkazech rovnovážného stavu. Je-li navíc preferenční uspořádání ostře konvexní, je pak korespondence poptávky $\varphi(p, w)$ jednoprvková množina tj. získáme funkci poptávky. Horní hemispojité pak implikuje obvyklou spojitost.

Lemma 5.5 *Bud' \succeq ostře konvexní a spojitě preferenční uspořádání. Pak je korespondence poptávky $\varphi : S \rightarrow \mathcal{P}(X)$ spojitá funkce v každém bodě $(p, w) \in S$, pro který je množina $\beta(p, w)$ kompaktní a platí $\min\{p \cdot x : x \in X\} < w$. Navíc, pro všechna $\lambda > 0$, platí $\varphi(\lambda p, \lambda w) = \varphi(p, w)$ tj. φ je homogenní funkce stupně nula.*

Pro zbývající část tohoto přehledu budeme značit jako f funkci poptávky.

5.4 Poptávka bez tranzitivity

Empirické studie chování poptávky často prokázaly, že ne vždy se spotřebitelé chovají v souladu s požadavkem tranzitivity. Tato skutečnost byla často používána jakožto argument proti obecnému předpokladu, že zkoumání maximalizace preferencí je vhodný způsob pro studium teorie poptávky.

Sonnenschein (1971) ukázal, že axiom tranzitivity není nutný pro důkaz existence a spojitosti poptávkové korespondence. Podobnou situaci studoval i Katzner (1971), kde jsou preference definovány lokálně a tedy jsou získány *lokální výsledky* pro funkci poptávky.

Definice. Korespondence poptávky $\varphi : S \rightarrow \mathcal{P}(X)$ je definována jako $\varphi(p, w) = \{x \in \beta(p, w) : x \succeq x' \text{ pro všechna } x' \in \beta(p, w)\}$.

Věta 5.6 (Sonnenschein) *Nechť $\varphi(p, w) \neq \emptyset$ pro všechna $(p, w) \in S$ a předpokládejme, že korespondence β je spojitá v bodě $(p_0, w_0) \in S$. Je-li relace preference spojitá, je i korespondence poptávky φ horní hemispojité v bodě (p_0, w_0) .*

Předpoklad, že množina $\varphi(p, w) \neq \emptyset$ pro všechna $(p, w) \in S$, je implikován jistými modifikovanými předpoklady na ostrou relaci preference, jak plyne z následující věty.

Věta 5.7 (Sonnenschein) *Nechť \succeq označuje spojitou relaci preference na množině X tak, že množina $\{x' : x' \succ x\}$ je konvexní pro všechna $x \in X$. Jestliže navíc $\beta(p, w) \neq \emptyset$, pak i $\varphi(p, w) \neq \emptyset$.*

Z výše uvedených dvou Sonnenscheinových výsledků plyne, že můžeme získat spojitou funkci poptávky, pokud nahradíme tranzitivitu relace preference její konvexitou.

Další výsledky v teorii netranzitivního spotřebitele byly získány Shaferem (1974). Tento přístup formuluje chování spotřebitele jakožto maximalizace spojitě číselné funkce vzhledem k rozpočtovým omezením. Tato funkce, jejíž existence a spojitost nezávisí na tranzitivitě, může být považována za alternativní přístup k reprezentaci relace preference.

Věta 5.8 (Shafer (1974)) *Nechť \succeq označuje spojitou, úplnou a ostře konvexní relaci preference na R_+^l . Pak existuje spojitá funkce $k : R_+^l \times R_+^l \rightarrow R$ tak, že*

1. $k(x, y) > 0 \iff x \in \uparrow_s(y)$,
2. $k(x, y) < 0 \iff x \in \downarrow_s(y)$,
3. $k(x, y) = 0 \iff x \succeq y$ a $y \succeq x$,
4. $k(x, y) = -k(y, x)$.

Předpoklady věty jsou obvyklé až na to, že je vynechán axiom tranzitivity. Za jeho předpokladu pak existuje funkce užitku a funkce k může být definována, že $k(x, y) = u(x) - u(y)$.

Stejně jako předtím, nechť $\beta(p, w)$ označuje rozpočtovou množinu spotřebitele. Pak poptávka spotřebitele sestává ze všech bodů v rozpočtové množině, která maximalizují funkci k . Přesněji, poptávka je definována jako

$$\varphi(p, w) = \{x \in \beta(p, w) : k(x, y) \geq 0 \text{ pro všechna } y \in \beta(p, w)\}$$

nebo ekvivalentně

$$\varphi(p, w) = \{x \in \beta(p, w) : x \succeq y \text{ pro všechna } y \in \beta(p, w)\}.$$

Předpoklad ostré konvexity garantuje, že existuje jediný maximální prvek. Následující věta precizuje maximalizační argument.

Věta 5.9 (Shafer) *Za předpokladů věty 5.7 a pro každý kladný cenový vektor p a kladné bohatství w je poptávka $x = f(p, w) = \{x \in \beta(p, w) : k(x, y) \geq 0 \text{ pro všechna } y \in \beta(p, w)\}$ a tato funkce f je spojitá v bodě (p, w) .*

5.5 Poptávka za předpokladů separability

Separabilita preferenčního uspořádání a funkce užitku, ať už slabá nebo silná, má důležité důsledky pro funkci poptávky. Za použití označení a definic z odstavce 5.2 a za předpokladu separability funkce užitku můžeme psát

$$u(x) = V(v_1(x_1), \dots, v_k(x_k)), \quad (5.2)$$

kde x_j , $j = 1, \dots, k$ jsou vektory množství komodit v S_j a $X = S_1 \times \dots \times S_k$. Pak $v_j(x_j)$ jsou funkce užitku definované na S_j . Budeme používat vektor p_j pro ceny komodit v třídě rozkladu N_j .

Definice. Pro všechny $w_j \in R_+^l$ definujme podrozpočtovou množinu

$$\beta^j(p_j, w_j) \equiv \{x_j \in S_j : p_j \cdot x_j \leq w_j\}. \quad (5.3)$$

Nyní můžeme zavést pojem podmíněné poptávky $f_j^j(p_j, w_j)$ jakožto to x_j , které maximalizuje funkci $v_j(x_j)$ přes podrozpočtovou množinu $\beta^j(p_j, w_j)$.

Definice. *Podmíněná funkce poptávky* je definována jako

$$f_j^j(p_j, w_j) \equiv \{x_j \in \beta^j(p_j, w_j) : v_j(x_j) > v_j(x_j^0), x_j^0 \neq x_j, x_j^0 \in \beta^j(p_j, w_j)\}. \quad (5.4)$$

Tyto podmíněné funkce poptávky sdílí všechny vlastnosti obvyklých funkcí poptávky až na to, že jejich definiční obor a obor hodnot jsou omezeny proměnnými p_j, w_j a S_j . Jsou-li dány $v_j(x_j)$, p_j a w_j , je i poptávka x_j známa. Přitom proměnná w_j není dána vnějšně, ale jakožto část obecného optimalizačního problému. Bud' dále $f_j(p, w)$ j -podvektor funkce poptávky $f(p, w)$. Pak je w_j dáno jakožto

$$w_j^*(p, w) = p_j \cdot f_j(p, w). \quad (5.5)$$

Poznamenejme, že v obecnosti je potřeba celého cenového vektoru, abychom určili w_j^* . Když používáme w_j^* vzniklé pomocí $w_j(p, w)$, lze očekávat že z podmíněných funkcí poptávky získáme tentýž vektor poptávky jako $f_j(p, w)$.

Věta 5.10 *Za předpokladu separability funkce užitku platí*

$$f_j(p, w) = f_j^j(p_j, w_j^*(p, w)) \text{ pro všechna } j. \quad (5.6)$$

Důkaz. Uvažme libovolně, ale pevně vektor (p_0, w_0) . Necht' $x_j^* = f_j^j(p_{0j}, w_j^*(p_0, w_0))$ pro jisté j a necht' $x_0 = f(p_0, w_0)$. Evidentně, $x_{0j} \in \beta_j(p_{0j}, w_j^*(p_0, w_0))$. Předpokládejme, že $x_j^* \neq x_{0j}$. Pak $v_j(x_j^*) > v_j(x_{0j})$ a

$$\begin{aligned} u(x_0) &= V(v_1(x_{01}), \dots, v_j(x_{0j}), \dots, v_k(x_{0k})) \\ &< V(v_1(x_{01}), \dots, v_j(x_j^*), \dots, v_k(x_{0k})), \end{aligned} \quad (5.7)$$

protože je funkce V monotoně rostoucí v proměnné $v_j(x_j)$. Evidentně je prvek (x_{0j}, x_j^*) v rozpočtové množině $\beta(p, w)$ a tedy předpoklad $v_j(x_j^*) > v_j(x_{0j})$ neplatí. Tedy nutně $v_j(x_j^*) = v_j(x_{0j})$ tj. $x_j^* = x_{0j}$, protože x_j je jediný vektor maximalizující $v_j(x_j)$ přes všechna $x_j \in \beta_j(p_{0j}, w_j^*(p_0, w_0))$. Proto podmínka 5.6 platí pro (p_0, w_0) . Protože (p_0, w_0) bylo vybráno libovolně, platí pro všechny přípustné (p, w) a věta je tímto dokázána. ■

Význam věty 5.10 je dvojitý. Nejprve je zřejmé, že ostatní ceny ovlivňují poptávku pro x_j pouze pomocí skalární funkce $w_j^*(p, w)$, což je podstatné omezení na p_j . Dále, pokud je možné pozorovat a určit bohatství w_j empirickou cestou, můžeme se koncentrovat na podmíněnou funkci poptávky, pro kterou pouze potřebujeme znát pouze cenu p_j . Jako příklad lze uvážit chování poptávky v jistém časovém období, řekněme jednom roce. Za obvyklého (implicitního) předpokladu separability během různých časových období je pak pouze nutné znát úplné náklady pro tuto periodu (w_j) a odpovídající cenový vektor (p_j). V tomto kontextu můžeme uvažovat (5.5) jako spotřební funkci spjatou s celkovými spotřebními náklady vzhledem k celkovému bohatství a cenami pro všechny periody.

6 Funkce nákladů a nepřímé funkce užitku

Alternativní přístup v analýze poptávky byl proveden Samuelsonem v roce 1947. V současnosti mluvíme o tzv. dualitě v analýze poptávky. V jistých případech dosáhneme tímto způsobem přímější analýzy senzitivity

cen a dovoluje nám kratší a transparentnější přehled jistých klasických vlastností funkce poptávky. Popíšme v krátkosti základní vlastnosti a výsledky pro podstatně omezenější situace než byly výše uvedené. Tato omezení budou použita v následujících paragrafech.

Od doposud budeme předpokládat, že spotřební množina X bude kladný ortant R_+^l a že všechny ceny a bohatství jsou kladné. Toto implikuje, že rozpočtová množina je kompaktní a že podmínka minimálního bohatství je splněna. Zejména je pro spojitou funkci užítka korespondence poptávky φ horní hemi-spojité. Dále budeme předpokládat nenasycenost buď relace preference nebo funkce užítka. To pak implikuje, že spotřebitel použije všechno své bohatství za maximalizace preferencí.

Je-li dána dosažitelná úroveň funkce užítka $v = u(x), x \in X$, je *nákladová funkce* minimální množství nutné k získání úrovně užítka alespoň takové jako v pro danou cenu p . Je tudíž nákladová funkce $E : R_+^l \times R \rightarrow R$ definovaná jako

$$E(p, v) = \min\{p \cdot x : u(x) \geq v\}. \quad (6.1)$$

Přitom lze snadno dokázat následující vlastnosti nákladové funkce.

Lemma 6.1 *Pokud spojitá funkce užítka splňuje axiom lokální nenasycenosti, je pak nákladová funkce:*

1. *rostoucí a spojitá v proměnné v pro každý cenový vektor p ,*
2. *neklesající, pozitivně lineárně homogenní a konkávní v proměnné p pro každou úroveň užítka v .*

Nechť nyní $y = E(p, v)$ označuje minimální úroveň nákladů. Protože je funkce E rostoucí a spojitá v proměnné v , existuje její inverzní funkce $v = g(p, y)$, která vyjádří užitek v jakožto funkci nákladů a cen, která se nazývá *nepřímou funkcí užítka*. Je snadné vidět, že

$$g(p, y) = \max\{u(x) : p \cdot x = y\}. \quad (6.2)$$

Vzhledem k vlastnostem nákladové funkce je nutně nepřímá funkce užítka

1. *rostoucí a spojitá v proměnné y pro každý cenový vektor p ,*

2. nerostoucí v cenách a homogenní stupně 0 v příjmech a cenách.

Zejména tedy z definice E a g obdržíme následující identity:

$$v \equiv g(p, E(p, v)) \text{ a } y \equiv E(p, g(p, y)). \quad (6.3)$$

Je-li dán cenový vektor p a úroveň užítku v , je nákladové minimum $E(p, v)$ získáno na jisté podmnožině určené $E(p, v)$ a p . Jsou-li preference ostře konvexní, existuje jediný bod $x \in X$ minimalizující náklady a označme minimalizační funkci jako $x = h(p, v)$.

Nutně pak z definice

$$E(p, v) = p \cdot h(p, v). \quad (6.4)$$

Funkce h se nazývá *Hicksova funkce poptávky kompenzovaná příjmem*, h je spojitá v obou argumentech a homogenní stupně nula v cenách.

Uvažme nyní náš původní problém maximalizace funkce užítku vzhledem k rozpočtovým omezením $p \cdot x \leq w$. Pak náš předpoklad lokální nenasycenosti a ostré konvexity implikuje existenci spojitě maximalizační funkce $f(p, w)$. Tato funkce se nazývá *Marshallova tržní funkce poptávky* a splňuje vlastnost

$$p \cdot f(p, w) = w. \quad (6.5)$$

Z těchto definic získáme druhou dvojici identit, které popisují základní vztah mezi Hicksovou funkcí poptávky kompenzované příjmem a Marshallovou tržní funkcí poptávky:

$$\begin{aligned} f(p, w) &= h(p, g(p, w)) \\ h(p, w) &= f(p, E(p, w)). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Jednu z důležitých vlastností Hicksovy funkce poptávky lze obdržet bezprostředně. Pro pevnou úroveň užítku v , uvažujme dva cenové vektory p a p' , dále asociované vektory poptávky $x = h(p, v)$ a $x' = h(p', v)$. Z toho, že x a x' minimalizují náklady, obdržíme

$$(p - p') \cdot (x - x') \leq 0. \quad (6.7)$$

Pro změnu $\Delta p_k = p_k - p'_k$ ceny jednotlivé komodity k tak, že všechny ostatní ceny zůstanou konstantní tj. $\Delta p_h = p_h - p'_h = 0$, $h \neq k$ implikuje

$$\Delta p_k \cdot \Delta x_k \leq 0. \quad (6.8)$$

Jinak řečeno, nárůst ceny jedné komodity nezpůsobí nárůst poptávky pro tuto komoditu. Hicksova funkce poptávky není tedy rostoucí funkcí ceny. Tato vlastnost se občas nazývá jako *nekladnost vlastního substitučního efektu*. Detailní diskuse pro diferencovatelné funkce bude provedena v dalších paragrafech.

7 Vlastnosti diferencovatelné funkce užitku

Následující paragrafy se věnují funkcím užitku a poptávky za předpokladu diferencovatelnosti, kteý je standardním předpoklad v teorii spotřebitelské poptávky.

Bud' tedy $u : X \rightarrow R$ funkce užitku, která je třídy C^2 bez kritických bodů * reprezentující úplnou a spojitou relaci preference třídy C^2 na X , která je monotonní a ostře konvexní. Pak je tato funkce

1. spojitá,
2. rostoucí tj. $u(x) > u(y)$ pro $x \geq y$, $x \neq y$,
3. ostře kvazikonkávní tj. $u(\alpha x + (1 - \alpha)y) > u(y)$ pro $\alpha \in (0, 1)$, $x \neq y$ a $u(x) \geq u(y)$.
4. dvojnásobně spojitě diferencovatelná tj. její druhé parciální derivace existují a jsou spojitými funkcemi v proměnné x .

*Pro prvek $x \in U$ je derivace $Df(x)$ v bodě x lineární zobrazení z R^k do R^n (tj. matice parciálních derivací). Pak říkáme, že x se nazývá *singulární (kritický) bod zobrazení f* , pokud tato derivace není surjektivní zobrazení. Poznamenejme, že pokud $k < n$, jsou všechny prvky z U singulární. *Singulární hodnoty* jsou jednoduše obrazy vzhledem k f všech singulárních bodů; prvek $y \in R^n$ se nazývá *regulární hodnota*, pokud není singulární hodnota.

Dále budeme předpokládat, že derivace prvního řádu, tj. $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, l$, jsou kladné. Mluvíme o tzv. *marginálních (mezních) užitecích*. Speciálně pak vektor délky l marginálních užiteků budem označovat u_x . Protože derivace druhého řádu jsou spojité funkce jejich argumentů, máme nutně

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = u_{ji}.$$

Buď tedy U_{xx} Hessova matice řádu l funkce užitku u tj. matice druhých parciálních derivací funkce u s prvky u_{ij} . Ze symetrie druhých parciálních derivací pak máme, že U_{xx} je symetrická matice tj. $U_{xx} = U_{xx}^T$.

Vlastnost ostré kvazikonkávnosti, kterou má funkce užitku, pak implikuje další omezení na první a druhé derivace funkce užitku.

Věta 7.1 *Buď u ostře kvazikonkávní funkce užitku. Pak pro všechny prvky $x \in X$ platí*

$$z^T U_{xx} z \leq 0 \text{ pro všechna } z \in \{y \in R^l : u_x \cdot y = 0\}. \quad (7.1)$$

Důkaz. Buď $x \in X$ libovolný. Nechť $z \in R^l : u_x \cdot z = 0$. Pak z Taylorova vzorce máme

$$u(y) = u(x) + \alpha \frac{u_x \cdot z}{1} + \alpha^2 \frac{z^T U_{xx} z}{2} + \varrho(y), \quad (7.2)$$

kde $y = x + \alpha z$ a ϱ je reálná funkce spojitá v okolí x tak, že $\lim_{y \rightarrow x} \frac{\varrho(y)}{\|y - x\|^2} = 0$. Tedy $u(y) = u(x) + \alpha^2 \frac{z^T U_{xx} z}{2} + \varrho(y)$. Předpokládejme, že $\frac{z^T U_{xx} z}{2} > 0$. Nutně pak existuje $\alpha_0 > 0$ tak, že pro všechna $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)$ platí $f(\alpha) = f(0) + \frac{1}{2} \alpha^2 f''(0) + \sigma(\alpha)$, kde $f(\alpha) = u(x + \alpha z)$, $f'(\alpha) = u_{x+\alpha z} \cdot z$, $f''(\alpha) = z^T U_{x+\alpha z, x+\alpha z} z > 0$, $\sigma(\alpha) = \frac{\varrho(x + \alpha z)}{\|\alpha z\|^2}$. Přitom $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha^2} = 0$. Předpokládejme, že $\alpha > 0$. Pak z ostré kvazikonkávnosti $\min\{f(-\alpha), f(\alpha)\} < f(0)$ a z předchozího $f(\alpha) - f(0) > 0$ a $f(-\alpha) - f(0) > 0$, což je spor. Tedy $\frac{z^T U_{xx} z}{2} \leq 0$. ■

Vlastnost ostré kvazikonkávnosti funkce užitku není dostatečná, abychom obdrželi všude diferencovatelnou funkci poptávky. Proto zavedeme následující pojem.

Definice. Ostře kvazikonkávnní funkce užitku se nazývá *silně kvazikonkávnní*, jestliže

$$z^T U_{xx} z < 0 \text{ pro všechna } z \in \{y \in R^l : u_x \cdot y = 0, y \neq 0\}. \quad (7.3)$$

Tato dodatečná vlastnost je ekvivalentní regularitě tzv. *hraniční Hessova matice*

$$H = \begin{bmatrix} U_{xx} & u_x \\ u_x^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Věta 7.2 *Hraniční Hessova matice H ostře kvazikonkávnní monotonní rostoucí funkce užitku u je regulární právě tehdy, když je funkce užitku silně kvazikonkávnní.*

Důkaz. Dokažme nejprve dostatečnost. Předpokládejme tedy, že matice H je singulární. Pak existuje l -rozměrný vektor z a skalár r tak, že platí

$$U_{xx} z + u_x r = 0; \quad u_x \cdot z = 0; \quad (z^T, r) \neq 0. \quad (7.5)$$

Nechť $z = 0$. Pak $r \neq 0$. Tedy nutně z $u_x r = 0$ vyplývá, že $u_x = 0$, ale to je spor s monotonií funkce užitku. Nechť tedy $z \neq 0$. Pak $0 = z^T 0 = z^T U_{xx} z + z^T u_x r = z^T U_{xx} z < 0$, spor se silnou kvazikonkávnností. Odtud pak dostáváme, že nemůžeme najít nenulový vektor (z^T, r) tak, že $(z^T, r)H = 0$ a tedy je H regulární.

Dokažme nyní nutnost. Budeme postupovat ve třech krocích. Nejprve ukážeme, že je-li H regulární, můžeme najít reálné číslo α^* tak, že je pro všechna $\alpha < \alpha^*$ matice $A(\alpha) = U_{xx} + \alpha u_x^T \cdot u_x$ regulární. Dále ukážeme, že za předpokladu ostré kvazikonkávnnosti existuje reálné číslo β^* tak, že matice $A(\beta)$ je negativně semidefinitní matice. Poslední krok je kombinací těchto dvou kroků.

Krok 1. Regularita matice H znamená, že pro všechny nenulové l -rozměrné vektory c_1 takové, že $u_x \cdot c_1 = 0$, $A(\alpha)c_1 \neq 0$ pro všechna α . Uvažme dále všechny vektory c_2 tak, že $u_x^T c_2 \neq 0$ a normalizujme c_2 tak, že

$u_x^T c_2 = 1$. $A(\alpha)c_2 = 0$ znamená, že $\alpha = -c_2^T U_{xx} c_2$. Necht' $\alpha^* = \min\{-c_2^T U_{xx} c_2 : u_x^T c_2 = 1\}$. Pro $\alpha < \alpha^*$, $A(\alpha)c_2 \neq 0$ a $A(\alpha)$ je tedy regulární.

Krok 2. Je-li $A(\beta)$ negativně semidefinitní matice pro nějaké β tj. $c^T A(\beta)c \leq 0$ pro všechna c . Odtud pak pro všechna β platí $z^T U_{xx} z \leq 0$ pro všechna z taková, že $u_x^T z = 0$. Speciálně, $c^T A(\beta)c \leq 0$ pro všechna β a pro všechna z taková, že $u_x^T z = 0$. Uvažme dále všechny takové vektory c , že $u_x^T c \neq 0$ a normujme je tak, že $u_x^T c = 1$. Pokud pak $c^T A(\beta)c \leq 0$, je nutně $\beta \leq -c^T U_{xx} c$. Položme proto $\beta^* = \min\{c^T U_{xx} c : c^T u_x = 1\}$. Proto je pak $A(\beta)$ negativně semidefinitní, jestliže $\beta \leq \beta^*$.

Krok 3. Z kroků 1-2 plyne, že existuje reálné číslo γ tak, že $A(\beta)$ je regulární a negativně semidefinitní pro všechna $\beta \leq \gamma$, přitom $\gamma \leq \min\{\alpha^*, \beta^*\}$. Přitom z lineární algebry víme, že negativně semidefinitní matice, která je regulární, je nutně negativně definitní. Je proto $z^T A(\gamma)z = z^T U_{xx} z < 0$ pro všechna nenulová z taková, že $u_x^T z = 0$ tj. u je silně kvazikonkávní. ■

To, co bylo řečeno o vlastnosti derivací funkce užitku u , platí i pro každou diferencovatelnou rostoucí transformaci funkce u . To je zřejmé v případě, že kladné znaménko marginálních užitků a důsledky silné kvazikonkávnosti jsou založeny přímo na vlastnostech preferenčního uspořádání tj. na monotonii a konvexitě.

Popišme explicitně důsledky takovýchto transformací pro derivace. Buď tedy F dvakrát spojitě diferencovatelná rostoucí transformace $F : R \rightarrow R$ tj. $F' > 0$ (F' a F'' jsou skaláry) a F'' je spojitá. Položme $v(x) = F(u(x))$. Pak mezi prvními a druhými derivacemi funkcí $u(x)$ a $v(x)$ platí následující vztahy:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = F' \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{neboli} \quad v_x = F' u_x, \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = F' \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F'' \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \quad \text{tj.} \quad V_{xx} = F' U_{xx} + F'' u_x u_x^T.$$

Protože je F' kladné, má v_x stejné znaménko jako u_x . Naproti tomu prvky matice V_{xx} nemusí mít stejné znaménka jako prvky matice U_{xx} . Máme však, že $z^T U_{xx} z < 0$ pro každý vektor $z \in \{y \in R^l : u_x \cdot y = 0, y \neq 0\}$ implikuje $z^T V_{xx} z < 0$ pro každý vektor $z \in \{y \in R^l : v_x \cdot y = 0, y \neq 0\}$. Skutečně, $v_x^T z = F' u_x^T z = 0$ a tedy $z^T V_{xx} z = z^T F' U_{xx} z + z^T F'' u_x u_x^T z = F' z^T U_{xx} z + F'' z^T u_x u_x^T z = F' z^T U_{xx} z$ tj. oba výrazy $z^T U_{xx} z$ a $z^T V_{xx} z$

mají stejné znaménko z kladnosti F' . Poznamenejme, že se nejedná o nový výsledek ale jiný způsob důkazu, že ostrá a silná kvazikonkávnost odrážejí vlastnosti relace preference.

Protože ale marginální (mezní) užítiky $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ nejsou invariantní vzhledem monotonním rostoucím transformacím, budou nás zajímat poměry dvojic marginálních užitek, např.

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}}{\frac{\partial u}{\partial x_j}} = \frac{u_i}{u_j}. \quad (7.7)$$

Nutně pak je výraz 7.7 invariantní vzhledem k monotonním rostoucím transformacím (F' , které je jak ve jmenovateli tak čitateli, se pokrátí.). Zachováme-li nyní úroveň funkce užitku konstantní a měníme-li pouze proměnné x_i a x_j , obdržíme lokálně:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx_i^* + \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dx_j^* = 0. \quad (7.8)$$

Tedy máme

$$R_{ij} = \frac{u_i}{u_j} = -\frac{dx_j^*}{dx_i^*}. \quad (7.9)$$

R_{ij} se nazývá *marginální (mezní) míra substituce* i -té komodity za j -tou komoditu. Přitom R_{ij} reprezentuje množství komodity j věnované na výměnu za zvýšení komodity i , přičemž míra užitku zůstává konstantní.

O R_{ij} budeme předpokládat, že je klesající funkcí x_i tj. při stejné míře užitku bude množství komodity x_j menší věnované na výměnu za zvýšení komodity při větším x_i než když je x_i menší. Předpoklad o *DMRS* pro každou dvojici (i, j) plyne ze silné kvazikonkávnosti funkce užitku.

Klesající marginální míra substituce znamená, že

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i} - R_{ij} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} < 0, \quad (7.10)$$

což nám dává

$$\frac{1}{u_j} (u_{ii}u_j^2 - 2u_iu_ju_{ij} + u_{jj}u_i^2) < 0. \quad (7.11)$$

Výraz v závorkách je roven $z^T U_{xx} z$ pro $z_k = 0$, $k \neq i, j$ a $z_i = -u_j$ a $z_j = u_i$. Protože je výraz $u_j > 0$ a $u_x^T = 0$, máme ze silné kvazikonkávnosti, že výraz 7.10 je záporný. Přitom obrácená implikace plyne při jistých dodatečných předpokladech.

Pojem marginální míry substitute byl tradičně používán ve spojitosti se slabou a silnou separabilitou.

Než se budeme této spojitosti věnovat, bude pro nás užitečné si všimnout důsledků diferencovatelnosti funkce $u(x)$ v případě (slabé) separability. Za předpokladu separability víme, že

$$u(x) = V(v_1(x_1), \dots, v_k(x_k)). \quad (7.12)$$

Z diferencovatelnosti pro všechna $i \in N_j$, $1 \leq j \leq k$ dostaneme, že

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (7.13)$$

existuje a tedy existují i $\frac{\partial V}{\partial v_j}$ a $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$. Protože $v_j(x_j)$ má všechny vlastnosti funkce užitku, je nutně $\frac{\partial v_j}{\partial x_i} > 0$. Je tedy i $\frac{\partial V}{\partial v_j} > 0$, protože $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0$.

Nechť nyní $i, k \in N_j$. Pak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial V}{\partial v_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial V^2}{\partial v_j^2} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \quad (7.14)$$

a pro všechna $i \in N_j$, $k \in N_g$, $j \neq g$ máme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial V^2}{\partial v_j \partial v_g} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_g}{\partial x_k}. \quad (7.15)$$

Zejména odtud obdržíme, že existence a symetrie matice U_{xx} implikuje existenci a symetrii Hessovy matice V_{vv} . V případě silné separability je $\frac{\partial V}{\partial v_j} = V'$ tj. stejná pro všechna j . Nutně tedy

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = V' \frac{\partial v_j(x_j)}{\partial x_i}, \quad (7.16)$$

příčemž Hessova matice V_{vv} má všechny prvky stejné.

Věta 7.3 *Marginální míra substituce mezi dvěma komoditami i a k ležícími v množině N_j je nezávislá na úrovni spotřeby vně množiny N_j tehdy a jen tehdy, když je funkce užitku slabě separabilní.*

To znamená, že pro všechna $i \in N_j$ je $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ součinem společného faktoru $\alpha_j(x)$ a specifického faktoru $\beta_{ji}(x_j)$ tj.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \alpha_j(x) \beta_{ji}(x_j). \quad (7.17)$$

To ale odpovídá tomu (viz 7.13), že $\alpha_j(x) = \frac{\partial V}{\partial v_j}$ a $\beta_{ji}(x_j) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$.

Věta 7.4 *Marginální míra substituce mezi dvěma komoditami i a k ležícími po řadě v množině N_j a v množině N_g , $g \neq j$ lze psát jako podíl dvou funkcí $\beta_{ji}(x_l)$ a $\beta_{gf}(x_g)$ právě tehdy, když funkce $u(x)$ užitku je silně separabilní. nezávislá na úrovni spotřeby vně množiny N_j tehdy a jen tehdy, když je funkce užitku slabě separabilní.*

7.1 Diferencovatelná poptávka

V lemmatu 5.5 jsou vysloveny podmínky pro zajištění existence spojitě funkce poptávky $f(p, w)$, která je navíc homogenní stupně 0 jak v cenách tak i v bohatství. V této části se budeme věnovat důsledkům předpokladů diferencovatelnosti funkce užitečnosti pro funkci poptávky. Zejména bude studována diferencovatelnost funkce poptávky.

Omezíme se přitom na ten případ, kdy bude spotřební množina X otevřený kladný kužel $P \subseteq R^l$. Abychom obdrželi poptávkové svazky v P , budeme dále předpokládat, že preferenční uspořádání je monotónní a třídy C^2 a že uzávěry křivek indiference jsou celé obsaženy v P . Pak je za předpokladu pozitivních cen a pozitivního bohatství poptávková funkce korektně definována a její obor hodnot je podmnožinou otevřeného kladného kužele $P \subseteq R^l$. Navíc předpokládejme, že spotřebitel využije zcela své maximalizační preference. Lze tedy jeho výběr omezit na ty svazky $x \in P$, pro které platí $p^T x = w$.

Je-li funkce užitku spojitě diferencovatelná 2. stupně, je pak funkce poptávky $x = f(p, w)$ definovaná v 2.2 nebo v 5.1 určená jakožto řešení maximalizačního problému: maximalizujeme funkci $u(x)$ za omezujících podmínek $p^T x = w$. Stačí pak utvořit Lagrangian

$$L(x, \lambda, p, w) = u(x) - \lambda(p^T x - w), \quad (7.18)$$

kde λ je *Lagrangeův multiplikátor*.

Podmínky prvního stupně pro nalezení stacionárních bodů funkce $u(x)$ nám pak dávají

$$\frac{\partial L}{\partial x} = u_x - \lambda p = 0, \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w - p^T x = 0. \quad (7.20)$$

Stejně jako v předchozím paragrafu budeme předpokládat, že parciální derivace $u_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Jsou tedy nutně jak u_x tak i p kladné vektory tj. prvky P , zejména tedy z 7.19 dostáváme, že Lagrangeův multiplikátor λ je kladné reálné číslo.

Nutná podmínka druhého řádu pro nabývání maxima je pak

$$z^T L_{xx} z \leq 0 \text{ pro všechna } z \in R^l \text{ taková, že } p^T z = 0. \quad (7.21)$$

Přitom $L_{xx} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x'}$ vyčísleno v bodě řešení systému 7.19 a 7.20. Za předpokladu ostré kvazikonkávnosti funkce užitku (viz 7.1) je tato podmínka splněna, protože $L_{xx} = U_{xx}$ a dále $p^T z = 0$ implikuje $u_x^T z = 0$ na základě 7.19 a kladnosti λ .

Systém 7.19 a 7.20 je systém $l + 1$ rovnic v $2(l + 1)$ proměnných – vektory $x, p \in R^l$ a skaláry λ a w . Pro náš účel budeme p a w považovat za libovolné, pevné a x a λ budou *neznámé* proměnné. Lemma 5.5 nám zaručuje existenci jediného řešení $x = f(p, w)$. Zejména tedy existuje jediné řešení pro λ , totiž $\lambda w = \lambda p^T x = u_x^T x = u_x^T f(p, w)$ tj. $\lambda = \Theta(p, w) = \frac{u_x^T f(p, w)}{w}$.

Snadno se ověří, že řešení systému 7.19 a 7.20 je v proměnné x invariantní vzhledem k monotonním rostoucím transformacím funkce $u(x)$, ale proměnná λ už ne. Pro takovouto transformaci F jsou podmínky 7.19 a 7.20 převedeny na

$$F' u_x - \lambda^* p = 0, \quad (7.22)$$

a

$$w - p^T x = 0. \quad (7.23)$$

Podělíme-li 7.22 výrazem $F' > 0$ a položíme-li $\lambda = \frac{\lambda^*}{F'}$, obdržíme rovnici 7.19. Evidentně je tedy řešení pro x invariantní, zatímco λ^* je Lagrangeův multiplikátor pro transformovaný problém.

Věnujme se nyní diferencovatelnosti funkcí $f(p, w)$ a $\Theta(p, w)$ v bodě (x^0, λ^0, p, w) , kde $x^0 = f(p, w)$, $\lambda^0 = \Theta(p, w)$. Máme

$$dp = d \frac{u_x}{\lambda} = \frac{(U_{xx} dx) \lambda - u_x d\lambda}{\lambda^2}(p, w) \quad (7.24)$$

tj.

$$U_{xx}^0 dx - p d\lambda - \lambda^0 dp = 0. \quad (7.25)$$

Podobně,

$$dw = d(p^T x) = p^T dx + x^T dp(p, w), \quad (7.26)$$

tj.

$$dw - p^T dx - x^{0T} dp = 0. \quad (7.27)$$

Přitom $U_{xx}^0 = U_{xx}(x^0)$ Po snadné úpravě pak obdržíme tzv. *základní maticovou rovnici poptávky spotřebitele*:

$$\begin{bmatrix} U_{xx}^0 & p \\ p^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ -d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^0 E & 0 \\ -x^{0T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix}, \quad (7.28)$$

kde E je identická matice typu $l \times l$. Můžeme přitom formálně psát

$$dx = X_p dp + x_w dw; \quad d\lambda = \lambda_p^T + \lambda_w dw \quad (7.29)$$

neboli

$$\begin{bmatrix} dx \\ -d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_p & x_w \\ -\lambda^T & -\lambda_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ dw \end{bmatrix}. \quad (7.30)$$

Kapitola 3

Teorie ekonomické rovnováhy

Tato kapitola je podstatným způsobem založena na článku S. Smalea [28] a monografii G. Debreua [7] ve zpracování v rámci diplomové práce Jiřího Novotného [21].

1 Základní pojmy

1.1 Prostor komodit

Prostor komodit je základním pojmem, na kterém stojí i celý matematický aparát. Jeho podstatou je, že v ekonomice je daný počet komodit (komoditou nerozumíme jen zboží či služby, ale cokoliv, co lze použít ke směně, včetně práce, komodita je určena svými fyzickými vlastnostmi, datem a místem, kdy a kde je dostupná). Nechť je těchto komodit l , $l \in N$. Akci jednotlivého ekonomického subjektu (v našem případě i -tého spotřebitele nebo výrobce) můžeme zapsat jako komoditní vektor v komoditním prostoru R^l .

$$x_i = (x^1, \dots, x^l), \quad x^h \in R \quad h = 1, \dots, l$$

Pomocí tohoto vyjádření akce jednoho subjektu nyní můžeme popsat celou ekonomiku. Pokud je účastníků daný počet, např. m , pak budou všechny akce v ekonomice popsány vektorem komoditních vektorů z prostoru, $z \in R^{lm}$. Tedy

$$z = (x_1, \dots, x_m), \quad x_i \in R^l \quad i = 1, \dots, m.$$

1.2 Cenový prostor

Cenový prostor lze považovat za duální koncept ke konceptu prostoru komoditního. Jako nejlepší k ohodnocení komodit se hodí právě ceny. Tzn. že ke komoditnímu prostoru přiřadíme cenový vektor, přičemž jednotlivé složky si odpovídají (i -tá složka cenového vektoru značí cenu i -té komodity). Aby cenový prostor odpovídal nejlépe reálné situaci budeme uvažovat pouze nezáporné ceny - tuto množinu budeme značit $R_+ = [0, \infty)$. * Tedy

$$p = (p^1, \dots, p^l), \quad p^h \in R_+ \quad h = 1, \dots, l$$

je cenový vektor. Další podmínkou je, že cenový vektor je pro všechny účastníky stejný, takže vlastně reprezentuje cenový systém. Hodnotu komoditního vektoru v daném cenovém systému vyjádříme jako skalární součin obou vektorů.

$$w = p \cdot x = \sum_{h=1}^l p^h x^h$$

1.3 Agenti

Místo dřívějších, poněkud kostrbatých pojmů "účastník trhu, účastník ekonomiky", nyní zavedeme pojem "agent". Z ekonomického hlediska agentem rozumíme jak spotřebitele, tak výrobce. Pro odlišení těchto pojmů v matematickém konceptu zavedeme následující znaménkovou konvenci pro rozlišení vstupů a výstupů: pro spotřebitele budou vstupy kladné, výstupy záporné, pro výrobce naopak vstupy záporné a výstupy

*Komodity s nulovou cenou se v ekonomické teorii nazývají *volné*.

kladné. Díky této konvenci v matematickém vyjádření nemusíme rozlišovat mezi pojmy spotřebitel a výrobce vystačíme pouze s pojmem agent. Je zároveň ošetřena možnost, že agent je současně výrobcem i spotřebitelem.

1.4 Existence rovnováhy

Celková nabídka $S(p)$ a celková poptávka $D(p)$ jsou zobrazení z cenového do komoditního prostoru, tedy

$$S, D : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l.$$

Předpokládáme, že poptávka i nabídka jsou homogenní, tj. platí

$$D(p) = D(\lambda p), \quad S(p) = S(\lambda p) \quad \text{pro } \lambda \in (0, \infty).$$

Ekonomika je v rovnováze právě tehdy, když žádný z agentů nechce změnit její stav. Veškeré vyrobené zboží je také poptáváno a spotřebitelé plně uspokojují své potřeby.

$$D(p) = S(p),$$

poptávka se rovná nabídce. Hledáme tedy vektor $p^* \in R_+^l - \{0\}$, který splňuje

$$D(p^*) = S(p^*).$$

Označíme-li $Z : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l$, $Z(p) = D(p) - S(p)$ jako *převís poptávky*, pak hledáme takový vektor p^* , pro který

$$Z(p^*) = 0.$$

Zobrazení Z je spojitě a homogenní, neboli

$$Z(\lambda p) = Z(p), \quad \text{pro všechna } \lambda > 0.$$

1.5 Walrasův zákon

Walrasův zákon říká, že celková hodnota poptávky je rovna celkové hodnotě nabídky. Hodnotu nabídky lze interpretovat jako rozpočtové omezení celé ekonomiky a hodnota převisu poptávky je nulová:

$$p \cdot Z(p) = 0 \quad \text{čili} \quad \sum_{h=1}^l p^h Z^h(p) = 0$$

Nechť je $S_+^{l-1} = \{p \in R_+^l; \|p\|^2 = \sum_{i=1}^l (p^i)^2 = 1\}$ prostor normalizovaných cenových systémů. Homogenita Z nám dovoluje zúžit definiční obor Z na $S_+^{l-1} \in R$. Podle Walrasova zákona je $Z(p)$ tečna S_+^{l-1} v bodě p , neboť vektor $Z(p)$ je kolmý k p .

Slabý Walrasův zákon říká, že pro každý cenový vektor $p \in R_+^l$ platí:

$$p \cdot Z(p) \leq 0.$$

Definice 1.1

Nechť $a \in R$ a $v \in R^l$, pak zápis $v < a$ znamená, že

$$v^h < a, \quad \text{pro } h = 1, \dots, l.$$

Nechť $b \in R^l$ a $v \in R^l$, pak zápis $v < b$ znamená, že

$$v^h < b^h, \quad \text{pro } h = 1, \dots, l.$$

Podobně i pro $=, \leq, >, \geq$.

Věta 1.1 (Debreu-Gale-Nikaidô)

Nechť je $Z : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l$ spojitě a splňuje slabý Walrasův zákon. Pak existuje $p^* \in R_+^l - \{0\}$ takové, že

$$Z(p^*) \leq 0.$$

Důkaz viz [28, strana 338-339].

Poznámka 1.1

Pokud $Z : R_+^l - \{0\} \rightarrow R_+$ splňuje Walrasův zákon a pro nějaké p^* platí $Z(p^*) \leq 0$, pak buď $Z^h(p^*) = 0$ nebo $p^{*h} = 0$.

1.6 Aproximace vícehodnotových zobrazení

$S(T)$ značí množinu konvexních podmnožin množiny $T \subseteq R^l$.

Definice 1.2

Nechť je $K \subseteq R^l$ kompaktní, $T \subseteq R^l$ kompaktní a konvexní. Pak zobrazení $\varphi : K \rightarrow S(T)$ nazýváme *korespondence* z K do T .

Graf korespondence φ je množina

$$\Gamma_\varphi = \{[x, y] \in K \times T; y \in \varphi(x)\}.$$

ε -okolí grafu Γ_φ definujeme takto:

$$B_\varepsilon(\Gamma_\varphi) = \{y \in K \times T; \text{dist}(y, \Gamma_\varphi) \leq \varepsilon\}.$$

Věta 1.2

Jestliže je φ korespondence z K do T s kompaktním grafem Γ_φ , potom pro dané $\varepsilon > 0$ existuje spojitě zobrazení $f : K \rightarrow T$ takové, že $\Gamma_f \subset B_\varepsilon(\Gamma_\varphi)$.

Důkaz viz [6].

1.7 Vlastnosti konvexních množin a obalů

Lemma 1.3

Součet dvou konvexních množin R^l je konvexní množina.

Důkaz:

Nechť $a_1, a_2 \in A$ a $b_1, b_2 \in B$, kde A a B jsou konvexní množiny. Pak platí

$$t(a_1 + b_1) + (1 - t)(a_2 + b_2) = (ta_1 + (1 - t)a_2) + (tb_1 + (1 - t)b_2) \in A + B.$$



Lemma 1.4

Nechť \tilde{Y}_j značí konvexní obal množiny Y_j v R^l , pak

$$\sum_{j=1}^m \tilde{Y}_j = \widetilde{\sum_{j=1}^m Y_j}.$$

Důkaz:

Stačí dokázat, že $\tilde{A} + \tilde{B} = \widetilde{A + B}$. Tvrzení pro více množin se pak již jednoduše dokáže pomocí indukce.

Podle lemmatu 1.3 je $\tilde{A} + \tilde{B}$ konvexní množina. Protože $\widetilde{A + B}$ je nejmenší konvexní množina obsahující $A + B$, platí

$$\tilde{A} + \tilde{B} \supseteq \widetilde{A + B}.$$

Důkaz opačné inkluze je složitější.

Pro množinu $X \subseteq R^l$ definujeme

$$X_n = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i; x_i \in X, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\},$$

tedy množina X_n je množinou všech konvexních kombinací n prvků z množiny X . Necht' $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$ a $t, s \in R$ takové, že $t, s \in (0, 1)$.

Platí

$$\begin{aligned} ta_1 + (1-t)a_2 + sb_1 + (1-s)b_2 &= \\ ta_1 + tb_1 + (s-t)b_1 + (1-s)b_2 + (1-s)a_2 + (s-t)a_2 &= \\ t(a_1 + b_1) + (s-t)(a_2 + b_1) + (1-s)(a_2 + b_2). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dále dostáváme

$$\tilde{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_{2^r}.$$

Z platnosti vztahu (1.1) vyplývá, že

$$A_2 + B_2 \subseteq (A + B)_3 \subseteq \widetilde{A + B}. \quad (1.2)$$

Dále platí

$$X_{2^{k+1}} = (X_{2^k})_2 \quad (1.3)$$

Inkluze $X_{2^{k+1}} \supseteq (X_{2^k})$ je zřejmá. Obráceně:

Necht' $x \in X_{2^{k+1}}$. Pak

$$x = \sum_{i=1}^{2^{k+1}} t_i x_i; \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{2^{k+1}} t_i = 1, \quad t_i \geq 0.$$

Pokud $0 < \sum_{i=1}^{2^k} t_i < 1$, pak

$$x = \left(\sum_{i=1}^{2^k} t_i \right) \left(\sum_{i=1}^{2^k} \frac{t_i}{\sum_{i=1}^{2^k} t_i} x_i \right) + \left(\sum_{i=2^{k+1}}^{2^{k+1}} t_i \right) \left(\sum_{i=2^{k+1}}^{2^{k+1}} \frac{t_i}{\sum_{i=2^{k+1}}^{2^{k+1}} t_i} x_i \right) \in (X_{2^k})_2.$$

Pokud $\sum_{i=1}^{2^k} t_i = 0$, pak

$$x = 0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k} x_i \right) + 1 \cdot \left(\sum_{i=2^{k+1}}^{2^{k+1}} t_i x_i \right) \in (X_{2^k})_2.$$

Analogicky pro $\sum_{i=1}^{2^k} t_i = 1$.

Nyní indukci dokážeme, že

$$A_{2^k} + B_{2^k} \subseteq \widetilde{A + B}.$$

Pro $k = 1$ to plyne z (1.2).

Dále pokračujeme indukci. Předpokládáme, že inkluze platí pro k . Pro $k + 1$ pomocí vztahů (1.2) a (1.3) dostaneme

$$\begin{aligned} A_{2^{k+1}} + B_{2^{k+1}} &= (A_{2^k})_2 + (B_{2^k})_2 \subseteq (A_{2^k} + B_{2^k})_3 \subseteq \\ &\subseteq \widetilde{(A + B)}_3 = \widetilde{A + B} \end{aligned}$$

Tedy platí

$$\begin{aligned} \widetilde{A} + \widetilde{B} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2^k} + \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2^k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{2^k} + B_{2^k}) \subseteq \\ &\subseteq \widetilde{A + B}. \end{aligned}$$

Rovnost $\widetilde{A} + \widetilde{B} = \widetilde{A + B}$ tedy platí a lemma 1.4 je dokázáno. ■

Lemma 1.5

Nechť \overline{A} značí uzávěr množiny A . Pak platí

$$\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B}.$$

Důkaz:

Nechť $a \in \overline{A}$ a $b \in \overline{B}$ a pro $a_n \in A$, resp. $b_n \in B$ platí $a_n \rightarrow a$, resp. $b_n \rightarrow b$. Pak platí, že

$$a_n + b_n \in A + B$$

a zároveň

$$a_n + b_n \rightarrow a + b,$$

z čehož vyplývá

$$a + b \in \overline{A + B}.$$



2 Výrobce

2.1 Úvod

Nyní se budeme zabývat výrobní stranou ekonomiky. Hlavní rolí výrobce je sestavit a uskutečnit svůj výrobní plán. Pro každého z $n, j = 1, \dots, n$ výrobců to znamená určit množství všech svých vstupů a výstupů. Bod $y_j \in R^l$ se nazývá *produkce* a označuje všechny dosažitelné i nedosažitelné produkce daného výrobce, množina dosažitelných produkcí se značí Y_j a nazývá se *produkční množina*. *Celková produkční množina* a *celková dosažitelná produkční množina* vzniknou sečtením dílčích množin, tedy:

$$y = \sum_{j=1}^n y_j \quad \text{a} \quad Y = \sum_{j=1}^n Y_j$$

Jelikož tímto sečtením dojde k odstranění přesunů komodit mezi výrobci, představuje y čistý výstup ekonomiky.

2.2 Vlastnosti produkčních množin

O produkčních množinách předpokládáme (na některých místech výkladu) následující:

(a) Y_j je uzavřená.

Nechť je y_j^q posloupnost produkcí dostupných j -tému výrobcí a pokud $y_j^q \rightarrow y_j^0$, pak je i y_j^0 dostupná j -tému výrobcí.

(a') Y je uzavřená.

(b) $0 \in Y_j$ (možnost žádné produkce)

Výrobce má možnost nedělat nic.

(b') $0 \in Y$.

(c) $Y \cap (-Y) = \{0\}$ (podmínka nenávratnosti)

Tato podmínka říká, že výroba je "jednosměrný proces", kdy výstup již nelze znovu "rozložit" zpět na původní vstupy.

(d) Y_j je konvexní.

Pokud jsou y_j^1 a y_j^2 dosažitelné produkce, je dosažitelný i jejich vážený průměr $ty_j^1 + (1-t)y_j^2$ pro libovolné $t \in (0, 1)$.

(d') Y je konvexní.

(e) $Y \supset (-R_+^l)$ (podmínka volného použití)

Celková produkce s nulovými výstupy je dosažitelná. Tzn. že výrobcí používají všechny vyprodukované komodity jako vstupy.

(f) $Y - R_+^l \subset Y$

Tato vlastnost je důsledkem vlastností (a'), (d') a (e) pro Y , viz [7], strana 42.

Z těchto uvedených podmínek vychází Arrowova-Debreuova věta uvedená v následující kapitole. Produkční množiny mají několik dalších vlastností.

(g) Nejprve necht' $R_+^l = \{x \in R^l; x \geq 0\}$ a $Y \subset R^l$, pak platí:

$$Y \cap R_+^l \subset \{0\} \quad (\text{nemožnost volné produkce})$$

Výstupy dosažitelné celkové produkce s nulovými vstupy jsou nulové.

(h) $(Y_j + Y_j) \subset Y_j$ (aditivita)

Pokud jsou dva výrobní plány dosažitelné samostatně, pak jsou dosažitelné i společně.

(i) Y_j je kužel s vrcholem v bodě 0. (konstantní výnosy z rozsahu)

Tzn. $y_j \in Y_j \Rightarrow ty_j \in Y_j, t > 0$. Poměry vstupů a výstupů ve výrobě jsou stejné, ale rozsah může být libovolně měněn.

2.3 Maximalizace zisku

Každý racionálně uvažující a jednající výrobce (dále budeme uvažovat pouze tyto) se snaží maximalizovat zisk z prodeje svých výstupů. V daném cenovém systému p a při produkci y_j se tedy snaží maximalizovat *ziskovou funkci* $\pi_j(p, y_j) : Y_j \rightarrow R$ definovanou

$$\pi_j(p, y_j) = p \cdot y_j.$$

Pro tuto funkci platí

$$\pi_j(tp, y_j) = t\pi_j(p, y_j).$$

Celkový zisk všech výrobců je $p \cdot y$. Výrobce si vybírá takovou produkci z produkční množiny Y_j , která maximalizuje jeho zisk, tato se pak nazývá *rovnovážná produkce*. Pokud $p \neq 0$ a y_j je produkce maximalizující zisk, pak množina Y_j leží v uzavřeném poloprostoru pod nadrovinou $H = \{y \in R^l, p \cdot y = p \cdot y_j\}$ určenou normálovým vektorem p . Množina maxim je dána průnikem Y_j a H .

Nabídkou j -tého výrobce rozumíme korespondenci $S_j : R^l - \{0\} \rightarrow Y_j$. Výsledkem je množina všech dosažitelných produkcí, které maximalizují výrobcův zisk, tedy

$$S_j(p) = \{\bar{y} \in Y_j; p \cdot \bar{y} = \max_{y \in Y_j} p \cdot y\}.$$

Celková nabídka je korespondence $S : R^l - \{0\} \rightarrow Y$ definována takto:

$$S(p) = \sum_{j=1}^n S_j(p).$$

Celková produkce y maximalizuje zisk na Y tehdy a jen tehdy maximalizuje-li zisk každé y_j na Y_j .

3 Spotřebitel

3.1 Úvod

Spotřebitel je v ekonomice charakterizován svými preferencemi a svým rozpočtovým omezením. Jeho hlavní charakteristiky nám podávají *spotřební množina* X_i a jeho preference. Spotřební množina X_i je množina všech dosažitelných spotřeb, spotřebu určuje bod x_i komoditního prostoru. Spotřebitelovou rolí v ekonomice je vybrat si a uskutečnit spotřební plán pro budoucnost, tzn. určit množství vstupů a výstupů.

3.2 Vlastnosti spotřebních množin

Uvažujme m spotřebitelů. Spotřební množinu i -tého spotřebitele ($i = 1, 2, \dots, m$) označme X_i . Platí pro ni následující podmínky:

- (a) X_i je uzavřená množina.

(b) X_i je zdola ohraničená.

To znamená, že existuje takové $d_i \in R^l$, že $X_i \subset \{x \in R^l \mid x \geq d_i\}$, což zapisujeme také $X_i \geq d_i$.

(c) X_i je konvexní.

Tzn., pokud x_i^1 a x_i^2 jsou dvě možné spotřeby i -tého spotřebitele, je jeho možnou spotřebou i jejich vážený průměr $tx_i^1 + (1-t)x_i^2$, $t \in (0, 1)$.

3.3 Preference spotřebitele

Základem zkoumání chování spotřebitele při výběru optimálního spotřebního koše jsou spotřebitelovy preference. Na jejich základě spotřebitel rozhoduje, která ze spotřeb je pro něj "lepší" nebo "horší". Preference zahrnují faktory biologické, psychologické, kulturní, společenské a další. Tyto preference popisuje úplná preferenční relace " \succeq ". Výraz $x_i^1 \succeq x_i^2$ znamená, že spotřeba x_i^1 je pro spotřebitele "nejvýše tak dobrá" jako spotřeba x_i^2 . Tato relace je reflexivní a tranzitivní.

Pro každé $\bar{x}_i \in X_i$ jsou množiny $\{x_i \in X_i; x_i \preceq_i \bar{x}_i\}$ a $\{x_i \in X_i; x_i \succeq_i \bar{x}_i\}$ uzavřené v X_i (podmínka spojitosti). Výraz $x_i^1 \sim x_i^2$ znamená, že spotřebitel je k oběma výběrům indiferentní, tedy že nemůže říci, který je "lepší" a který "horší". Tato relace je navíc i symetrická. Pro spotřebitelovy koše x_i^1 a x_i^2 platí $x_i^1 \sim x_i^2$ právě tehdy, když

$$x_i^1 \preceq x_i^2 \text{ a } x_i^1 \succeq x_i^2.$$

Bod $x_i \in X_i$ se nazývá *nasycení*, pokud neexistuje lepší dostupná spotřeba.

3.4 Užítková funkce

Spotřebitelovy preference reprezentuje *užitková funkce*[†] $u_i : X_i \rightarrow R$. Tato funkce je rostoucí a platí pro ni následující podmínka:

$$(x \preceq y) \Leftrightarrow (u(x) \leq u(y))$$

Užitková funkce má následující vlastnosti:

- (a) u_i nemá maximum (podmínka nenasycenosti). $\forall x_i \in X_i, \exists \bar{x}_i \in X_i : x_i \prec_i \bar{x}_i$.
- (b) u_i splňuje podmínku konvexity: pokud $x, x' \in X_i$ a $u_i(x) > u_i(x')$, potom $u_i(tx + (1-t)x') > u_i(x')$ pro každé $t \in (0, 1)$.

Poznámka 2.1

Funkce u_i je konkávní a přitom splňuje podmínku konvexity (platí zákon klesajícího mezního užitku), naopak konvexní funkce podmínku konvexity splňovat nemusí.

Důležitým pojmem pro studium chování spotřebitele je *indiferenční plocha*, kterou definujeme jako vrstevnici funkce u_i , $\{x \in R^l, u_i(x) = c\}$. V dvourozměrném případě mluvíme o indiferenční křivce, ta vyjadřuje všechny kombinace daných dvou komodit, které mají pro daného spotřebitele stejný užitek.

3.5 Rozpočtové omezení

Spotřebitel samozřejmě nemůže spotřebovat do nekonečna, je ohraničen svým *rozpočtovým omezením*. Hodnota w_i těchto prostředků spotřebitele omezuje při výběru kombinací komodit z komoditního prostoru, a to tak, že nemůže tuto hodnotu překročit. Spotřebiteli jsou tedy dostupné pouze ty komoditní vektory,

[†]Nutnou a postačující podmínkou existence spojitě funkce užitku je, aby množina $A = \{(x, y) \in R^l \times R^l; x \preceq y\}$ byla vzhledem k $R^l \times R^l$ uzavřená.

jejichž hodnota je menší nebo rovna hodnotě jeho prostředků w_i . V daném cenovém systému pak rozpočtové omezení definujeme jako skalární součin

$$p \cdot x = \sum_{h=1}^l p^h \cdot x_i^h = w_i; \quad p^h, x_i^h \in R, \quad w_i \in R,$$

přičemž p^h jsou složky cenového vektoru a x_i^h složky komoditního vektoru.

Nadrovina $\{a \in R^l; \sum_{h=1}^l p^h \cdot a^h = w_i\}$ se nazývá *rozpočtová nadrovina*. Nerovnost $p \cdot x_i \leq w_i$ říká, že x_i leží v poloprostoru pod rozpočtovou nadrovinou.

Každý spotřebitel disponuje majetkem $e_i \in X_i$, přičemž existuje takové $x_i \in X_i$, že platí $e_i > x_i$. Pokud uvažujeme ekonomiku se soukromými vlastníky, potom θ_{ij} značí podíl i -tého agenta v j -té firmě s výrobou $y_j \in R^l$. Je zřejmé, že $0 \leq \theta_{ij} \leq 1$ a $\sum_{j=1}^m \theta_{ij} = 1$. Pro daný cenový systém p je bohatství i -tého agenta

$$w_i = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} p \cdot y_j.$$

Vektor $w \in R^m$ se nazývá *rozložení bohatství* a jeho složkami jsou hodnoty bohatství jednotlivých spotřebitelů (w_i).

3.6 Rovnováha spotřebitele

Spotřebitel dosahuje optima, pokud si vybere takový spotřební koš x_i , který mu v preferenčním uspořádání " \preceq " přináší největší užitek, a zároveň platí, že výdaje $p \cdot x_i$ na tento spotřební koš jsou nejvýše rovny jeho bohatství w_i . Námi uvažovaný racionálně jednajícím spotřebitel si samozřejmě takový koš vybere a bude jej na trhu popotávat.

Spotřebitelovou *poptávkou* rozumíme korespondenci $D_i(p) : R^l - \{0\} \rightarrow X_i$ definovanou jako množinu všech

dosažitelných spotřeb $x_i \in X_i$, v nichž užitková funkce $u_i(x_i)$ nabývá svého maxima na rozpočtové množině $B_i = \{\bar{x} \in X_i; p \cdot \bar{x} \leq w_i\}$, tedy

$$D_i(p) = \{\bar{x} \in B_i; u_i(\bar{x}) = \max_{x \in B_i} u_i(x)\}.$$

Všechny body z množiny $D_i(p)$ jsou navzájem indiferentní a pro všechny $x'_i \in D_i(p)$ a $x_i \in B_i$ platí nerovnost $x_i \preceq_i x'_i$. Pro poptávku samozřejmě platí:

$$D_i(tp) = D_i(p), \text{ pro libovolné } t > 0.$$

Celková poptávka je korespondence $D(p) : R^l - \{0\} \rightarrow \bigcup_{i=1}^m X_i$ definovaná takto:

$$D(p) = \sum_{i=1}^n D_i(p).$$

4 Rovnováha ekonomiky

4.1 Definice rovnováhy

Rovnováha ekonomiky je její stav (x, y, p) , kde $x \in \prod_{i=1}^m X_i$, $y \in \prod_{j=1}^n Y_j$, $p \in S_+^{l-1} = \{p \in R_+^l; \|p\|^2 = \sum_{i=1}^l (p_i)^2 = 1\}$, který splňuje následující podmínky:

(A) Dosažitelnost, neboli
$$\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{j=1}^n y_j + \sum_{i=1}^m e_i.$$

(B) Každý spotřebitel se snaží maximalizovat svůj užitek, neboli x_i je spotřeba, při níž u_i dosahuje maxima na rozpočtové množině $B_i = \{\bar{x} \in X_i; p \cdot \bar{x} \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p \cdot y_j\}$.

(C) Každý výrobce se snaží maximalizovat svůj zisk, neboli y_j je výroba, při níž je $\pi_j(p, y_j) = p \cdot y_j$ maximální na Y_j .

4.2 Arrowova-Debreuova věta

Arrowova-Debreuova věta:

Pro ekonomiku splňující podmínky 2.2 (a'), (b'), (c), (d'), (e), (f) a 3.2 (a), (b), (c), 3.4 (a), (b) vždy existuje rovnovážný stav.

Než dokážeme Arrowovu-Debreuovu větu, uvedeme a dokážeme větu 4.1 a větu 4.6, které splňují silnější předpoklady.

Definice 4.1:

Konvexní množina K se nazývá *striktně konvexní*, jestliže pro všechna $x, y \in K$, $x \neq y$ a $t \in (0, 1)$ je $tx + (1 - t)y \in K^\circ$, kde K° je vnitřek K .

Věta 4.1:

Předpokládejme nyní, že ekonomika popsaná výše splňuje kromě předpokladů Arrowovy-Debreuovy věty tyto dodatečné podmínky:

- (1) Každá Y_j je uzavřená a striktně konvexní.
- (2) Každá u_i splňuje podmínku *ostré konvexity* tj., pokud $u_i(x) \geq c$, $u_i(x') \geq c$, $x \neq x'$ a $0 < t < 1$, potom $u_i(tx + (1 - t)x') > c$.

Potom existuje rovnovážný stav.

Poznámka 4.1

Podmínka (2) z věty 4.1 neznamená, že u_i je striktně konvexní. Dále si uvědomme, že podmínka ostré kon-

vexity je ekvivalentní s tím, že funkce je ostře kvazikonkávní (viz str. 77).

K důkazu věty 4.1 budeme potřebovat několik lemmat.

Lemma 4.2: (základní odhad)

Nechť je Y uzavřená konvexní podmnožina R^l s vlastnostmi $Y \cap (-Y) = \{0\}$ a $Y \supset -R_+^l$. Pak pro dané $b \in R^l$ a n přirozené existuje konstanta c taková, že pokud $y_1, \dots, y_n \in Y$ a $\sum_{j=1}^n y_j \geq b$, potom $\|y_j\| < c$ pro všechna j .

K důkazu tohoto lemmatu použijeme následující tři tvrzení. V nich označme $K = \{y \in Y; \|y\| = 1\}$.

Tvrzení 4.1:

Počátek 0 prostoru R^l neleží v konvexním obalu množiny K .

Důkaz:

Předpokládejme, že $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r = 0$ pro $x_i \in K, 0 < \alpha_i < 1, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$. Pak

$$-\alpha_1 x_1 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r$$

Protože $0, x_2, \dots, x_r \in Y$ a Y je konvexní, leží výraz na pravé straně v Y . Výraz $-\alpha_1 x_1$ lze rozepsat takto:

$$-\alpha_1 x_1 = -(\alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1) \cdot 0)$$

Tedy $-\alpha_1 x_1$ leží rovněž v $-Y$. Z toho vyplývá, že $\alpha_1 x_1 \in Y \cap (-Y) = \{0\}$. Zároveň $\|x_1\| = 1$, tedy $\alpha_1 = 0$, což je spor s předpoklady. 0 tedy nepatří do konvexního obalu množiny K .

**Tvrzení 4.2:**

Existuje $q = (q^1, q^2, \dots, q^l) \in R^l$, $q^h > 0$ pro všechna h , takové, že pro všechna $x \in K$ platí $q \cdot x < 0$.

Důkaz:

Jestliže $A \subseteq R^l$ je kompaktní konvexní množina a bod $b \in R^l$ neleží v A , pak lze A od b oddělit nadrovinou $q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_lx_l = c$. Necht' je nyní konkrétně A konvexním obalem množiny K , pak dle tvrzení 1 platí $0 \notin A$. Existuje tedy nadrovina, která odděluje A a 0 . Tato nadrovina má rovnici $q \cdot x = c$. Pro všechna $x \in A$ platí následující nerovnosti:

$$\begin{aligned} q \cdot x &< c \\ 0 = q \cdot 0 &> c \end{aligned}$$

Tedy pro všechna $x \in K \subseteq A$ platí $q \cdot x < 0$.

Navíc pro všechny vektory v^h standardní báze v R^l platí

$$-v^h \in K \quad \text{a} \quad -q^h = q \cdot (-v^h) < 0.$$

Tedy $q^h > 0$, pro všechna h .

**Tvrzení 4.3:**

Existují konstanty $\varepsilon > 0$ a $\beta > 0$ tak, že pro všechna $x \in Y$, platí

$$q \cdot x \leq \beta + \varepsilon - \varepsilon \|x\|.$$

Důkaz:

Necht' $q \in R^l$ je vektor z tvrzení 4.2. Nejprve definujeme:

$$\begin{aligned} \beta &= \max\{q \cdot x; \|x\| \leq 1\} \\ -\varepsilon &= \max\{q \cdot x; x \in K\} \end{aligned}$$

Nyní rozlišíme dvě možnosti:

(1) Nechť $\|x\| \leq 1$. Potom

$$q \cdot x \leq \beta \leq \beta + \varepsilon - \varepsilon\|x\|,$$

neboť $\varepsilon - \varepsilon\|x\| \geq 0$.

(2) Nechť $\|x\| > 1$, pak $\frac{x}{\|x\|} \in K$ a platí:

$$-\varepsilon \geq q \cdot \frac{x}{\|x\|}.$$

Tedy

$$-\varepsilon\|x\| \geq q \cdot x$$

a odtud

$$q \cdot x \leq -\varepsilon\|x\| < -\varepsilon\|x\| + \beta + \varepsilon,$$

neboť

$$\beta + \varepsilon > 0.$$

Uvedená nerovnost tedy platí.



Důkaz lematu 4.2:

Nechť $q \in R^l$ je vektor z tvrzení 4.2.

Předpokládejme, že $\sum_{j=1}^n y_j \geq b$ pro $y_j \in Y$ Potom platí:

$$\left(\sum_{j=1}^n y_j \right)^h \geq b^h.$$

Nerovnost vynásobíme číslem $q^h > 0$ a dostaneme

$$\left(\sum_{j=1}^n y_j \right)^h q^h \geq b^h q^h.$$

Nyní vše sečteme podle h a výsledkem je nerovnost

$$\sum_{j=1}^n y_j q \geq b \cdot q.$$

Odtud dostáváme:

$$b \cdot q \leq \sum_{j=1}^n y_j \cdot q \leq \sum_{j=1}^n ((\beta + \varepsilon) - \varepsilon \|y_j\|) = n(\beta + \varepsilon) - \varepsilon \sum_{j=1}^n \|y_j\|$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{j=1}^n \|y_j\| + b \cdot q &\leq n(\beta + \varepsilon) \\ \sum_{j=1}^n \|y_j\| &\leq \frac{n(\beta + \varepsilon) - q \cdot b}{\varepsilon} \\ \|y_j\| &\leq \frac{n(\beta + \varepsilon) - q \cdot b}{\varepsilon} = c \end{aligned}$$



Lemma 4.3:

Nechť $i = 1, \dots, m$ a necht' $X_i \geq d_i$. Pro dané $c_1 \in \mathbb{R}^l$ existuje $a > 0$ tak, že pro všechna $x_i \in X_i$ taková, že

$$\sum_{i=1}^m x_i \leq c_1,$$

platí $\|x_i\| < a$, pro všechna i .

Důkaz:

Platí následující nerovnost:

$$(d_i)^h \leq (x_i)^h = (x_1 + \dots + x_m)^h - (x_1)^h - \dots - (x_{i-1})^h - (x_{i+1})^h - \dots \\ \dots - (x_m)^h \leq (c_1)^h - (d_1)^h - \dots - (d_{i-1})^h - (d_{i+1})^h - \dots - (d_m)^h$$

Tedy pro $|(x_i)^h|$ platí následující:

$$|(x_i)^h| \leq \max(|(d_1)^h|, \dots, |(d_{i-1})^h|, |(d_{i+1})^h|, \dots, |(d_m)^h|, \\ |(c_1)^h - \sum_{k=1}^m (d_k)^h + (d_1)^h|, |(c_1)^h - \sum_{k=1}^m (d_k)^h + (d_2)^h|, \dots, \\ |(c_1)^h - \sum_{k=1}^m (d_k)^h + (d_m)^h|) = a^h$$

Tedy $|(x_i)^h| \leq a^h$. Definujme $a = \sqrt{\sum_{k=1}^l (a^k)^2 + 1}$. Z toho dostáváme

$$\|x_i\|^2 \leq \sum_{h=1}^l (x_i^h)^2 = \sum_{h=1}^l (a^h)^2 < \sum_{h=1}^l (a^h)^2 + 1 = a^2.$$

■

Nabídka firmy j je definována jako $S_j(p) = \{\bar{y} \in Y_j; p \cdot \bar{y} = \max_{y \in Y_j} p \cdot y\}$. Nyní necht' $b = \sum_{i=1}^n d_i - \sum_{i=1}^n e_i$

a zvolme c stejně jako v Lemmatu 4.2 tak, že když $\sum_{j=1}^m y_j \geq b$, potom $\|y_j\| < c$, pro všechna j . Necht'

$\hat{Y}_j = Y_j \cap D_c$, kde $D_c = \{y \in D^l; \|y\| \leq c\}$. Pro $p \in R_+^l - \{0\}$, je $\hat{S}_j(p) = \bar{y} \in \hat{Y}_j$ takové, že funkce

$\pi(p, y) = p \cdot y$, má na \widehat{Y}_j maximum v \bar{y} . Potom se \widehat{S}_j nazývá *falešná nabídka* firmy j .

Lemma 4.4:

Funkce $\pi(p, y) = p \cdot y$ nabývá na \widehat{Y}_j svého maxima právě v jednom bodě. Tedy funkce $\widehat{S}_j : R_+^l - \{0\} \rightarrow \widehat{Y}_j$ je dobře definována. Dále je spojitá a platí pro ni:

$$(1) \widehat{S}_j(\lambda p) = \widehat{S}_j(p) \text{ pro } \lambda > 0.$$

$$(2) \text{ Jestliže } \|\widehat{S}_j(p)\| < c, \text{ pak } \pi(p, y) = p \cdot y \text{ nabývá svého maxima na } Y_j \text{ rovněž v bodě } \widehat{S}_j(p).$$

Důkaz lemmatu 4.4:

Sporem dokážeme, že funkce $\pi(p, y) = p \cdot y$ nabývá na \widehat{Y}_j svého maxima právě v jednom bodě.

Nechť $\pi(p, y) = p \cdot y$ nabývá svého maxima v bodech \bar{y} a \tilde{y} . Musíme dokázat, že \bar{y} a \tilde{y} leží na hranici. Kdyby $\bar{y} \in \widehat{Y}_j^\circ$, pak by pro všechna $t > 0$ bylo

$$(\bar{y} + tp) \cdot p = \bar{y}p + t\|p\|^2 > \bar{y}p$$

\bar{y} a \tilde{y} musí tedy ležet na hranici a platí

$$p\bar{y} = p\tilde{y} = q.$$

Předpokládejme, že $\bar{y} \neq \tilde{y}$. Potom funkce $p \cdot y$ nabývá svého maxima ve všech bodech úsečky $\bar{y}\tilde{y}$.

Platí tedy

$$p(t\bar{y} + (1-t)\tilde{y}) = tp\bar{y} + (1-t)p\tilde{y} = tq + (1-t)q = q.$$

Body $t\bar{y} + (1-t)\tilde{y}$ musí tedy ležet na hranici, což je ovšem spor se striktní konvexitou množiny $Y_j \cap D_c$.

Důkaz spojitosti funkce $\widehat{S}_j : R_+^l - \{0\} \rightarrow \widehat{Y}_j$ vynecháme.

(1) Funkce $\pi(p, y) = py$ a $\pi(\lambda p, y) = \lambda py$ nabývají svého maxima ve stejných bodech množiny \widehat{Y}_j . Tedy $\widehat{S}_j(\lambda p) = \widehat{S}_j(p)$.

(2) Předpokládejme, že existuje $\bar{y} \in Y_j \setminus \widehat{Y}_j$ takové, že $p\bar{y} > p\widehat{S}_j(p)$.

Uvažujme úsečku $\bar{y} \in \widehat{S}_j(p)$. Tato úsečka leží celá v Y_j , neboť Y_j je konvexní. Navíc existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro $t \in (0, \varepsilon)$ je

$$\bar{y} = (1 - t)\widehat{S}_j(p) + t\bar{y} \in \widehat{Y}_j,$$

neboť $\|\widehat{S}_j(p)\| < c$.

Potom

$$\pi(p, \bar{y}) = p\bar{y} = (1 - t)p \cdot \widehat{S}_j(p) + tp\bar{y} > (1 - t)p \cdot \widehat{S}_j(p) + tp \cdot \widehat{S}_j(p) = p \cdot \widehat{S}_j(p),$$

což je spor s tím, že $\widehat{S}_j(p)$ je maximum $\pi(p, y)$ na \widehat{Y}_j . ■

Poptávkou i-tého spotřebitele rozumíme $D_i(p) = \{\bar{x} \in X_i; u_i(\bar{x}) = \max_{x \in X_i} u_i(x) \text{ a zároveň } p \cdot \bar{x} \leq w_i\}$. Definujme $\widehat{w}_i : R_+^l - \{0\} \rightarrow R$ jako *falešný příjem* spotřebitele i rovností $\widehat{w}_i(p) = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p \cdot \widehat{S}_j(p)$.

Funkce \widehat{w}_i je spojitá. Necht' jsou $b = \sum_{i=1}^n d_i - \sum_{i=1}^n e_i$, c jako v lemmatu 4.2 a e počáteční obdaření agenta, vyberme $c_1 \in R^l$ tak, že $\sum_{j=1}^n y_j + e \leq c_1$, pokud $\|y_j\| < c$ pro všechna j . Vyberme a podle Lemmatu 4.3 a necht' $\widehat{X}_i = X_i \cap D_a$.

Falešná poptávka $\widehat{D}_i : R_+^l - \{0\} \rightarrow \widehat{X}_i$ je takové \bar{x} , že $u_i(\bar{x}) = \max\{u_i(x); x \in \widehat{X}_i, p \cdot x \leq \widehat{w}_i(p)\}$ a $\widehat{B}_p = \{x \in X_i; p \cdot x \leq \widehat{w}_i(p)\}$.

Lemma 4.5:

(1) Funkce u_i nabývá na \widehat{B}_p svého maxima právě v jednom bodě, tedy funkce

$\widehat{D}_i(p) : R_+^l - \{0\} \rightarrow \widehat{X}_i$ je dobře definovaná.

(2) $\widehat{D}_i(p)$ je spojitá.

$$(3) \widehat{D}_i(\lambda p) = \widehat{D}_i(p).$$

(4) Je-li $\|\widehat{D}_i(p)\| < a$, pak $\widehat{D}_i(p)$ je bodem, kde u_i nabývá svého maxima na množině

$$B_p = \{x \in X_i; p \cdot x \leq \widehat{w}_i(p)\}$$

$$\text{a } p \cdot D_i(p) = \widehat{w}_i(p).$$

Důkaz:

(1) \widehat{B}_p je kompaktní, proto u_i nabývá na \widehat{B}_p svého maxima. Předpokládejme, že u_i nabývá svého maxima v bodech \bar{x} a \hat{x} , $u_i(\bar{x}) = u_i(\hat{x})$. Jelikož je \widehat{B}_p konvexní, pak úsečka $t\bar{x} + (1-t)\hat{x}$, $t \in (0, 1)$ leží v \widehat{B}_p . Z podmínky striktní konvexity pro u_i plyne

$$u(t\bar{x} + (1-t)\hat{x}) > u(\bar{x}) = u(\hat{x}), \text{ pro } t \in (0, 1),$$

což je spor s tím, že u_i nabývá v bodech \bar{x} a \hat{x} svého maxima.

(2) Důkaz vynecháme.

(3) $\widehat{D}_i(\lambda p)$ nabývá maxima na množině $\widehat{B}_{\lambda p}$, pro niž platí

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{\lambda p} &= \{x \in \widehat{X}_i; \lambda p x \leq \widehat{w}_i(\lambda p) = \lambda p e_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \lambda p \widehat{S}_j(p)\} \\ &= \{x \in \widehat{X}_i; p x \leq \widehat{w}_i(p) = p e_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} p \widehat{S}_j(p)\} = \widehat{B}_p \end{aligned}$$

Hledáme tedy bod maxima stejné funkce na stejné množině.

(4) Nechť $\bar{x} \in X_i \cap D_a \cap \{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\}$ s normou $\|\bar{x}\| < a$, navíc je to bod, kde u_i nabývá maxima na \widehat{B}_p . Dále mějme bod $\hat{x} \in X_i \cap \{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\}$. Předpokládejme, že $u_i(\hat{x}) > u_i(\bar{x})$. Pak úsečka $\bar{x} \hat{x}$ leží celá v $\{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\}$, celá v X_i a její část v D_a . Tedy existuje $t > 0$, $t \in (0, 1)$ takové, že

$$(1-t)\bar{x} + t\hat{x} \in X_i \cap \{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\} \cap D_a = \widehat{B}_p$$

Z podmínky striktní konvexity na u_i vyplývá, že

$$u_i((1-t)\bar{x} + t\hat{x}) > u(\bar{x}),$$

což je spor. ■

Důkaz věty 4.1:

Nejprve si zvolíme konstanty.

$$b = \sum_{i=1}^n d_i - \sum_{i=1}^n e_i$$

a c zvolme podle Lemmatu 4.2. Dále nechť

$$c_1 = (mc + e^1, mc + e^2, \dots, mc + e^l),$$

kde $(e^1, e^2, \dots, e^l) = \sum_{i=1}^n e_i$. Podle Lemmatu 4.3 zvolme a . Pro tato c a a dostaneme \hat{Y}_j a \hat{X}_i a z nich falešnou nabídku a falešnou poptávku.

Dále definujme funkce $\hat{S}, \hat{D}, \hat{Z} : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l$ takto:

$$\hat{S} = \sum_{j=1}^m \hat{S}_j + \sum_{i=1}^n e_i, \quad \hat{D} = \sum_{i=1}^n \hat{D}_i, \quad \hat{Z} = \hat{D} - \hat{S}.$$

\hat{Z} má následující vlastnosti :

(1) Je homogenní, neboť:

$$\begin{aligned} \hat{Z}(\lambda p) &= \hat{D}(\lambda p) - \hat{S}(\lambda p) = \sum_{i=1}^n \hat{D}_i(\lambda p) - \sum_{j=1}^m \hat{S}_j(\lambda p) - \sum_{i=1}^n e_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{D}_i(p) - \sum_{j=1}^m \hat{S}_j(p) - \sum_{i=1}^n e_i = \hat{D}(p) - \hat{S}(p) = \hat{Z}(p) \end{aligned}$$

(2) \widehat{Z} je spojitá.

(3) Splňuje slabý Walrasův zákon: Pro všechna p je

$$p \cdot \widehat{Z}(p) \leq 0.$$

Platí totiž

$$\begin{aligned} p \cdot \widehat{Z}(p) &= p \cdot \widehat{D}(p) - p \cdot \widehat{S}(p) = \sum_{i=1}^n p \cdot \widehat{D}_i(p) - \sum_{j=1}^m p \cdot \widehat{S}_j(p) - \sum_{i=1}^n p \cdot e_i = \\ &= \sum_{i=1}^n p \cdot \widehat{D}_i(p) - \sum_{i=1}^n \widehat{w}_i(p) = \sum_{i=1}^n [p \cdot \widehat{D}_i(p) - \widehat{w}_i(p)] \leq 0, \end{aligned}$$

neboť

$$\widehat{D}_i(p) \in \widehat{B}^i(p).$$

Podle věty 1.1 existuje $p^* \in R_+^l - \{0\}$ tak, že $\widehat{Z}(p^*) \leq 0$.

Definujeme $y_j^* = \widehat{S}_j(p^*)$, $x_i^* = \widehat{D}_i(p^*)$. Protože $\widehat{Z}(p^*) \leq 0$ dostáváme

$$\sum_{i=1}^n x_i^* - \sum_{j=1}^m y_j^* - \sum_{i=1}^n e_i \leq 0 \quad \text{a tedy} \quad \sum_{i=1}^n x_i^* \leq \sum_{j=1}^m y_j^* + \sum_{i=1}^n e_i.$$

Dále platí

$$\sum_{j=1}^m y_j^* \geq \sum_{i=1}^n x_i^* - \sum_{i=1}^n e_i \geq \sum_{i=1}^n d_i - \sum_{i=1}^n e_i = b$$

a tedy podle Lemmatu 4.2 $\|y_j^*\| < c$. Podle Lemmatu 4.4 je y_j^* bodem maxima funkce $\pi(p^*, y)$ na Y_j . Takže je splněna podmínka (C) z definice rovnováhy.

Platí následující nerovnosti

$$\sum_{i=1}^n x_i^* \leq \sum_{j=1}^m y_j^* + \sum_{i=1}^n e_i \leq m(c, c, \dots, c) + \sum_{i=1}^n e_i = (mc + e^1, mc + e^2, \dots, mc + e^l) = c_1.$$

Podle Lemmatu 4.3

$$\|x_i^*\| < a.$$

Dle Lemmatu 4.5 je x_i^* bodem, kde u_i nabývá svého maxima na B_p^i . Tedy platí podmínka (B), podle níž spotřebitel maximalizuje svůj užitek na své rozpočtové množině.

Nyní dokážeme zbývající podmínku (A). Necht

$$\sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{j=1}^m y_j^* + \sum_{i=1}^n e_i - z, \quad z \in R_+^l.$$

Skalárně vynásobíme s p^* a dostaneme

$$0 \geq \sum_{i=1}^n x_i^* p^* - \sum_{j=1}^m y_j^* p^* - \sum_{i=1}^n e_i p^* = z p^*,$$

přičemž všechny složky z a p^* jsou větší nebo rovny nule.

Zřejmě pro každé i je x_i^* v dosažitelné spotřebě \hat{X}_i . Za předpokladu lokální nenasyčenosti existuje x_i' v X_i takové, že $x^* \prec_i x_i'$. To vylučuje možnost, že $p^* \cdot x_i^* < w_i(p^*)$ a tedy $p^* \cdot x_i^* \geq w_i(p^*)$. Z tohoto důvodu můžeme nalézt bod na přímce $[x_i^*, x_i']$ různý od x_i^* , který je preferován před x_i^* , ale je dost blízko x_i^* , aby vyhověl celkové nerovnosti. Ale to by odporovalo skutečnosti, že x_i^* maximalizuje funkci u_i na množině $B_{p^*}^i = \{x \in X_i \mid p^* \cdot x \leq \hat{w}_i(p^*)\}$, kde $\hat{w}_i(p^*) = p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$.

Tedy pro každé i platí:

$$p^* \cdot x_i^* = p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*.$$

Sumováním přes i získáme $p^* \cdot z = 0$.

Odtud plyne

$$z \cdot p^* = 0.$$

Podle vlastnosti 2.2(e) produkčních množin,

$$Y - R_+^l \subset Y = \sum_{j=1}^m Y_j,$$

platí, že

$$\sum_{j=1}^m y_j^* - z \in Y.$$

Tedy existují $y_j \in Y_j$ tak, že

$$\sum_{j=1}^m y_j = \sum_{j=1}^m y_j^* - z.$$

Potom

$$p^* \left(\sum_{j=1}^m y_j \right) = p^* \left(\sum_{j=1}^m y_j^* - z \right) = p^* \left(\sum_{j=1}^m y_j^* \right) - p^* z = p^* \left(\sum_{j=1}^m y_j^* \right),$$

protože $p^* \cdot z = 0$ a tedy $\sum_{j=1}^m p^* y_j = \sum_{j=1}^m p^* y_j^*$.

y_j^* je maximum π_j na Y_j , tedy

$$\pi_j(p, y_j) = p y_j \leq p y_j^* = \pi_j(p, y_j^*)$$

Jelikož $\sum_{j=1}^m p y_j = \sum_{j=1}^m p y_j^*$ musí být

$$p y_j = p y_j^*.$$

Tedy pro (p^*, x^*, y) platí (C). Navíc

$$\sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{j=1}^m y_j^* + \sum_{i=1}^n e_i - z = \sum_{j=1}^m y_j + \sum_{i=1}^n e_i,$$

tedy (p^*, x^*, y) splňuje podmínku (A) dosažitelnosti stavu ekonomiky.

Protože platí podmínky (A), (B) a (C), je stav (p^*, x^*, y) rovnovážným stavem ekonomiky a Věta 4.1 je tím dokázána. ■

Zobecněním věty 4.1 a dalším krokem k důkazu Arrowovy-Debreuovy věty je následující věta 4.6.

Věta 4.6

Nechť jsou splněny předpoklady Arrow-Debreuovy věty a necht' navíc každá Y_j je uzavřená a konvexní. Potom existuje rovnovážný stav.

K jejímu důkazu budeme potřebovat definice falešné nabídky \widehat{S}_j a falešné poptávky \widehat{D}_i jako korespondence. Definujme korespondenci $\widehat{S}_j(p) : S_+^{l-1} \rightarrow \widehat{Y}_j$ takto:

$$\widehat{S}_j(p) = \{\bar{y} \in \widehat{Y}_j = Y_j \cap D_c; p \cdot \bar{y} = \max_{y \in \widehat{Y}_j} p \cdot y\}.$$

Lemma 4.7 (vlastnosti \widehat{S}_j)

Korespondence \widehat{S}_j má tyto vlastnosti:

- (1) $\widehat{S}_j(p)$ je konvexní uzavřená množina.
- (2) Graf $\Gamma_{\widehat{S}_j} = \{(p, y) \in S_+^{l+1} \times \widehat{Y}_j, y \in \widehat{S}_j(p)\}$ je kompaktní.
- (3) Jestliže $y_j \in \widehat{S}_j(p)$ a $\|y_j\| < c$, pak $y_j \in S_j(p)$.

Důkaz:

(1) Necht' $y_1, y_2 \in \widehat{S}_j(p)$ jsou různé a libovolné. Potom $\pi(y_1) = \pi(y_2)$. Necht' $y_3 = ty_1 + (1-t)y_2$ pro nějaké $t \in (0, 1)$.

Platí

$$\begin{aligned} \pi(y_3) &= py_3 = pty_1 + p(1-t)y_2 = tpy_1 + (1-t)py_2 = \\ &= t\pi(y_1) + (1-t)\pi(y_2) = \pi(y_1). \end{aligned}$$

Tedy y_3 je prvkem množiny $\widehat{S}_j(p)$.

(2) Důkaz vynecháme.

(3) Důkaz se provádí stejně jako v Lemmatu 4.4 (2).



Funkce $\widehat{w}_i : S_+^{l-1} \rightarrow R$ definovaná takto:

$$\widehat{w}_i(p) = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \cdot p \cdot \widehat{S}_j(p)$$

je dobře definovaná a spojitá.

Falešnou poptávku definujeme jako korespondenci $\widehat{D}_i : S_+^{l+1} \rightarrow \widehat{X}_i$ určenou vztahem

$$\widehat{D}_i(p) = \{ \bar{x} \in X_i \cap D_c; \text{funkce } u_i(x) \text{ nabývá maxima v } \bar{x} \\ \text{na } \widehat{B}_p = \{x \in X_i; p \cdot x \leq \widehat{w}_i\} \}.$$

Lemma 4.8 (Vlastnosti \widehat{D}_i)

Pro korespondenci \widehat{D}_i platí:

(1) $\widehat{D}_i(p)$ je konvexní a uzavřená množina.

(2) Graf $\Gamma_{\widehat{D}_i} = \{(p, x) \in S_+^{l+1} \times \widehat{X}_i, x \in \widehat{D}_i(p)\}$ je kompaktní.

(3) $\widehat{D}_i(\lambda p) = \widehat{D}_i(p)$ pro $\lambda > 0$.

(4) Jestliže $x_i \in \widehat{D}_i(p)$ a $\|x_i\| < a$, pak $x_i \in D_i(p)$.

Důkaz:

(1) Nejprve ukážeme, že $\widehat{D}_i(p)$ je uzavřená. Pro $\bar{x}_n \in \widehat{D}_i(p)$ platí, že $u_i(\bar{x}_n)$ je bodem maxima funkce $u_i(x)$ na množině \widehat{B}_p . Nechť $\bar{x}_n \rightarrow x' \in \widehat{B}_p$, jelikož je $u_i(x)$ spojitá, platí

$$u_i(x') = \lim u_i(\bar{x}_n) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x),$$

tedy $x \in \widehat{D}_i(p)$ a $\widehat{D}_i(p)$ je uzavřená.

Nyní ukáži, že $\widehat{D}_i(p)$ je konvexní. Pro body $z, y \in \widehat{X}_i$ splňující $u_i(z) = u_i(y) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x)$ platí

$$\begin{aligned} p(tz + (1-t)y) &= tpz + (1-t)py \leq \\ &\leq t \cdot \widehat{w}_i(p) + (1-t) \cdot \widehat{w}_i(p) = \widehat{w}_i(p). \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že $tz + (1-t)y \in \widehat{B}_p$.

Podle vlastnosti (2.4b)

$$u_i(tz + (1-t)y) \geq u_i(x) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x).$$

Tudíž $u_i(tz + (1-t)y) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x)$ a z toho vyplývá, že $tz + (1-t)y \in \widehat{D}_i(p)$. $\widehat{D}_i(p)$ je tedy konvexní.

(2) Důkaz vynecháme.

(3) $\widehat{D}_i(\lambda p)$ nabývá maxima na množině $\widehat{B}_{\lambda p}$, pro niž platí

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{\lambda p} &= \{x \in \widehat{X}_i; \lambda p x \leq \widehat{w}_i(\lambda p) = \lambda p e_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \lambda p \widehat{S}_j(p)\} \\ &= \{x \in \widehat{X}_i; p x \leq \widehat{w}_i(p) = p e_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} p \widehat{S}_j(p)\} = \widehat{B}_p \end{aligned}$$

Hledáme tedy bod maxima stejné funkce na stejné množině.

(4) Důkaz se provádí stejně jako v Lemmatu 4.5 (4).



Důkaz věty 4.6

Nejprve si opět zvolíme konstanty.

$$b = \sum_{i=1}^n d_i - \sum_{i=1}^n e_i$$

a c zvolme podle Lemmatu 4.2. Dále nechť

$$c_1 = (mc + e^1, mc + e^2, \dots, mc + e^l).$$

Podle Lemmatu 4.3 zvolme a . Pro tato c a a dostaneme \hat{Y}_j a \hat{X}_i a z nich falešnou nabídku $\hat{S}_j(p)$ s vlastnostmi v Lemmatu 4.7 a falešnou poptávku $\hat{D}_j(p)$ s vlastnostmi v Lemmatu 4.8.

Vezmeme $\varepsilon > 0$. Podle věty 1.2 existuje spojitá funkce $\hat{S}_{j\varepsilon} : S_+^{l-1} \rightarrow \hat{Y}_j$ tak, že

$$\Gamma_{\hat{S}_{j\varepsilon}} \subset B_\varepsilon(\Gamma_{\hat{S}_j}).$$

Stejně pro \hat{D}_i dostaneme spojitě zobrazení $\hat{D}_{i\varepsilon} : S_+^{l-1} \rightarrow \hat{X}_i$ s vlastností

$$\Gamma_{\hat{D}_{i\varepsilon}} \subset B_\varepsilon(\Gamma_{\hat{D}_i}),$$

pro které navíc na S_+^{l-1} platí

$$\begin{aligned} p \cdot \hat{D}_{i\varepsilon}(p) - \hat{w}_i(p) &< \varepsilon \\ p \cdot \hat{D}_{i\varepsilon}(p) &< \hat{w}_i(p) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Definujme $Z_\varepsilon : S_+^{l-1} \rightarrow R^l$ a $\hat{Z}_\varepsilon : S_+^{l-1} \rightarrow R^l$ takto

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(p) &= \sum_{i=1}^n \hat{D}_{i\varepsilon}(p) - \sum_{j=1}^m \hat{S}_{j\varepsilon}(p) - \sum_{i=1}^n e_i \\ \hat{Z}_\varepsilon(p) &= Z_\varepsilon(p) - (p \cdot Z_\varepsilon(p)) \cdot p. \end{aligned}$$

Pak platí

$$\begin{aligned} p \cdot \widehat{Z}_\varepsilon(p) &= p \cdot Z_\varepsilon(p) - (p \cdot Z_\varepsilon(p))(p \cdot p) = \\ &= p \cdot Z_\varepsilon(p) - p \cdot Z_\varepsilon(p) = 0. \end{aligned}$$

Dále platí

$$\begin{aligned} p \cdot Z_\varepsilon(p) &= \sum_{i=1}^n \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{i=1}^n e_i \cdot p = \\ &= \sum_{i=1}^n \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{i=1}^n e_i \cdot p - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_j(p) \cdot p + \sum_{j=1}^m \widehat{S}_j(p) \cdot p \\ &= \sum_{i=1}^n \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_j(p) \cdot p - \sum_{i=1}^n e_i \cdot p + \sum_{j=1}^m \widehat{S}_j(p) \cdot p - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p \\ &\leq \sum_{i=1}^n \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \widehat{w}_i(p) + \sum_{j=1}^m \widehat{S}_j(p) \cdot p - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p < 2\varepsilon \end{aligned}$$

\widehat{Z}_ε splňuje Walrasův zákon. Podle věty 1.1 existuje $p_\varepsilon \in S_+^{l-1}$ tak, že

$$\widehat{Z}_\varepsilon(p_\varepsilon) \leq 0.$$

Podle poznámky 1.1 je buď

$$\widehat{Z}_\varepsilon^h(p_\varepsilon) = 0 \quad \text{nebo} \quad p_\varepsilon^h = 0. \quad (4.1)$$

Z (4.1) a z nerovnosti pro $p \cdot Z_\varepsilon(p)$ plyne

$$Z_\varepsilon^h(p_\varepsilon) = (p_\varepsilon \cdot Z_\varepsilon(p_\varepsilon))p_\varepsilon^h < 2\varepsilon \cdot p_\varepsilon^h \leq 2\varepsilon,$$

pokud $p_\varepsilon^h \neq 0$ nebo

$$Z_\varepsilon^h(p_\varepsilon) \leq 0,$$

pokud $p_\varepsilon^h = 0$. Tedy

$$Z_\varepsilon^h(p_\varepsilon) \leq 2\varepsilon \quad \text{pro všechna } h.$$

Nechť jsou $y_{j\varepsilon} = \widehat{S}_{j\varepsilon}(p_\varepsilon)$ a $x_{i\varepsilon} = \widehat{D}_{i\varepsilon}(p_\varepsilon)$. Dále máme posloupnost $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ konvergující k 0. Z ní lze vybrat podposloupnost tak, že

$$p_{\varepsilon_k} \rightarrow p^* \in S_+^{l-1}, \quad y_{j\varepsilon_k} \rightarrow y_j^* \in \widehat{S}_j(p), \quad x_{i\varepsilon_k} \rightarrow x_i^* \in \widehat{D}_i(p).$$

Stejně jako v důkazu věty 4.1 se ukáže, že když

$$y_j^* \in \widehat{S}_j(p^*) \quad \text{a} \quad \|y_j^*\| < c,$$

potom $y_j^* \in S_j(p^*)$, což je podmínka (C) z definice rovnováhy, a že když

$$x_i^* \in \widehat{D}_i(p^*) \quad \text{a} \quad \|x_i^*\| < a,$$

potom $x_i^* \in D_i(p^*)$, což je podmínka (B) z definice rovnováhy.

Nyní již zbývá pouze dokázat podmínku A z definice rovnováhy.

Z definice Z_ε^h plyne, že

$$\sum_{i=1}^n x_{i\varepsilon}^h - \sum_{j=1}^m y_{j\varepsilon}^h - \sum_{i=1}^n e_i^h \leq 2\varepsilon.$$

Limitním přechodem dostaneme nerovnost

$$\sum_{i=1}^n x_i^{*h} - \sum_{j=1}^m y_j^{*h} - \sum_{i=1}^n e_i^h \leq 0.$$

Tudíž platí

$$\sum_{i=1}^n x_i^* - \sum_{j=1}^m y_j^* - \sum_{i=1}^n e_i \leq 0.$$

Nyní budeme postupovat stejně jako v důkazu věty 4.1.

Položme

$$\sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{j=1}^m y_j^* + \sum_{i=1}^n e_i - z, \quad z \in R_+^l.$$

Skalárně vynásobíme s p^* a dostaneme

$$0 \geq \sum_{i=1}^n x_i^* p^* - \sum_{j=1}^m y_j^* p^* - \sum_{i=1}^n e_i p^* = z p^*,$$

přičemž všechny složky z a p^* jsou větší nebo rovny nule. Odtud plyne

$$z \cdot p^* = 0.$$

Podle vlastnosti 2.2(e) produkčních množin,

$$Y - R_+^l \subset Y = \sum_{j=1}^m Y_j,$$

platí, že

$$\sum_{j=1}^m y_j^* - z \in Y.$$

Tedy existují $y_j \in Y_j$ tak, že

$$\sum_{j=1}^m y_j = \sum_{j=1}^m y_j^* - z.$$

Potom

$$p^* \left(\sum_{j=1}^m y_j \right) = p^* \left(\sum_{j=1}^m y_j^* - z \right) = p^* \left(\sum_{j=1}^m y_j^* \right) - p^* z = p^* \left(\sum_{j=1}^m y_j^* \right),$$

protože $p^* \cdot z = 0$ a tedy $\sum_{j=1}^m p^* y_j = \sum_{j=1}^m p^* y_j^*$.

y_j^* je maximum π_j na Y_j , tedy

$$\pi_j(p, y_j) = p y_j \leq p y_j^* = \pi_j(p, y_j^*)$$

Jelikož $\sum_{j=1}^m p y_j = \sum_{j=1}^m p y_j^*$ musí být $p y_j = p y_j^*$.

Tedy pro (p^*, x^*, y) platí (C). Navíc

$$\sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{j=1}^m y_j^* + \sum_{i=1}^n e_i - z = \sum_{j=1}^m y_j + \sum_{i=1}^n e_i,$$

tedy (p^*, x^*, y) splňuje podmínku (A) dosažitelnosti stavu ekonomiky.

Protože platí podmínky (A), (B) a (C), je stav (p^*, x^*, y) rovnovážným stavem ekonomiky a Věta 4.8 je tím dokázána. ■

Než začnu dokazovat vlastní Arrowovu-Debreuovu větu musím ještě ukázat lemma o vlastnostech množin Y_j a Y .

Lemma 4.9

Nechť Y_j^* značí uzávěr konvexního obalu množiny Y_j , neboli $Y_j^* = \overline{Y_j}$. Za předpokladu, že $\sum_{j=1}^m Y_j = Y$ je konvexní a uzavřená, platí

$$\sum_{j=1}^m Y_j^* = Y.$$

Důkaz:

” \supseteq ”

Podle lemmatu 1.4 je

$$\sum_{j=1}^m Y_j^* \supseteq \sum_{j=1}^m \widetilde{Y}_j = \widetilde{\sum_{j=1}^m Y_j} = \widetilde{Y} = Y.$$

” \subseteq ”

Podle lemmatu 1.5 platí, že

$$\sum_{j=1}^m Y_j^* = \sum_{j=1}^m \widetilde{Y}_j \subseteq \overline{\sum_{j=1}^m \widetilde{Y}_j}.$$

Pro výraz $\overline{\sum_{j=1}^m \widetilde{Y}_j}$ platí

$$\overline{\sum_{j=1}^m \widetilde{Y}_j} = \overline{\widetilde{\sum_{j=1}^m Y_j}} = \overline{\widetilde{Y}} = \overline{Y} = Y$$

a lemma 4.9 je tedy dokázáno. ■

Důkaz Arrowovy-Debreuovy věty

Rozdíl mezi Arrowovou-Debreuovou větou a větou 4.6 spočívá v podmínkách kladených na množiny Y_j . Y_j obecně nejsou ani konvexní ani uzavřené, pouze o $\sum_{j=1}^m Y_j$ se předpokládá, že je uzavřená a konvexní.

Nyní místo Y_j uvažujme $Y_j^* = \overline{\widetilde{Y}_j}$. Platí

$$Y_j \subset Y_j^* \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^m Y_j = Y = \sum_{j=1}^m Y_j^*.$$

Aplikujeme-li větu 4.6 na množiny Y_j^* , obdržíme rovnovážný stav (x_i^*, y_j^*, p) . Podle lemmatu 4.9 pro $y_j^* \in Y_j^*$ platí, že

$$\sum_{j=1}^m y_j^* \in \sum_{j=1}^m Y_j^* = Y.$$

Tedy existují $y_j \in Y_j$ takové, že

$$\sum_{j=1}^m y_j^* = \sum_{j=1}^m y_j \quad (*)$$

Dokážeme, že platí rovněž

$$p \cdot y_j = p \cdot y_j^*. \quad (**)$$

Vynásobením výrazu (*) cenovým vektorem p dostaneme

$$p \cdot \left(\sum_{j=1}^m y_j^* \right) = p \cdot \left(\sum_{j=1}^m y_j \right). \quad (+)$$

$p \cdot y_j^*$ je maximum funkce $p \cdot y_j$ na množině $Y_j^* \supseteq Y_j$, pro všechna j . Platí tedy

$$p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j.$$

Aby platila rovnost (+), musí být splněna i rovnost (**).

Nyní ověříme, že stav (x_i^*, y_j, p) splňuje podmínky rovnováhy, víme-li, že (x_i^*, y_j^*, p) je rovnovážný stav a že

$$p \cdot y_j^* = p \cdot y_j \text{ a } \sum_{j=1}^m y_j^* = \sum_{j=1}^m y_j.$$

$$(A) \sum_{i=1}^n x_i^* = \sum_{j=1}^m y_j^* + \sum_{i=1}^n e_i = \sum_{j=1}^m y_j + \sum_{i=1}^n e_i.$$

(B) x_i^* maximalizuje u_i na množině

$$\begin{aligned} B_i &= \{ \bar{x} \in X_i; p \cdot \bar{x} \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \cdot p \cdot y_j^* \} = \\ &= \{ \bar{x} \in X_i; p \cdot \bar{x} \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^m \theta_{ij} \cdot p \cdot y_j \}. \end{aligned}$$

(C) y_j maximalizuje funkci $p \cdot y$ na Y_j , neboť y_j^* maximalizuje $p \cdot y$ na Y_j^*
a platí $p \cdot y_j = p \cdot y_j^*$ a $Y_j^* \supseteq Y_j$.

Arrowova-Debreuova věta je tedy dokázána.



Kapitola 4

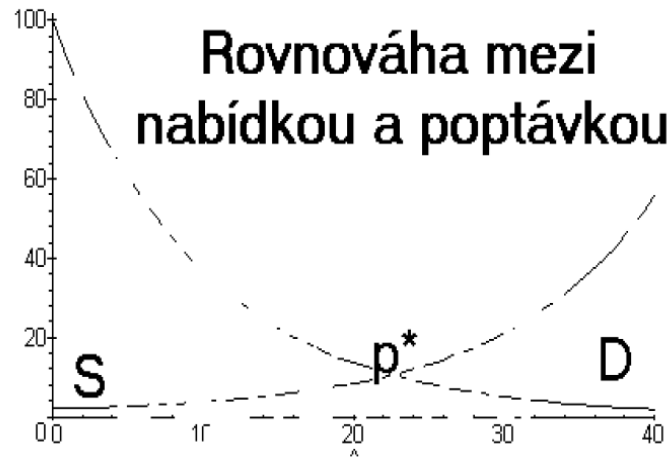
Globální analýza a ekonomie

V této části ukážeme, že existence rovnovážných stavů může být dokázána pomocí Sardovy věty. Přitom důkaz bude v jistém smyslu konstruktivní. Zároveň jsou dokázány optimizační věty pro ekonomii blahobytu.

1 Existence rovnovážného stavu

Základní idea rovnovážného stavu je studium řešení rovnosti mezi poptávkou a nabídkou: $S(p) = D(p)$. Pro jednoduchý případ jednoho trhu, kde jsou ceny hodnoceny v termínech nějakého tržního standardu, podává následující graf 4.1 oprávnění pro existenci rovnovážné ceny p^* .

Teorie obecné rovnováhy se tímto problémem zabývá pro vícero trhů. Přesněji: předpokládejme ekonomiku s l druhy zboží. Pak poloprostor $R_+^l = \{(x^1, \dots, x^l) : (\forall i)(x^i \geq 0)\}$ bude pro nás hrát dvojí roli: nejprve jakožto tzv. *komoditní prostor*, přičemž komodita je produkt nebo služba určená k výměně; prvek $x \in R_+^l$ se nazývá *komoditní svazek*. Tedy x je l -tice (x^1, \dots, x^l) tak, že první souřadnice měří množství komodity číslo jedna, atd. Ale zároveň je R_+^l bez počátku prostor *cenových systémů*; reprezentuje-li tedy $p \in R_+^l - \{0\}$, $p = (p^1, \dots, p^l)$ množinu *cen* l komodit, je p^1 cena jednotky první komodity, atd.



Obrázek 4.1: Rovnovážný stav

Předpokládejme, že studovaná ekonomika má (axiomatically) zavedené *funkce poptávky a nabídky* $D, S : R_+^l - \{0\} \rightarrow R_+^l$ z množiny cenových systémů do prostoru komodit. Pak $D(p)$ je komoditní svazek požadovaný ekonomikou (nebo jejími účastníky celkově) za ceny p . Jinak řečeno, za ceny $p = (p^1, \dots, p^l)$ lze koupit komodity v množství $D(p)$. Problém nalezení *rovnovážného stavu* je nalezení a studium (za vhodných podmínek na D, S) cenového systému $p^* \in R_+^l - \{0\}$ tak, že $D(p^*) = S(p^*)$.

Položme $Z(p) = D(p) - S(p)$. Pak $Z : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l$ se nazývá *nadbytek poptávky* a budeme tedy hledat řešení $p^* \in R_+^l - \{0\}$ tak, že

$$Z(p^*) = 0. \quad (1.1)$$

V této části vložíme na Z podmínky, které jsou přiměřené z hlediska ekonomie a pak ukážeme existenci

řešení rovnice 1.1 pomocí konstruktivního postupu aparátem diferenciálního počtu. To vše provedeme, aniž bychom přešli k mikroekonomickým základům nadbytku poptávky. V další části podáme klasický mikroekonomický přístup k nadbytku poptávky pomocí agregace poptávkových funkcí individuálních účastníků ekonomiky pro případ ekonomiky úplné směny.

Podmínky na funkci nadbytku poptávky jsou

$$Z : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l \text{ je spojitá funkce,} \quad (1.2)$$

$$Z(\lambda p) = Z(p) \text{ pro všechna } \lambda > 0. \quad (1.3)$$

Tedy Z je homogenní funkce; jestliže se ceny každé komodity úměrně zvětšují či zmenšují, funkce nadbytku poptávky se nemění. To ovšem předpokládá, že se pohybujeme uvnitř úplné nebo uzavřené ekonomiky tak, že ceny komodit nejsou závislé na komoditě ležící mimo systém.

$$p \cdot Z(p) = 0 \text{ tj. } \sum_{i=1}^l p^i Z^i(p) = 0. \quad (1.4)$$

Výše uvedená rovnost tvrdí, že hodnota funkce nadbytku poptávky je nula a rovnost 1.4 se nazývá *Walrasův zákon*. Tuto rovnost můžeme chápat tak, že poptávka v naší ekonomice je v souladu se zdroji ekonomiky. Jedná se o omezený rozpočet spotřeby. Celková hodnota poptávky je rovna celkové hodnotě nabídky účastníky ekonomiky. Bezpochyby je Walrasův zákon nejpropracovanější ze všech podmínek, které jsme vložili na funkci Z . Mikroekonomické opodstatnění podáme později.

Než zavedeme naší poslední podmínku na funkci nadbytku poptávky, podáme geometrickou interpretaci předchozích podmínek. Bud' $S_+^{l-1} = \{p \in R_+^l : \|p\|^2 = \sum_{i=1}^l (p^i)^2 = 1\}$ prostor normalizovaných cenových systémů. Na základě homogenity funkce Z se stačí omezit na její restrikcí na množinu S_+^{l-1} . Podle Walrasova zákona je funkce Z kolmá k prostoru S_+^{l-1} v každém bodě; jinak řečeno $p \cdot Z(p) = 0$ neříká nic jiného, než že vektor p je kolmý k vektoru $Z(p)$. Můžeme tedy považovat Z za pole tečných vektorů na množině S_+^{l-1} . Dále definujeme $S^{l-1} = \{p \in R^l : \|p\|^2 = \sum_{i=1}^l (p^i)^2 = 1\}$

Poslední podmínka na funkci nadbytku poptávky je hraniční podmínka:

$$Z^i \geq 0, \text{ jestliže } p^i = 0. \quad (1.5)$$

Připomeňme, že $Z(p) = (Z^1(p), \dots, Z^l(p))$ a $p = (p^1, \dots, p^l)$. Podmínka 1.5 můžeme být jednoduše interpretována následovně: je-li i -tá komodita volná (je volně k dispozici, protože její cena je nulová), pak zaručeně pro ni bude funkce nadbytku poptávky nezáporná. V našem modelu mají komodity pozitivní hodnotu.

Věta 1.1 *Jestliže je funkce nadbytku poptávky $Z : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l$ spojitá, homogenní, splňuje Walrasův zákon a hraniční podmínku tj. podmínky 1.2, 1.3, 1.4 a 1.5, pak existuje cenový systém $p^* \in R_+^l - \{0\}$ tak, že $Z(p^*) = 0$. Nalezení cenového systému p^* bude provedeno konstruktivně.*

Důkaz věty 1.1 bude proveden pomocí vět 1.2 a 1.7.

Věta 1.2 *Bud' $f : D^l \rightarrow R^l$ spojitě zobrazení splňující následující hraniční podmínku*

(B_D) *Pokud je $x \in \delta D^l$, pak $f(x)$ není ve tvaru μx pro žádné $\mu > 0$.*

Pak existuje prvek $x^ \in D^l$ tak, že platí $f(x^*) = 0$. Přitom $D^l = \{x \in R^l : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^l (x^i)^2 \leq 1\}$ a $\delta D^l = S^{l-1} = \{x \in R^l : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^l (x^i)^2 = 1\}$.*

Obecně pak $D_r^l = \{x \in R^l : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^l (x^i)^2 \leq r^2\}$ a $\delta D_r^l = \{x \in R^l : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^l (x^i)^2 = r^2\}$ pro všechna r kladná. Přitom speciálně máme hladké zobrazení $j_{l-1} : S^{l-1} \rightarrow D^{l-1} \subseteq R^{l-1}$ definované předpisem $j_{l-1}(x_1, \dots, x_l) = (x_1, \dots, x_{l-1})$.

Pro důkaz věty 1.2 použijeme dva hlavní výsledky globální analýzy a jejich aplikace pro ekonomii – tj. Sardovu větu a větu o implicitní funkci (věta o inverzním zobrazení). Abychom mohli vyslovit tyto věty, je nutno využít ideu singulárního bodu (kritického bodu) diferenciovatelného zobrazení $f : U \rightarrow R^n$, kde U je otevřená podmnožina kartézského prostoru R^k . Řekneme, že f je třídy C^r , jestliže všechny derivace do řádu

r včetně existují a jsou spojité. Pro prvek $x \in U$ je derivace $Df(x)$ v bodě x lineární zobrazení z R^k do R^n (tj. matice parciálních derivací). Pak říkáme, že x se nazývá *singulární (kritický) bod zobrazení f* , pokud tato derivace není surjektivní zobrazení. Poznamenejme, že pokud $k < n$, jsou všechny prvky z U singulární. *Singulární hodnoty* jsou jednoduše obrazy vzhledem k f všech singulárních bodů; prvek $y \in R^n$ se nazývá *regulární hodnota*, pokud není singulární hodnota.

Věta 1.3 Věta o implicitní funkci. *Je-li $y \in R^n$ regulární hodnota zobrazení $f : U \rightarrow R^n$, které je třídy C^1 , U otevřená v R^k , pak buď $f^{-1}(y)$ je prázdná množina nebo $f^{-1}(y) = V$, V je podvarieta U dimenze $k - n$.*

Přitom V je podvarieta U dimenze $k - n$, pokud pro každé $x \in V$ můžeme najít diferencovatelné zobrazení $h : N(x) \rightarrow O$ s následujícími vlastnostmi:

1. h má diferencovatelnou inverzi,
2. $N(x)$ je otevřené okolí bodu $x \in U$,
3. O je otevřená množina obsahující bod $0 \in R^k$,
4. $h(N(x) \cap V) = O \cap C$, kde C je systém souřadnic v R^k dimenze m .

Věta 1.4 Věta o inverzní funkci. *Nechť $G_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$, $i = 1, \dots, k$ jsou funkce třídy C^r , $r \geq 1$, definované na okolí W bodu $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k) \in R^{n+k}$, které splňují $G_i(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k) = 0$*

$$\det \left(\frac{\delta G_i}{\delta y_j} (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k) \right)_{1 \leq i, j \leq k} \neq 0. \quad (1.6)$$

Pak existují okolí U bodu $(a_1, \dots, a_n) \in R^n$ a okolí V bodu $(b_1, \dots, b_k) \in R^k$ tak, že $U \times V \subseteq W$ a ke každému bodu $(x_1, \dots, x_n) \in U$ existuje právě jeden bod $(y_1, \dots, y_k) \in V$, pro nějž platí $G_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) = 0$. Takto určené funkce $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ jsou rovněž třídy C^r . Občas o nich mluvíme jakožto o řešeních soustavy rovnic $G_i = 0$.

Věta 1.5 Sardova věta. *Je-li zobrazení $f : U \rightarrow R^n$, U otevřená v R^k , dostatečně diferencovatelné (třídy C^r , $r > 0$ a $r > k - n$), pak množina singulárních hodnot má míru nula.*

Připomínáme, že množina $S \subseteq R^n$ má (Lebesgueovu) míru nula, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje taková posloupnost krychlí Z_i , $i = 1, 2, \dots$, že $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$ a pro objemy vol Z_i těchto krychlí platí $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol} Z_i \leq \varepsilon$. Sjednocení spočetně mnoha množin míru nula má opět míru nula.

Poznamenejme, že Sardova věta má sice jednotnou formulaci, ale z obsahového hlediska se dělí na tři významově odlišné případy. Při $k < n$ celá množina $f(U)$ sestává z kritických hodnot – zde vkládáme prostor menší dimenze do prostoru větší dimenze a pak má elementárně $f(U)$ míru nula. I pro $k = n$ jde o jednoduché tvrzení, které lze snadno dokázat přímo. Teprve případ $n < k$ představuje obtížnou část Sardovy věty. Přitom o množině kritických hodnot hladkého zobrazení nelze tvrdit více, než že má míru nula. Tato množina může být například hustá v R^n . Důkaz Sardovy věty lze najít například v monografii [18]. Má-li množina singulárních hodnot míru nula, řekneme, že množina regulárních bodů *má plnou míru*. Obě z výše uvedených vět lze přímo aplikovat na případ $f : U \rightarrow C$, kde U je podvarieta dimenze k prostoru R^m a V je podvarieta dimenze n prostoru R^q . V tomto případě je derivace $Df(x) : T_x(U) \rightarrow T_{f(x)}(V)$ lineární zobrazení na tečném prostoru.

Pro důkaz věty 1.2 uvažme funkci $h : D^l \rightarrow R^l$ třídy C^2 , která splňuje následující hraniční podmínku:

(SB) $f(x) = -x$ pro všechna $x \in \delta D^l$.

Problém je pak najít $x^* \in D^l$ tak, že platí $h(x^*) = 0$. Abychom jej vyřešili, definujme pomocné zobrazení $g : D^l - E \rightarrow S^{l-1}$ předpisem $g(x) = \frac{h(x)}{\|h(x)\|}$, kde $E = \{x \in D^l : h(x) = 0\}$ je množina řešení naší rovnosti. Evidentně, g je třídy C^2 a tedy dle Sardovy věty dostáváme, že množina regulárních hodnot má plnou míru v S^{l-1} . Buď nyní $y \in S^{l-1} = \delta D^l$ taková regulární hodnota tak, že $g^{-1}(y)$ je neprázdná množina (jinak by totiž měla množina $g(D^l - E) = S^{l-1}$ míru nula, což je nemožné). Pak dle věty o implicitní funkci dostáváme, že $g^{-1}(y)$ je 1-dimenzionální podvarieta, která musí obsahovat $-y$ podle hraniční podmínky (SB). Buď nyní V komponenta $g^{-1}(y)$ obsahující prvek $-y$ (totiž $y \in \delta D^l$ implikuje $-y \in \delta D^l$, $g(-y) = \frac{h(-y)}{\|h(-y)\|} = \frac{y}{\|y\|} = y$). Zejména tedy musí V být regulární křivka začínající v bodě $-y$ a otevřenou v opačném konci. Připomeňme,

že křivka e se nazývá regulární křivka třídy C^s , jestliže ke každému bodu této křivky existuje na této křivce okolí, které je obloukem třídy C^s .

Zároveň je průnik $V \cap \delta D^l = \{-y\}$ z hraniční podmínky (SB) a nutně je bod $-y$ obsažen ve V pouze jednou jakožto počáteční bod, protože je V regulární v bodě $-y$. Speciálně je V uzavřená podmnožina $D^l - E$ a tedy všechny její limitní body leží v E . Zejména tedy je množina E neprázdná a pokud začneme z bodu $-y$, musíme jednou dokonvergovat k E . Tím jsme podali geometrický konstruktivní důkaz existence bodu $x^* \in D^l$ tak, že platí $h(x^*) = 0$.

Poznamenejme, že pro přiblížení si konstruktivní povahy výše uvedeného řešení můžeme ukázat, že V je řešící křivka *globální Newtonovy* obyčejné rovnice $Dh(x) \frac{dx}{dt} = -\lambda h(x)$, kde $\lambda = \pm 1$ je vybráno tak, že má stejné znaménko jako $Dh(x)$ a závisí na x . Je-li totiž derivace $Dh(x)$ regulární, pak Eulerova metoda diskrétní aproximace nám dává

$$x_n = x_{n-1} \mp (Dh(x_{n-1}))^{-1} h(x_{n-1}),$$

což není nic jiného, než Newtonova metoda pro řešení rovnice $h(x) = 0$.

Nyní předpokládejme, že funkce $h : D^l \rightarrow R^l$ je pouze spojitá a stále splňuje $h(x) = -x$ pro všechna $x \in \delta D^l$. Definujme nové spojitě zobrazení $h_0 : D_2^l \rightarrow R^l$ předpisem

$$\begin{aligned} h_0(x) &= h(x) & \text{pro } \|x\| \leq 1, \\ h_0(x) &= -x & \text{pro } \|x\| \geq 1. \end{aligned}$$

Buď dále $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, \infty$ posloupnost reálných čísel konvergující k nule. Pro každé i přirozené zkonstruujeme hladkou tj. C^∞ aproximaci h_i funkce h_0 tak, že $\|h_i(x) - h_0(x)\| < \varepsilon_i$. Buď dále φ_r hladká funkce na R^l tak, že $\int \varphi_r = 1$ a nosič funkce φ_r je obsažen v disku D_r^l o poloměru $r > 0$. Ukažme konkrétní konstrukci funkce φ_r . Zaveďme nejprve pomocnou funkci

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Tato funkce je hladká. Pak funkce $\varphi(x+r)\varphi(r-x)$ je třídy C^∞ , je kladná v intervalu $(-r, r)$ a rovná nule mimo tento interval. Funkce

$$\psi(x_1, \dots, x_l) = \prod_{i=1}^l \varphi(x_i + r)\varphi(r - x_i)$$

je třídy C^∞ , je kladná v intervalu $(-r, r)^l$ a rovná nule mimo tento interval. Funkce $\varphi_r = \frac{\psi}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi}$ má tedy všechny požadované vlastnosti. Navíc platí, že

$$\varphi_r(x_1, \dots, x_l) = \varphi_r(-x_1, \dots, x_l) = \dots = \varphi_r(x_1, \dots, -x_l).$$

Speciálně lze tedy spočítat, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_r(x) = 0.$$

Připomeňme, že nosičem funkce $\varphi : U \rightarrow R$ rozumíme uzávěr množiny bodů, v nichž má φ nenulovou hodnotu.

Definujme pak funkci $h_i(y) = \int h_0(y-x)\varphi_{r_i}(x)dx = \int h_0(x)\varphi_{r_i}(y-x)dx$ tak, aby bylo r_i dostatečně malé vzhledem k ε_i a vždy bylo $r_i < \frac{1}{2}$.

Pak h_i aproximuje stejnoměrně h_0 (viz [27], VIII, 7, 2.) v každém intervalu a $h_i(x) = -x$ pro $x \in \delta D_2^l$ (totiž $h_i(x) = \int h_0(x-z)\varphi_{r_i}(z)dz = \int (z-x)\varphi_{r_i}(z)dz = \int -x\varphi_{r_i}(z)dz + \int z\varphi_{r_i}(z)dz = -x \int \varphi_{r_i}(z)dz = -x$). Připomeňme, že posloupnost h_i konverguje stejnoměrně k h_0 v intervalu A , existuje-li pro každé číslo $\varepsilon > 0$ takové přirozené číslo i_0 , že $\|h_i(x) - h_0(x)\| < \varepsilon$ pro každé $x \in A$ a pro každé číslo $i > i_0$.

Můžeme pak aplikovat výše uvedený výsledek na h_i a pak tedy existuje $x_i \in \delta D_2^l$ tak, že $h_i(x_i) = 0$. Evidentně, $x_i \in \delta D^l$ a zároveň $x_i \rightarrow \{x \in D^l : h_0(x) = 0\}$ (lze se omezit na vybranou podposloupnost) tj. existuje $x \in \delta D^l$ tak, že $h(x) = 0$. Totiž, pro všechna $\delta > 0$ existuje i_δ tak, že $\|h_0(x_i) - 0\| = \|(h_0(x_i) - h_i(x_i)) + (h_i(x_i) - 0)\| < \delta$ pro všechna $i > i_\delta$ tj. $\|h_0(x)\| = 0$.

Dokažme nyní větu 1.2 v plné obecnosti. Buď tedy funkce $f : D^l \rightarrow R^l$ pouze spojitá a necht' splňuje podmínku (B_D) . Definujme nové spojitě zobrazení $\tilde{f}_0 : D_2^l \rightarrow R^l$ takové, že $\tilde{f}(x) = -x$ pro $x \in \delta D_2^l$

předpisem

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x) &= f(x) && \text{pro } \|x\| \leq 1, \\ \widehat{f}(x) &= (2 - \|x\|)f(x/\|x\|) + (\|x\| - 1)(-x) && \text{pro } \|x\| \geq 1.\end{aligned}$$

Z předcházejících výsledků pak víme, že existuje $x^* \in \delta D_2^l$ tak, že $\widehat{f}(x) = 0$. Nutně pak $\|x^*\| \leq 1$. Jinak by totiž nastal spor s hraniční podmínkou (B_D). Tedy existuje $x^* \in \delta D^l$ tak, že $f(x) = 0$, čímž je důkaz věty 1.2 ukončen.

Abychom mohli získat hlavní výsledek – větu 1.1, bude nutno modifikovat větu 1.2 z koulí na simplexy. Definujme

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \{p \in R_+^l : \sum_{i=1}^l p^i = 1\} & \delta\Delta_1 &= \{p \in \Delta_1 : (\exists i)(p^i = 0)\} \\ \Delta_0 &= \{z \in R^l : \sum_{i=1}^l p^i = 0\}\end{aligned}$$

a

$$p_c = (1/l, \dots, 1/l) \in \Delta_1, \quad p_c \text{ je střed simplexu } \Delta_1.$$

V dalším budeme pracovat se spojitými zobrazeními $\varphi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$, která budou splňovat následující hraniční podmínku:

(B) Pokud je $p \in \delta\Delta_1$, pak $\varphi(p)$ není ve tvaru $\mu(p - p_c)$ pro žádné $\mu > 0$.

To neříká nic jiného, než že pro hraniční bod p neleží $\varphi(p)$ na polopřímce se směrnici $p - p_c$.

Lemma 1.6 *Nechť $D = D^l \cap \Delta_0$. Pak mezi množinami $D_{\frac{1}{\sqrt{l}}}^{l-1}$ a $\eta_D(D_{\frac{1}{\sqrt{l}}}^{l-1}) = D \cap D_{\frac{1}{\sqrt{l}}}^{l-1} \times R$ existuje vzájemně jednoznačná korespondence pomocí zobrazení projekce $\pi_D : D \rightarrow D_{\frac{1}{\sqrt{l}}}^{l-1}$ a zobrazení $\eta_D : D_{\frac{1}{\sqrt{l}}}^{l-1} \rightarrow D$; přitom $\eta_D(x_1, \dots, x_{l-1}) = (x_1, \dots, x_{l-1}, \sum_{i=1}^{l-1} x_i)$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že obě zobrazení jsou korektně definovaná tj. že platí $\pi_D(x_1, \dots, x_l) \in D^{\frac{l-1}{\sqrt{l}}}$ pro $(x_1, \dots, x_l) \in \eta_D(D^{\frac{l-1}{\sqrt{l}}})$ a $\eta_D(x_1, \dots, x_{l-1}) \in \eta_D(D^{\frac{l-1}{\sqrt{l}}})$ pro $(x_1, \dots, x_{l-1}) \in D^{\frac{l-1}{\sqrt{l}}}$. K tomu stačí ověřit, že $\|\pi_D(x_1, \dots, x_l)\| \leq \frac{1}{\sqrt{l}}$ a $\|\eta_D(x_1, \dots, x_{l-1})\| \leq 1$. To ale vede na maximalizační úlohy

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^{l-1} x_i^2 \\ & \text{za podmínek} \\ & \sum_{i=1}^l x_i^2 \leq 1 \\ & \sum_{i=1}^{l-1} x_i^2 \leq \frac{1}{l} \\ & \sum_{i=1}^l x_i = 0 \end{aligned} \tag{P_\pi}$$

a

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^{l-1} x_i^2 + (\sum_{i=1}^{l-1} x_i)^2 \\ & \text{za podmínky} \\ & \sum_{i=1}^{l-1} x_i^2 \leq \frac{1}{l}. \end{aligned} \tag{P_\eta}$$

První je pak triviálně splněna a druhá je ekvivalentní s maximalizačními úlohou

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^{l-1} x_i^2 + (\sum_{i=1}^{l-1} x_i)^2 \\ & \text{za podmínky} \\ & \sum_{i=1}^{l-1} x_i^2 = \frac{1}{l}. \end{aligned} \tag{P'_\eta}$$

Pomocí variačního počtu pak snadno ověříme, že maximum úlohy (P'_η) nastává např. v bodu $x_1 = x_2 = \dots = x_{l-1} = \frac{1}{\sqrt{l(l-1)}}$ a má hodnotu 1.

Přitom je vidět, že složení obou těchto zobrazení nám dává identitu jak na $D^{\frac{l-1}{\sqrt{l}}}$ tak na $\eta_D(D^{\frac{l-1}{\sqrt{l}}})$. Navíc jsou tato dvě zobrazení lineární izomorfizmy mezi Σ_0 a R^{l-1} . ■

Věta 1.7 *Bud' $\varphi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ spojitě zobrazení splňující následující hraniční podmínku (B). Pak existuje prvek $p^* \in \Delta_1$ tak, že platí $\varphi(p^*) = 0$.*

Abychom dokázali větu 1.7 pomocí věty 1.2, budeme konstruovat homeomorfismus zachovávající paprsky. Definujme tedy zobrazení $h : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ předpisem $h(p) = p - p_c$; dále bud' $\lambda : \Delta_0 - \{0\} \rightarrow R^+$ zobrazení definované předpisem $\lambda(p) = -\frac{1}{l} \cdot \frac{1}{\min_i p_i}$. Položme pak $\psi : D \rightarrow h(\Delta_1)$ jakožto $\psi(p) = \lambda\left(\frac{p}{\|p\|}\right)p$. Evidentně, ψ je zobrazení zachovávající paprsky.

Uvažujme nyní kompozici $\alpha : D \rightarrow \Delta_0$,

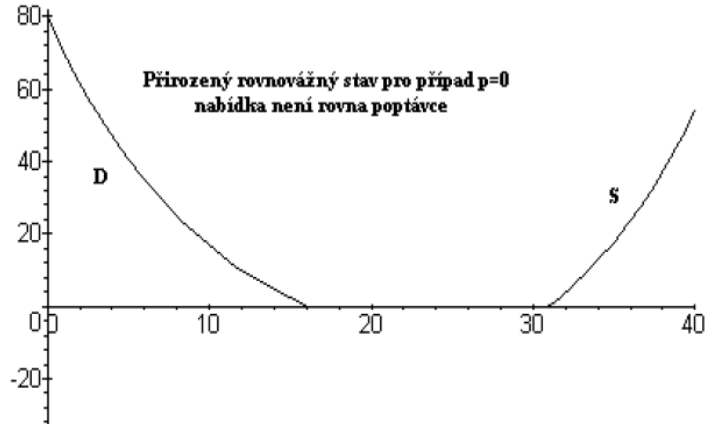
$$D \xrightarrow{\psi} h(\Delta_1) \xrightarrow{h^{-1}} \Delta_1 \xrightarrow{\varphi} \Delta_0.$$

Tvrdíme pak, že α splňuje hraniční podmínku (B_D) věty 1.2. Bud' tedy $q \in \delta D$ a necht' $p = \psi(q) + p_c = h^{-1}(\psi(q))$. Ale dle podmínky (B) neexistuje žádné kladné μ tak, že $\varphi(p) = \mu(p - p_c)$ neboli ekvivalentně $\alpha(q) = \mu(p - p_c)$. To je rovnocenné s tím, že neexistuje žádné kladné μ tak, že $\alpha(q) = \mu\psi(q)$ a protože ψ zachovává paprsky, máme, že neexistuje žádné kladné μ tak, že $\alpha(q) = \mu(q)$, což je přesně naše tvrzení. Okamžitě pak z věty 1.2 dostáváme, že existuje prvek $q^* \in D$ tak, že platí $\alpha(q^*) = 0$. Položíme-li pak $p^* = \psi(q^*) + p_c$, obdržíme $\varphi(p^*) = 0$ a věta 1.7 je dokázána.

Abychom dokázali 1.1, definujme pomocí funkce nadbytku poptávky $Z : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l$ novou funkci $\varphi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ předpisem $\varphi(p) = Z(p) - \left(\sum_{i=1}^l Z^i(p)\right)p$. Poznamenejme, že $\sum_{i=1}^l \varphi^i(p) = \sum_{i=1}^l Z^i(p) - \sum_{i=1}^l Z^i(p) \sum_{i=1}^l p^i = 0$. Je tedy φ korektně definované a je zřejmě spojitě, jakožto složení spojitých funkcí. Zároveň pokud $p \in \delta\Delta_1$, je nutně $p^i = 0$ pro jistý index i a tedy $\varphi^i(p) = Z^i(p) \geq 0$ dle podmínky 1.5. Je tedy podmínka (B) věty 1.7 splněna pro zobrazení φ . Existuje tedy $p^* \in \Delta_1$ tak, že $\varphi(p^*) = 0$. Tedy $Z(p^*) = \sum_{i=1}^l Z^i(p^*)p^*$. Uvažme nyní skalární součin obou stran rovnosti s vektorem $Z(p^*)$. Pak $\|Z(p^*)\|^2 = Z(p^*) \cdot Z(p^*) = \sum_{i=1}^l Z^i(p^*) (p^* \cdot Z(p^*)) = 0$ dle 1.4. Tedy i $Z(p^*) = 0$ tj. věta 1.1 platí.

Je však vhodné připomenout, že přirozený rovnovážný stav může nastat i v případě, že $D(p^*) \neq S(p^*)$. Uved' me následující graf 4.2 jednoho trhu pro cenu $p = 0$.

Tedy pro přebytek poptávky je někdy cenový vektor $p^* \in R_+^l - \{0\}$ s vlastností $Z(p^*) \leq 0$ nazýván



Obrázek 4.2: Přirozený rovnovážný stav

rovnovážným stavem. Jinak můžeme o takovémto $p^* \in R_+^l - \{0\}$ uvažovat jakožto o *rovnováze k volnému použití*, pro pozdější se zbavení přebytku nabídky pak máme rovnovážný stav $Z(p) = 0$.

Tvrzení 1.8 *Pokud funkce $Z : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l$ splňuje Walrasův zákon 1.4 a zároveň $Z(p^*) \leq 0$, pak pro všechna i buď $Z^i(p^*) = 0$ nebo $p^{*i} = 0$.*

Totíž jinak by existoval index i tak , že $Z^i(p^*) < 0$ a $p^{*i} > 0$. Zároveň pro všechna i máme $Z^i(p^*)p^{*i} \leq 0$ a tedy $\sum_{i=1}^l Z^i(p^*)p^{*i} < 0$, což je spor s Walrasovým zákonem.

Věta 1.9 (Debreu-Gale-Nikaidô) *Bud' funkce $Z : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l$ spojitá funkce splňující slabý tvar Walrasova zákona*

$$p \cdot Z(p) \leq 0. \quad (1.7)$$

Pak existuje cenový systém $p^ \in R_+^l - \{0\}$ tak, že $Z(p^*) \leq 0$.*

Poznamenejme, že věta 1.9 implikuje větu 1.1. Totiž, splňuje-li funkce Z předpoklady věty 1.1, pak dle věty 1.9 existuje cenový systém $p^* \in R_+^l - \{0\}$ tak, že $Z(p^*) \leq 0$. Podle tvrzení 1.8 pro všechna i buď $Z^i(p^*) = 0$ nebo $p^{*i} = 0$. Ale dle hraniční podmínky 1.5 je pro $p^{*i} = 0$ nutně $Z^i(p^*) \geq 0$ tj. $Z^i(p^*) = 0$ a tedy celkem $Z(p^*) = 0$.

Abychom mohli dokázat větu 1.9, zavedeme funkci $\beta : R \rightarrow R$ předpisem $\beta(t) = 0$ pro $t \leq 0$ a $\beta(t) = t$ pro $t \geq 0$. Definujme dále funkci $\bar{Z} : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l$ následovně: $\bar{Z}^i(p) = \beta(Z^i(p))$ pro všechny indexy i a cenové vektory p . Podobně jako v důkazu věty 1.1 definujme zobrazení $\varphi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ předpisem $\varphi(p) = \bar{Z}(p) - \left(\sum_{i=1}^l \bar{Z}^i(p) \right) p$. Pak φ splňuje předpoklady věty 1.7. Existuje tedy vektor $p^* \in \Delta_1$ tak, že $\varphi(p^*) = 0$. Tedy $\bar{Z}(p^*) = \sum_{i=1}^l \bar{Z}^i(p^*) p^*$. Uvažme nyní skalární součin obou stran rovnosti s vektorem $Z(p^*)$. Pak $\bar{Z}(p^*) \cdot Z(p^*) = \sum_{i=1}^l \bar{Z}^i(p^*) (p^* \cdot Z(p^*)) \leq 0$ dle 1.7. Tedy $\sum_{i=1}^l \beta(Z^i(p^*)) \cdot Z^i(p^*) \leq 0$. Ale zřejmě $\beta(t)t > 0$ pro $t > 0$ a $\beta(t)t = 0$ pro $t \leq 0$. Nutně tedy $Z^i(p^*) \leq 0$ pro všechna i tj. $Z(p^*) \leq 0$ tj. věta 1.9 platí.

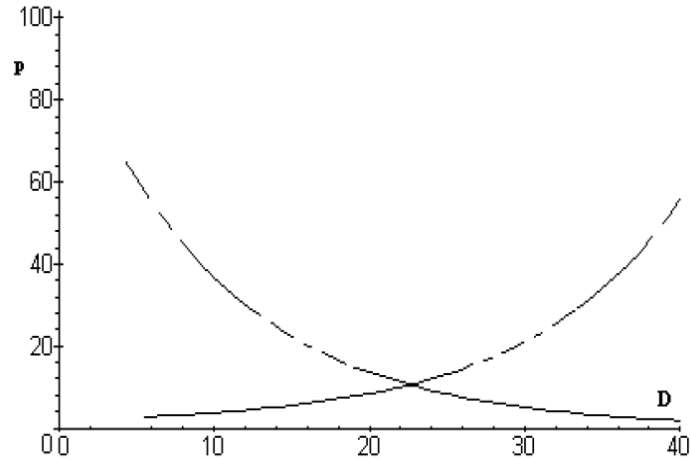
Jiné přirozené zobecnění vět 1.1 a 1.9 bude pro případ, že $p^i \rightarrow 0$ implikuje $Z^i(p) \rightarrow \infty$ (viz 4.3). Tato věta 1.10 je přirozeným zobecněním Arrow-Hahnovy věty.

Předpokládejme nyní, že funkce přebytku poptávky Z je definována pouze na jisté podmnožině \mathcal{D} množiny $R_+^l - \{0\}$ tak, že \mathcal{D} obsahuje množinu $\text{int}(R_+^l - \{0\})$ a pokud $p \in \mathcal{D}$, pak $\lambda p \in \mathcal{D}$ pro všechna λ kladná. Uvažme funkci Z s následujícími vlastnostmi:

$$Z : \mathcal{D} \rightarrow R^l \text{ je spojitá funkce,} \quad (1.8)$$

$$Z(\lambda p) = Z(p) \text{ pro všechna } \lambda > 0 \text{ a pro všechna } p \in \mathcal{D}, \quad (1.9)$$

$$p \cdot Z(p) \leq 0 \text{ pro všechna } p \in \mathcal{D}, \quad (1.10)$$



Obrázek 4.3: Přirozený rovnovážný stav

$$p_k \rightarrow \bar{p} \notin \mathcal{D} \text{ implikuje } \sum_{i=1}^l Z^i(p_k) \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

Věta 1.10 *Bud' funkce $Z : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^l$ funkce splňující 1.8, 1.9, 1.10 a 1.11. Pak existuje cenový systém $p^* \in \mathcal{D}$ tak, že $Z(p^*) \leq 0$.*

Uvažme funkci $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stejně jako v důkazu věty 1.9. Definujme pak novou funkci $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v

závislosti na pevně zvoleném kladném čísle c předpisem

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \leq 0, \\ 1 & \text{pro } t \geq c, \\ \frac{t}{c} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definujme pomocnou funkci $\bar{Z} : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l$ následovně:

$$\bar{Z}^i(p) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } p \notin \mathcal{D}, \\ \left(1 - \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p)\right)\right) \beta(Z^i(p)) + \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p)\right) & \text{jinak} \end{cases}$$

pro všechny indexy i a cenové vektory p .

Podobně jako v důkazu věty 1.1 a 1.9 definujme zobrazení $\varphi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ předpisem $\varphi(p) = \bar{Z}(p) - \left(\sum_{i=1}^l \bar{Z}^i(p)\right)p$. Pak φ splňuje předpoklady věty 1.7. Existuje tedy vektor $p^* \in \Delta_1$ tak, že $\varphi(p^*) = 0$. Tedy $\bar{Z}(p^*) = \sum_{i=1}^l \bar{Z}^i(p^*)p^*$. Nejdříve předpokládejme, že $p^* \in \mathcal{D}$. Uvažme nyní skalární součin obou stran rovnosti s vektorem $Z(p^*)$. Pak stejně jako v důkazu 1.9 dle 1.10 dostaneme $\bar{Z}(p^*) \cdot Z(p^*) \leq 0$. Tedy

$$\sum_{i=1}^l \left(1 - \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p^*)\right)\right) \beta(Z^i(p^*))Z^i(p^*) + \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p^*)\right) \sum_{i=1}^l Z^i(p^*) \leq 0.$$

Protože pro všechna reálná t platí $t\alpha(t) \geq 0$, nutně pak

$$\sum_{i=1}^l \left(1 - \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p^*)\right)\right) \beta(Z^i(p^*))Z^i(p^*) \leq 0.$$

Tedy

$$\left(1 - \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p^*)\right)\right) \sum_{i=1}^l \beta(Z^i(p^*))Z^i(p^*) \leq 0.$$

Zároveň pro všechna reálná t platí $(1 - \alpha(t)) \geq 0$ tj. $\sum_{i=1}^l \beta(Z^i(p^*)) \cdot Z^i(p^*) \leq 0$.

Ale zřejmě $\beta(t)t > 0$ pro $t > 0$ a $\beta(t)t = 0$ pro $t \leq 0$. Nutně tedy $Z^i(p^*) \leq 0$ pro všechna i tj. $Z(p^*) \leq 0$.

Nechť $p^* \notin \mathcal{D}$. Pak $\bar{Z}(p^*) = (1, \dots, 1)$ tj. $lp^* = \bar{Z}(p^*) = (1, \dots, 1)$ tj. $p^* = p_c \in \mathcal{D}$, spor. Tedy věta 1.9 platí.

2 Ekonomika úplné směny: existence rovnovážného stavu

Tento odstavec se skládá ze dvou částí; v první z nich budeme uvažovat silnější předpoklady s důrazem na diferenciovatelnost, přičemž v druhém budeme pracovat v obecnějším rámci. Existenční tvrzení jsou speciálními případy Arrow-Debreuovy věty.

Uvažme nejprve jednoho účastníka s prostorem komodit $P = \{x \in R^l : x = (x^1, \dots, x^l), (\forall i)(x^i > 0)\} \subseteq R_+^l$. Tedy prvek $x \in P$ bude reprezentovat svazek komodit spojených s tímto ekonomickým agentem. Budeme předpokládat, že preferenční relace na P je reprezentována funkcí užitečnosti $u : P \rightarrow R$ tak, že účastník preferuje prvek $x \in P$ před prvkem $y \in P$ přesně tehdy, když $u(x) > u(y)$. Podmnožiny $u^{-1}(c)$ pro $c \in R$ (vrstevnice funkce u) nazýváme indiferentními křivkami (pro preferenční relaci). V dalším budeme předpokládat silný předpoklad klasického typu:

$$\text{Funkce } u : P \rightarrow R \text{ je třídy } C^2. \quad (2.1)$$

Buď nyní $g(x)$ orientovaný jednotkový normálový vektor k indiferentní křivce $u^{-1}(c)$ pro $c \in R$ tak, že $c = u(x)$. Můžeme pak vyjádřit $g(x)$ jakožto $\frac{\text{gradu}(x)}{\|\text{gradu}(x)\|}$, kde $\text{gradu} = \left(\frac{\delta u}{\delta x^1}, \dots, \frac{\delta u}{\delta x^l}\right)$. Pak je $g : P \rightarrow S^{l-1}$ zobrazení třídy C^1 . Toto zobrazení hraje základní roli v analýze preferencí spotřebitele a teorie poptávky.

Náš další předpoklad je monotonie neboli *více je lépe* tj.

$$g(x) \in P \cap S^{l-1} = \text{int}(S_+^{l-1}) \text{ pro všechna } x \in P. \quad (2.2)$$

Tedy 2.2 znamená, že všechny parciální derivace $\frac{\delta u}{\delta x^i}$ jsou kladné.

Naše třetí hypotéza je konvexnost a to opět v silném a diferencovatelném tvaru. Pro $x \in P$ je derivace $Dg(x)$ lineární zobrazení z R^l do kolmé nadroviny $g(x)^\perp$ k vektoru $g(x)$. Můžeme pak uvažovat o $g(x)^\perp$ jakožto o tečném prostoru $T_{g(x)}(S^{l-1})$ nebo o tečné rovině k indiferentní křivce. Pak restrikce $Dg(x)$ z nadroviny $g(x)^\perp$ do sebe je symetrické lineární zobrazení.

Restrikce $Dg(x)$ z nadroviny $g(x)^\perp$ do sebe má záporné vlastní hodnoty. (2.3)

Ekvivalentní podmínka k 2.3 je

Druhá derivace $D^2u(x)$ jakožto symetrická bilineární forma omezená na tečnou nadrovinu $g(x)^\perp$ k indiferentní křivce v bodě x je negativně definitní. (2.4)

Ekvivalenci mezi 2.3 a 2.4 lze ukázat následovně: buď $Du(x) : R^l \rightarrow R$ buď první derivace funkce u v bodě x s jádrem označeným $\text{Ker}(Du(x))$. Pak máme $v \cdot g(x) = \frac{Du(x)(v)}{\|\text{gradu}(x)\|}$. Dále $v \in \text{Ker}(Du(x))$ právě tehdy, když $v \cdot \text{gradu}(x) = 0$ tj. $v \cdot g(x) = 0$ tj. $v \in g(x)^\perp$. Necht' $v_1, v_2 \in \text{Ker}(Du(x))$. Pak $v_1 \cdot g(x) = \frac{Du(x)(v_1)}{\|\text{gradu}(x)\|}$. Derivujeme-li obě strany podle x , máme

$$v_1 \cdot Dg(x) = \frac{D^2u(x)(v_1)\|\text{gradu}(x)\| - \overbrace{Du(x)(v_1)D(\|\text{gradu}(x)\|)}^{=0}}{\|\text{gradu}(x)\|^2}.$$

Tedy $v_1 \cdot Dg(x) = \frac{D^2u(x)(v_1)}{\|\text{gradu}(x)\|}$.

Připomeňme následující dvě tvrzení z lineární algebry ([5]).

Tvrzení 2.1 *Buď A matice nad tělesem T , majících n vlastních hodnot (ne nutně navzájem různých). Pak matice A je podobná Jordanově matici.*

Tvrzení 2.2 *Bud' f_2 regulární kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru V_n a bud' A její matice vzhledem k bázi M prostoru V_n . Označme $D_i, i = 1, \dots, n$ determinant dílčí submatice matice A , která vznikne z matice A vynecháním posledních $n - i$ řádků a posledních $n - i$ sloupců. Pak f_2 je pozitivně definitní, právě když $D_i > 0, i = 1, \dots, n$.*

Dále je vhodné si uvědomit, že forma f_2 je pozitivně definitní, právě když $-f_2$ je negativně definitní.

Nyní můžeme dokončit důkaz ekvivalence podmínek 2.3 a 2.4. Totiž, má-li matice $Dg(x)$ všechny vlastní hodnoty záporné, má v odpovídající bázi Jordanův (trojúhelníkový) tvar B tak, že na diagonále jsou záporná čísla. Položme $A := -B$. Pak A má na diagonále pouze kladná čísla a dle 2.2 je odpovídající forma k A pozitivně definitní, tj. odpovídající forma k $Dg(x)$ negativně definitní. Obráceně, bud' forma $\frac{D^2 u(x)}{\|\text{gradu}(x)\|}$ negativně definitní, λ vlastní číslo matice $Dg(x)$ a v příslušný nenulový vlastní vektor. Pak

$$\lambda(v \cdot v) = v \cdot (\lambda v) = v \cdot (Dg(x)v) = \frac{D^2 u(x)(v, v)}{\|\text{gradu}(x)\|} < 0.$$

Tedy $\lambda < 0$, což se mělo dokázat. Ukažme následující tvrzení.

Tvrzení 2.3 *Pokud funkce užitečnosti $u : P \rightarrow R$ splňuje 2.3, je nutně $u^{-1}([c, \infty))$ ostře konvertní pro všechna $c \in R$.*

Ukážeme, že minimum funkce u na každém intervalu nemůže nastat ve vnitřku tohoto intervalu. Přesněji, nechť $x, x' \in P$ tak, že $u(x) \geq c, u(x') \geq c$. Nechť dále $S = \{y : y = \lambda x + (1 - \lambda)x', 0 < \lambda < 1\}$ je odpovídající interval s krajními body $x, x' \in P$. Nechť dále $x^* = \lambda^* x + (1 - \lambda^*)x', 0 < \lambda^* < 1$ je bod minima pro funkci u na S . Pak $x^* = x' - \lambda^*(x' - x)$. Navíc $Du(x^*)(v) = 0$ pro $v = x' - x$. Protože x^* je bod minima, nutně $D^2 u(x^*)(v, v) \geq 0$. To je však spor 2.4, že $D^2 u(x^*) < 0$ na $\text{Ker}(Du(x^*))$. Je proto u větší než c na S .

Závěrečná podmínka na funkci u je hraniční podmínka a jejím důsledkem je zbavení se případných problémů spojených s hranicí podprostoru R_+^l :

$$\text{Indiferentní křivka } u^{-1}(c) \text{ je uzavřená v } R^l \text{ pro všechna } c. \quad (2.5)$$

To lze interpretovat jakožto podmínku, že účastník si přeje vlastnit od každé komodity alespoň něco. Je například použita v práci [7] (1959).

Odvoďme si nyní funkci *poptávky* od *funkce užitečnosti* účastníka. Předpokládejme proto, že máme dán *cenový systém* $p \in \text{int}R_+^l = P$ a vektor *bohatství* $w \in R_+$. Tato definice R_+ je vhodná ačkoliv ne zcela důsledná. Uvažujme dále *rozpočtovou množinu* $B_{p,w} = \{x \in P : p \cdot x = w\}$. Můžeme pak za $B_{p,w}$ považovat za množinu komodit, které získáme za ceny p pro bohatství w . Poptávka $f(p, w)$ je komoditní svazek maximalizující užitečnost na množině $B_{p,w}$. Poznamenejme, že $B_{p,w}$ je ohraničená a neprázdná a tedy funkce u omezená na $B_{p,w}$ má kompaktní indiferentní křivky. Zejména tedy má funkce u na $B_{p,w}$ maximum, které je jediné dle předpokladu konvexity 2.3 a dle 2.3.

Je tedy $x = f(p, w)$ *poptávka* našeho účastníka při cenách p a bohatství w . Přitom je vidět, že poptávka je spojitě zobrazení $f : \text{int}R_+^l \rightarrow R^+ \rightarrow P$. Tedy $x = f(p, w)$ je maximum funkce u na $B_{p,w}$, derivace $Du(x)$ omezená na $B_{p,w}$ je nulová neboli platí $g(x) = \frac{p}{\|p\|}$. Z definice $p \cdot f(p, w) = w$ a $f(\lambda p, \lambda w) = f(p, w)$ pro všechna $\lambda > 0$. Celkem pak:

Tvrzení 2.4 *Individuální poptávka je spojitě zobrazení $f : \text{int}R_+^l \rightarrow R^+ \rightarrow P$ a splňuje*

1. $g(f(p, w)) = \frac{p}{\|p\|}$,
2. $p \cdot f(p, w) = w$,
3. $f(\lambda p, \lambda w) = f(p, w)$ pro všechna $\lambda > 0$.

Dále ukážeme následující známou skutečnost [8].

Tvrzení 2.5 *Funkce poptávky je třídy C^1 . Obecně, funkce poptávky je stejné třídy C^r jakožto funkce g .*

Poznamenejme nejprve, že z tvrzení 2.4 máme zobrazení

$$\varphi : P \rightarrow (\text{int}S_+^{l-1}) \times R_+, \quad \varphi(x) = (g(x), x \cdot g(x)),$$

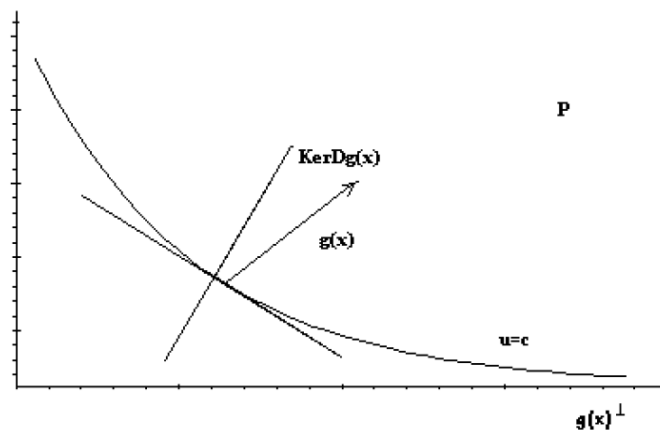
což je inverzní zobrazení k restrikci f na množinu $(\text{int}S_+^{l-1}) \times R_+$. Protože φ je třídy C^1 , bude f třídy C^1 dle věty o implicitní funkci 1.4, pokud derivace $D\varphi(x)$ je regulární pro všechna $x \in P$.

Abychom ukázali, že $D\varphi(x)$ je regulární, stačí ověřit, že $D\varphi(x)(\eta) = 0$ implikuje $\eta = 0$. Nechť tedy $\eta \in R^l$. Pak

$$D\varphi(x)(\eta) = (Dg(x)(\eta), \eta \cdot g(x) + x \cdot Dg(x)(\eta)).$$

Je-li tedy $D\varphi(x)(\eta) = 0$, pak $Dg(x)(\eta) = 0$ tj. $\eta \in \text{Ker}Dg(x)$. Ale i $\eta \cdot g(x) = 0$ tj. $\eta \in g(x)^\perp$. Zároveň víme z 2.3 že restrikce $Dg(x)$ z nadroviny $g(x)^\perp$ je regulární tj. $\text{Ker}Dg(x) \cap g(x)^\perp = \{0\}$. Tedy $\eta = 0$.

Z výše uvedeného okamžitě plyne, že můžeme psát $R^l = \text{Ker}Dg(x) \oplus g(x)^\perp$ tj. každý vektor z R^l lze jednoznačně zapsat jakožto $\eta = \eta_1 + \eta_2$, $\eta_1 \cdot g(x) = 0$, $Dg(x)(\eta_2) = 0$.



Obrázek 4.4: Funkce užitku a poptávka

Můžeme pak orientovat přímku $\text{KerDg}(x)$ tak, že řekneme, že vektor $\eta \in \text{KerDg}(x)$ je pozitivní, pokud $\eta \cdot g(x) > 0$. Zároveň máme: protože $\text{Dg}(x)$ je vždy regulární, je i křivka $g^{-1}(p)$ s $p = g(x)$, $p \in S_+^{l-1}$ pevné, regulární. Mluvíme pak o *křivce rozvoje příjmů*. V bodě $x \in P$ je tečná přímka k $g^{-1}(p)$ právě přímka $\text{KerDg}(x)$ (z definice). Tuto křivku lze pak interpretovat jakožto křivku poptávky rostoucí s bohatstvím při pevných cenách. Můžeme pak uvažovat bohatství jakožto funkci $w : P \rightarrow R$ definovanou jako $w(x) = x \cdot g(x)$. Pak w je *ostře* rostoucí podél každé křivky rozvoje příjmů. Skutečně, křivka $g^{-1}(p)$ je diferencovatelně parametrizovatelná podle w .

Předpokládejme nyní, že bohatství účastníka pochází z obdaření e z P a je funkcí $w = p \cdot e$ ceny p . Poslední vlastnost poptávky je dána tvrzením:

Tvrzení 2.6 *Bud' p_i posloupnost cenových vektorů ležící v $\text{int}R_+^l$ konvergující k $p^* \in \delta R_+^l$ pro $i \rightarrow \infty$. Pak $\|f(p_i, p_i \cdot e)\| \rightarrow \infty$ pro $i \rightarrow \infty$.*

Důkaz. Necht' neplatí, že $\|f(p_i, p_i \cdot e)\| \rightarrow \infty$ pro $i \rightarrow \infty$. Pak pro nějaké $x^* \in R_+^l$ existuje vhodná podposloupnost i_j , $j = 1, 2, \dots, \infty$ tak, že $f(p_{i_j}, p_{i_j} \cdot e) \rightarrow x^*$. Totiž pak všechny prvky $f(p_{i_j}, p_{i_j} \cdot e)$ leží v nějaké kompaktní kouli tj. z této posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Můžeme tedy v dalším bez újmy na obecnosti předpokládat, že posloupnost $f(p_i, p_i \cdot e) \rightarrow x^*$. Pro každé i položme $w_i = p_i \cdot e$. Pak $e \in B_{p_i, w_i}$; tj. $u(f(p_i, p_i \cdot e)) \geq u(e)$. Speciálně $f(p_i, p_i \cdot e) \in u^{-1}([u(e), \infty))$. Z uzavřenosti množiny $u^{-1}([u(e), \infty))$ pak nutně $x^* \in u^{-1}([u(e), \infty))$. Dle 2.5 máme, že $x^* \in P$. Proto je $g(x^*)$ definováno a rovno p^* . Ale protože $p^* \in \delta R_+^l$ dostáváme spor s naším předpokladem monotonie 2.2.

Ekonomika úplné směny sestává z: m účastníků se stejným prostorem komodit P . Účastník i pro $i = 1, \dots, m$ má preference reprezentovány funkcí užitečnosti $u_i : P \rightarrow R$ splňující podmínky 2.1, 2.2, 2.3 a 2.5. Zároveň předpokládejme, že každý účastník i má k dispozici obdaření $e_i \in P$. Tedy pro cenový systém $p_i \in R_+^l - \{0\}$ je bohatství účastníka i rovno $p \cdot e_i$.

Můžeme pak interpretovat tento model jakožto ekonomii směny, ve které se každý účastník pokouší směnít své obdařené komodity za svazek komodit, který by zvýšil jeho uspokojení při omezení daným rozpočtem. Pojem ekonomiky lze představit následovně:

Stav ekonomiky se skládá z alokace $x \in P^m$, $x = (x_1, \dots, x_m)$ a cenového systému $p_i \in S_+^{l-1}$. Alokace se nazývá *přípustná*, pokud $\sum x_i = \sum e_i$. Tedy celkové zásoby ekonomiky ukládají omezení na alokace; neexistuje produkce. Stav $(x, p) \in P^m \times S_+^{l-1}$ se nazývá *konkurenční (Walrasovův) rovnovážný stav*, pokud splňuje podmínky (A) a (B):

$$(A) \quad \sum x_i = \sum e_i.$$

což není nic jiného, než podmínka přípustnosti.

$$(B) \quad \text{Pro všechna } i, x_i \text{ maximalizuje } u_i \text{ na množině zásob } \{y \in P : p \cdot y = p \cdot e_i\} \text{ tj. } x_i = f(p, p \cdot e_i).$$

Poznamenejme, že podmínka (B) se nezmění (díky monotonii funkce u_i), jestliže množinu zásob nahradíme množinou $\{y \in P : p \cdot y \leq p \cdot e_i\}$. Dále připomeňme, že podmínku (B) lze nahradit podmínkami (B1) a (B2):

$$(B1) \quad p \cdot x_i = p \cdot e_i \text{ pro všechna } i.$$

$$(B2) \quad \text{Pro všechna } i, g_i(x_i) = p_i.$$

Věta 2.7 *Bud' dána ekonomika úplné směny tj. m obchodníků s obdařeními e_i , $1 \leq i \leq m$ a preferencemi reprezentovanými funkcemi užitečnosti $u_i : P \rightarrow R$ splňujícími podmínky 2.1, 2.2, 2.3 a 2.5. Pak existuje rovnovážný stav ekonomiky tj. můžeme najít $x_i \in P$, $1 \leq i \leq m$ a cenový vektor $p \in S_+^{l-1}$ splňující (A) a (B).*

Převeďme podmínky (A) a (B) do problému poptávky a nabídky. Bud' tedy $S : R_+^l - \{0\} \rightarrow R_+^l$ konstantní zobrazení, $S(p) = \sum e_i$. Podobně klademe $D : \text{int}R_+^l - \{0\} \rightarrow R_+^l$ $D(p) = \sum f_i(p, p \cdot e_i)$, kde $f_i(p, p \cdot e_i)$ je poptávka určená funkcí u_i . Definujme nadbytek poptávky $Z : \text{int}R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l$ předpisem $Z(p) = D(p) - S(p)$. Poznamenejme, že rovnovážné podmínky (A) a (B) jsou splněny pro vektor (x, p) právě tehdy, když $Z(p) = 0$ a $x_i = f_i(p, p \cdot e_i)$. Budeme aplikovat větu 1.10. Ověříme, že jsou splněny podmínky 1.8, 1.9, 1.10 a 1.11. Evidentně, Z je spojitá funkce, Z je homogenní, protože jak S tak D jsou homogenní funkce, Z splňuje slabý Walrasův zákon. Totiž zejména pro $p \in \text{int}R_+^l$ máme

$$p \cdot Z(p) = p \cdot D(p) - p \cdot S(p) = \sum p \cdot f_i(p, p \cdot e_i) - \sum p \cdot e_i = \sum (p \cdot x_i - p \cdot e_i) = 0.$$

Ověřme podmínku 1.11. Máme ukázat, že $p_k \rightarrow \bar{p} \notin \text{int}R_+^l$ implikuje $\sum_{j=1}^l Z^j(p_k) \rightarrow \infty$. Ale to je právě tehdy, když $\sum_j \sum_i f_i(p_k, p_k \cdot e_i)^j \rightarrow \infty$. Z tvrzení 2.6 máme, že pro každé i platí $\|f_i(p_k, p_k \cdot e_i)\| \rightarrow \infty$ pro $k \rightarrow \infty$ tj. $\sum_{j=1}^l (f_i(p_k, p_k \cdot e_i)^j)^2 \rightarrow \infty$. Z nezápornosti f_i pak nutně i $\sum_{j=1}^l f_i(p_k, p_k \cdot e_i)^j \rightarrow \infty$. Celkem pak $\sum_j \sum_i f_i(p_k, p_k \cdot e_i)^j \rightarrow \infty$. Tedy existuje cenový vektor $p^* \in \text{int}R_+^l$ tak, že $Z(p^*) \leq 0$. Z věty 1.8 pak nutně $Z(p^*) = 0$.

Věnujme se nyní ekonomice úplné směny takové, že budeme předpokládat pouze spojité preference. Uvažme nyní preference na celém prostoru komodit R_+^l reprezentované spojitými funkcemi $u : R_+^l \rightarrow R$. Nahradíme podmínky 1.8, 1.9, 1.10 a 1.11 následujícími podmínkami:

$$\text{Funkce } u : R_+^l \rightarrow R \text{ je spojitá.} \quad (2.6)$$

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)x') > c, \text{ pokud } u(x), u(x') \geq c \text{ a } 0 < \lambda < 1. \quad (2.7)$$

Předpokládejme dále, že každý obchodník má k dispozici, kromě preferenční funkce u_i , obdaření $e_i \in P$. Zejména tedy má k dispozici kladné množství každé komodity.

Věta 2.8 *Jsou-li dány preferenční funkce užitku $u_i : R_+^l \rightarrow R$, $1 \leq i \leq m$ splňující 2.6, 2.7 a obdaření $e_i \in P$, $1 \leq i \leq m$, existuje pak rovnovážný stav volného použití (x^*, p^*) . Tedy*

$$1. \sum_i x_i^* \leq \sum_i e_i, \text{ a}$$

$$2. \text{ Pro všechna } i, x_i^* \text{ maximalizuje } u_i \text{ na množině zásob } \{x_i \in R_+^l : p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot e_i\}.$$

Důkaz. Než budeme konstruovat funkci poptávky, zbavíme se části komoditního prostoru blízké nekonečnu. Přesněji, vyberme reálné číslo $c > \|\sum_i e_i\|$ a položme $X_c = D_c \cap R_+^l$. Definujme dále přidruženou funkci *falešné poptávky* $\hat{f}_i : (R_+^l - \{0\}) \times R_+^l \rightarrow X_c$ následovně:

$$\hat{f}_i(p, w) := x_0, \quad u(x_0) = \max\{u_i(x) : x \in \hat{B}_{p,w}\},$$

kde $\hat{B}_{p,w} = \{x \in X_c : p \cdot x \leq w\}$. Protože je množina $\hat{B}_{p,w}$ kompaktní, konvexní a neprázdná, okamžitě plyne z *ostré* konvexity u_i , že je funkce $\hat{f}_i(p, w)$ dobře definovaná.

Věta 2.9 *Funkce falešné poptávky $\hat{f}_i : (R_+^l - \{0\}) \times R_+^l \rightarrow X_c$ je spojitá, je homogenní tj. $\hat{f}_i(\lambda p, \lambda w) = \hat{f}_i(p, w)$ pro všechna $\lambda > 0$ a $p \cdot \hat{f}_i(p, w) \leq w$. Zároveň, pokud $\|\hat{f}_i(p, w)\| < c$, pak maximum $f_i(p, w)$ funkce u_i existuje na množině $B_{p,w} = \{x \in R_+^l : p \cdot x \leq w\}$ (pravdivá poptávka) a navíc platí $f_i(p, w) = \hat{f}_i(p, w)$.*

Důkaz. Je evidentní, že funkce falešné poptávky \hat{f}_i je spojitá, je homogenní a $p \cdot \hat{f}_i(p, w) \leq w$.

Ukážeme zbývající část věty. Nechť $\hat{x}_i = \hat{f}_i(p, w)$ tak, že $\|\hat{f}_i(p, w)\| < c$. Uvažme $x_i \in B_{p,w}$ tak, že $u_i(x_i) \geq u_i(\hat{x}_i)$. Nechť $S = \{y : y = \lambda x_i + (1 - \lambda)\hat{x}_i, 0 < \lambda < 1\}$ je odpovídající interval s krajními body x_i, \hat{x}_i . Pro všechna $x'_i \neq \hat{x}_i$ na množině $S \cap X_c$ máme $u_i(x'_i) > u_i(\hat{x}_i)$ z *ostré* konvexity, což je spor s výběrem \hat{x}_i jakožto bodu maxima funkce falešné poptávky. ■

Nyní definujme funkce $\hat{D}(p) = \sum_i \hat{f}_i(p, p \cdot e_i)$, $S(p) = \sum_i e_i$ a $\hat{Z} : R_+^l - \{0\} \rightarrow R^l$ jakožto $\hat{Z}(p) := \hat{D}(p) - S(p)$. Pak evidentně \hat{Z} splňuje slabý Walrasův zákon a tedy dle věty 1.9 existuje cenový vektor p tak, že $\hat{Z}(p) = 0$. Položíme-li tedy $\hat{x}_i = \hat{f}_i(p, w)$, máme $\sum_i \hat{x}_i = \sum_i e_i$ a $\|\hat{f}_i(p, w)\| < c$. Tedy dle 2.9 je nutné $\hat{x}_i = \hat{f}_i(p, w) = f_i(p, w) = x_i$. Zejména je tedy vektor (x_1, \dots, x_m, p) rovnovážným stavem *volného použití* ekonomiky úplné směny. ■

Předpokládejme nyní, že funkce užitku $u_i : R_+^l \rightarrow R$ splňuje následující

Podmínka nenasycenosti: Funkce $u_i : R_+^l \rightarrow R$ nemá maximum.

Pak můžeme bez újmy na obecnosti tvrdit, že vektor komodit $f_i(p, w) = x_i$ splňuje dokonce rovnost $p \cdot f_i(p, w) = w$. Jinak bychom totiž mohli vybrat komoditní vektor $x_i^* \in R_+^l$ mimo $B_{p,w}$ tak, že $u_i(x_i^*) > u_i(\hat{x}_i)$, což je opět spor podmínky *ostré* konvexity a výběrem x_i jakožto bodu maxima na $B_{p,w}$. Celkem tedy dostaneme, že pro obvyklou funkci nadbytku poptávky $Z(p)$ platí Walrasův zákon v rovnovážném stavu.

3 Paretova optimalita

Budeme nyní pracovat na nějaké otevřené množině $W \subseteq R^n$ a funkcemi třídy C^2 $u_i : W \rightarrow R$, $1 \leq i \leq m$. Můžeme pak W považovat za prostor stavů nějakého sdružení, přičemž členové tohoto sdružení mají preference reprezentované funkcemi užítku u_i . Bod $x \in W$ se nazývá *Paretovým optimem*, pokud neexistuje žádný prvek $y \in W$ tak, že $u_i(y) \geq u_i(x)$ pro všechna i a pro nějaké i_0 $u_{i_0}(y) > u_{i_0}(x)$. O takovém y říkáme, že *dominuje* stav x . Je-li $m = 1$, je Paretoovo optimum právě obyčejné maximum. Bod $x \in W$ je *lokální Paretoovo optimum*, jestliže existuje okolí N bodu x a x je Paretoovo optimum pro funkce užítku $u_i : W \rightarrow R$, $1 \leq i \leq m$ omezené na okolí N . Bod $x \in W$ se nazývá *silné Paretoovo optimum*, jestliže $y \in W$ splňuje $u_i(y) \geq u_i(x)$ pro všechna i , pak nutně $x = y$. Podobně, bod $x \in W$ se nazývá *lokální silné Paretoovo optimum*, jestliže existuje okolí N bodu x a x je silné Paretoovo optimum pro funkce užítku $u_i : W \rightarrow R$, $1 \leq i \leq m$ omezené na okolí N . Poznamenejme, že tyto definice lze zavést obecně, např. pro libovolnou podmnožinu $W \subseteq R^n$.

Věta 3.1 *Bud' $u_i : W \rightarrow R$, $1 \leq i \leq m$, funkce třídy C^2 , kde W je otevřená podmnožina R^n . Je-li $x \in W$ lokální Paretoovo optimum, existují nezáporná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že*

$$\sum_i \lambda_i Du_i(x) = 0. \quad (3.1)$$

Pokud navíc platí, že

$$\sum_i \lambda_i D^2 u_i(x) \text{ je negativně definitní na } \langle \lambda_1 Du_1(x), \dots, \lambda_m Du_m(x) \rangle^\perp, \quad (3.2)$$

je x bod lokálního silného Paretova optima.

Poznamenejme, že položíme-li $m = 1$, $n = 1$, je věta 3.1 standardní věta matematické analýzy funkcí jedné proměnné pro maximum. Je-li $m = 1$ a n libovolné, jedná se o případ maxima funkce více proměnných.

Věta 3.2 Stiemkeho věta *Proto, aby systém lineárních rovnic $Ax = 0$ měl kladné řešení $x > 0, x \in R^m$ je nutné a dostatečné, aby byl průnik množin $\{A^T p : p \in R^n\}$ a $R_+^m - \{0\}$ prázdný.*

Věta 3.3 Tuckerova věta *Systém lineárních rovnic $Ax = 0, x \geq 0$ a systém lineárních nerovnic $A^T p \geq 0$ mají vždy dvojici řešení (x, p) takovou, že $A^T p + x > 0$.*

Důkaz věty 3.1. Necht' $Pos = \{v \in R^m : v = (v_1, \dots, v_m), v_i \geq 0\}$, \overline{Pos} příslušný uzávěr. Přitom $u = (u_1, \dots, u_m) : W \rightarrow R^m$. Buď x lokální Pareto optimum a předpokládejme, že $\text{Im} Du(x) \cap Pos \neq \emptyset$. Pak existuje $v \in R^m$ tak, že $Du(x)(v) \in Pos$. Dále buď $\alpha(t)$ křivka začínající v x , obsažená ve W taková, že $\alpha'(0) = v$. Pak, z Taylorova rozvoje funkcí u_i , dostáváme, že existuje t_0 tak, že pro všechna i a $t \leq t_0$ je $u_i(\alpha(t)) = u_i(\alpha(0)) + t Du(x)(v)_i + R_1(t)_i$, kde $\frac{R_1(t)}{t} \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow 0$, $Du(x)(v)_i > R_1(t)_i$ tj. $u_i(\alpha(t)) > u_i(\alpha(0)) = u_i(x)$ tj. x není Pareto lokální optimum. Nutně tedy $\text{Im} Du(x) \cap Pos = \emptyset$.

Předpokládejme nyní, že rovnice $\lambda \cdot Du(x) = 0$ má pouze triviální nezáporné řešení. Pak dle 3.3 platí, že existuje vektor $v \in R^n$ tak, že $Du(x)(v) \in Pos$, což není možné. Tedy rovnice $\lambda \cdot Du(x) = 0$ má netriviální nezáporné řešení, čímž je dokázána první část věty.

Ukažme výše uvedené přímo pomocí aparátu lineárního programování:
Primární úloha

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^m \lambda_i \\ & \text{za podmínek} \end{aligned} \tag{PU}$$

$$(Du_1(x), \dots, Du_m(x)) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_i \geq 0$$

a duální úloha

$$\begin{aligned} & \min \sum_{j=1}^n 0 \cdot v_j \\ & \text{za podmínky} \end{aligned} \tag{DU}$$

$$(v_1, \dots, v_n) \cdot (Du_1(x), \dots, Du_m(x)) \geq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Protože však primární úloha je neomezená právě tehdy, když existuje netriviální nezáporný vektor λ splňující $\lambda \cdot Du(x) = 0$ a duální úloha nemá přípustné řešení právě tehdy, když $\text{Im} Du(x) \cap \text{Pos} = \emptyset$, máme z věty o dualitě první část naší věty.

Předpokládejme nyní, že druhá část naší věty platí pro případ $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq m$ a uvažme obecný případ. Přečíslujme indexy tak, že $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq k$, $\lambda_i = 0$, $k + 1 \leq i \leq m$. Pak podmínky 3.1 a 3.2 jsou tytéž pro optimalizaci u_1, \dots, u_m v bodě x a optimalizaci u_1, \dots, u_k v bodě x . Protože ale dle předpokladu je věta platná v tomto případě, je x lokální silné Paretovo optimum v bodě x pro funkce u_1, \dots, u_k . Je tedy x lokální silné Paretovo optimum v bodě x pro funkce u_1, \dots, u_m .

Stačí se tedy omezit na důkaz případu, kdy jsou všechna λ_i kladná. Předpokládejme pro jednoduchost, že bod x je počátek R^n a že $u(x) = 0 \in R^m$. Můžeme tedy v dalším volně používat označení x pro libovolný bod z W . Zejména tedy podmínka, že $0 \in W$ je bod lokálního silného Paretova optima, je ekvivalentní podmínce, že existuje okolí N počátku 0 ve W tak, že $(u(N) - \{0\}) \cap \overline{\text{Pos}} = \emptyset$. Ukážeme tedy, že existuje takovéto okolí N .

Označme $K = \text{Ker} Du(0)$ jádro lineárního zobrazení $Du(0)$ a K^\perp jeho ortogonální doplněk.

Lemma 3.4 *Existují reálná čísla $r, \delta > 0$ tak, že pokud $\|x\| < r$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$ a $\|x_2\| \leq \delta \|x_1\|$, pak platí pro nenulové x nerovnost $\lambda \cdot u(x) < 0$.*

Důkaz. Necht' $H = \sum_i \lambda_i D^2 u_i(0)$. Protože H je negativně definitní na K , je $H(x, x) \leq -\sigma \|x\|^2$ pro nějaké vhodné kladné číslo σ a pro všechny vektory $x \in K$ (totiž stačí se omezit na jednotkovou kouli v K , tam má funkce H maximum, které je nutně záporné a rovno $-\sigma$).

Necht' nyní $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$. Pak můžeme psát $H(x, x) = H(x_1, x_1) + 2H(x_1, x_2) + H(x_2, x_2)$. Ale víme, že $|H(x_1, x_2)| \leq C \|x_1\| \cdot \|x_2\|$ a $|H(x_2, x_2)| \leq C_1 \|x_2\| \cdot \|x_2\|$ pro vhodné nezáporné konstanty C a C_1 .

Můžeme tedy vybrat vhodná dostatečně malá kladná čísla η, δ tak, že pokud $\|x_2\| \leq \delta \|x_1\|$, pak $H(x, x) \leq -\eta \|x\|^2$. Aplikujeme-li Taylorovu větu o rozvoji pro $\|x\| < r$, $u(x) = Du(0)(x) + D^2u(0)(x, x) + R_3(x)$, kde $|\lambda \cdot R_3(x)| < \frac{\eta}{2} \|x\|^2$. Pak $\lambda \cdot u(x) = \lambda \cdot Du(0)(x) + \lambda \cdot D^2u(0)(x, x) + \lambda \cdot R_3(x) \leq -\eta \|x\|^2 + \lambda \cdot R_3(x) < 0$.

■

Označme nyní $J = \text{Im} Du(0)$ a pišme pro $u \in R^m$ jako $u = (u_a, u_b)$, $u_a \in J$, $u_b \in J^\perp$.

Lemma 3.5 *Jsou-li dána reálná čísla $\alpha > 0$ a $\delta > 0$, existuje reálné číslo $s > 0$ tak, že pokud $\|x\| < r$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$ a $\|x_2\| \geq \delta \|x_1\|$, pak nerovnost $\|u_b(x)\| \leq \alpha \|u_a(x)\|$.*

Důkaz. Restrikce $Du(0)_{K^\perp} : K^\perp \rightarrow \text{Im} Du(0)$ zobrazení $Du(0) : R^n \rightarrow \text{Im} Du(0)$ je lineární izomorfismus. Totiž, je-li $Du(0)(x) = Du(0)(y)$ je nutně $Du(0)(x - y) = 0$ t.j. $x - y \in K \cap K^\perp = \{0\}$ t.j. $x = y$. Necht' $z \in \text{Im} Du(0)$. Pak existuje $x \in R^n$ tak, že $Du(0)(x) = z$. Ale $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$. Tedy $z = Du(0)(x) = Du(0)(x_1) + Du(0)(x_2) = 0 + Du(0)(x_2)$.

Zároveň poznamenejme, že pro každý lineární izomorfismus v euklidovském prostoru existují kladné konstanty $k_1, k_2 > 0$ tak, že

$$k_1 \|x\| \leq \|F(x)\| \leq k_2 \|x\|$$

pro všechna x . Speciálně tedy existují kladné konstanty $c_1, c_2 > 0$ tak, že

$$\begin{aligned} \|Du(0)(x)\| = \|Du(0)(x_2)\| &\geq c_1 \|x_2\| && \text{pro všechna } x = x_1 + x_2 \\ &\geq c \|x\| && \text{pokud } \|x_2\| \geq \delta \|x_1\|. \end{aligned}$$

Rozviňme $u(x)$ do Taylorovy řady. Pak

$$u_a(x) + u_b(x) = u(x) = Du(0)(x) + R(x).$$

Přitom pro $\beta > 0$ můžeme předpokládat, že $\|R(x)\| \leq \beta\|x\|$ pro $\|x\| < s$, $s > 0$ vhodné reálné číslo. Přitom $R(x) = R_a(x) + R_b(x)$, $R_a(x) \in J$, $R_b(x) \in J^\perp$. Tedy

$$\|u_a(x)\| = \|Du(0)(x) + R_a(x)\| \geq \|Du(0)(x)\| - \|-R_a(x)\| \geq (c - \beta)\|x\|$$

a

$$\|u_b(x)\| = \|R_b(x)\| \leq \beta\|x\|.$$

Zvolme β tak, že $\frac{\beta}{c-\beta} < \alpha$. Pak $\|u_b(x)\| \leq \alpha\|u_a(x)\|$. ■

Dokončeme nyní důkaz věty 3.1. Vyberme α z lemma 3.5 tak, že pokud $\|u_b(x)\| \leq \alpha\|u_a(x)\|$, pak $u(x) \notin \overline{Pos} - \{0\}$.

Ukážeme nyní, že rovnice $\lambda \cdot Du(x) = 0$ má kladné řešení právě tehdy, když $\text{Im}Du(0) \cap \overline{Pos} = \emptyset$.

Ukažme výše uvedené pomocí aparátu lineárního programování:

Primární úloha

$$\begin{aligned} & \max \lambda_j \\ & \text{za podmínek} \end{aligned} \tag{PU}_j$$

$$(Du_1(x), \dots, Du_m(x)) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_i \geq 0$$

a duální úloha

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^n 0 \cdot v_j \\ & \text{za podmínky} \end{aligned} \tag{DU}_j$$

$$(v_1, \dots, v_n) \cdot (Du_1(x), \dots, Du_m(x)) \geq (0 \dots \overbrace{1}^j 0).$$

Protože však všechny primární úlohy (PU_j) jsou neomezené právě tehdy, když existuje netriviální kladný vektor λ splňující $\lambda \cdot Du(x) = 0$ a všechny duální úlohy (DU_j) nemají přípustná řešení právě tehdy, když $\text{Im}Du(0) \cap \overline{Pos} = \{0\}$, máme z věty o dualitě naše tvrzení o průniku $\text{Im}Du(0) \cap \overline{Pos}$.

Vyberme tedy kruh se středem 0 a poloměrem $r_0 < \min(r, s)$, r z lemmatu 3.4 a s z lemmatu 3.5, δ z lemmatu 3.5 dle lemmatu 3.4. Nutně pak $u(x) \notin \overline{Pos} - \{0\}$ pokud $\|x\| < r_0$ tj. 0 je bod lokálního silného Paretova optima. ■

Přejděme nyní k rozšíření věty 3.1 o podmínky omezení. Jsou tedy funkce třídy C^2 u_1, \dots, u_m definovány na nějaké otevřené množině $W \subseteq R^l$ spolu s omezeními danými podmínkami tvaru $g_\beta(x) \geq 0$, $\beta = 1, \dots, k$, kde $g_\beta : W \rightarrow R$ je funkce třídy C^2 . Můžeme vyjádřit tento problém jakožto hledání optima restrikcí funkcí u_1, \dots, u_m na množině $W_0 \subseteq R^l$, $W_0 = \{x \in W : g_\beta(x) \geq 0, \beta = 1, \dots, k\}$.

Věta 3.6 *Bud' $u_i : W_0 \rightarrow R$, $1 \leq i \leq m$, funkce jako výše uvedeno, $x \in W_0$ lokální Paretovo optimum. Pak existují nezáporná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, $\mu_1, \dots, \mu_k \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že*

$$\sum_i \lambda_i Du_i(x) + \sum_\beta \mu_\beta Dg_\beta(x) = 0, \tag{3.3}$$

přičemž $\mu_\beta = 0$ pro $g_\beta(x) \neq 0$.

Pokud navíc platí, že $\sum_i \lambda_i D^2u_i(x) + \sum_\beta \mu_\beta D^2g_\beta(x)$ je negativně definitní na

$$\langle \lambda_1 Du_1(x), \dots, \lambda_m Du_m(x), \mu_1 Dg_1(x), \dots, \mu_k Dg_k(x) \rangle^\perp, \tag{3.4}$$

je x bod lokálního silného Paretova optima.

Důkaz. Abychom dokázali první část věty, předpokládejme (bez újmy na obecnosti), že $g_\beta(x) = 0$ právě pro všechna $\beta = 1, \dots, k$ a definujme zobrazení $\varphi : W \rightarrow R^{m+k}$ předpisem $\varphi = (u_1, \dots, u_m, g_1, \dots, g_k)$. Tvrdíme pak, že $\text{ImD}\varphi(x) \cap \text{Pos} = \emptyset$. Jinak by, analogicky jako v 3.1, existoval vektor $v \in R^l$ tak, že $\text{D}\varphi(x)(v) \in \text{Pos}$ a nechť $\alpha(t)$ buď křivka ve W splňující $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = v$. Pro dostatečně malá ϵ je $\alpha(\epsilon) \in W_0$ a dominuje $\alpha(0) = x$. Tedy x není lokální Paretoovo optimum. Nutně tedy $\text{ImD}\varphi(x) \cap \text{Pos} = \emptyset$. Existuje pak vektor $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_k) \in \overline{\text{Pos}} - \{0\}$ normální k podprostoru $\text{ImD}\varphi(x)$, stejně jako ve větě 3.1. Tím jsme dokázali první část věty 3.6.

K důkazu druhé části nejprve poznamenejme, že z definice lokálního silného Paretova optima plyne pro bod $x \in W_0$, že pokud bod x je bodem lokálního silného Paretova optima pro funkci φ na W , pak je i bodem lokálního silného Paretova optima pro funkce u_1, \dots, u_m na W_0 . Ale z 3.1 víme, že x je bodem lokálního silného Paretova optima pro funkci φ na W . ■

Zakončeme tento odstavec s několika poznámkami:

1. Věta 3.1 je speciální případ věty 3.6 pro $k = 0$.
2. Předpokládejme, že g_α splňují *podmínku nedegenerovanosti* v bodě $x \in W_0$. Pak je množina vektorů $\text{D}g_\beta$ pro β takové, že $g_\beta(x) = 0$, lineárně nezávislá tedy speciálně alespoň jedno λ_i je kladné.
3. Pokud je ve větě 3.6 $m = 1$, není první část nic jiného než Kuhn-Tuckerova věta. Je-li navíc splněna podmínka nedegenerovanosti, lze volit $\lambda_1 = 1$.

4 Základní věta ekonomiky blahobytu

Vraťme se nyní k ekonomice úplné směny z odstavce 2. Přitom funkce užitečnosti $u_i : P \rightarrow R$ i -tého obchodníka, $i = 1, \dots, m$ splňují podmínku 2.1 tj. že funkce $u_i : P \rightarrow R$ je třídy C^2 , podmínku monotonie 2.2 tj., že $g_i(x) \in P \cap S^{l-1} = \text{int}(S_+^{l-1})$ pro všechna $x \in P$, zde $g_i(x) = \frac{\text{grad}u_i(x)}{\|\text{grad}u_i(x)\|}$, kde $\text{grad}u_i = \left(\frac{\delta u_i}{\delta x^1}, \dots, \frac{\delta u_i}{\delta x^l} \right)$,

podmínku konvexnosti 2.3, že restrikce $Dg_i(x)$ z nadroviny $g_i(x)^\perp$ do sebe má záporné vlastní hodnoty a nakonec je hraniční podmínka 2.5, že Indiferentní křivka $u_i^{-1}(c)$ je uzavřená v R^l pro všechna c .

Nebudeme však předpokládat, že bohatství účastníka pochází z obdaření e_i z P a je funkcí $w_i = p \cdot e_i$ ceny p . Budeme ale předpokládat, že úplné zdroje naší ekonomiky jsou dány pevným vektorem $r \in P$.

Pak množina W dosažitelných alokací neboli stavů má tvar

$$W = \{x \in P^m : x = (x_1, \dots, x_m), x_i \in P, \sum_i x_i = r\}.$$

Funkce individuálního užitku $u_i : P \rightarrow R$ i -tého účastníka nám indukuje zobrazení $v_i : W \rightarrow R$ tak, že $v_i(x) = u_i(x_i)$. Je přirozené si klást otázku, jak vypadají Paretově optimální stavy pro funkce v_i , $i = 1, \dots, m$. Platí:

Věta 4.1 *Následující tři podmínky na alokaci $x \in W$ vzhledem k indukovaným funkcím užitku $v_i : W \rightarrow R$ jsou ekvivalentní:*

1. x je lokální Paretovo optimum.
2. x je lokální silné Paretovo optimum.
3. $g_i(x_i) = p \in S_+^{l-1}$ pro všechna i .

Přitom množinu všech takovýchto x označíme θ .

Důkaz. Poznamenejme, že evidentně podmínka (2) implikuje podmínku (1). Ukažme, že (1) implikuje (3). Abychom to dokázali, stačí nám pouze předpokládat o funkcích $u_i : P \rightarrow R$, že jsou třídy C^1 .

Předpokládejme tedy, že $x \in W$ je lokální Paretovo optimum. Z první části věty 3.1 máme, že existují nezáporná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že $\sum_i \lambda_i Dv_i(x) = 0$ tj. $\sum_i \lambda_i Du_i(x_i) = 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že například λ_1 je kladné. Uvažme nyní vektor $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \in$

$(R^l)^m$ tak, že $\sum_i \bar{x}_i = 0$, tj. jedná se o tečný vektor k W . Je-li navíc speciálně $\bar{x} = (\bar{x}_1, 0, \dots, 0, \overbrace{-\bar{x}_1}^k, 0, \dots, 0)$, máme pak $\sum_i \lambda_i Du_i(x_i)(\bar{x}_i) = \lambda_1 Du_1(x_1)(\bar{x}_1) - \lambda_k Du_k(x_k)(\bar{x}_1) = 0$ pro všechna $\bar{x}_1 \in R^l$. Nutně tedy, protože $Du_j(x_j) \in P$ pro všechna j , λ_1 je kladné, je i λ_k kladné a $\lambda_1 Du_1(x_1) = \lambda_k Du_k(x_k)$. Po podělení normou pak $g_1(x_1) = g_k(x_k)$. Je tedy podmínka (3) splněna.

Abychom dokázali ekvivalenci těchto tří podmínek, zbývá ukázat, že pokud x splňuje podmínku (3), pak platí (2) tj. x je lokální silné Paretoovo optimum.

Lemma 4.2 *Bud' $u : P \rightarrow R$ funkce splňující 2.3. Pokud $y \in P$, $u(y) \geq u(x)$ a $x \neq y$, pak $Du(x)(y-x) > 0$. Pak i $y \cdot g(x) > x \cdot g(x)$.*

Důkaz. Pro $0 \leq t \leq 1$ dle 2.3 je nutně $u(x) \leq u(x+t(y-x))$. Nutně tedy je její derivace v bodě x nezáporná tj. platí $(d/dt)u(x+t(y-x))|_{t=0} \geq 0$ tj. $Du(x)(y-x) \geq 0$. Předpokládejme, že $Du(x)(y-x) = 0$. Rozvojem v bodě x dostáváme $u(x+t(y-x)) = u(x) + 0 + \underbrace{D^2u(x)(t(y-x), t(y-x))}_{<0} + R_3(t)$. Tedy pro dostatečně

malá t je $u(x) > u(x+t(y-x))$, což je spor s výše uvedeným.

Chceme nyní ukázat, že x je bod lokálního silného Paretova optima. Nechť nyní y je takový bod, že $v_i(x) \leq v_i(y)$ pro všechna i . Chceme ukázat, že $x = y$. Předpokládejme opak. Pak pro nějaké i_0 víme, že platí $y_{i_0} \cdot g_{i_0}(x_{i_0}) > x_{i_0} \cdot g_{i_0}(x_{i_0})$. Položme $p = g_{i_0}(x_{i_0})$. Pak $p = g_i(x_i)$ pro všechna i . Tedy $\sum_i y_i \cdot p > \sum_i x_i \cdot p$. Ale protože $y \in W$, nutně $\sum_i y_i = r = \sum_i x_i$ tedy i $\sum_i y_i \cdot p = r = \sum_i x_i \cdot p$. Nutně pak pro všechna i máme $x_i = y_i$ tj. $x = y$ tj. x je silné Paretoovo optimum.

Zavedme nyní pojem *rovnovážného stavu ekonomiky blahobytu*. Řekneme, že stav $(x, p) \in W \times S_+^{l-1}$ je rovnovážným stavem ekonomiky blahobytu, jestliže i -tá projekce x_i je bodem maxima funkce u_i na rozpočtové množině $B_{p, p \cdot x_i} = \{x \in P : p \cdot x = p \cdot x_i\}$. Množinu všech rovnovážných stavů ekonomiky blahobytu budeme označovat Λ . Z této definice plyne, že bod (x, p) , $x = (x_1, \dots, x_m)$, $x_i \in P$, $p \in S_+^{l-1}$ leží v Λ , pokud platí:

$$(1_E) \quad \sum_i x_i = r,$$

$$(2_E) \quad g_i(x_i) = p \text{ pro všechna } i = 1, \dots, m.$$

Máme-li navíc k dispozici údaje o individuálních obdařeních $e_i \in P, i = 1, \dots, m$ tak, že $\sum_i e_i = r$, dostáváme Walrasův rovnovážný stav

$$(3_E) \quad p \cdot e_i = p \cdot x_i, i = 1, \dots, m.$$

Věta 4.3 *Mezi množinami θ a Λ existuje vzájemně jednoznačná korespondence $\beta : \Lambda \rightarrow \theta$ definovaná předpisem $\beta((x, p)) = x$ a $\alpha : \theta \rightarrow \Lambda$ definována následovně: $\alpha(x) = (x, g_1(x_1))$.*

Důkaz. Evidentně, β je korektně definovaná surjekce. Totiž, vzorem prvku x je prvek $(x, g_1(x_1))$. Ukažme, že je i injekce. Nechť $\beta(x, p) = \beta(x, q)$. Pak nutně $p = g_1(x_1) = q$. ■

V dalším budeme o funkcích užítku u_i předpokládat pouze, že jsou třídy C^2 . Označme θ_s podmnožinu množiny W , která sestává z lokálních silných Paretových optim.

Tvrzení 4.4 *Je-li bod $x \in W$ bod lokálního optima pro indukované funkce užítku na W , pak*

1. *existují nezáporná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že*

$$\sum_i \lambda_i Du_i(x) = 0,$$

což implikuje, že $g_i(x_i)$ jsou nezávislé na i .

Pokud navíc platí, že

2.

$$\sum_i \lambda_i D^2 u_i(x)(\bar{x}_i) \text{ je záporná na množině takových } \bar{x}, \text{ že}$$

$\sum_i \bar{x}_i = 0, \bar{x}_i \cdot g_i(x_i) = 0$ pro všechna i a pro jisté i_0 je $\bar{x}_{i_0} \neq 0$, je x bod lokálního silného Paretova optima tj. $x \in \theta_s$.

Důkaz. Stejně jako ve větě 3.1 víme, že $\text{Im}Du(x) \cap \text{Pos} = \emptyset$, tj. existuje vektor λ tak, že rovnice $\lambda \cdot Du(x) = 0$ má netriviální nezáporné řešení λ , čímž je pomocí 4.1 dokázána první část věty. Položme $K = \{\bar{x} : \sum_j \bar{x}_j = 0, \bar{x}_i \cdot g_i(x_i) = 0 \text{ pro všechna } i\}$. Pak K je vektorový podprostor a forma $H = \sum_i \lambda_i D^2u_i(x)$ je negativně definitní na množině K . Platí pak zejména obdoba lemmat 3.4 a 3.5. Tedy pak nutně máme $x \in \theta_s$. ■

Studujme nyní situaci z věty 4.1 pro prostory komodit s hranicí. Předpokládejme, že každá funkce užitku $u_i : R_+^l \rightarrow R$ je restrikce funkce třídy C^2 na nějaké otevřené množině obsahující množinu R_+^l . Speciálně pak máme definovány derivace $Du_i(x)$ a $D^2u_i(x)$ na hranici δR_+^l a podmínky 2.2 a 2.3 mají smysl i pro hraniční body.

Bud' $r \in \text{int}R_+^l$ vektor celkových zásob. Položme dále $W_0 = \{x : x \in R_+^{lm}, \sum_j x_j = r\}$. Pak W_0 je prostor přípustných stavů naší ekonomiky úplné směny. Bud' dále W relativní okolí množiny W_0 vzhledem k množině $W_r = \{x : x \in R^{lm}, \sum_j x_j = r\}$ tak, že funkce $v_i : W \rightarrow R$ jsou zde definovány jakožto $v_i(x) = u_i(x_i)$, $i = 1, \dots, m$. Necht' jsou dále funkce omezení $g_i^k : W \rightarrow R$ určeny předpisem $g_i^k(x) = x_i^k$. Pak nalezení optima ve W_0 je ekvivalentní nalezení optima pro funkce $v_i : W \rightarrow R$ s omezeními $g_i^k(x) \geq 0$.

Věta 4.5 *Necht' funkce $u_i : R_+^l \rightarrow R$ splňují*

$$g_i(x_i) = \frac{\text{grad}u_i(x_i)}{\|\text{grad}u_i(x_i)\|} \in S_+^{l-1}, \quad (4.1)$$

pro všechna i a

$$D^2u_i(x) \text{ je negativně definitní na } g_i(x_i)^\perp. \quad (4.2)$$

Je-li bod $x \in W_0$ bod lokálního optima pro indukované funkce užitku na W_0 , pak

1. existují normovaný nezáporný vektor $p \in S_+^{l-1}$ a nezáporná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že

$$p \geq \lambda_i Du_i(x_i) \text{ pro všechna } i,$$

přičemž rovnost nastává v k -té souřadnici, jestliže $x_i^k \neq 0$.

Pokud navíc platí, že

2.

$p \cdot x_i \neq 0$ pro všechna i ,

je x bod lokálního silného Paretova optima.

Důkaz. Pro omezení $g_i^k(x) = x_i^k$ víme, že $Dg_i^j(x)(\bar{x}) = \bar{x}_i^j$ pro všechny vektory $\bar{x} \in (R^l)^m$ takové, že $\sum_i \bar{x}_i = 0$. Dle věty 3.6 víme, že existují nezáporná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, $\mu_1, \dots, \mu_k \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že

$$\sum_i \lambda_i Du_i(x_i)(\bar{x}_i) + \sum_{i,j} \mu_i^j \bar{x}_i^j = 0,$$

přičemž $\mu_\beta = 0$ pro $x_i^j \neq 0$.

Proveďme nyní konkrétní volbu $\bar{x}_i^j = 1$, $\bar{x}_k^j = -1$ a necht' všechny ostatní souřadnice jsou nulové. pak nutně

$$\lambda_i Du_i(x_i)(\bar{x}_i)^j + \mu_i^j = \lambda_k Du_k(x_k)(\bar{x}_k)^j + \mu_k^j,$$

přičemž $Du_k(x_k)(\bar{x}_k)^j$ značí j -tou souřadnici vektoru $Du_k(x_k)(\bar{x}_k)$. Celkem tedy je vektor $q = \lambda_k Du_k(x_k) + \mu_k$ nezávislý na indexu k . Přitom $\mu_k = (\mu_k^1, \dots, \mu_k^l) \geq 0$ a nutně $\mu_k \cdot x_k = 0$. Poznamenejme, že q je nenulový vektor (jinak by nutně všechna λ_i a μ_i^j byla nulová). Položme $p = \frac{q}{\|q\|}$. Položíme-li $\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\|p\|}$, $\mu_i'^j = \frac{\mu_i^j}{\|p\|}$, máme pak

$$p = \lambda'_k Du_k(x_k) + \mu'_k,$$

přičemž $\lambda'_k \geq 0$, $\mu'_k \geq 0$, $\mu'_k \cdot x_k = 0$. To ale není nic jiného, než první část naší věty.

Abychom dokázali zbývající část věty, uvažme prvek $y \in W_0$ tak, že $u_i(y_i) \geq u_i(x_i)$ pro všechna i . Dle lemmatu 4.2 platí $Du_i(x_i)(y_i - x_i) \geq 0$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $y_i = x_i$. Platí ale zároveň, že

$$p \cdot x_i = \lambda'_i Du_i(x_i) \cdot x_i + \mu'_i \cdot x_i = \lambda'_i Du_i(x_i) \cdot x_i.$$

Nutně tedy je $\lambda'_i \neq 0$, protože $p \cdot x_i \neq 0$. Zopakujeme-li tuto úvahu ještě jednou, obdržíme nerovnost

$$p(y_i - x_i) \geq \mu_i \cdot y_i \text{ tj. } p \cdot y_i \geq p \cdot x_i,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $y_i = x_i$. Z druhé strany nutně $\sum_i y_i = r = \sum_i x_i$ tj. $\sum_i p \cdot y_i = p \cdot r = \sum_i p \cdot x_i$ a pro všechna i skutečně nastává rovnost. ■

Zavedme nyní pojem *rovnovážného stavu ekonomiky blahobytu* pro W_0 . Řekneme, že stav $(x, p) \in W_0 \times S_+^{l-1}$ je rovnovážným stavem ekonomiky blahobytu, jestliže i -tá projekce x_i je bodem maxima funkce u_i na rozpočtové množině $B_{p,p \cdot x_i} = \{x \in P : p \cdot x \leq p \cdot x_i\}$. Množinu všech takovýchto rovnovážných stavů ekonomiky blahobytu budeme označovat Λ_0 . Pokud bod (x, p) leží v Λ_0 , pak $\sum_i x_i = r$.

Věta 4.6 *Pokud $(x, p) \in \Lambda_0$, existují nezáporná čísla $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ a nezáporné vektory $\mu_i \in R_+^l$, $i = 1, \dots, m$ tak, že $x_i \cdot \mu_i = 0$ a $p = \lambda_i Du_i(x_i) + \mu_i$. Obráceně, pokud $(x, p) \in W_0 \times S_+^{l-1}$ tak, že $p \cdot x_i \neq 0$ pro všechna i a navíc $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \in R_+^l$, $i = 1, \dots, m$ splňují výše uvedené, pak $(x, p) \in \Lambda_0$.*

Důkaz. Protože x_i je maximum funkce u_i na $B_{p,p \cdot x_i}$ pro všechna i , existují $\lambda_i, \sigma_i \geq 0$ a nezáporné vektory $\mu_i \in R_+^l$, $i = 1, \dots, m$ ne všechny nulové tak, že

$$\lambda_i Du_i(x_i)(\bar{x}_i) + \sum \mu_i^j Dg_i^j(x_i)(\bar{x}_i) - \sigma_i p \cdot \bar{x}_i = 0$$

pro všechna $\bar{x}_i \in R^l$.

To je ekvivalentní s tím, že

$$\lambda_i Du_i(x_i) + \mu_i = \sigma_i p, \quad \mu_i \cdot x_i = 0.$$

Pokud by $\sigma_i = 0$, nutně i $\lambda_i = 0$, $\mu_i = 0$. Můžeme tedy dělit obě strany rovnosti σ_i a po přeznačení máme

$$\lambda_i Du_i(x_i) + \mu_i = p, \quad \mu_i \cdot x_i = 0.$$

Tím jsme dokázali první část. Pro důkaz druhé části předpokládejme, že existuje $y_i \in B_{p,p \cdot x_i}$ tak, že $u_i(x_i) < u_i(y_i)$. Pak dle 4.2 platí $Du_i(x_i)(y_i - x_i) > 0$ a pro $p \cdot y_i \geq y_i \cdot \lambda_i Du_i(x_i) > p \cdot x_i$, $\lambda_i \neq 0$. Tedy $y_i \notin B_{p,p \cdot x_i}$, spor. Celkem $(x, p) \in \Lambda_0$. ■

Ve zbývající části tohoto odstavce budeme předpokládat, že $Du_i(x_i) \in \text{int}S_+^{l-1}$ a $D^2u_i(x_i) < 0$ na $\text{Ker}Du_i(x_i)$. Řekneme, že pro bod $x \in W_0$ existuje *izolovaná komunita* $\emptyset \subset S \subset \{1, \dots, m\}$, jestliže pro každý prvek $i \in S$ a každý nenulový prvek $x_i^j \neq 0$ dostáváme, že $x_k^j = 0$ platí pro všechna $k \notin S$.

Lemma 4.7 *Předpokládejme, že $x \in W_0$ je bez izolovaných komunit a že $i, q \in \{1, \dots, m\}$ jsou dva účastníci naší ekonomiky. Pak existuje posloupnost i_1, \dots, i_n agentů tak, že $i_1 = i, i_n = q$ a posloupnost zboží j_1, \dots, j_n tak, že $x_{i_k}^{j_k} \neq 0$ a pro všechna k nutně buď $j_{k+1} = j_k$ nebo $i_{k+1} = i_k$.*

Důkaz. Sporem. Bez újmy na obecnosti lze říci, že $i = i_1 = 1$ a uvažme všechny posloupnosti (i_1, \dots, i_n) , (j_1, \dots, j_n) výše uvedeného tvaru tak, že $i_1 = 1$. Označme S jakožto podmnožinu všech možných i_n dosažitelných tímto způsobem. Je-li $S \neq \emptyset$ vlastní, pak má x izolovanou komunitu. ■

Důsledek 4.8 *Nechť bod $x \in W_0$ nemá izolované komunity. Pak existuje jediný odpovídající cenový vektor $p \in S_+^{l-1}$.*

Důkaz. Stejně jako ve větě 4.5 a dle věty 3.6 víme, že existují nezáporná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0, \mu_1, \dots, \mu_k \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že

$$p = \lambda_i Du_i(x_i) + \mu_i,$$

přičemž $\mu_i \cdot x_i = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme přecíslovat zboží a účastníky tak, že účastník 1 má nějakou část zboží 1 tj. $x_1^1 \neq 0$. Normujme vektor p následovně: $p^1 = 1$. Pak $p^1 = 1 = \lambda_1 Du_1(x_1)^1 + \mu_1^1 = \lambda_1 Du_1(x_1)^1$, protože $\mu_1^1 = 0$. Je tedy λ_1 jednoznačně určeno. Buď q nějaký jiný účastník. Uvažme posloupnost i_1, \dots, i_n agentů tak, že $i_1 = 1, i_n = q$ a posloupnost zboží j_1, \dots, j_n tak, že $x_{i_k}^{j_k} \neq 0$ a pro všechna k nutně buď $j_{k+1} = j_k$ nebo $i_{k+1} = i_k$. Předpokládejme indukci, že λ_{i_l} je určeno pro všechna $l < k$ a chceme určit λ_{i_k} . Jsou dvě možnosti: buď $i_{k-1} = i_k$ a pak $\lambda_{i_k} = \lambda_{i_{k-1}}$ nebo $i_{k-1} \neq i_k$ a potom $j_{k-1} = j_k$ a oba účastníci i_{k-1}, i_k mají nenulové množství zboží j_k . Máme tedy rovnosti $p^{j_k} = \lambda_{i_{k-1}} Du_{i_{k-1}}(x_{i_{k-1}})^{j_k}$ a $p^{j_k} = \lambda_{i_k} Du_{i_k}(x_{i_k})^{j_k}$. Známe tedy p^{j_k} a následně λ_{i_k} . Opět jsme zde použili tu skutečnost, že odpovídající μ_i^j byla nulová. Zejména tedy máme tedy až na násobek jednoznačně určené všechny koeficienty λ_i . Buď dále k nějaké zboží. Vyberme index i tak, že $x_i^k \neq 0$. Pak $p^k = \lambda_i Du_i(x_i)^k$ jednoznačně určuje p^k , což dokazuje naše tvrzení. ■

Následující vztah mezi Paretovými optimy a rovnovážnými stavy vyplývá bezprostředně z 4.8.

Věta 4.9 *Jestliže ekonomika splňuje předpoklad neexistence izolovaných komunit pro všechna Paretova optima, pak mezi množinou θ_0 Paretových optim a množinou Λ_0 rovnovážných stavů existuje vzájemně jednoznačná korespondence $\beta_0 : \Lambda_0 \rightarrow \theta_0$ definovaná předpisem $\beta_0((x, p)) = x$ a $\alpha_0 : \theta_0 \rightarrow \Lambda_0$ definována následovně: $\alpha_0(x) = (x, g_1(x_1))$.*

Kapitola 5

Existence rovnováhy v konkurenční ekonomice

Tato kapitola je podstatným způsobem založena na článku Gerarda Debreuho [10].

1 Úvod

Matematický model konkurenční ekonomiky od L. Walrase (1874–1877) byl koncipován jako pokus vysvětlit rovnovážný stav dosažený velkým počtem malých účastníků ovlivňujících se skrze trh. Sám Walras chápe, že předložená teorie bude neúplná bez matematických argumentů podporujících existenci alespoň jednoho rovnovážného stavu. Nicméně více než půl století rovnost mnoha rovnic o mnoha proměnných zůstala pouhým nepřesvědčivým argumentem ve prospěch existence rovnováhy konkurenční ekonomiky. Studium existenčního problému začalo na počátku třicátých let, když Neisser (1932), Stackelberg (1933), Zeuthen (1933) a Schlesinger (1935) určili několik jeho základních rysů a když Wald (1935, 1936a, 1936b) získal jeho první řešení. Po dalších asi dvaceti letech byla otázka existence rovnováhy konkurenční ekonomiky znovu otevřena v dílech

Arrow a Debreu (1954), McKenzie (1954, 1955), Gale (1955), Debreu (1956), Kuhn (1956a, 1956b), Nikaido (1956), Uzawa (1956) a mnoha dalších autorů, jejichž příspěvky za posledních dvacet pět let tvoří bibliografii s více než 350 položkami.

V těchto dílech můžeme rozpoznat čtyři odlišné, ale blíže související přístupy k existenčnímu problému. (1) Za prvé, důkazy existence rovnováhy v konkurenční ekonomice byly shodně získány aplikací věty o pevném bodě Brouwerova či Kakutanioho typu nebo podobnými argumenty. Tyto přístupy, které nabývají v současnosti největší důležitosti, jsou náplní této kapitoly. (2) V posledním desetiletí byly vyvinuty výkonné kombinatorické algoritmy pro počáteční přibližné řešení rovnováhy v konkurenční ekonomice. Tyto algoritmy, které nabízejí konstruktivní odpověď na existenční otázku, jsou probrány v kapitole 21 knihy [3] Scarfem, který zastává hlavní roli v této oblasti výzkumu. (3) Nedávno byly teorie o indexu pevného bodu zobrazení a teorie stupně zobrazení použity pro zjištění existence rovnováhy v konkurenční ekonomice v Dierker (1972, 1974), Mityagin (1972), Smale (1974), Balasko (1975, 1978), Varian (1975a, 1975b), Nishimura (1978), Kalman a Lin (1978a, 1978b) a Kalman, Lin a Wiesmeth (1978). Dierker se v kapitole 17 knihy [3] dotýká některých těchto otázek. (4) Nakonec, v roce 1976 Smale navrhl diferenciální proces, jehož konvergence k ekonomické rovnováze nabízí alternativní konstruktivní řešení existenčního problému. [Smale (1976)]. Tento přístup je předmětem 8. kapitoly knihy [3].

2 Simultánní optimalizační přístup

Ačkoliv první důkaz existence rovnováhy konkurenční ekonomiky popsal Wald (1935, 1936a, 1936b), dva články od von Neumanna (1928, 1937) znamenaly důležitý krok pro rozvoj v padesátých letech. V prvním z těchto článků von Neumann zjistil dvojici rovnovážných strategií pro dvoučlennou hru s nulovým součtem, sedlový bod pro užitek obou hráčů. V druhém studoval problém existence rovnováhy při vyváženém růstu, převedeném v ekvivalentní problém sedlového bodu, což bylo přímým důsledkem jeho dřívějšího příspěví k teorii her. V řešení jeho nového problému sedlového bodu, von Neumann dokázal topologické lemma, které přeformulováno v Kakutaniovi (1941) ve větu o pevném bodě pro zobrazení se stalo silným nástrojem pro důkaz ekonomické rovnováhy.

Před uvedením Kakutuniho věty uvedeme příslušející pojmy.

Mějme dvě množiny S a T , *korespondence* φ z S do T přiřazující každému prvku x z S neprázdnou podmnožinu $\varphi(x)$ z T . Graf korespondence φ je podmnožina kartézského součinu $S \times T$ definovaná jako

$$G(\varphi) = \{(x, y) \in S \times T | y \in \varphi(x)\}.$$

Korespondence φ je *konvexní*, když T je reálný vektorový prostor a pro každé x z S je množina $\varphi(x)$ konvexní. Korespondence φ z podmnožiny S euklidovského prostoru do podmnožiny T euklidovského prostoru je *shora polospojité (u.h.c.)* v bodě x^0 z S , když existuje okolí x^0 na němž je φ omezená a pro každou posloupnost x^q v S konvergující k x^0 v S a každou posloupnost y^q konvergující k y^0 v T , a pro každé q , kde $y^q \in \varphi(x^q)$, pak platí $y^0 \in \varphi(x^0)$. Stručněji

$$[x^q \rightarrow x^0, y^q \rightarrow y^0, y^q \in \varphi(x^q)] \Rightarrow [y^0 \in \varphi(x^0)].$$

Tato definice horní polospojítosti φ v x^0 zřejmě implikuje, že $\varphi(x^0)$ je kompaktní. Horní polospojítost φ na S je definována jako horní polospojítost v každém bodě S . Poznamenejme, že kartézský součin u.h.c. korespondencí je u.h.c. Přesněji, uvažujme pro každé $i = 1, \dots, n$ korespondenci φ_i z S do T a pro každé x v S definujme $\varphi(x) = \times_{i=1}^n \varphi_i(x)$. Když každé φ_i je u.h.c. v x^0 , pak φ je zřejmě u.h.c. v x^0 .

Nakonec, je-li φ korespondence z množiny S zobrazené na sebe samu, prvek x^0 z S je *pevný bod* φ , když x^0 je prvkem $\varphi(x^0)$.

Věta 2.1 (Kakutani) *Je-li S neprázdná, kompaktní, konvexní podmnožina euklidovského prostoru a φ je u.h.c., konvexní zobrazení z S na S , pak φ má pevný bod.*

Aplikace tohoto výsledku byla použita v Nash (1950), jehož větu nyní uvedeme a dokážeme. To ukazuje vhodnost Kakutaniho věty pro důkazy existence ekonomické rovnováhy. Uvažujme hru n -hráčů. Hráč i vybere strategii z množiny S_i , která je neprázdná, kompaktní, konvexní podmnožina euklidovského prostoru. Ve skutečnosti S_i je množina pravděpodobností nad konečnou množinou čistých strategií i -tého hráče. N -tice strategií vybrána n hráči je prvek $s = (s_1, \dots, s_n)$ z kartézského součinu $S = \times_{i=1}^n S_i$. Výsledný užitek

pro i -tého hráče je reálné číslo $f_i(s)$. O užitkové funkci f_i se předpokládá spojitost na S a linearita v s_i . Tedy ve hře zkoumané Nashem je f_i lineární vzhledem k proměnným $(s_1, \dots, s_j, \dots, s_n)$. Formálně je hra definována n množinami S_1, \dots, S_n a n funkcemi f_1, \dots, f_n .

Označme N množinu $\{1, \dots, n\}$ všech hráčů a $N \setminus i$ množinu $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ všech hráčů kromě i -tého. N -prvkový vektor strategií s^* je Cournot–Nashova rovnováha, když pro každé $i \in N$, s_i^* maximalizuje $f_i(s_i, s_{N \setminus i}^*)$ na S_i , tedy když každý hráč vybere strategii maximalizující jeho užitek při daných strategiích ostatních hráčů.

Věta 2.2 (Nash) *Je-li pro každé $i \in N$, množina S_i neprázdná, kompaktní, konvexní podmnožina euklidovského prostoru, a f_i je spojitá reálná funkce na $S = \times_{j \in N} S_j$, lineární v i -té proměnné, pak hra $(s_i, f_i)_{i \in N}$ má rovnovážný bod.*

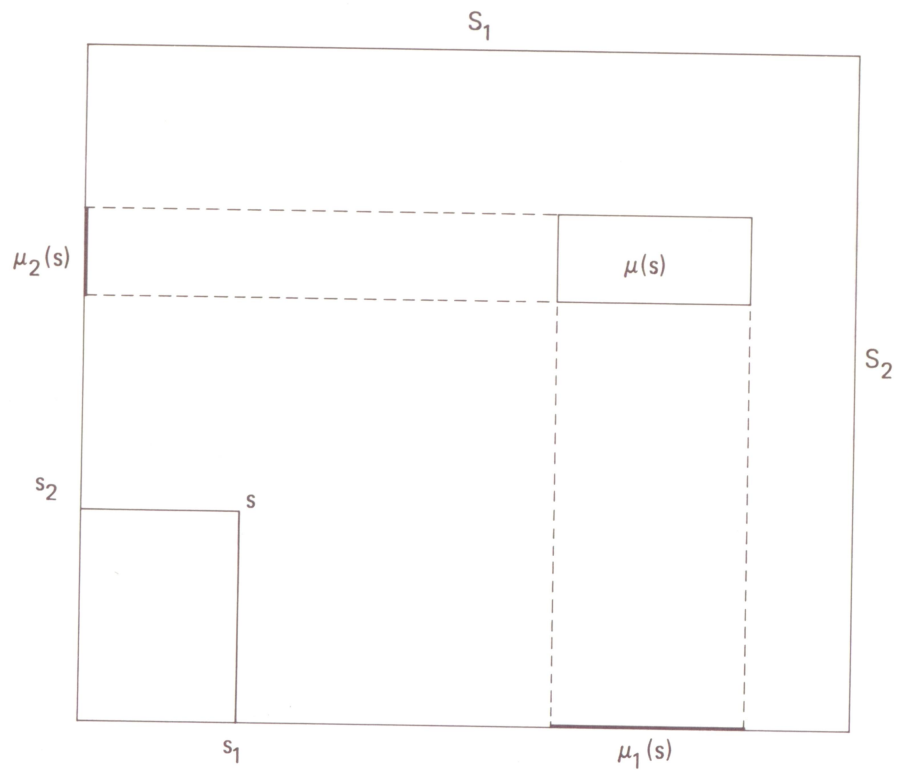
Důkaz. Pro každé i definujme zobrazení μ_i z S do S_i následovně. Vezměme prvek s z S , pak

$$\mu_i(s) = \{x \in S_i \mid f_i(x, s_{N \setminus i}) = \max_{y \in S_i} f_i(y, s_{N \setminus i})\}.$$

Tedy $\mu_i(s)$ je množina strategií i -tého hráče maximalizující jeho užitek při daných strategiích ostatních hráčů popsaných vektorem s . Tedy $\mu_i(s)$ je nezávislá na s_i . Bude výhodné použít μ_i v uvedeném tvaru. Poznamenejme, že maximalizační operace vystupující v definici μ_i může být provedena, jelikož f_i je spojitá a S_i je kompaktní, neprázdná. Zejména $\mu_i(s)$ je neprázdná. Zobrazení μ_i je také konvexní, neboť f_i je lineární v s_i a maximalizační operace je prováděna na konvexní množině. Nakonec ukážeme, že μ_i je u.h.c. Nechtě (s^q) je posloupnost v S konvergující k s^0 a (x^q) je posloupnost v S_i konvergující k x^0 a taková, že pro každé q je $x^q \in \mu_i(s^q)$. Uvažujme libovolný bod y v S_i . Pro každé q platí $f_i(x^q, s_{N \setminus i}^q) \geq f_i(y, s_{N \setminus i}^q)$. V limitě $f_i(x^0, s_{N \setminus i}^0) \geq f_i(y, s_{N \setminus i}^0)$. Jelikož tato nerovnice platí pro každé y v S_i , máme dokázáno $x^0 \in \mu_i(s^0)$.

Tedy definujme zobrazení μ z S do S jako

$$\mu(s) = \times_{i=1}^n \mu_i(s).$$



Obrázek 5.1: Ilustrace pojmů ze stránky 172

Bod s^* z S je Cournot–Nashovým rovnovážným bodem právě, když pro každé i , $s_i^* \in \mu_i(s^*)$; tedy když $s^* \in \mu(s^*)$ (obrázek 5.1).

Pojem Cournot–Nashova rovnovážného bodu je proto ekvivalentní s pevným bodem zobrazení μ . Existence takového pevného bodu je dokázána v aplikaci Kakutaniho věty, jejíž předpoklady splňujeme. ■

Předcházející představu rovnováhy a Nashovy věty můžeme zobecnit tak, aby byly aplikovatelné na různé ekonomické problémy. V úvodu zobecnění studujeme ekonomického účastníka, jehož prostředí je popsáno prvkem x z množiny X . Tento účastník musí vybrat jednu akci z množiny všech možných akcí Y . Když je jeho prostředí prvek x z X , pak je omezen na výběr neprázdné podmnožiny $\varphi(x)$ z Y . Když vybere akci y z $\varphi(x)$, jeho užitek je $f(x, y)$, kde f je reálná funkce definovaná na $X \times Y$. V daném prostředí x se účastník snaží vybrat z $\varphi(x)$ akci maximalizující jeho užitek. Označme množinu optimálních akcí

$$\mu(x) = \{y \in \varphi(x) \mid f(x, y) = \max_{z \in \varphi(x)} f(x, z)\}.$$

V důkazu existence rovnováhy jsme se snažili opřít o u.h.c. korespondenci μ . Abychom obdrželi vlastnost existence rovnováhy pro μ potřebujeme dva další pojmy spojitosti pro korespondence. Do jisté míry symetricky k definici u.h.c. řekněme, že korespondence φ z podmnožiny S euklidovského prostoru do podmnožiny T euklidovského prostoru je *zdola polospojité (l.h.c.) v bodě* x^0 z S , když pro každou posloupnost x^q z S konvergující k x^0 v S_i a každé y^0 z $\varphi(x^0)$ existuje posloupnost y^q v T konvergující k y^0 taková, že pro každé q je $y^q \in \varphi(x^q)$. Stručněji

$$[x^q \rightarrow x^0, y^0 \in \varphi(x^0)] \Rightarrow [\exists (y^q) | y^q \rightarrow y^0, y^q \in \varphi(x^q)].$$

L.h.c. na S je definována jako l.h.c. v každém bodě S . A *spojitost* korespondence v bodě nebo na množině je definována jako konjunkce u.h.c. a l.h.c. S pomocí těchto pojmů můžeme vyslovit následující lemma [Berge (1963, VI.3)].

Lemma 2.3 *Nechť X a Y jsou podmnožiny euklidovského prostoru. Jsou-li funkce f a korespondence φ spojitě, pak zobrazení μ je u.h.c.*

Důkaz. Uvažujme posloupnost (x^q) v X konvergující k x^0 v X a posloupnost y^q v Y konvergující k y^0 v Y tak, že pro každé q je $y^q \in \mu(x^q)$. Jelikož pro každé q je $y^q \in \varphi(x^q)$ a φ je u.h.c., pak $y^0 \in \varphi(x^0)$. Za druhé, nechť z je libovolný bod z $\varphi(x^0)$. Jelikož φ je l.h.c., pak posloupnost (z^q) v Y konvergující k z je taková, že pro každé q platí $z^q \in \varphi(x^q)$. Tedy pro každé q platí $f(x^q, y^q) \geq f(x^q, z^q)$. V limitě $f(x^0, y^0) \geq f(x^0, z^0)$. Jelikož nerovnost platí pro libovolné z v $\varphi(x^0)$, dokázali jsme, že $y^0 \in \mu(x^0)$. ■

Nyní studujme *společenský systém* složený z n účastníků. i -tý účastník si musí vybrat prvek z množiny A jeho předem možných akcí, o které se předpokládá neprázdnost, kompaktnost a že je konvexní podmnožinou euklidovského prostoru. Když ostatní účastníci mimo i -tého vyberou akce $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$, pak volba i -tého účastníka je omezena na neprázdnou podmnožinu A_i určenou předchozí $(n-1)$ -ticí. Formálně definujme korespondenci φ_i z $A = \times_{j=1}^n A_j$ do A_i tak, že spojíme prvek a z A s neprázdnou podmnožinou $\varphi_i(a)$ z A , na kterou je volba i -tého účastníka omezena. Množina $\varphi_i(a)$ je zřejmě nezávislá na i -té složce a , ale stejně jako dříve, shledáváme výhodnější definovat φ_i na A než na $\times_{j \in N \setminus i} A_j$. Zobrazení φ_i je dle předpokladů spojitě a konvexní.

Užitek i -tého účastníka vyplývající z volby n -tice a je reálné číslo $f_i(a)$, kde funkce f je spojitá na A a kvazikonkávní vzhledem k a_i . Mějme a v A , každý účastník, řekněme i -tý, uvažuje akce $a_{N \setminus i}$ dalších účastníků jako dané a vybírá vlastní akci y tak, aby maximalizoval svůj užitek $f_i(y, a_{N \setminus i})$ na množině $\varphi_i(a)$, na kterou je omezen. To znamená, že i -tý účastník vybírá prvky z

$$\mu_i(a) = \{x \in \varphi_i(a) \mid f_i(x, a_{N \setminus i}) = \max_{y \in \varphi_i(a)} f_i(y, a_{N \setminus i})\}.$$

Prvek a^* z A je *rovnovážný bod*, když pro každé $i \in N$ složka a_i^* maximalizuje $f_i(\cdot, a_{N \setminus i}^*)$ v $\varphi_i(a^*)$, tedy pro každé $i \in N$, $a_i^* \in \mu_i(a^*)$. Definujme zobrazení μ z A do A

$$\mu(a) = \times_{i \in N} \mu_i(a),$$

prvek a^* z A je rovnovážný bod právě když $a^* \in \mu(a^*)$; jinak řečeno, právě když a^* je pevný bod zobrazení μ . Použitím Kakutanioho věty obdržíme

Věta 2.4 *Je-li pro každé $i \in N$ množina A_i neprázdná, kompaktní, konvexní podmnožina z euklidovského prostoru, f_i je spojitá reálná funkce na $A = \times_{j \in N} A_j$, kvazikonkávní v i -té proměnné a φ_i je spojitá konvexní korespondence z A do A_i , pak společenský systém $(A_i, f_i, \varphi_i)_{i \in N}$ má rovnovážný bod.*

Důkaz. Když korespondence φ_i a funkce f_i splňují předpoklady Lemmatu 2.3, korespondence μ_i je u.h.c. Navíc pro každé a z A , množina $\mu_i(a)$ je konvexní, protože je to průsečík množin $\varphi_i(a)$ a $\{x \in A_i \mid f_i(x, a_{N \setminus i}) \geq \max_{y \in \varphi_i(a)} f_i(y, a_{N \setminus i})\}$, a obě jsou konvexní. Množina A je neprázdná, kompaktní a konvexní. Nakonec i korespondence μ je u.h.c., neboť je kartézským součinem u.h.c. korepondencí. Tedy korepondence μ z A do A má pevný bod. ■

Právě ukázaný obecný model společenského systému obsahuje jako speciální případ následující ekonomiku [Arrow a Debreu (1954)]. Účastníci ekonomiky vyrábějí, obchodují a spotřebovávají ℓ komodit. Každá z těchto komodit je zboží nebo služba se specifickými fyzikálními vlastnostmi s přístupem ve specifickém čase a na specifickém místě [a při specifické události, když neurčitá exogenní událost ovlivňuje ekonomiku; Arrow (1953); Debreu (1959)]. Různé druhy lidské práce jsou rovněž mezi komoditami.

Rozlišme dva druhy účastníků, jmenovitě spotřebitele a výrobce. *Spotřeba* i -tého spotřebitele ($i = 1, \dots, m$) je ℓ -tice množství různých komodit, které tento spotřebitel spotřebovává či vyrábí (druhé vyjadřuje lidskou práci). Vstupy jsou vyjádřeny kladným číslem a výstupy záporným. Tedy spotřeba je bod x_i v komoditním prostoru R^ℓ . Avšak spotřeba nemůže být vybrána libovolně v R^ℓ . Např. kombinace malých potravinových vstupů a velkých pracovních výstupů v určité periodě je vyloučena. Označme jako X_i neprázdnou podmnožinu R^ℓ , množinu možných spotřeb i -tého spotřebitele. Preference tohoto spotřebitele jsou popsány úplnou, reflexivní, tranzitivní, binární *preferenční relací* \preceq_i na jeho spotřební množině X_i a $x \preceq_i x'$ čteme jako *x' je přinejmenším tak žádoucí jako spotřeba x* . *Úplnost preferenční relace* znamená, že pro libovolnou dvojici (x, x') spotřeb i -tého spotřebitele platí $x \preceq_i x'$ a/nebo $x' \preceq_i x$. *Reflexivita* znamená, že pro libovolnou spotřebu x i -tého spotřebitele platí $x \preceq_i x$. *Tranzitivita* znamená, když x, y, z jsou tři spotřeby i -tého spotřebitele, pak $[x \preceq_i y$ a $y \preceq_i z]$ implikuje $[x \preceq_i z]$. *Relace ostré preference* $x \prec_i x'$ je definovaná jako $x \preceq_i x'$ a současně *neplatí* $x' \preceq_i x$.

Mějme cenový vektor p z R^ℓ prostoru cen všech komodit, čistá hodnota spotřeby x_i i -tého spotřebitele je skalární součin $p \cdot x_i$. Ten může být nanejvýš roven jeho bohatství w_i .

S tímto omezením i -tý spotřebitel usiluje o naplnění svých preferencí \preceq_i , tedy usiluje o výběr maximálního prvku relace \preceq_i z množiny $\{x \in X_i \mid p \cdot x \leq w_i\}$. K úplnému popisu charakteristik i -tého spotřebitele, a k vysvětlení, jak je jeho bohatství tvořeno, budeme specifikovat *počáteční obdaření komoditami* jako vektor e_i v prostoru komodit R^l a jeho *podíly ze zisku výrobců*, kde θ_{ij} je podíl ze zisku j -tého výrobce, který vlastní i -tý spotřebitel, kde $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$. Čísla θ_{ij} jsou kladná nebo nulová a pro každé j , $\sum_{i=1}^m \theta_{ij} = 1$. Tedy pokud zisk j -tého výrobce je r_j , bohatství i -tého spotřebitele je $w_i = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} r_j$.

Produkce j -tého výrobce ($j = 1, \dots, n$) je také ℓ -tice množství různých statků, které spotřebovává a které vyrábí, přičemž jeho vstupy značíme zápornými čísly a jeho výstupy kladnými. Tedy jeho výroba je bod y_j v prostoru komodit R^l a jeho technologické znalosti určují neprázdnou podmnožinu Y_j z R^l jeho možných výrob. Pro daný cenový vektor p v R^l j -tý výrobce usiluje o takový výběr y_j ze své množiny výrob Y_j , který maximalizuje jeho zisk $p \cdot y_j$.

Celkem ekonomika \mathcal{E} je popsána m -ticí $(X_i, \tilde{\sim}_i, e_i)$, mn podíly (θ_{ij}) a n -ticí (Y_j) , nebo stručněji

$$\mathcal{E} = ((X_i, \tilde{\sim}_i, e_i), (\theta_{ij}), (Y_j)).$$

Stav ekonomiky \mathcal{E} je m -tice (x_i) spotřeb různých spotřebitelů, n -tice (y_j) výrob různých výrobců a cenový vektor p . Stav $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ je *rovnovážný*, pokud:

- (a) pro každé i , x_i^* je nejlepší prvek pro $\tilde{\sim}_i$ z $\{x \in X_i \mid p^* \cdot x \leq p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*\}$;
- (b) pro každé j , y_j^* maximalizuje $p^* \cdot y_j$ v Y_j ;
- (c) $\sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \sum_{i=1}^m e_i = 0$.

Podmínka (a) říká, že každý spotřebitel si vybral z množiny svých spotřeb spotřebu, která nejlépe uspokojuje jeho preference pod jeho rozpočtovým omezením. Podmínka (b) říká, že každý výrobce maximalizoval svůj zisk ve své množině výrobních možností. Podmínka (c) říká, že pro každý statek převis poptávky nad nabídkou je nula. Rovnováha definovaná podmínkami (a), (b) a (c) je konkurenční ve významu, že každý subjekt se chová jako by neměl žádný vliv na ceny a považuje je za dané při výběru své činnosti.

Nicméně nejdříve budeme studovat speciální případ volně dostupné rovnováhy definované jako stav ekonomiky splňující (a) a (b) jako předtím, ale místo (c),

$$(d) \quad z^* = \sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \sum_{i=1}^m e_i \leq 0 \text{ s } p^* \geq 0 \text{ a } p^* \cdot z^* = 0.$$

Podmínka (d) je smysluplná pouze tehdy a jen tehdy pokud všechny statky mohou být volně využity. V tomto případě cenový vektor p^* musí zřejmě mít všechny své členy větší nebo rovny nule. Protože pokud statek má zápornou cenu, využitím tohoto statku výrobcí mohou neomezeně zvyšovat jejich celkový zisk a podmínka (b) bude porušena. Rovnováha také vyžaduje aby na trhu každého statku byla vyrovnána nabídka s poptávkou, nebo nabídka převyšovala poptávku při nulové ceně.

Abychom mohli zformulovat větu 2.5, musíme také formálně definovat *dosažitelný stav ekonomiky* podmínkami:

(a') pro každé i , x_i je z X_i ;

(b') pro každé j , y_j je z Y_j ;

$$(c') \quad \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m e_i \leq 0.$$

To říká, že spotřeba každého spotřebitele je v množině jeho možných spotřeb, výroba každého výrobce je v množině jeho možných výrob a pro každý statek poptávka je nejvýše vyrovnána s nabídkou. Říkáme, že *spotřeba x_i je dosažitelná pro i -tého spotřebitele*, pokud tu je dosažitelný stav ekonomiky přidělující mu x_i . *Dosažitelná spotřební množina \hat{X}_i i -tého spotřebitele* je množina jeho dosažitelných spotřeb.

Konečně pro dva vektory x a y z R^l , " $x < y$ " znamená " $x \leq y$ a $x \neq y$ ", zatímco " $x \ll y$ " znamená " $x^h < y^h$ pro každé $h = 1, \dots, l$ ". Uzavřený kladný kužel R_+^l z R^l je $\{x \in R^l \mid x \geq 0\}$.

Věta 2.5 *Ekonomika \mathcal{E} má volně dostupnou rovnováhu, pokud pro každé i ,*

X_i je kompaktní a konverzní,

je tu neuspokojená spotřeba v \hat{X}_i ,

množina $\{(x, x') \in X_i \times X_i \mid x \succsim_i x'\}$ je uzavřená,

pokud x a x' jsou dva body z X_i takové, že $x \prec_i x'$ a r je reálné číslo z $[0, 1]$, pak $x \prec_i (1 - r)x + rx'$,

existuje x_i^0 v X_i takové, že $x_i^0 \ll e_i$;

pro každé j , Y_j je kompaktní konvexní množina obsahující 0 .

Předpoklad nenasycenosti (neuspokojená spotřeba) znamená, že pro každé x v \hat{X}_i , je tu x' v X_i takové, že $x \prec_i x'$.

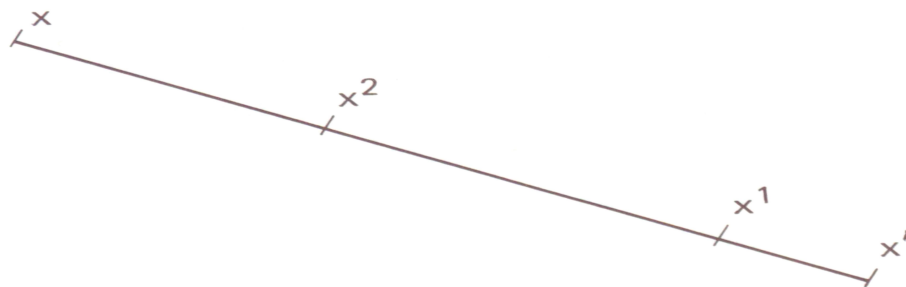
Uzavřenost preferencí implikuje [např. Debreu (1959)], že je tu spojitá užitková funkce u_i zastupující \succsim_i ve smyslu, že $x \succsim_i x'$ je ekvivalentní k $u_i(x) \leq u_i(x')$. Navíc předpoklad konvexity \succsim_i znamená, že u_i je kvazikonkávní. Abychom toto dokázali, stačí poznamenat, že pokud x a x' jsou dva body z X_i takové, že $x \succsim_i x'$ a r je reálné číslo z $[0, 1]$, pak $x \succsim_i (1 - r)x + rx'$. Vskutku pokud je x^1 v úsečce $[x, x']$ takové, že $x^1 \prec_i x$, pak ze spojitosti u_i bude existovat x^2 z $[x^1, x]$ takové, že $x^1 \prec_i x^2 \prec_i x$. Tedy $x^2 \prec_i x'$ a x^1 je mezi x^2 a x' a různé od x^2 . Z předpokladu konvexity preferencí učiněného v tvrzení teorému, dostaneme, $x^2 \prec_i x^1$, spor (obrázek 5.2).

Předtím než dokážeme větu 2.5, zformulujeme si dvě lemmata. Uvažujme neprázdnou kompaktní podmnožinu S z R^l a definujeme funkci $p \mapsto M(p)$ z R^l do R jako $M(p) = \max_{x \in S} p \cdot x$. Jako zvláštní případ Berge(1963, VI.3), máme

Lemma 2.6 *Pokud S je neprázdna kompaktní podmnožina z R^l , pak funkce M je spojitá.*

Důkaz.

- (a) M je dolní polospojité. Nechť p^0 je bod z R^l , x^0 je bod z S takový, že $p^0 \cdot x^0 = M(p^0)$, a ε je ostře kladné reálné číslo. Pro p dost blízke p^0 , dostaneme $p \cdot x^0 \geq p^0 \cdot x^0 - \varepsilon$, proto $M(p) \geq M(p^0) - \varepsilon$.



Obrázek 5.2: Ilustrace pojmů ze stránky 177

(b) M je horní polospojité. Znovu, necht' p^0 je bod z R^l , a ε je ostře kladné reálné číslo. Uvažujme libovolný bod x z S . Pak existuje otevřené okolí $U(x)$ bodu p^0 a otevřené okolí $V(x)$ bodu x takové, že $[p \in U(x) \text{ a } y \in V(x)]$ implikuje $[p \cdot y \leq p^0 \cdot x + \varepsilon]$. Otevřená okolí $V(x)$ pokrývají kompaktní množinu S . Proto existuje konečná posloupnost $V(x_1), \dots, V(x_k)$ z nich, která také pokrývá S . Necht' $U^0 = \bigcap_{i=1}^k U(x_i)$. U^0 je otevřené okolí p^0 , ze kterého vezmeme libovolný bod p . Necht' y je kterýkoliv bod z S . Existuje i z $\{1, \dots, k\}$ takové, že $y \in V(x_i)$. Poněvadž p je v $U(x_i)$, dostaneme $p \cdot y \leq p^0 \cdot x_i + \varepsilon$. Proto $p \cdot y \leq M(p^0) + \varepsilon$. Následně pro kterýkoliv $p \in U^0$, $M(p) \leq M(p^0) + \varepsilon$. ■

Necht' nyní p je cenový vektor v R^l a w reálné číslo a definujme *rozpočtovou množinu i -tého spotřebitele* spojenou s dvojicí (p, w) jako

$$\beta_i(p, w) = \{x \in X_i \mid p \cdot x \leq w\}.$$

Předpokládáme-li, že spotřební množina X_i je neprázdná a kompaktní, oborem příslušného β_i je množina $D = \{(p, w) \in R^{l+1} \mid w \geq \min p \cdot X_i\}$. Z lemmatu 2.6 plyne, že funkce $p \mapsto \min p \cdot X_i$ je spojitá. Důsledkem toho je množina D uzavřená. Následující lemma 2.7 dává podmínky, za kterých je příslušné β_i spojitě.

Lemma 2.7 *Pokud X_i je neprázdná, kompaktní a konvexní a $w^0 > \min p^0 \cdot X_i$, pak příslušné β_i je spojitě v (p^0, w^0) .*

Důkaz. Graf příslušného β_i je množina

$$\{(p, w, x) \in D \times X_i \mid p \cdot x \leq w\}$$

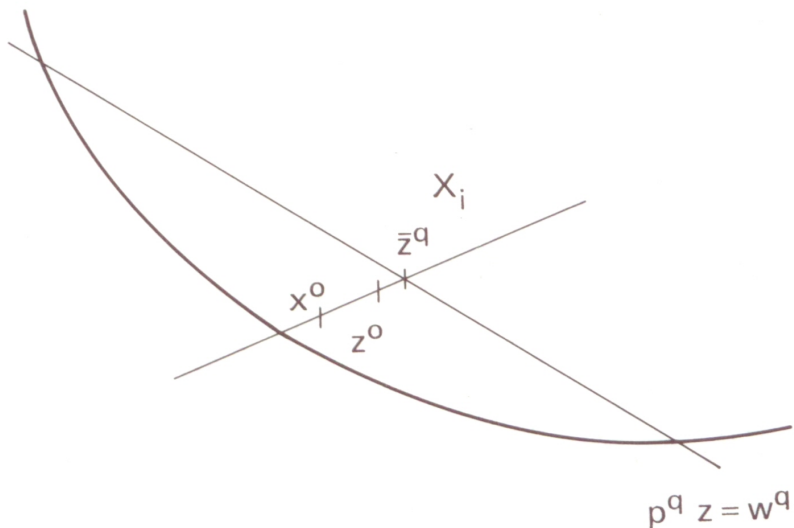
která je uzavřená. Proto β_i je horní polospojité.

Abychom ukázali, že β_i je dolní polospojité v (p^0, w^0) , předpokládáme posloupnost (p^q, w^q) v D konvergující k (p^0, w^0) a bod z^0 v $\beta_i(p^0)$.

(i) pokud $p^0 \cdot z^0 < w^0$, pak pro q dostatečně velké, $p^q \cdot z^0 < w^q$ a konstantní posloupnost $z^q = z^0$ splňuje podmínky, které se objevují v definici dolní polospojítosti.

- (ii) pokud $p^0 \cdot z^0 = w^0$, vybereme bod x^0 v X_i tak, že $p^0 \cdot x^0 < w^0$. Tedy $p^0 \cdot x^0 < p^0 \cdot z^0$ a pro q dostatečně velké, nadrovina $\{z \in R^l \mid p^q \cdot z = w^q\}$ protíná přímkou procházející body x^0 a z^0 v právě jednom bodě \bar{z}^q . Definujeme z^q jako \bar{z}^q pokud \bar{z}^q je mezi x^0 a z^0 (odtud v X_i), a jako z^0 pokud \bar{z}^q není mezi x^0 a z^0 (odtud možná ani nemusí být v X_i). Posloupnost z^q splňuje podmínky, které se objevují v definici dolní polospojivosti (obrázek 5.3).

■



Obrázek 5.3: Ilustrace pojmů ze stránky 180

Důkaz věty 2.5:

Poznamenejme nejprve, že ve volně dostupné rovnováze $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ nemůžeme mít $p^* = 0$, protože v tomto případě i -tý spotřebitel nebude mít rozpočtové omezení a následně si vybere spotřebu mimo \hat{X}_i t.j. nedosažitelnou spotřebu. Navíc nahrazení cenového vektoru p^* cenovým vektorem λp^* , kde λ je ostře kladné reálné číslo, nemění žádnou z rovnovážných podmínek.

Tedy můžeme omezit hledání rovnovážného cenového vektoru $p^* \geq 0$ na simplex

$$P = \{p \in R_+^l \mid \sum_{h=1}^l p^h = 1\}.$$

Pro daný cenový vektor p v P , j -tý výrobce maximalizuje svůj zisk ve své výrobní množině Y_j . Jeho maximální zisk závislý na p značíme

$$\pi_j(p) = \max p \cdot Y_j.$$

Podobně, pro daný vektor p v P i -tý spotřebitel maximalizuje svou užitkovou funkci u_i ve své rozpočtové množině

$$\beta'_i(p) = \{x \in X_i \mid p \cdot x \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} \pi_j(p)\}.$$

K převedení ekonomiky \mathcal{E} do tvaru obecného modelu společenského systému představeného dříve, zavedeme fiktivní tržní subjekt, jehož role je vybrat cenový vektor v P a jehož užitková funkce t je definovaná následovně. Pokud i -tý spotřebitel $i = 1, \dots, m$ si vybere spotřebu x_i a j -tý výrobce výrobu y_j , výsledný převis poptávky nad nabídkou je $\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m e_i$. Náš tržní subjekt vybere cenový vektor p v P tak, že udělá tento převis poptávky tak drahý, jak jen to bude možné. Tedy

$$t((x_i), (y_j), p) = p \cdot \left[\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m e_i \right].$$

Maximalizace této funkce podle p souhlasí s běžným pohledem na způsob, jakým ceny plní svou tržně-vyrovňovací úlohu tím, že dělají statky s kladným převisem poptávky dražší a statky se záporným převisem poptávky levnější, a tím tedy ceny zvyšují hodnotu převisu poptávky.

Společenský systém může být nyní plně specifikován. Subjekty jsou m spotřebitelů, n výrobců a trh. Jejich množiny akcí jsou pak (X_i) , (Y_j) a P . Užítková funkce \tilde{u}_i i -tého spotřebitele je definována jako

$$\tilde{u}_i((x_i), (y_j), p) = u_i(x_i).$$

Užitková funkce v_j j -tého výrobce je definována jako

$$v_j((x_i), (y_j), p) = p \cdot y_j.$$

A užítková funkce trhu je t .

Zbývá definovat pro každý subjekt množinu, na kterou je omezen, aby si vybral svou vlastní činnost, pokud činnosti ostatních subjektů jsou dané. Pro j -tého výrobce tato množina je Y_j a pro trh to je P . Tedy pro těchto $n + 1$ subjektů odpovídající korepondence φ objevující se v definici společenského systému jsou konvexní ("convex-valued", tj. $\varphi(x)$ je konvexní množina pro všechna x) a konstantní (odtud okamžitě spojitá). Pro i -tého spotřebitele klademe

$$w_i(p) = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} \pi_j(p),$$

a definujeme $\tilde{\beta}'_i$ vztahem:

$$\tilde{\beta}'_i((x_i), (y_j), p) = \beta'_i(p) = \{x \in X_i \mid p \cdot x \leq w_i(p)\}.$$

Poněvadž $0 \in Y_j$, pro každé p v P , $\pi_j(p) \geq 0$. Navíc nerovnost $x_i^0 \ll e_i$ implikuje, že pro každé p v P , $p \cdot x_i^0 < p \cdot e_i$. Tedy

$$\forall p \in P, \min p \cdot X_i < w_i(p) \quad (2.1).$$

Následně pro každé p z P množina $\beta'_i(p)$ je neprázdná. Je také konvexní. Abychom ukázali, že všechny podmínky teorému 3 jsou splněny, musíme nyní ověřit, že příslušná β'_i je spojitá. Z lemmatu 2.6 funkce π_j je spojitá pro každé j . Proto funkce w_i je spojitá. Spojitost příslušné β'_i nyní plyne z lemmatu 2.7 a z (2.1.).

Tedy z věty 2.4, má pak společenský systém, který jsme si zavedli, rovnováhu $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$. Pro každé j , y_j^* maximalizuje zisk v závislosti na p^* v Y_j , odtud $\pi_j(p^*) = p^* \cdot y_j^*$. A pro každé i , x_i^* maximalizuje funkci u_i v množině $\beta'_i(p^*) = \{x \in X_i \mid p^* \cdot x \leq w_i(p^*)\}$, kde $w_i(p^*) = p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$.

Odtud

$$\forall i, p^* \cdot x_i^* \leq p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*,$$

obdržíme sečtením přes i ,

$$\sum_{i=1}^m p^* \cdot x_i^* \leq \sum_{i=1}^m p^* \cdot e_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*.$$

Převrácením pořadí ve dvojitě sumě a připomenutím, že pro všechna j , $\sum_{i=1}^m \theta_{ij} = 1$ máme

$$\sum_{i=1}^m p^* \cdot x_i^* \leq \sum_{i=1}^m p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n p^* \cdot y_j^*$$

neboli

$$p^* \cdot \left[\sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{i=1}^m e_i - \sum_{j=1}^n y_j^* \right] \leq 0.$$

S označením z^* vektoru přebytku poptávky mezi hranatými závorkami, přepíšeme poslední nerovnost jako $p^* \cdot z^* \leq 0$. Nicméně p^* maximalizuje užitkovou funkci tržního zprostředkovatele v P . Proto pro každé $p \in P$ musí $p \cdot z^* \leq 0$. To znamená, že $z^* \leq 0$, neboť jestliže h -tá souřadnice z^* byla kladná, stačí abychom brali za p kladný jednotkový vektor v h -té souřadnici osy R^ℓ , abychom získali skalární součin $p \cdot z^*$.

Nerovnost $z^* \leq 0$ nám zajistí, že stav $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ je dosažitelný. Zřejmě pro každé i je x_i^* v dosažitelné spotřebě \hat{X}_i . Za předpokladu nenasytlosti existuje x'_i v X_i takové, že $x^* \prec_i x'_i$. To vylučuje možnost, že

$p^* \cdot x_i^* < w_i(p^*)$. Z tohoto důvodu můžeme nalézt bod na přímce $[x_i^*, x_i']$ různý od x_i^* , který je preferován před x_i^* , ale je dost blízko x_i^* , aby vyhověl celkové nerovnosti. Ale to by odporovalo skutečnosti, že x_i^* maximalizuje funkci u_i na množině $\beta_i'(p^*)$. Závěrem

$$\text{pro každé } i \text{ platí: } p^* \cdot x_i^* = p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \Theta_{ij} p^* \cdot y_j^*.$$

Sumováním přes i získáme $p^* \cdot z^* = 0$. Tato rovnost, spolu s nerovností $z^* \leq 0$ a vztahem $p^* \in P$ ukazuje, že předpoklad (d) v definici rovnováhy volné dostupnosti je splněn. ■

Nicméně věta 2.5 je nedostatečná v několika ohledech. Předpoklad volné dostupnosti by měl být explicitní. A předpoklad, že množiny X_i a Y_j jsou ohraničené, je obtížné ospravedlnit. Zřejmě ohraničené množiny produkce vylučují standardní případ technologií s konstantními výnosy z rozsahu výroby. Proto se pokusíme dokázat následující výsledek [Arrow a Debreu (1954) modifikovali dle návrhu Uzawy (1956) hypotézu, že každá výrobní množina Y_j je konvexní, slabší hypotézou, že jejich součet $Y = \sum_{j=1}^n Y_j$ je konvexní].

Věta 2.8 *Ekonomika \mathcal{E} je v rovnováze, jestliže pro každé i :*

*X_i je uzavřená, konvexní a má dolní hranici pro \leq ,
neexistuje uspokojená spotřeba v \hat{X}_i ,
množina $\{(x, x') \in X_i \times X_i | x \tilde{\succ}_i x'\}$ je uzavřená,
jestliže x a x' jsou dva body z X_i takové, že $x \prec_i x'$ a r je reálné číslo z intervalu $[0, 1]$,
pak $x \prec_i (1 - r)x + rx'$,
existuje x_i^0 je v X_i takové, že $x_i^0 \ll e_i$,*

pro každé j :

$0 \in Y_j$,
 Y je uzavřená a konvexní,
 $Y \cap (-Y) = \{0\}$,
 $Y \supset (-R_+^\ell)$.

Dolní omezení předpokladu ve spotřebě je odvozeno od toho, že množství, které spotřebuje jednotlivec je ohraničeno zespodu 0, zatímco množství, které vyrobí nějaká továrna během určité doby je zřejmě shora ohraničeno absolutní hodnotou.

Konvexita celkové produkce Y vyjadřuje myšlenku, že celková technologie hospodářství odpovídá zákonům nerostoucích výnosů z rozsahu. Nezvratný předpoklad $Y \cap (-Y) = \{0\}$ znamená, že jestliže celková výroba y různá od 0 je možná, pak výroba $-y$ (ve které všem vstupům jsou přiřazeny výstupy a naopak) není možná. Poslední předpoklad výlučně vyžaduje volnou dostupnost všeho zboží.

Důkaz věty 2.8

Důkaz se skládá z konstrukce hospodářství $\tilde{\mathcal{E}}$ vyhovující předpokladům věty 2.5 takové, že rovnováha volné dostupnosti $\tilde{\mathcal{E}}$ dává rovnováhu \mathcal{E} .

V prvním kroku této konstrukce dosadíme v definici \mathcal{E} místo Y_j uzavěr \bar{Y}_j z jeho konvexního obalu \hat{Y}_j , tj.

$$\sum_{j=1}^n \bar{Y}_j = Y.$$

Důkaz této rovnosti spočívá na dvou skutečnostech:

- (1) Součet konvexního obalu konečného souboru množin je roven konvexnímu obalu jejich součtu. Protože předpokládáme, že $\sum_{j=1}^n Y_j = Y$ je konvexní, musí $\sum_{j=1}^n \hat{Y}_j = Y$.
- (2) Součet uzavěrů konečného souboru množin je obsažen v uzavěru jeho součtu. Proto $\sum_{j=1}^n \bar{Y}_j \subseteq \bar{Y}$. Protože Y je dle předpokladu uzavřená, musí $\sum_{j=1}^n \bar{Y}_j \subseteq Y$.

Ale $Y_j \subseteq \bar{Y}_j$ pro všechna j znamená $Y \subseteq \sum_{j=1}^n \bar{Y}_j$, což společně s $\sum_{j=1}^n \bar{Y}_j \subseteq Y$ dává výsledek.

Nechť pak $\bar{\mathcal{E}}$ je hospodářství získané substitucí \bar{Y}_j za Y_j pro všechna j a necht' $((x_i), (y_j), p)$ je dosažitelný stav $\bar{\mathcal{E}}$. Máme $\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^m e_i \leq \sum_{j=1}^n y_j$. Navíc je každá množina X_i ohraničena zespodu vektorem \mathcal{X}_i . Proto $\sum_{j=1}^n y_j \geq \sum_{i=1}^m \mathcal{X}_i - \sum_{i=1}^m e_i$. To vyplývá ze základního odhadu v Lemmatu 2.3, Appendix I z [28], že pro všechna j je množina \hat{Y}_j dosažitelných výrob j -tého výrobce v hospodářství $\bar{\mathcal{E}}$ ohraničena. Nyní nerovnost $\sum_{i=1}^m x_i \leq \sum_{i=1}^m e_i + \sum_{j=1}^n y_j$ ukazuje, že pro dosažitelný stav hospodářství $\bar{\mathcal{E}}$, je $\sum_{i=1}^m x_i$ ohraničena shora. Protože každé x_i v této sumě je ohraničeno zespod, je každé x_i opravdu ohraničené. Konečně, protože dvě hospodářství \mathcal{E} a $\bar{\mathcal{E}}$ mají stejnou celkovou produkci Y , je x_i dosažitelná spotřeba h -tého spotřebitele v \mathcal{E} tehdy a jen tehdy, jestliže je to také dosažitelná spotřeba i -tého spotřebitele v $\bar{\mathcal{E}}$. Závěrem, pro všechna i je množina \hat{X}_i dosažitelných spotřeb i -tého spotřebitele (v \mathcal{E} nebo ekvivalentně v $\bar{\mathcal{E}}$) ohraničena.

K úplné konstrukci hospodářství $\bar{\mathcal{E}}$ zvolíme kompaktní, konvexní množinu K z R^ℓ obsahující ve svém vnitřku všechnu dosažitelnou spotřebu \hat{X}_i a všechnu dosažitelnou produkci \hat{Y}_j a definujeme

$$\bar{X}_i = X_i \cap K \quad \text{a} \quad \bar{Y}_j = \bar{Y}_j \cap K.$$

Hospodářství $\check{\mathcal{E}}$ je získáno z $\bar{\mathcal{E}}$ záměnou všech X_i za \check{X}_i a všech \bar{Y}_j za \check{Y}_j . Všimněme si, že stav $((x_i), (y_j), p)$ je dosažitelný pro $\bar{\mathcal{E}}$ tehdy a jen tehdy, jestliže je dosažitelný pro $\check{\mathcal{E}}$. Proto množina dosažitelné spotřeby i -tého spotřebitele v $\check{\mathcal{E}}$ je opět \check{X}_i . Všimněme si rovněž, že podle nerovnosti $\sum_{i=1}^m x_i^0 \ll \sum_{i=1}^m e_i$, je stav ve kterém i -tý spotřebitel spotřebovává $x_i^0 (i = 1, \dots, m)$ a j -tý výrobce vyrábí $0 (j = 1, \dots, n)$ dosažitelný v \mathcal{E} , a tudíž i v $\check{\mathcal{E}}$. V důsledku toho pro všechna i je $x_i^0 \in \check{X}_i$ a pro všechna j je $0 \in \check{Y}_j$.

Nyní ověříme, zda hospodářství $\check{\mathcal{E}}$ vyhovuje všem předpokladům věty 2.5. Ve skutečnosti existuje pouze jeden předpoklad, pro který to není hned zřejmé, a to je předpoklad nenasytnosti. Uvažujme proto spotřebu x z X_i . Předpokladem nenasytnosti věty 2.8 je spotřeba x' v X_i taková, že $x \prec_i x'$. Protože x je ve vnitřku K , můžeme vzít přímkou $[x, x']$ bodu x'' různého od x , ale dostatečně blízko k x z K . Díky konvexnosti X_i je bod x'' v X_i a proto tedy i v \check{X}_i . Díky konvexitě předpokladu preferencí věty 2.8 je $x \prec_i x''$. V souhrnu: je dána nějaká spotřeba v \check{X}_i , zde je striktně preferována spotřeba v \check{X}_i .

Tudíž jsme stanovili, že hospodářství $\check{\mathcal{E}}$ má rovnováhu volné dostupnosti $((x_i^*), (y_j), p^*)$. Nechť

$$z = \sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m e_i$$

je skupinový přebytek poptávky. Podle definice rovnováhy volné dostupnosti je

$$z \leq 0 \text{ a } p^* \cdot z = 0.$$

Protože $y_j \in \bar{Y}_j$ pro všechna j , vektor $y = \sum_{j=1}^n y_j$ náleží do Y . Navíc pro λ z intervalu $[0, 1]$ vektor $(1/\lambda)z$ náleží do Y , protože $Y \supset (-R_+^l)$. Díky konvexitě Y je vektor $(1 - \lambda)y + \lambda((1/\lambda)z)$ také v Y . λ inklinuje k 0 a připomenutím, že Y je uzavřená, získáme $y + z \in Y$. Nyní definujme $y^* = y + z$ a zvolme v každém Y_j vektor y_j^* takový, že $\sum_{j=1}^n y_j^* = y^* = y + z$.

Rovnost

$$\sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \sum_{i=1}^m e_i = 0$$

předpokládá, že stav $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ je dosažitelný pro hospodářství \mathcal{E} a odtud i pro hospodářství $\bar{\mathcal{E}}$. Zřejmě pro všechna i náleží x_i^* k dosažitelné spotřebě \hat{X}_i , a pro všechna j náleží y_j^* k dosažitelné produkci \hat{Y}_j . Budeme dokazovat, že stav $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ je opravdu rovnováhou hospodářství \mathcal{E} založeném na (i) a (ii).

(i) y_j^* maximalizuje zisk poměrně k p^* v Y_j pro všechna j a $p^* \cdot y_j^* = p^* \cdot y_j$.

Protože $p^* z = 0$ je $p^* \cdot \sum_{j=1}^n y_j^* = p^* \cdot \sum_{j=1}^n y_j$. Avšak pro všechna j jsou y_j a y_j^* v \check{Y}_j a y_j maximalizuje zisk poměrně k p^* v \check{Y}_j . Proto $\sum_{j=1}^n y_j$ maximalizuje zisk poměrně k p^* v $\sum_{j=1}^n \check{Y}_j$. Tak dělá $\sum_{j=1}^n y_j^*$. Zřejmě pro všechna j maximalizuje y_j^* zisk poměrně k p^* v \check{Y}_j . To znamená, že $p^* \cdot y_j^* = p^* \cdot y_j$ pro všechna j .

Zbývá dokázat, že y_j^* maximalizuje zisk poměrně k p^* v Y_j pro všechna j . Předpokládejme opačně, že existuje y'_j v Y_j takové, že $p^* \cdot y'_j > p^* \cdot y_j^*$. Jak jsme zaznamenali, y_j^* náleží do \hat{Y}_j , která je obsažena ve vnitřku K . Proto můžeme nalézt na přímce $[y_j^*, y'_j]$ bod y''_j různý od y_j^* , ale dostatečně blízko k y_j^* v K . Protože bod y''_j náleží také do \bar{Y}_j , náleží i do \check{Y}_j . Ale $p^* \cdot y''_j > p^* \cdot y_j^*$, což odporuje faktu, že y_j^* maximalizuje zisk poměrně k p^* v \check{Y}_j .

(ii) Pro všechna i je x_i^* nejlepší prvek \tilde{x}_i i v $\{x \in X_i | p^* \cdot x \leq p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \Theta_{ij} p^* \cdot y_j^*\}$.

Podle definice rovnováhy volné dostupnosti pro hospodářství $\bar{\mathcal{E}}$ je x_i^* nejlepší prvek \tilde{x}_i v

$$\check{\beta}'_i(p^*) = \left\{ x \in \check{X}_i | p^* \cdot x \leq p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \Theta_{ij} \cdot p^* \cdot y_j \right\}.$$

A jak jsme ukázali $p^* \cdot y_j^* = p^* \cdot y_j$ pro všechna j . Nyní předpokládejme, že existuje x'_i v X_i takové, že $p^* \cdot x'_i \leq p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \Theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$ a $x'_i \succ_i x_i^*$. Protože x_i^* je ve vnitřku K můžeme nalézt na přímce $[x_i^*, x'_i]$ bod x''_i různý od x_i^* ale dostatečně blízko x_i^* v K . Bod x''_i je zřejmě také v X_i , a proto i v \check{X}_i . Navíc $x''_i \succ_i x_i^*$ a $p^* \cdot x''_i \leq p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \Theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$, což je ve sporu s optimalitou x_i^* v $\check{\beta}'_i(p^*)$.

□

V minulých několika letech poskytovaly předcházející tři věty modely, ve kterých předpoklady tvořené preferencemi byly významně oslabeny. Schmeidler (1969) zavedl existenci konkurenční rovnováhy pro hospodářství s nepřetržitými činiteli bez předpokládaných preferencí. Pro hospodářství s konečnou množinou činitelů, Sonnenschein (1971) obdržel existenci bez přechodných předpokládaných preferencí a Mas-Colell (1974) dokázal větu o existenci, která se obejde bez úplnosti tak dobře jako bez transitivity. Nyní je naším záměrem představit hlavní myšlenku Mas-Colellovy práce a jeho pokračování u Galeeho a Mas-Colella (1975), Shafera and Sonnenscheina (1975a, 1975b) a jiných autorů, zaměřením na zobecnění věty 3 zásluhou Shafera and Sonnenscheina.

V souladu se symbolikou věty 2.4 zavedeme P_i z A do A_i definováním

$$P_i(a) = \{x \in A_i \mid f_i(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) > f_i(a)\}.$$

Pro všechna a z A tato korespondence specifikuje množinu takových akcí, že i -tý agent ostře preferuje a_i , pokud ostatní agenti mají zadány akce $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$. S pomocí tohoto nového pojmu koncepce můžeme definovat *rovnováhu sociálního systému* jako prvek a^* z A takový, že pro všechna $i \in N$, $a_i^* \in \phi(a^*)$ a $P_i(a^*) \cap \phi_i(a^*) = \emptyset$.

Za předpokladů věty 2.4, má P_i otevřený graf (díky spojitosti f_i) a pro všechna $a \in A$, je množina $P_i(a)$ konvexní (díky kvazikonkávnosti f_i v jeho i -té proměnné). Dle definice P_i musí $a_i \notin P_i(a)$ nebo ekvivalentně $a_i \notin \text{co}P_i(a)$ pro všechna $a \in A$, kde co znamená konvexní obal.

Alternativní přístup sestává se stanovení jednoduchého konceptu korespondence P_i z A do A_i a z předpokladu, že P_i má otevřený graf pro všechna $a \in A$, $a_i \notin \text{co}P_i(a)$. Věta 6 tvrdí, že tyto předpoklady, což jsou značně oslabeny spojitost f_i a kvazikonkávnost v jeho i -té proměnné, postačují k zajištění existence sociální rovnováhy.

Věta 2.9 *Jestliže množina A_i je neprázdná, kompaktní a konvexní podmnožina euklidovského prostoru pro všechna $i \in N$, existuje otevřený graf korespondence z A do A_i takový, že $a_i \notin \text{co}P_i(a)$ pro všechna $a \in A$ a ϕ_i je souvislá, konvexní korespondence z A do A_i , pak sociální systém $(A_i, P_i, \phi_i)_{i \in N}$ má sociální rovnováhu.*

Důkaz. [Shafer-Sonnenschein (1975 b)] $G(P_i)$, graf P_i je otevřená podmnožina $A \times A_i$. Tudíž existuje souvislá reálná funkce g_i na $A \times A_i$, která má nulové hodnoty na uzavřené množině $A \times A_i \setminus G(P_i)$ a kladné hodnoty na $G(P_i)$. Například je možné vzít $g_i(a, x)$ jako vzdálenost z (a, x) do $A \times A \setminus G(P_i)$.

Nyní definujeme korespondenci μ_i z A do A_i jako

$$\mu_i(a) = \left\{ x \in \phi_i(a) \mid g_i(a, x) = \max_{y \in \phi_i(a)} g_i(a, y) \right\},$$

tj. $\mu_i(a)$ je množina maximalizujících prvků $g_i(a, \cdot)$ v $\phi_i(a)$. Podle lemmatu 2.3 je korespondence $\mu_i(a)$ shora polospojité. V důsledku toho korespondence $a \mapsto \text{co } \mu_i(a)$ z A do A_i je také shora polospojité [Nikaido (1968, Th. 4.8) nebo Hildenbrand (1974, p. 26)]. Toto ihned předpokládá, že korespondence z A do A definována

$$\mu(a) = \times_{i \in N} \text{co } \mu_i(a)$$

je shora polospojité. Proto podle Kakutanioho věty má korespondence μ pevný bod a^* .

Pro všechna $i \in N$ je $a^* \in \text{co } \mu_i(a^*)$. Nicméně $\mu_i(a^*) \subset \phi_i(a^*)$, které je konvexní. Proto $a_i^* \in \phi_i(a^*)$. A tak zbývá dokázat, že $P_i(a^*) \cap \phi_i(a^*) = \emptyset$. Předpokládejme naopak, že je zde bod y ležící v $P_i(a^*) \cap \phi_i(a^*)$. Dvojice (a^*, y) patří do $G(P_i)$. V důsledku toho $g_i(a^*, y) > 0$, což znamená, že $g_i(a^*, x) > 0$ pro každé x in $\mu_i(a^*)$. Proto $\mu_i(a^*) \subset P_i(a^*)$. Ale to znamená, že $a_i^* \in \text{co } P_i(a^*)$, spor. ■

3 Přebytek poptávky

V předešlé části jsme studovali problém existence konkurenční rovnováhy pro transformující se hospodářství včetně problému existence rovnováhy ve společenském systému složeného z konečného počtu činitelů, a zároveň jsme hledali jejich maximální užitkové funkce, nebo-li více obecně, snažili jsme se optimalizovat jejich preference. V této části budeme zkoumat druhý možný přístup, který se soustředí na přebytek poptávky korespondence hospodářství.

Nechť je \mathcal{E} ekonomika stejná jako ve větě 2.5 a uvažme jednoduchý cenový vektor p z P . Nechť j -tý výrobce maximalizuje svůj zisk vzhledem k p ve své výrobě Y_j . Označme množinu jeho zisku získaného maximalizací výroby jako $\eta_j(p)$ a jeho maximální zisk jako $\pi_j(p)$. i -tý spotřebitel maximalizuje svoji užitekovou funkci u_i na množině svého rozpočtu

$$\beta'_i(p) = \left\{ x \in X \mid p \cdot x \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \Theta_{ij} \pi_j(p) \right\}.$$

Označme množinu maximální užitečnosti spotřeby pod donucením jako $\xi'_i(p)$. Tak i -tý spotřebitel zvolí libovolný prvek x_i v $\xi'_i(p)$ a j -tý výrobce zvolí libovolný prvek y_j v $\eta_j(p)$. Sdružený přebytek poptávky $\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{i=1}^m e_i$ je prvek množiny

$$\zeta(p) = \sum_{i=1}^m \xi'_i(p) - \sum_{j=1}^n \eta_j(p) - \sum_{i=1}^m e_i.$$

Korespondence ζ z P do R^ℓ tak definovaná se nazývá korespondence přebytku poptávky hospodářství \mathcal{E} . A p^* dává rovnováhu volné dostupnosti hospodářství \mathcal{E} tehdy a jen tehdy, jestliže existuje vektor z^* z $\zeta(p^*)$ takový, že $z^* \leq 0$ a $p^* \cdot z^* = 0$. Opravdu, jak jsme nyní ukázali, p^* dává rovnováhu volné dostupnosti hospodářství \mathcal{E} tehdy a jen tehdy, jestliže $\zeta(p^*)$ protíná $-R_+^\ell$. Vskutku, jestliže $\zeta(p^*) \cap (-R_+^\ell) \neq \emptyset$, vezmeme bod z^* z tohoto průniku. Protože $z^* \in \zeta(p^*)$ pro všechna i , existuje x_i^* v $\xi'_i(p^*)$ a pro všechna j existuje y_j^* v $\eta_j(p^*)$ takové, že

$$z^* = \sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{j=1}^n y_j^* - \sum_{i=1}^m e_i.$$

A protože $z^* \leq 0$ stav $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ je dosažitelný. V důsledku toho pro všechna i je $x_i^* \in \hat{X}_i$. Ale neexistuje nasycená spotřeba v \hat{X}_i a to znamená, jak jsme viděli na konci důkazu věty 2.5, že pro všechna i

$$p^* \cdot x^* = p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \Theta_{ij} p^* \cdot y_j^*.$$

Sumací přes i získáme $p^* z^* = 0$.

Nyní se podíváme na vlastnosti korespondence ζ . Je dáno p z P pro všechna i , množina $\xi'_i(p)$ je konvexní (protože je to množina maximalizátorů kvazikonkávních užitekových funkcí u_i na konvexní množině $\beta'_i(p)$), a pro všechna j je množina $\eta_j(p)$ konvexní (protože je to množina maximalizátorů lineární ziskové funkce $y \mapsto p \cdot y$ na konvexní množině Y_j). Proto pro všechna $p \in P$ je množina $\zeta(p)$ jako suma konvexních množin také konvexní. Podle lemmatu 2.7 je pro všechna i korespondence β'_i spojitá, proto je podle lemmatu 2.3 korespondence ξ'_i shora polospojité. Také platí, že podle lemmatu 2.3 je pro všechna j korespondence η_j shora polospojité. Proto je korespondence ζ jako suma horních polospojitéch korespondencí také shora polospojité. Konečně, pro všechna $p \in P$, pro všechna i a pro všechna x_i z $\xi'_i(p)$, pro všechna j a pro všechna y_j z $\eta_j(p)$ dostaneme

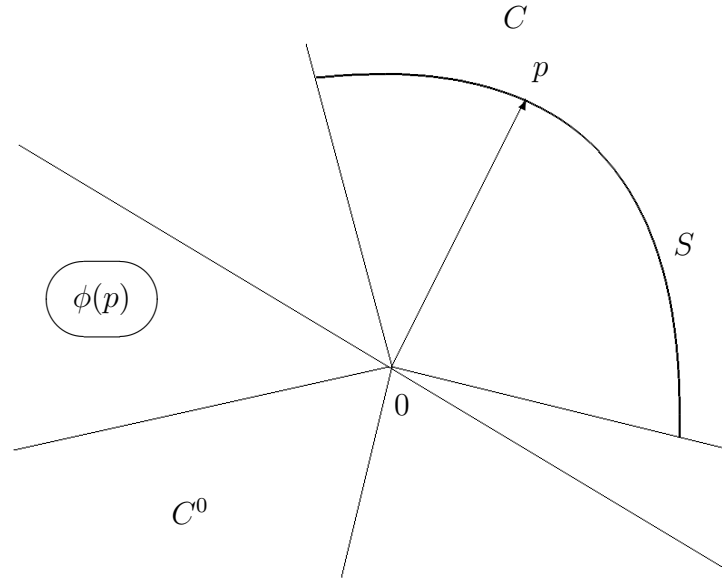
$$p \cdot x_i \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^n \Theta_{ij} p \cdot y_j.$$

Odtud sumací přes i pro všechna p z P a všechna z z $\zeta(p)$ dostaneme $P \cdot z \leq 0$. Stručněji pro všechna p z P máme $p \cdot \zeta(p) \leq 0$. Shrňme: korespondence ζ je shora polospojité a pro všechna p z P je množina $\zeta(p)$ kompaktní, konvexní a splňuje nerovnost

$$p \cdot \zeta(p) \leq 0. \quad (3.1)$$

Existence cenového vektoru p^* , pro který $\zeta(p)$ protíná $-R^{\ell}_+$, bude odvozena z následující poučky [Gale (1955), Nikaido (1956), a Debreu (1956)]. V jejím tvrzení označíme poláru kužele C s vrcholem $0 \in R^{\ell}$ výrazem $C^0 = \{y \in R^{\ell} \mid y \cdot x \leq 0 \text{ pro všechna } x \in C\}$. Řekneme, že kužel s vrcholem 0 je degenerovaný když je prázdný nebo jestliže obsahuje pouze počátek, a že uzavřený konvexní kužel s vrcholem 0 je *pointed*, jestliže neobsahuje žádnou přímku. S označuje jednotkovou kouli $\{x \in R^{\ell} \mid \|x\| = 1\}$, tj. množinu bodů R^{ℓ} s Euklidovou normou. (Obrázek 5.4).

Věta 3.1 *Jestliže C je nedegenerovaný pointed uzavřený konvexní kužel s vrcholem 0 v R^{ℓ} a ϕ je konvexní shora polospojité korespondence z $C \cap S$ do R^{ℓ} taková, že pro každé p z $C \cap S$ máme $p \cdot \phi(p) \leq 0$, pak existuje $p^* \in C \cap S$ takové, že $\phi(p^*) \cap C^0 \neq \emptyset$.*



Obrázek 5.4: Ilustrace pojmů ze strany 192

Důkaz. Poznamenejme nejprve, že vnitřek C^0 není prázdný. Jinak by byl konvexní kužel C^0 obsažen v nadrovině H . V důsledku toho přímka D kolmá k H v 0 by byla obsažena v C^{00} , což je pól C^0 . Nicméně $C^{00} = C$ [Rockafellar (1970, kapitola 14)]. Takto by byla D obsažena v C , což je spor s předpokladem, že C je pointed. Vyberme vektor q ve vnitřku C^0 a definujeme

$$\Pi = \{p \in C \mid q \cdot p = -1\}.$$

Nechť U je okolí q obsažené v C^0 a nechtě p je libovolný bod C různý od 0 . Pro všechna $y \in U$ platí $y \cdot p \leq 0$. To implikuje $q \cdot p < 0$. Proto každý bod $p \in C$ různý od 0 má jedinou projekci $p / -q \cdot p$ z 0 do Π . Množina Π je zřejmě uzavřená a konvexní. Je také ohraničená. Abychom to viděli, předpokládejme opak, tj.

že je tam posloupnost $p_n \in \Pi$ taková, že $\|p_n\| \rightarrow +\infty$. Posloupnost $p_n/\|p_n\|$ náleží do kompaktní množiny S . Proto můžeme vybrat podposloupnost p'_n z p_n takovou, že $p'_n/\|p'_n\| \rightarrow p^0$. Nicméně pro všechna n platí

$$q \cdot \frac{p'_n}{\|p'_n\|} = -\frac{1}{\|p'_n\|}.$$

V limitě $q \cdot p^0 = 0$, což odporuje skutečnosti, že pro p^0 v C různé od 0 platí $q \cdot p^0 < 0$.

Projekce $p \mapsto p/\|p\|$ z Π do $C \cap S$ je homeomorfismus. Proto korespondence ϕ z Π do R^ℓ definovaná $\hat{\phi}(p) = \phi(p/\|p\|)$ je shora polospojité. Je také konvexní a pro všechna p v Π platí $p \cdot \hat{\phi}(p) \leq 0$. Protože Π je kompaktní, horní polospojitosť korespondence $\hat{\phi}$ na Π implikuje existenci ohraničené podmnožiny $Z \subset R^\ell$ takové, že pro každé p v Π je $\hat{\phi}(p)$ obsaženo v Z . Množina Z je zřejmě kompaktní a konvexní. Vezměme libovolný bod z ze Z a necht' $\mu(z)$ je množina bodů, ve kterých se realizuje maximum funkce $p \mapsto p \cdot z$ z Π do R , tj.

$$\mu(z) = \{p \in \Pi \mid p \cdot z = \max \Pi \cdot z\}.$$

Podle lemmatu 2.3 je korespondence μ shora polospojité. Mimoto pro všechna z ze Z je množina $\mu(z)$ konvexní, protože je to množina bodů, ve kterých se realizuje maximum lineární funkce na konvexní množině.

Uvažujme nyní korespondenci ψ z $\Pi \times Z$ do sebe definovanou

$$\psi(p, z) = \mu(z) \times \hat{\phi}(p).$$

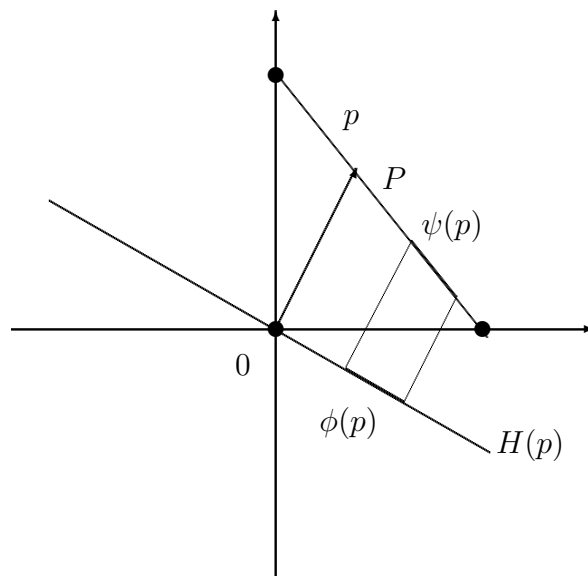
Množina $\Pi \times Z$ je neprázdná, kompaktní a konvexní. Korespondence ψ je shora polospojité a konvexní. Proto podle Kakutaniho teoremu má pevný bod (p^*, z^*) . Tedy

$$p^* \in \mu(z^*) \text{ a } z^* \in \hat{\phi}(p^*).$$

První z těchto vztahů implikuje že pro všechna p v Π platí $p \cdot z^* \leq p^* \cdot z^*$. Druhý pak implikuje, že $p^* \cdot z^* \leq 0$. Proto pro všechna p z Π (a v důsledku toho pro všechna p z C) platí $p \cdot z^* \leq 0$. Odtud $z^* \in C^0$. ■

Protože pólara R_+^ℓ je $-R_+^\ell$, existence cenového vektoru p^* z P takového že $\zeta(p^*) \cap (-R_+^\ell) \neq \emptyset$ ihned plyne z výsledku, který jsme právě dokázali. Věta 3.1 zavádí existenci cenového vektoru dávajícího záporný nebo

nulový přebytek poptávky jako přímý důsledek hluboké matematické úvahy, Kakutaniho teorému pevného bodu. Lze se otázat, zda předcházející důkaz neužívá zbytečně mocné nástroje. Tato otázka byla záporně zodpovězena v Uzawa (1962a), který ukázal, že věta 3.1 přímo implikuje Kakutaniho větu o pevném bodu. Necht' ψ je shora polospojité konvexní korespondence z P do sebe. Ukážeme, že ψ má pevný bod.



Obrázek 5.5: Vysvětlení pojmů ze stránky 196

Pro všechna p z P definujeme $H(p)$ jako nadrovinu procházející nulou, ortogonální k p a necht' $\phi(p)$ je ortogonální projekce $\psi(p)$ do $H(p)$. Korespondence ϕ je shora polospojité a pro každé p z P je množina $\phi(p)$ konvexní splňující $p \cdot \phi(p) = 0$. Dle Věty 3.1 existuje p^* z P takové, že $\phi(p^*) \cap (-R_+^\ell) \neq \emptyset$. Necht' y je bod z tohoto průniku, a necht' x je bod z P projekce na y rovnoběžné s p^* . Potom $x - y$ je rovnoběžný s p^* a y

je kolmý na p^* , tj. $y(x - y) = 0$. Odtud $yx = yy$ (obrázek 5.5). Nicméně $y \leq 0$ a $x \geq 0$ implikuje $yx \leq 0$, proto $yy \leq 0$. Odtud $yy = 0$ a $y = 0$. Dále $0 \in \phi(p^*)$ a $p^* \in \psi(p^*)$.

Ekvivalence Kakutaniho věty a věty 3.1 nestačí k důkazu, že první z nich (nebo výsledek stejné síly) je nutná k existenci rovnováhy pro korespondenci převisu poptávky vytvořené tržními silami, která má vlastnosti jmenované ve (3.1), což umožňuje získání rovnováhy základními prostředky. Proto je otázkou, zda pro danou korespondenci ζ mající vlastnosti (3.1) existuje ekonomika generující korespondenci převisu poptávky.

Využíváme opakovaně skutečnost, že v ekonomice s předpokladem nenasycenosti spotřebitelů, jejichž preference splňují podmínky konvexity z vět 2.5 a 2.8, je každý z nich svázán rozpočtovým omezením a v důsledku toho je hodnota převisu poptávky rovna nule. Tato podmínka známá jako Walrasův zákon lze formálně vyjádřit jako

$$\text{pro každé } p \text{ z definičního oboru } \zeta \text{ platí } p \cdot \zeta(p) = 0.$$

Práce charakterizující funkci převisu poptávky (Shafer a Sonnestein, kap. 14 knihy [3]) dává odpověď na předešlou otázku v případě, že ζ je spojitá funkce splňující Walrasův zákon. Nechť K je nějaká daná podmnožina relativního vnitřku P , pak ekonomika s ℓ spotřebiteli vytváří funkci převisu poptávky shodující se na K se ζ . Tento výsledek, společně s Uzavřovou poznámkou, ukazuje, že důkaz existence rovnováhy vyžaduje matematický aparát stejné síly jako teorie pevného bodu.

Ve zbytku této části budeme studovat případ jednoduché ekonomiky s ℓ komoditami a m spotřebiteli. Množina spotřeby i -tého spotřebitele je uzavřený kladný kužel R_+^ℓ v prostoru komodit R^ℓ a jeho relace preference \preceq_i splňující následující předpoklady:

uzavřenost: množina $\{(x, x') \in R_+^\ell \times R_+^\ell | x \preceq_i x'\}$ je uzavřená

monotonie: nechť x a x' jsou dva body z R_+^ℓ takové, že $x < x'$, pak $x \prec_i x'$.

Vezměme kladný cenový vektor $p \gg 0$ a majetek $w > 0$, pak rozpočtová množina

$$\beta_i(p, w) = \{x \in R_+^\ell | px \leq w\}$$

i -tého spotřebitele je kompaktní a neprázdná. Navíc (p, w) má okolí, na kterém je β_i omezená. Podle lemmatu 2.7 je β_i spojitá v bodě (p, w) .

Z uzavřenosti relace preference vyplývá [např. Debreu(1959)] existence užitkové funkce reprezentující \preceq_i na R_+^ℓ . Maximalizace u_i na rozpočtové množině $\beta_i(p, w)$ dává množinu $\xi(p, w) = \{x \in \beta_i(p, w) \mid \text{pro každé } y \in \beta_i(p, w) \text{ a } y \preceq_i x\}$ nejlepších prvků R_+^ℓ pro \preceq_i při rozpočtovém omezení $px \leq w$. Dle lemmatu 2.3 je korespondence poptávky ξ_i shora polospojité.

Monotonnost relace preference implikuje, že rozpočtové omezení je závazné, tj. $p \cdot \xi_i(p, w) = w$, což udává následující chování korespondence χ_i [Hildebrant (1974, str.103, Důsledek 1)]. Pro vektor x z R^ℓ definujeme normu $|x| = \sum_{h=1}^\ell |x^h|$.

Potom vzdálenost od počátku 0 k $X \subseteq R^\ell$ je dána jako $d[0, X] = \inf_{x \in X} |x|$.

Uvažujme posloupnost (p_q, w_q) v $P \times R$ konvergující k (p_0, w_0) pro všechny q , p_q náleží do relativního vnitřku P a $w_q > 0$, zatímco p_0 náleží do relativní hranice ∂P a $w_0 > 0$.

Jinými slovy $q, p_q \gg 0$, zatímco p_0 má některé složky nulové. Za těchto podmínek posloupnost $d[0, \xi_i(p_q, w_q)]$ jde do $+\infty$, jak bude následně dokázáno.

Lemma 4

Jestliže relace preference je uzavřená a monotonní na R_+^ℓ , $p_q \gg 0$ z P konverguje k p_0 z ∂P , $w_q > 0$ z R konverguje k w_0 , pak $d[0, \xi_i(p_q, w_q)] \rightarrow +\infty$.

Důkaz

Předpokládejme, že tento závěr neplatí. Pak existuje podposloupnost (p'_q, w'_q) z (p_q, w_q) taková, že $d[0, \xi_i(p'_q, w'_q)]$ je omezená. Pro každé q lze vybrat x'_q z $d[0, \xi_i(p'_q, w'_q)]$ takové, že x'_q je omezené. Proto lze z (p'_q, w'_q, x'_q) vybrat podposloupnost (p''_q, w''_q, x''_q) konvergující k (p_0, w_0, x_0) . Necht' B je uzavřená koule se středem 0, x_0 náleží do jejího vnitřku a definujme $\hat{\beta}_i$ jako

$$\hat{\beta}_i(p, w) = B \cap \beta_i(p, w).$$

Pokud $w_0 > 0$, pak korespondence $\hat{\beta}_i$ je dle lemmatu 2.7 spojitá na (p_0, w_0) . Dle lemmatu 2.3 je x_0 nejlepší

prvek z $\hat{\beta}_i(p_0, w_0)$ vzhledem k relaci preference, přestože je x_0 z vnitřku B a p_0 má některé složky nulové. Proto existuje x z $\hat{\beta}_i(p_0, w_0)$ takové, že $x_0 < x$, tudíž $x_0 \prec x$, což je spor s optimalitou x_0 z $\hat{\beta}_i(p_0, w_0)$. \square

Nyní zavedeme dodatečnou podmínku na relaci preference \preceq_i :

Slabá konvexita: Necht' x, x' jsou prvky R_+^ℓ takové, že $x \preceq_i x'$ a $r \in [0, 1]$, pak $x \preceq_i (1 - r)x + rx'$.

Tento předpoklad znamená, že pro všechna $p \gg 0$ z P a $w > 0 \in R$ je množina $\xi_i(p, w)$ konvexní.

Korespondence poptávky ξ_i je definována pro všechna $(p, w) \in P \times R$ taková, že $p \gg 0$ a $w > 0$, její hodnoty jsou konvexní podmnožiny R_+^ℓ , je shora polospojité, splňuje rovnost $p\chi_i(p, w) = w$ a má hraniční vlastnost

jestliže (p_q, w_q) je posloupnost z $P \times R$ konvergující k (p_0, w_0)

- (i) pro každé $q, p_q \gg 0$ a $w_q > 0$,
- (ii) $p_0 \in \partial P$ a $w_0 > 0$, pak $d[0, \xi_i(p_q, w_q)] \rightarrow +\infty$.

Místo původní relace preference splňující podmínky uzavřenosti, monotonie a slabé konvexity můžeme vzít korespondenci ξ_i splňující předešlé (podstatně slabší) předpoklady. Nyní definujeme ekonomiku \mathcal{E} specifikovanou pro každé $i = 1, \dots, m$, korespondenci poptávky ξ_i a počáteční dotací $e_i \gg 0$ z R^ℓ i -tého spotřebitele. Formálně $\mathcal{E} = (\xi_i, e_i)_{i=1, \dots, m}$.

Pro daný cenový vektor $p \gg 0$ je hodnota dotace i -tého spotřebitele rovna pe_i , poptávková množina $\xi_i(p, pe_i)$, převis poptávky je $\xi_i(p, pe_i) - e_i$ a převis poptávky celé ekonomiky \mathcal{E} je

$$\zeta(p) = \sum_{i=1}^m [\xi_i(p, pe_i) - e_i].$$

Vlastnosti korespondence ζ celé ekonomiky \mathcal{E} jsou ihned získány z podmínek pro individuální korespondence, ζ je definováno pro všechna $p \gg 0$ z P , jeho hodnoty jsou podmnožiny R^ℓ , je zdola ohraničená, shora

polospojité a splňuje

Walrasův zákon: Pro všechna $p \gg 0$ z P platí $p \cdot \zeta(p) = 0$

Podmínku ohraničenosti: Pokud $p_q \gg 0$ z P konverguje k $p_0 \in \partial P$, pak $d[0, \zeta(p_q)] \rightarrow +\infty$.

Tyto vlastnosti zajišťují existenci vektoru cen p , pro který platí $0 \in \zeta(p)$. Hildebrandově formě (1974, str.150, Lemma 1) předcházeli McKenzie (1954), Gale (1955), Nikiado (1956), Debreu (1956), Arrow a Hahn (1971), Dieker (1974, část 8). Uvedený důkaz je od Neufinda (1977).

Věta 3.2 *Nechť korespondence ζ je konvexní, zdola omezená, shora polospojité, splňuje Walrasův zákon a podmínku ohraničenosti. Pak existuje $p^* \gg 0$ z P takové, že $0 \in \zeta(p^*)$.*

Důkaz. Nechť

$$E = \{p \in P | p^* \gg 0 \text{ a } \exists z \in \zeta(p) \text{ tak, že } \sum_{h=1}^{\ell} z^h \leq 0\}.$$

Protože ζ je zdola ohraničená, pro měnící se $p \in E$ je vzdálenost $d[0, \zeta(p)]$ omezená. Z podmínky ohraničenosti plyne, že v E neexistuje posloupnost p_q jdoucí k $p_0 \in \partial P$. V důsledku toho je vzdálenost od p k ∂P zdola omezená kladným reálným číslem. Tedy existuje konvexní kužel C s vrcholem v $0 \in R^\ell$ takový, že $E \subset \text{int } C$ a $C \setminus 0 \subset \text{int } R_+^\ell$. Aplikací věty 3.1 na kužel C a korespondenci ζ obdržíme $p^* \in C \cap P$ takový, že $\zeta(p^*) \cap C^0 \neq \emptyset$. Nechť z je prvkem tohoto průniku. Podle Walrasova zákona $(1/\ell, \dots, 1/\ell)$ náleží do E , a proto i do C a $\sum_{h=1}^{\ell} z^h \leq 0$. Pak p^* patří do E , resp. $\text{int } C$. Navíc, díky dalšímu užití Walrasova zákona, platí $p^* \cdot z = 0$. Tato rovnost pro $p^* \in \text{int } C$ a $z \in C^0$ dává $z = 0$. ■

Nyní zavedeme dodatečnou podmínku na relaci preference.

Ostrá konvexita: Nechť x, x' jsou dva různé body z R_+^ℓ takové, že $x \preceq_i x'$ a r je reálné číslo z $(0, 1)$, pak $x \prec_i (1-r)x + rx'$.

Tato podmínka má za důsledek, že množina $\xi_i(p, w)$ má jediný prvek, který označíme $f_i(p, w)$. Tak je v ekonomice \mathcal{E} , pro všechna $i = 1, \dots, m$, specifikována poptávková funkce f_i a počáteční obdaření e_i . Funkce převisu poptávky F je definována pro každé $p \gg 0$ z P následovně

$$F(p) = \sum_{i=1}^m [f_i(p, pe_i) - e_i].$$

Každý bod (p, w) , pro který $p \gg 0, w > 0$, má okolí, v němž je f_i ohraničená. V takovém okolí polospojitosť shora korespondence $(p, w) \mapsto f_i(p, w)$ znamená spojitost funkce f_i . Proto je funkce F spojitá pro každé $p \gg 0$. Další vlastnosti funkce F vyplývají z vlastností korespondence ζ . Konkrétně je F zdola omezená, splňuje

Walrasův zákon: Pro všechna $p \gg 0$ z P platí $p \cdot F(p) = 0$

Podmínku ohraničenosti: Pokud $p_q \gg 0$ z P konverguje k $p_0 \in \partial P$, pak $|F(p_q)| \rightarrow +\infty$.

Jako důsledek Věty 8 [Dieker(1974, část 8)] uvedeme, že tyto vlastnosti implikují existenci cenového vektoru p , pro který $F(p) = 0$.

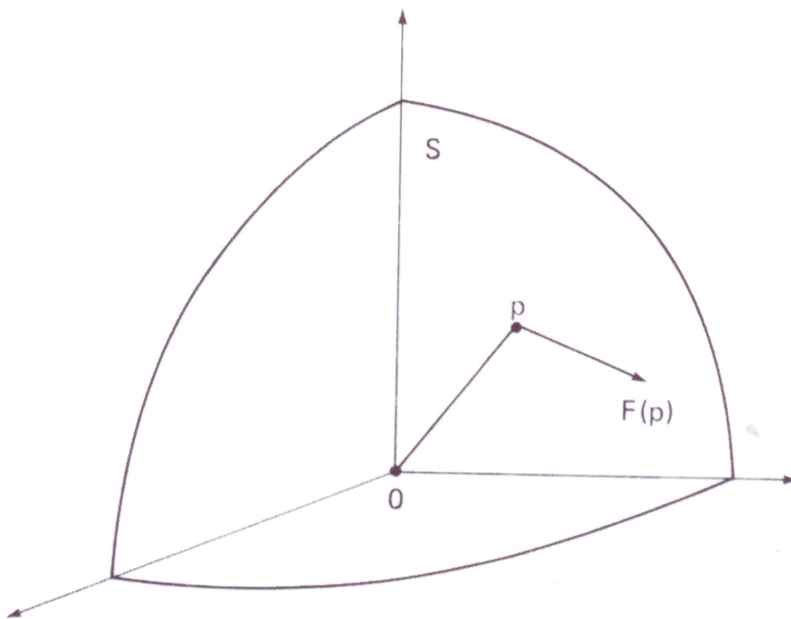
Důsledek 3.3 *Nechť F je spojitá, zdola omezená, splňuje Walrasův zákon a podmínku omezenosti, pak existuje $p^* \gg 0$ takový, že $F(p^*) = 0$.*

Prímá cesta k obdržení tohoto důsledku závisína různé normalizaci vektoru p , který omezíme, aby měl jednotkovou euklidovskou normu. Tedy p náleží do kladné části jednotkové koule se středem v počátku

$$S = \{p \in R^\ell | p \gg 0, \|p\| = 1\}.$$

Z Walrasova zákona vyplývá, že vektor $F(p)$ je pro cenový vektor p z S kolmý k p , a proto ho lze vzít jako tečnu k S v bodě p . Jinými slovy F může být bráno jako vektorové pole na S . Z podmínky omezenosti

a předpokladu existence dolní meze pro F vyplývá, že $F(p)$ směřuje k hranici ∂S . Existuje (pomocí obvyklého argumentu jako v části 6) p^* z S takové, že $F(p^*) = 0$ (Obrázek 5.6).



Obrázek 5.6: Ilustrace pojmů ze strany 201

Kapitola 6

Dynamické systémy s aplikacemi v ekonomii

Tato kapitola je podstatným způsobem založena na článku H.R. Variana [30]. Přináší přehled některých základních matematických výsledků týkajících se dynamických systémů, které prokázaly svou užitečnost v ekonomii.

1 Základní pojmy

1.1 Dynamický systém v R^n

Stav systému je složený z celkového popisu, co potřebujeme znát k tomu, abychom mohli popsat budoucí změny systému. Ve většině ekonomických aplikacích je stav systému popsán n -ticí reálných čísel. *Stavový prostor systému* je složen ze všech možných nebo příslušných stavů. Téměř ve všech ekonomických aplikacích je stavový prostor považován za podmnožinu R^n . V některých aplikacích je pak stavový prostor považován za topologický ekvivalent jednotkového kruhu,

$$D^n = \{x \in R^n : \|x\| \leq 1\}.$$

Příklad 1.1 Předpokládejme standardní obecný model rovnováhy, kde máme k -rozměrný vektor přebytkových poptávek, $z(p)$ je homogenní funkce k nezáporných cen. Potom získáme stavový prostor ekonomiky jako množinu všech nezáporných cen, R_+^k .

Mnohem vhodnější volba stavového prostoru může být založena na poznatku, že ceny mohou být normalizovány za požadavku, že $\sum_i p_i^2 = 1$. Takovýto stavový prostor bude právě kladný ortant jednotkové sféry,

$$S^{k-1} = \{x \in D^k : \|x\| = 1, x \geq 0\}.$$

Poznamenejme, že S^{k-1} je topologicky ekvivalentní jednotkovému kruhu dimenze $k - 1$.

Označme X stavový prostor systému, který splňuje dané podmínky. *Stavová přechodová funkce* T je funkce z $X \times R$ do X . Přitom reálnou část chápeme jako čas a $T(x, t)$ nám udává stav systému v čase t , jestliže v čase 0 se systém nacházel ve stavu x . Ve většině aplikací není stavová přechodová funkce zadána explicitně, ale implicitně, a to *systémem diferenciálních rovnic*,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \frac{dx_i}{dt}(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), \\ x_i(0) &= x_{0i}. \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n.$$

Vektorově pak:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Nechť $x : R \rightarrow X$ je řešením tohoto systému diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou $x(t) = x_0$. Potom pomocí $x(t)$ definujeme stavovou přechodovou funkci takto:

$$T(x_0, t) \equiv x(t).$$

Někdy chceme zdůraznit závislost stavu v čase t na počátečním stavu x . V takovémto případě definujeme *operátor toku* diferenciální rovnice $\Phi_t(x)$ jako:

$$\Phi_t(x) \equiv T(x, t).$$

Dynamický systém potom definujeme jako stavový prostor se stavovou přechodovou funkcí.

Pěkný způsob vizualizace těchto představ je přes použití *vektorového pole*. Tím zde myslíme přiřazení vektoru $f(x)$ každému bodu x ze stavového prostoru. *Křivky řešení* (tzn. trajektorie, orbity atd.) pro systém diferenciálních rovnic $\dot{x} = f(x)$ budou právě obrazy funkce $\Phi_t(x)$, kde t bude procházet přes všechna reálná čísla a x přes S . Je zřejmé, že jestliže x je bodem křivky řešení $\Phi_t(\cdot)$, potom $f(x)$ je tečným vektorem k této křivce v bodě x . Viz obrázek 6.1 na straně 206.

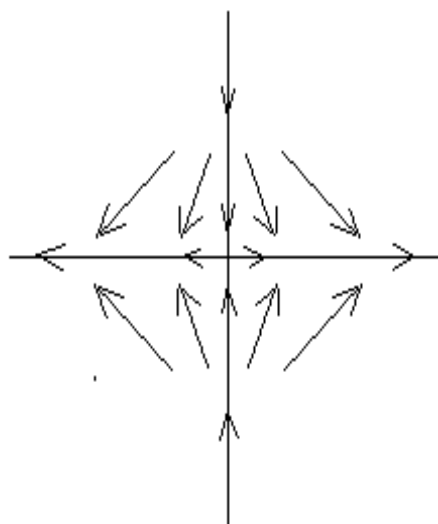
1.2 Dynamické systémy na varietách

V některých ekonomických aplikacích chceme, aby byl stavový prostor mnohem obecnější než R^n nebo D^n . Vhodnou koncepcí se zdá být pojem stavového prostoru na *varietách*. Nejdříve budeme definovat *uzavřený poloprostor* $H^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in R^m : x_m \geq 0\}$. Potom definujeme pojem *difeomorfismu*. Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je *difeomorfismus*, jestliže f je homeomorfismus a jak f tak f^{-1} jsou diferencovatelné. Nakonec můžeme definovat pojem *variety*.

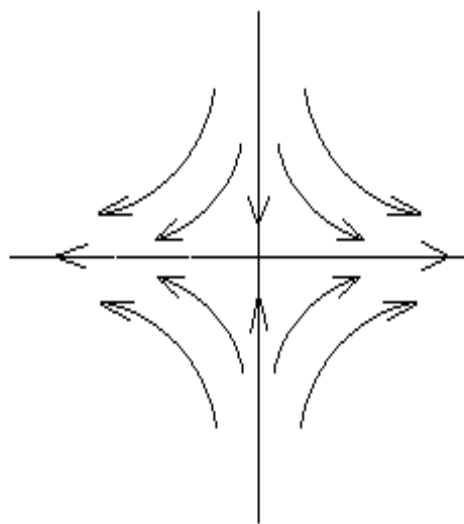
Definice. Podmnožina $X \subseteq R^k$ je *hladkou m -varietou*, jestliže pro každé $x \in X$ je okolí $U \cap X$ difeomorfní s otevřenou podmnožinou $V \cap H^m$ poloprostoru H^m . (Čtenář by měl být upozorněn, že toto se obvykle nazývá *varieta s hranicí*. Jelikož však většina variet, které zde budeme uvažovat, bude mít hranice, jeví se úspornější používat tuto terminologii.)

Nechť x je bodem m -variety X . Nechť g je difeomorfismus mezi $U \cap X$ a $V \cap H^m$ vzhledem k x . Potom g se nazývá *parametrizací* $U \cap X$.

Jelikož g je zobrazením mezi R^k a R^m , jeho derivace je reprezentována maticí $Dg(x)$ řádu $k \times m$. *Tečným prostorem* variety X v bodě x je obraz prostoru R^m podle lineárního zobrazení $Dg^{-1}(y)$, kde $y = g(x)$.



Vektorové pole



Křivky řešení

Obrázek 6.1: Ilustrace pojmů ze stránky 205

Z geometrického pohledu chápeme varietu jako zobecnění myšlenky m -dimensionální roviny a tečný prostor jako zobecnění pojmu tečné nadroviny.

Vektorové pole na varietě X je zobrazení $f : X \rightarrow R^m$ takové, že $f(x)$ je tečným prostorem variety X v bodě x . Tedy f můžeme považovat za definici obyčejného systému diferenciálních rovnic na podmnožině prostoru R^k . Pomocí vět o existenci a jednoznačnosti můžeme najít řešení $x : R \rightarrow R^k$ k tomuto systému diferenciálních rovnic. Jelikož je vždycky tečný vektor k $x(t)$ v bodě x tečnou k povrchu variety x , musí ležet křivky řešení diferenciálního systému ve varietě X . Takto vlastně vektorové pole f definuje přirozeným způsobem dynamický systém na X .

2 Základní nástroje

Pro daný systém diferenciálních rovnic a stavový prostor se objevuje řada otázek:

1. *Existence řešení*: Zda pro dané $\dot{x} = f(x)$ a $x(0) = x_0$ existuje nutně řešení $x(t)$. Jaké má vlastnosti $x(t)$?
2. *Existence rovnováhy*: Vyskytují se nějaké body x^* , pro něž platí $f(x^*) = 0$?
3. *Počet rovnovážných stavů*: Kolik existuje rovnovážných stavů?
4. *Lokální stabilita rovnováhy*: Pokud je systém slabě vychýlen z rovnováhy, vrátí se do ní?
5. *Globální stabilita rovnováhy*: Jestliže začneme z libovolného stavu x , je systém schopen se dostat do rovnovážného stavu?
6. *Existence cyklů*: Jestliže začneme ve stavu x , vrátíme se do něj zpět?

Následující pasáže popisují některé z matematických nástrojů používané pro řešení předešlých otázek.

2.1 Existence, jednoznačnost a spojitost řešení

Nechť $f : X \rightarrow R^n$ a $\dot{x} = f(x)$ definuje systém diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami $x(0) = x_0$. Řešením systému je diferencovatelná funkce $x : I \rightarrow X$, kde I je interval v R tak, že:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)),$$

$$(2) \quad x(0) = x_0.$$

Z existence a jednoznačnosti řešení plyne:

Věta 2.1 *Nechť X je otevřená podmnožina R^n a nechť x_0 je prvkem X . Nechť $f : X \rightarrow R^n$ je spojitě diferencovatelná funkce. Pak existuje $a > 0$ a jediné řešení $x : (-a, a) \rightarrow X$ diferenciální rovnice $\dot{x} = f(x)$, které splňuje počáteční podmínku $x(0) = x_0$.*

Z této věty plyne, že pro existenci řešení stačí, že f je spojitá. Z jednoznačnosti řešení plyne jedno důležité topologické omezení, že výsledné grafy (křivky) se nesmí křížit. Tento druh regularity je velmi dalším cenným omezením pro spojitou diferencovatelnost. Velmi často nás zajímá vývoj tvaru výsledných křivek na základě počátečníj podmínek. Zejméno, pokud se výsledné křivky mění spojitě, pak, pokud x, y jsou dostatečně blízko, pak $\Phi_t(x)$ a $\Phi_t(y)$ jsou taky blízko.

Věta 2.2 *Nechť f je definována stejně jako v předchozí větě a nechť $y : [t_0, t_1] \rightarrow X$ je řešením našeho systému tak, že $y(t_0) = y_0$. Pak existuje okolí $U(y_0)$ bodu y_0 tak, že pro libovolné $x_0 \in U(y_0)$ existuje řešení $x : [t_0, t_1] \rightarrow X$ tak, že $x(t_0) = x_0$ a nějaká konstanta K tak, že*

$$|y(t) - x(t)| \leq K|y_0 - x_0| \exp(|K(t - t_0)|), \quad \text{pro všechna } t \in [t_0, t_1].$$

Tato věta říká, že tok diferenciální rovnice $\Phi_t : X \rightarrow X$ je spojitý jakožto funkce x .

2.2 Existence rovnováhy

Rovnováha dynamického systému $\dot{x} = f(x)$ je bod x^* , pro který $f(x^*) = 0$. Pokud dynamický systém je v rovnováze, zůstane v ní napořád. Řešme otázku, jak se dynamický systém dostane do rovnovážné situace.

Věta 2.3 *Nechť $f : D^n \rightarrow R^n$ je spojitě vektorové pole na jednotkové kouli, které na hranici koule směřuje dovnitř; tj. $x \cdot f(x) < 0$ pro všechna $x \in D^n$ tak, že $\|x\| = 1$. Pak existuje $x^* \in D^n$ tak, že $f(x^*) = 0$.*

Samozřejmě věta je pravdivá pro libovolný stavový prostor homeomorfní ke kruhu.

Příklad 2.4 Vezměme v úvahu Walrasův model popsany v příkladě 1.1, strana 204. Uvažujme $z(p)$ jakožto funkci na S_+^{k-1} . Mějme tři předpoklady o z :

1. *Spojitosť:* Funkce $z(p) : S_+^{k-1} \rightarrow R^k$ je spojitá.
2. *Walrasův zákon:* $p \cdot z(p) = 0$ pro $p \in S_+^{k-1}$.
3. *Vhodnost:* $z_i(p) > 0$, pokud $p_i = 0$, $i = 1, \dots, k$.

Pak existuje $p^* \in S_+^{k-1}$ tak, že $z(p^*) = 0$. Pro pochopení si představme, že Walrasův zákon implikuje, že $z(p)$ musí ležet v tečném prostoru pro S_+^{k-1} a z vhodnosti pak plyne, že $z(p)$ směřuje dovnitř pro p na hranici S_+^{k-1} . Výsledek pak plyne z předchozí věty.

Předpoklady věty mohou být oslabeny několika způsoby. Například následující předpoklad nahradí Walrasův zákon.

4. *Žádná inflace:* Pro každé $p \in S_+^{k-1}$ neexistuje $t \neq 0$ tak, že $z(p) = tp$.

Všimněme si, že můžeme zobrazit $z(p)$ na tečný prostor pro S_+^{k-1} bez zavedení nové rovnováhy.

Obdobně okrajové podmínky v existenční větě mohou být zbytečně velmi omezující. Slabší nahrazení je předpoklad, že f nikdy nesměřuje přímo ven z hranice D^n .

5. *Nikdy nesměruje ven*: Pro každé $x \in D^n$, $\|x\| = 1$ neexistuje $t > 0$ tak, že $f(x) = tx$.

Abychom omezili tento případ na původní případ, poznamenejme jen, že můžeme D^n uzavřít koulí o poloměru 2. Na hranici koule definujeme vektorové pole $\cdot x = -x/\|x\|$, jež evidentně směřuje dovnitř. Nyní plynule rozšíříme toto vektorové pole na původní pro D^n tak, že bereme konvexní kombinace $f(x/\|x\|)$ a $-x/\|x\|$. Jednoduše vidíme, že nová konstrukce nezavádí žádné nové nulové body, takže aplikujeme přímo existenční tvrzení.

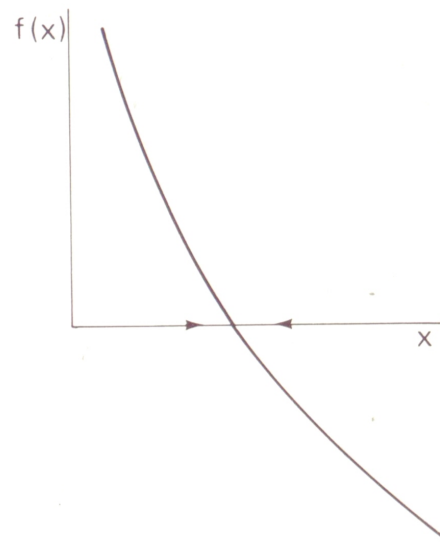
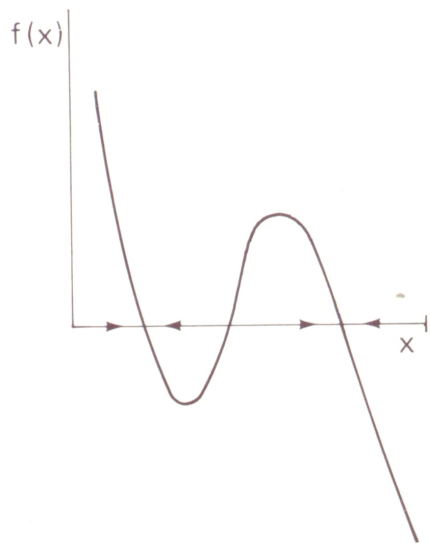
2.3 Jednoznačnost rovnováhy

Předpokládejme, že máme hladký dynamický systém na kouli, který ukazuje dovnitř na hranicích koule. Z posledního odstavce víme, že existuje alespoň jedna rovnováha x^* . Za jakých podmínek bude pouze jedna rovnováha? Základním nástrojem, který nám odpoví na tuto otázku, je *Poincarého index vektorového pole*.

Rozmysleme si prvně jednorozměrný případ. Nechť $\cdot x = f(x)$ definuje hladké vektorové pole na jednotkovém intervalu, které ukazuje na hranici dovnitř; tj. $f(0) > 0$ a $f(1) < 0$. Potom se ukáže několik zřejmých věcí:

1. Kromě „degenerovaných“ případů existuje konečný počet rovnováh.
2. Obecně je toto číslo liché.
3. Jestliže $f'(x^*)$ má ve všech rovnovážných bodech pouze jedno znaménko, může existovat pouze jedna rovnováha, viz obr. 6.2.

Ukazuje se, že všechny tyto postřehy můžeme zobecnit pro vícedimenzionální případy. V tomto případě buď $f : D^n \rightarrow R^n$ hladké vektorové pole na kouli D^n , které ukazuje dovnitř na hranici D^n . Nechť x^* je rovnovážný stav. Index $I(x^*)$ stavu x^* je definován jako:



Obrázek 6.2: Jednoznačnost rovnovážného stavu

+1 jestliže $\det(-Df(x^*)) > 0$,
 -1 jestliže $\det(-Df(x^*)) < 0$,
 číslo závisující na topologických úvahách
 jestliže $\det(-Df(x^*)) = 0$.

Nyní máme základní větu diferenciální topologie:

Věta 2.5 (Poincaré-Hopf) Předpokládejme, že $f : D^n \rightarrow R^n$ má konečný počet izolovaných rovnováh x_i , $i = 1, \dots, k$, a že f směřuje dovnitř na hranici D^n . Potom

$$\sum_{i=1}^k I(x_i) = +1.$$

Příklad 2.6 Aplikujme nyní tuto větu na problém jednoznačnosti Walrasovy rovnováhy. Mějme vektorové pole dané $z : S_+^{k-1} \rightarrow R^k$. Abychom mohli vypočítat index každé rovnováhy, potřebujeme zvolit lokální parametrizaci $g : S_+^{k-1} \rightarrow R^{k-1}$. Je geometricky jasné, že projekce na R^{k-1} může sloužit jako odpovídající parametrizace. Algebraicky to pouze znamená, že zapíšeme $k \times k$ Jacobiho matici $Dz(p^*)$ a vynecháme poslední řádek a sloupec. Index rovnováhy $I(p^*)$ je determinant $\det(-Dz(p^*))$ Jacobiho matice typu $(k-1) \times (k-1)$. Nyní můžeme použít Milnorův argument a dojdeme k tomu, že jestliže $\det(-Dz(p^*)) \neq 0$ ve všech rovnováhách pro p^* , pak existuje pouze omezený počet rovnováh.

Jednoznačnost potom vyplývá jednoduše: jestliže je $\det(-Dz(p^*)) > 0$ ve všech rovnováhách, může být pouze jediná. Jestliže je pouze jediná rovnováha, pak $\det(-Dz(p^*)) \geq 0$.

2.4 Lokální stabilita rovnováhy

Nechť x^* je rovnováha dynamického systému. Přibližně řečeno, tato rovnováha je *lokálně stabilní*, jestliže se systém vrací k x^* z okolních stavů. Jestliže by rovnováha byla ekonomicky významná v systému, který by zůstával stabilní po jakoukoliv dobu, potom by měla být lokálně stabilní. Budeme níže formulovat přesnou představu tohoto pojmu a prozkoumáme dále kritéria stability:

Definice. Rovnováha je *lokálně asymptoticky stabilní*, jestliže existuje nějaké $\varepsilon > 0$ takové, že $|x_0 - x^*| < \varepsilon$ implikuje, že $\Phi_t(x_0)$ konverguje k x^* pro t jdoucí do nekonečna.

Věta 2.7 *Nechť x^* je rovnováha funkce $f : X \rightarrow R^n$ a nechť $Df(x^*)$ má všechny vlastní hodnoty záporné. Potom je x^* lokálně asymptoticky stabilní.*

Příklad 2.8 Uvažujme Walrasův model rovnováhy popsáný dříve (Příklady 1.1, 2.4 a 2.6). Zde bude dobré vybrat trochu odlišnou normalizaci pro ceny. Nastavme k -tou cenu rovnu jedné a měřme ostatní ceny vzhledem k ní. Nechť z je zobrazení, které přiřazuje k $k - 1$ normalizovaným cenám $k - 1$ přebytků poptávky. Podle Walrasova zákona, jestliže $p^* \geq 0$ a $z_1(p^*) = 0, z_2(p^*) = 0, \dots, z_{k-1}(p^*) = 0$, pak $z_k(p^*) = 0$; potom rovnováhy systému $\dot{p} = z(p)$ jsou přesně Walrasovy rovnováhy p^* , které budou lokálně stabilní, jestliže $Dz(p^*)$ má všechny vlastní hodnoty záporné. Jaká je ekonomická interpretace této podmínky?

Podle Slutského rovnice můžeme psát $Dz(p^*)$ jako

$$Dz(p^*) = \sum_{i=1}^n S_i(p^*) + \sum_{i=1}^n Y_i(p^*) = S(p^*) + Y(p^*),$$

kde $S_i(p^*)$ je substituční matice pro i -tého spotřebitele (o níž je známo, že je negativně definitní) a $Y_i(p^*)$ je důchodový efekt pro i -tého spotřebitele. Matice $S(p^*)$ je negativně definitní a proto má všechny vlastní hodnoty záporné; proto jestliže není „agregátní důchodový efekt“ $Y(p^*)$ příliš veliký, pak systém $\dot{p} = z(p)$ bude lokálně stabilní v p^* .

2.5 Globální stabilita rovnováhy

Nechť x^* je rovnováha dynamického systému. Potom x^* je *globálně stabilní*, jestliže se $x(t)$ přibližuje k x^* pro t jdoucí do nekonečna, pro libovolnou počáteční podmínku x_0 . Tedy x^* je globálně stabilní, jestliže $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x) = x^*$ pro všechna x . Zřejmě globální stabilita implikuje lokální stabilitu; avšak globální stabilita je o mnoho silnější podmínka. Kdy řekneme, že je dynamický systém globálně stabilní? Základním nástrojem je pojem *Lyapunovovy funkce*.

Definice. Necht' $\dot{x} = f(x)$ je dynamický systém na X s rovnováhou x^* . Předpokládejme, že můžeme najít diferencovatelnou funkci $V : X \rightarrow R$ takovou, že

$$\begin{aligned} V(x^*) = 0, \quad V(x) > 0 & \text{ pro } x \neq x^*, \\ DV(x(t))/dt < 0 & \text{ pro } x \neq x^* \end{aligned}$$

Potom V nazýváme *Lyapunovovou funkcí*. Přitom druhá podmínka nám říká, že derivace funkce V podél trajektorií systému $\dot{V}(x)$ je na X negativně definitní.

Základním výsledkem je:

Věta 2.9 *Bud' $f : X \rightarrow R^n$ dynamický systém s X kompaktní a s rovnováhou x^* . Předpokládejme, že můžeme najít Lyapunovovu fci pro tento systém. Potom x^* je globálně stabilní rovnováha.*

Bohužel obecně neexistuje jednoduchý způsob nalezení Lyapunovovy funkce. Ve většině ekonomických aplikací jsou ale Lyapunovovy funkce přirozené. Lyapunovova metoda poskytuje postačující podmínku stability. Pokud máme vhodnou funkci, ověření je snadné.

Příklad 2.10 Necht' p^* je rovnováha Walrasova systému $\dot{p} = z(p)$. Předpokládejme, že $z(p)$ se řídí „slabým axiomem odhalených preferencí“ tak, že $p^* \cdot z(p) > 0$ pro všechna $p \neq p^*$. Potom p^* je globálně stabilní rovnováha. Abychom toto mohli dokázat, potřebujeme ukázat, že stavový prostor lze vybrat kompaktní a systém připouští Lyapunovovu funkci. Vynecháme první část důkazu a jednoduše ukážeme, že $V(p)$ může být vybráno tak, aby $V(p) = \|p - p^*\|^2 = \sum_{i=1}^k (p_i - p_i^*)^2$.

Pro provedení důkazu stačí derivovat $V(p(t))$:

$$\frac{dV(p(t))}{dt} = 2 \sum_{i=1}^k (p_i(t) - p_i^*(t)) \dot{p}_i(t)$$

a použít skutečnost, že $\dot{p}_i(t) = z_i(p(t))$:

$$\frac{dV(p(t))}{dt} = 2 \left[\sum_{i=1}^k p_i(t) z_i(p(t)) - \sum_{i=1}^k p_i^*(t) z_i(p(t)) \right] = -2p^* \cdot z(p) < 0,$$

přičemž poslední krok plyne z Walrasova zákona a slabého axiomu odhalených preferencí.

2.6 Existence cyklů

Nechť $f : X \rightarrow R^n$, $\dot{x} = f(x)$ je hladký (smooth) dynamický systém. Bod x je v *uzavřené orbitě*, jestliže x není rovnováha, ale $\Phi_t(x) = x$ pro nějaké $t \neq 0$. Tedy, stav je v uzavřené orbitě, jestliže se systém nakonec vrací do tohoto stavu. Uzavřené orbity se obvykle nazývají *cykly*. Užitečné kritérium pro existenci uzavřených orbit je Poincaré-Bendixsonova věta. Abychom mohli uvést tuto větu, potřebujeme některé definice.

Bod $y \in X$ je ω -*limitní bod* pro x , jestliže existuje posloupnost $t_n \rightarrow \infty$, která má limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(y) = x$. ω -*limitní množina* pro x , $L_\omega(x)$ je množina všech limitních bodů pro x .

Jestliže x^* je rovnovážný bod, pak $L_\omega(x^*)$ je tvořen pouze bodem x^* . Jestliže x^* je globální stálá rovnováha, pak $L_\omega(x) = x^*$ pro libovolné $x \in X$. Jestliže x leží na uzavřené orbitě C , pak $L_\omega(x) = C$. Ve vyšších dimenzích mohou mít ω -limitní množiny složité struktury. Nicméně v dvourozměrných systémech je jejich struktura celkem jednoduchá:

Věta 2.11 *Neprázdna kompaktní ω -limitní množina spojitě diferencovatelného systému v R^2 , který neobsahuje rovnovážný bod, je uzavřená orbita.*

Příklad 2.12 Mějme Walrasiánský systém se třemi druhy zboží tak, že $\dot{p} = z(p)$ definuje dynamický systém na S_+^2 . Předpokládejme, že tento systém ukazuje dovnitř z hranice S_+^2 , a berme tento systém jako dynamický systém na D^2 . Víme, že musí existovat nejméně jedna rovnováha p^* , kde $z(p^*) = 0$. Předpokládejme, že všechny rovnovážné body jsou *zcela nestálé* (totally unstable) ve smyslu, že vlastní hodnoty $Dz(p^*)$ jsou kladné. Potom musí existovat uzavřená orbita - „tržní cyklus“.

Důkaz je přímou aplikací Poincaré-Bendixsonovy věty. Nejprve si všimněme, že může existovat pouze jedna rovnováha p^* . Zvolme nějaké jiné $p \in D^2$ a uvažme ω -limitní limitu $L_\omega(p)$. Ta je neprázdná, uzavřená a tedy kompaktní podmnožina na D^2 . Dále neobsahuje žádný rovnovážný bod kromě p^* , který je jediný a nestabilní. Tedy $L_\omega(p)$ musí být uzavřená orbita.

3 Některé speciální druhy dynamických systémů

Doposud jsme se zabývali obecnými dynamickými systémy. V této kapitole se budeme zabývat dvěma speciálními typy dynamických systémů, které se často využívají v ekonomii.

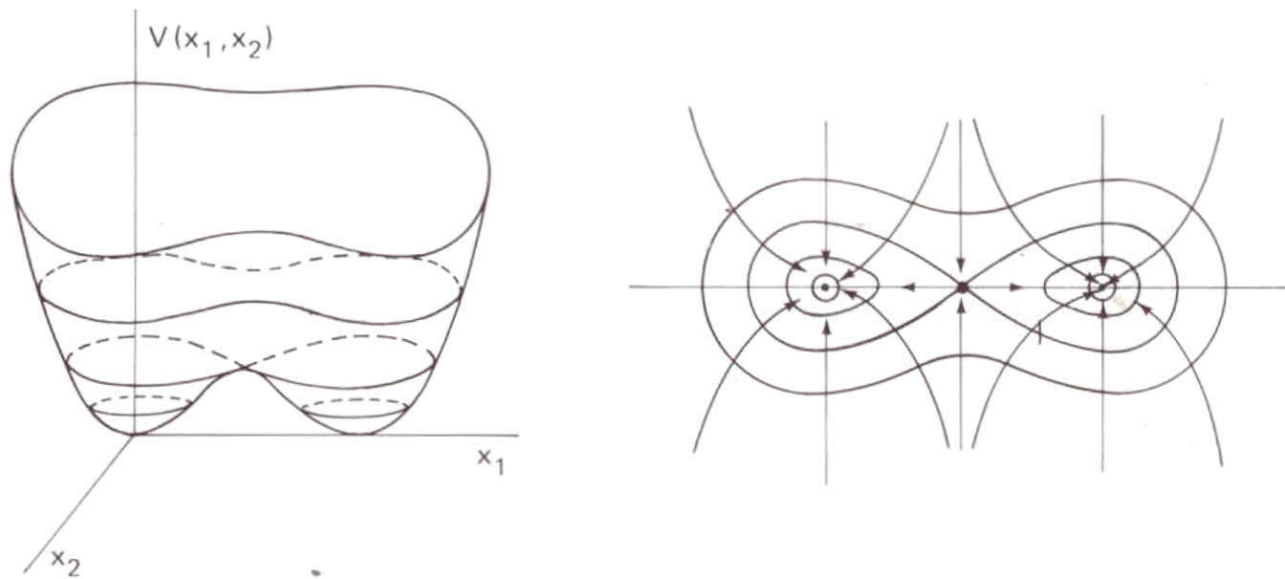
3.1 Systémy gradientů

Dynamický systém na X , $f : X \rightarrow R^n$, $\dot{x} = f(x)$ se nazývá *systém gradientů*, pokud existuje nějaká funkce $V : X \rightarrow R$, kde $f(x) \equiv -DV(x)$. Funkce $V(x)$ se často nazývá *potenciálová funkce systému*; $f(x)$ se nazývá *gradient* V na x .

Geometrická interpretace gradientních systémů je důležitá. Na obrázku 6.3 na straně 217 je nakreslen graf potenciálové funkce $V : R^2 \rightarrow R$ a také vrstevnice (level sets) tohoto grafu v R^2 .

Směrová derivace (directional derivative) $V(x)$ ve směru $h = (h_1, \dots, h_n)$, $\|h\| = 1$ se definuje jako $DV(x) \cdot h$. Směrová derivace ukazuje, jak rychlý bude přírůstek funkce V ve směru h . Navíc, jak výše uvedený vzorec naznačuje, je přesnou projekcí $DV(x)$ na vektor h . Proto je jasné, že projekce bude maximalizována, pokud $DV(x)$ sám ukazuje ve směru vektoru h . Takže máme pěknou geometrickou interpretaci gradientu: *ukazuje ve směru, kde je přírůstek V nejrychlejší.*

Navíc není těžké vidět že vektor $DV(x)$ musí být kolmý na vrstevnici V v bodě x . Na vrstevnicích V v bodě x jsou spolu propojeny body s konstantní hodnotou $V = \text{const}$. Proto směrová derivace V ve směru tečny na vrstevnici V na x musí být nulová. To ale říká, že vektor $DV(x)$ je kolmý na libovolný tečný vektor a proto je kolmý na vrstevnici samé.



Obrázek 6.3: Systém gradientů

Podle těchto sledování velice lehce zkonstruujeme trajektorii $\dot{x} = -DV(x)$, jakmile známe funkci V . Typický příklad je na obrázku 6.3. Některé speciální vlastnosti systémů gradientů jsou:

Věta 3.1 *Nechť $f : X \rightarrow R^n$ je dána předpisem $\dot{x} = f(x) = -DV(x)$, kde $V : X \rightarrow R$ je nějaká hladká funkce. Pak platí:*

1. *Je-li x^* izolované minimum V , je x^* asymptoticky stabilní rovnováha pro $\dot{x} = -DV(x)$;*
2. *Každý ω -limitní bod trajektorie je rovnováha.*
3. *Vlastní hodnoty $Df(x)$ jsou reálné pro všechna $x \in X$.*

Část 3. věty 3.1 plyne z toho, že $Df(x)$ je přesně $-D^2V(x)$ a musí tedy být reálná symetrická matice. Často je důležité vědět, že opak platí. Pokud máme dynamický systém na X , $\dot{x} = f(x)$ tak, že $Df(x)$ je vždy reálná symetrická matice, pak existuje potenciálová funkce $V : X \rightarrow R$ taková, že $f(x) = -DV(x)$.

Příklad 3.2 Uvažme poněkud stylizovaný Walrasiánský model, kde spotřebitelé mají užitečností funkce lineární v penězích. Problém maximalizace užitečnosti spotřebitele i je:

$$\max u_i(x_i) + m_i \quad \text{za podmínky} \quad p \cdot x_i + m_i = w_i,$$

kde

- x_i = požadavek i -tého spotřebitele na zboží (x_i^1, \dots, x_i^k) ,
- m_i = požadavek i -tého spotřebitele na peníze,
- w_i = počáteční obdaření i -tého spotřebitele penězi,
- p = cenový vektor o složkách (p_1, \dots, p_k) .

Poptávková funkce i -tého spotřebitele $x_i(p)$ musí splňovat podmínky 1. řádu,

$$\delta u_i(x_i(p)) / \delta x_i^j = p_j, \quad j = 1, \dots, k,$$

neboli vektorově

$$Du_i(x_i(p)) = p.$$

Diferencováním této identity podle p dostaneme

$$D^2u_i(x_i(p)) \cdot Dx_i(p) = E_k.$$

Tedy

$$Dx_i(p) = [D^2u_i(x_i(p))]^{-1}.$$

Odtu pak Jakobián pro poptávkovou funkci každé osoby je inverze Hessiánu funkce užitku.

Nyní necht' ω je nějaká agregátní nabídka k zboží a definujme přebytkovou agregátní poptávkovou funkci $z(p) = \sum_{i=1}^n x_i(p) - \omega$. Uvažujme dynamický systém $\dot{p} = z(p)$. Po spočítání je pak $Dz(p)$ reálná symetrická matice, takže máme systém gradientů. Není příliš obtížné najít potenciálovou funkci tohoto systému. Necht' je $v_i(p) = u_i(x_i(p))$ nepřímá funkce užitku funkce i -té osoby. Pak potenciálová funkce systému $\dot{p} = z(p)$ je dána jako

$$V(p) = \sum_{i=1}^n v_i(p) + p\omega.$$

Další vlastnosti pak vyplývají velice rychle. Pokud předpokládáme, že $u_i(x_i)$ je ostře konkávní funkce, $D^2u_i(x)$ bude negativně definitní matice. Proto má všechny vlastní hodnoty záporné. Aplikací předchozích výsledků uvidíme, že systém má jedinou globální stabilní rovnováhu, která fakticky minimalizuje sumu nepřímých funkcí užitku.

3.2 Hamiltonovské systémy

Bud' $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ dynamický systém pro x a y na $X \times Y \subseteq R^n \times R^n$. Tento systém se nazývá *hamiltonovský systém*, pokud máme funkci $H : X \times Y \rightarrow R$, *hamiltonovskou funkci* tak, že:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) = D_y H(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y) = D_x H(x, y).\end{aligned}$$

Hamiltonovské systémy vycházejí úplně přirozeně z klasické mechaniky a slouží k sjednocení studia mnoha jevů v této oblasti. Ekonomové si nedávno začali uvědomovat mnoho jejich přirozených aplikací v ekonomii.

Základním znakem hamiltonovských systémů v ekonomii je, že mají obvykle žádoucí vlastnosti stability. V klasické teorii hamiltonovských mechanismů je H kvadratická, takže hamiltonovské systémy jsou lineární systémy diferenciálních rovnic. V tomto případě, klasická Poincarého věta ukazuje, že je-li λ vlastní hodnota lineárního systému v bodě (x^*, y^*) pak $-\lambda$ je také vlastní hodnota. Proto rovnováhy hamiltonovských systémů jsou symetrické sedlové body. Obecně, když jsou hamiltoniány nelineární, stejný typ sedlových bodů se vyskytuje, pokud je funkce $H(x, y)$ konkávní v x a konvexní v y .

4 Některé nové techniky

V této části se budeme zabývat dvěma novými oblastmi studia dynamických systémů a diskutovat jejich potenciální aplikace v ekonomii.

4.1 Strukturální stabilita

Bud' $f : X \rightarrow R^n$ vektorové pole na nějakém stavovém prostoru X . Potom, přibližně řečeno, je tento systém *strukturálně stabilní*, jestliže malá výchylka ve funkci f nezmění topologickou strukturu vektorového pole $\dot{x} = f(x)$. Uvažme například případ, kde $X = R^2$ a $f(x) = Ax$, kde A je regulární matice typu 2×2 . Potom víme, že počátek je jediným rovnovážným bodem v systému a topologická povaha toku kolem počátku je dána povahou vlastních hodnot matice A .

Pro "většinu" voleb A bude systém daný $\dot{x} = Ax$ strukturálně stabilní, protože malé výchylky v A nezmění znaménko vlastních hodnot. Jediná výjimka je, když obě vlastní hodnoty mají reálnou složku nulovou. V tomto případě se tok systému skládá z uzavřených orbit obklopujících počátek. Nicméně malé výchylky A , které dávají vlastním hodnotám nenulové reálné složky, ukazují tok bez jakýchkoli uzavřených orbit. Topologická struktura systému ukazuje drastickou změnu - máme případ *strukturální nestability*.

Vraťme se nyní k původnímu nastavení pro vektorové pole $\dot{x} = f(x)$. Vezměme za stavový prostor tohoto systému D^n . Nechť \mathcal{V} je prostor všech spojitě diferencovatelných funkcí z D^n do R^n a opatřený standardní normou pro funkce třídy C^1 ; dvě funkce jsou blízké, jestliže jejich funkční hodnoty jsou blízké a jejich derivace jsou blízké. Potom můžeme brát *perturbaci* (výchylku) f jako volbu nějaké funkce v nějaké ε -kouli se středem f .

Chceme, aby topologická struktura pole $\dot{x} = f(x)$ byla invariantní vzhledem k malým výchyilkám f . Co to znamená? Jak můžeme popsat představu, že dvě vektorová pole mají stejné kvalitativní rysy?

Související pojem je pojem *topologické ekvivalence*. Zhruba řečeno, toky dvou dynamických systémů na D^n jsou *topologicky ekvivalentní*, jestliže existuje homeomorfismus $h : D^n \rightarrow D^n$, který přenese orbitu z jednoho toku na orbitu toku druhého. Homeomorfismus můžeme uvažovat jako spojitou změnu souřadnic, takže topologická ekvivalence dvou toků znamená, že můžeme najít spojitou změnu souřadnic tak, že jeden tok vypadá jako druhý.

Nakonec definujeme pojem *strukturální stability*. Dynamický systém $\dot{x} = f(x)$ na D^n je *strukturálně stabilní*, jestliže existuje nějaké okolí funkce f takové, že pro každou funkci g v tomto okolí, tok indukovaný polem $\dot{x} = g(x)$ je topologicky ekvivalentní s tokem f . Volně řečeno, dynamický systém je strukturálně stabilní, jestliže malé výchylinky původní funkce f nezmění kvalitativní povahu toku.

4.2 Teorie katastrof

Mějme dynamický systém daný $f : X \times A \rightarrow R^n$, $\dot{x} = f(x, a)$. Systém je zde uvažován *jako parametrizovaný* nějakým parametrem $a = (a_1, \dots, a_r)$. Předpokládejme, že parametr a je pomalu proměnný v čase. Většina malých časových změn v a nezpůsobí radikální změny v kvalitativní povaze dynamického systému. Nicméně někdy dostaneme opravdu strukturální změnu.

Například, mějme systém na R^1 daný

$$\dot{x} = x^2 + a.$$

Jestliže a je kladné, neexistuje rovnováha systému. Jestliže a je nulové, existuje právě jedna rovnováha,

$x^* = 0$; a jestliže a je záporné, existují dvě rovnováhy $x_1^* = -a^{1/2}, x_2^* = +a^{1/2}$.

Topologická povaha systému prodělá radikální změnu, když a prochází nulou. Říkáme, že nula je *bod katastrofy systému* $\dot{x} = x^2 + a$.

Cílem teorie katastrof je klasifikovat všechny cesty, ve kterých systém může prodělat strukturální změnu. Bohužel tento cíl je velmi daleko. Současný stav této teorie je dobře rozvinutý pouze ve studiu *lokálních katastrof systémů gradientů*.

Nechť $V : R^n \times R^r \rightarrow R$ je potenciální funkce pro systém gradientů. R^n interpretujme jako stavový prostor systému a R^r jako parametrický prostor. Potom rovnováhy systému

$$\dot{x} = D_x V(x, a),$$

jsou právě singularity funkce $V(x, a)$; x^* je rovnováha tehdy a jenom tehdy, pokud se $D_x V(x, a)$ rovná nule. Tedy otázka, jak se změní povaha systému $\dot{x} = D_x V(x, a)$, když se změní a , se může zredukovat na hledání singularit $V(x, a)$.

Příklad uvedený výše $\dot{x} = x^2 + a$ odpovídá této konstrukci, protože je to systém gradientů s $V(x, a) = x^3/3 + ax$.

Pozoruhodné je, že pro $r \leq 4$, že existuje pouze sedm odlišných druhů „stabilních“ singularit. Je to sedm základních katastrof podle Thomova klasifikačního teoremu. Zhruba řečeno, „nedegenerovaná“ singularita $V(x, a)$ může být klasifikována jako jeden z těchto sedmi základních typů. Příklad uvedený výše, kde $V(x, a) = x^3/3 + ax$, je příklad *překladové* (záhybové) *katastrofy*, nejjednodušší elementární katastrofy.

Kapitola 7

Dualita v mikroekonomii

1 Úvod

Co se myslí tím, když se řekne, že existuje *dualita* mezi nákladovou a produkční funkcí? Předpokládejme, že je dána *produkční funkce* F a že $u = F(\mathbf{x})$, kde u je maximální množství výroby (produkce), které může být vyrobeno technologií během určitého období, jestliže vektor vloženého (vstupního) množství $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ je užit během období. Tudíž produkční funkce F popisuje technologii dané firmy. Na druhou stranu *minimální celkové náklady* firemní výroby na nejmenší výstup (produkcí) úrovně u dané vstupními cenami $(p_1, p_2, \dots, p_N) \equiv p$ jsou definovány jako $C(u, \mathbf{p})$ a to je samozřejmě funkce u, p a dané produkční funkce F . To co není tak samozřejmé, je to, že (za určitých podmínek regularity) *nákladová funkce* $C(u, \mathbf{p})$ rovněž zcela popisuje technologii dané firmy, tj. daná firemní nákladová funkce C může být použita k definování firemní produkční funkce F . Tudíž se jedná o *dualitu* mezi nákladovou a produkční funkcí v tom smyslu, že každá z těchto funkcí může popisovat technologii firmy stejně dobře.

V první části této kapitoly rozvineme tuto dualitu mezi nákladovou a produkční funkcí podrobněji. V druhé části odvodíme podmínky regularity, jež nákladová funkce C musí mít (bez ohledu na tvar funkce

nebo zvláštních regulárních vlastností produkční funkce F), a ukážeme, jak může být produkční funkce zkonstruována z dané nákladové funkce. Ve třetí části rozvineme tuto dualitu mezi nákladovou a produkční funkcí vícero formálnějším způsobem.

Ve čtvrté části budeme uvažovat o dualitě mezi (přímou) produkční funkcí F a vzájemně si odpovídající nepřímou produkční funkcí G . Daná produkční funkce F , vstupní ceny $p \equiv (p_1, p_2, \dots, p_N)$ a vstupní rozpočet y dolarů, *nepřímé produkční funkce* $G(y, \mathbf{p})$ je definována jako maximální výstup (produkt) $u = F(\mathbf{x})$, který může být vyroben (vyprodukován) daným rozpočtem vynuceným vstupními náklady $\mathbf{p}^T \mathbf{x} \equiv \sum_{i=1}^N p_i \mathbf{x}_i \leq y$. Tudíž nepřímá produkční funkce $G(y, \mathbf{p})$ je funkcí maximálního přípustného rozpočtu y , vstupních cen p , se kterými výrobce počítá a produkční funkci F výrobce. Za určitých regulárních podmínek se ukáže, že G může také zcela popisovat technologii a tudíž je tu dualita mezi přímou a nepřímou produkční funkcí.

Výše uvedené duality mezi náklady, produkcí (výrobou) a nepřímou produkční funkcí se také může interpretovat v kontextu teorie spotřeby: prostě nechat (dovolit) F být *užitkovou funkcí spotřebitele*, \mathbf{x} vektorem nakoupeného zboží (nebo nájemné), u užitkovým stupněm spotřebitele a y *příjmem* spotřebitele nebo výdaji (náklady) na N komodit. Potom $C(u, \mathbf{p})$ je minimální náklad (výdaj) dosahující užitkový stupeň u daný tak, že spotřebitel počítá s cenami p za zboží a to je dualita mezi užitkovou funkcí F spotřebitele a funkcí C , která je často nazývána *nákladovou (výdajovou) funkcí* v kontextu teorie spotřebitele. Podobně $G(y, \mathbf{p})$ může být nyní definována jako maximální užitek, který spotřebitel může dosáhnout tak, že počítá s cenami p a příjmem y vydá na N komodit. V souvislosti se spotřebitelem je G nazývána jako *nepřímá užitková funkce* spotřebitele.

Tudíž každá z našich duálních teorií má dvě interpretace: jednak v souvislosti s výrobou a jednak v souvislosti se spotřebitelem. V části 2 chceme využít výrobní teoretickou terminologii kvůli konkrétnosti. Nicméně v následující části budeme používat více neutrální terminologii, která bude zahrnovat jak produkční tak i spotřební interpretaci. Produkční resp. užitkovou funkci F budeme nazývat *agregační funkce*, nákladovou resp. výdajovou funkci C *nákladová funkce* a nepřímou produkční resp. užitkovou funkci G *nepřímá agregační funkce*.

V páté části je zavedena funkce vzdálenosti $D(u, \mathbf{x})$. Vzdáleností funkce poskytuje ještě další způsob charakteristiky technologie. Hlavní použití vzdálenostní funkce je v konstrukci Malmquistova (1953) množstevního

indexu.

V části 6 prodiskutujeme několik dalších teorií duality: tj. prodiskutujeme další metody pro ekvivalentní popis technologie, buď lokálně nebo globálně, v jednovstupém nebo v N -vstupém kontextu. Čtenář, který se zajímá o aplikaci, může přeskočit části 3 – 6.

Matematické teorie prezentované v části 2 – 6 mohou vypadat jen jako čistě teoretické výsledky (pro matematické účely) bez praktického využití. Avšak toto není ten případ. V části 7 – 10 předvedeme některé aplikace dříve rozvinutých teorií. Tyto aplikace spadají do dvou hlavních kategorií: 1) měření technologií nebo preferencí (část 9 a 10) 2) odvození srovnatelných statistických výsledků (část 7 a 8).

V části 10 se zaměříme na firmy, které mohou produkovat mnoho výstupů, zatímco zpracovávají mnoho vstupů (kdežto předtím jsme se zabývali pouze jedním vstupem). Uvedeme některé teorie duality a povšimneme si jejich některých aplikací.

Nakonec v části 11 a 12 se krátce zmíníme o některých dalších oblastech ekonomiky, kde mohou být duální teorie aplikovány.

Důkazy jsou v některých částech vynechány : důkazy mohou být nalezeny v odkazované literatuře nebo v Diewertovi (1982).

2 Dualita mezi nákladovou (výdajovou) a produkční (užitkovou) funkcí: Zjednodušený pohled

Předpokládejme, že máme dānu N -rozměrnou vstupní produkční funkci $F: u = F(\mathbf{x})$, kde u je množství vyprodukovaného výstupu za určitou dobu a $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \geq 0_N$ je nezáporný vektor vstupu zpracovaného za tuto dobu. Dále předpokládejme, že výrobce může nakoupit množství zpracovávaných vstupů za pevné kladné ceny $\mathbf{p} \equiv (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \gg 0_N$ a že se výrobce nepokusí mít monopolní sílu na trhu vstupů.*

*V části 11 je tato podmínka zmírněna.

Nákladová funkce výrobce C je definována jako výsledek problému minimalizace ceny výroby při zachování výstupní úrovně u , za podmínky, že výrobce počítá se vstupním vektorem cen p :

$$C(u, \mathbf{p}) \equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^T \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\}. \quad (2.1)$$

V této části je ukázáno, že nákladová funkce C vyhovuje překvapivému počtu podmínek regularity, bez ohledu na funkcionální tvar produkční funkce F , poskytující jen řešení cenového minimalizačního problému 2.1. V následující části je ukázáno, jak tyto podmínky regularity nákladové funkce mohou být pužity v případě důkazu komparativních statistických teorií o odvození poptávkové funkce pro vstupy ([24]).

Dříve než zavedeme vlastnosti nákladové funkce C , je vhodné dát prostor následujícím minimalizačním podmínkám regularity produkční funkce F :

Předpoklad 1 pro F

F je spojitá shora, tj. pro všechna $u \in \text{range} F$ je $L(u) \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0_N, F(\mathbf{x}) \geq u\}$ uzavřená množina.

Jestliže F je spojitá funkce, pak samozřejmě F bude rovněž spojitá shora. Předpoklad 1 je dostatečný k implikaci toho, že řešení cenového (nákladového) minimalizačního problému 2.1 existuje.

Následujících sedm vlastností pro nákladovou funkci C může být nyní odvozeno jen za předpokladu, že produkční funkce F vyhovuje předpokladu 1.

Vlastnost 1 pro C

Pro každé $u \in \text{prostor } F$ a $p \gg 0_N$, $C(u, \mathbf{p}) \geq 0$, tj. C je nezáporná funkce.

Důkaz.

$$\begin{aligned} C(u, \mathbf{p}) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0_N, F(\mathbf{x}) \geq u\} \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{x}^*, \text{ kde } \mathbf{x}^* \geq 0_N \text{ a } F(\mathbf{x}^*) \geq u \\ &\geq 0, \text{ neboť } \mathbf{p} \gg 0_N \text{ a } \mathbf{x}^* \geq 0_N. \end{aligned}$$

Vlastnost 2 pro C

Jestliže $p \gg 0_N$ a $k > 0$, potom $C(u, k\mathbf{p}) = kC(u, \mathbf{p})$ pro každé $u \in \text{range}F$, tj. nákladová funkce je (jednoznačně) lineárně homogenní ve vstupních cenách pro fixní výstupní úroveň.

Důkaz. Necht' $p \gg 0_N, k > 0$ a $u \in \text{range}F$. Pak

$$\begin{aligned} C(u, k\mathbf{p}) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{(k\mathbf{p})^T \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} \\ &= k \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^T \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} = k C(u, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Vlastnost 3 pro C

Jestliže nějaká kombinace vstupních cen roste, pak minimální produkční náklady reálného výstupu úrovně u se sníží, tj. jestliže $u \in \text{range}F$ a $\mathbf{p}^1 > \mathbf{p}^0$, pak $C(u, \mathbf{p}^1) \geq C(u, \mathbf{p}^0)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} C(u, \mathbf{p}^1) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^{1T} \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} \\ &= \mathbf{p}^{1T} \mathbf{x}^1, \text{ kde } \mathbf{x}^1 \geq 0_N \text{ a } F(\mathbf{x}^1) \geq u \\ &\geq \mathbf{p}^{0T} \mathbf{x}^1, \text{ neboť } \mathbf{p}^1 > \mathbf{p}^0 \text{ a } \mathbf{x}^1 \geq 0_N \\ &\geq \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^{0T} \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\}, \text{ neboť } \mathbf{x}^1 \text{ je} \\ &\quad \text{připustný pro minimalizaci nákladů,} \\ &\quad \text{ale není nutně optimální} \\ &\equiv C(u, \mathbf{p}^0). \end{aligned}$$

Vlastnosti nákladové funkce byly intuitivně zřejmé z ekonomického pohledu. Ale následující důležité vlastnosti nejsou tak intuitivně zřejmé.

Vlastnost 4 pro C

Pro všechna $u \in \text{range}F$, $C(u, \mathbf{p})$ je konkávní funkce p .

Důkaz: Necht' $u \in \text{range} F$, $\mathbf{p}^0 \gg 0_N$, $\mathbf{p}^1 \gg 0_N$ a $0 \leq \lambda \leq 1$. Pak

$$\begin{aligned}
 C(u, \mathbf{p}^0) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^{0T} \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} = \mathbf{p}^{0T} \mathbf{x}^0 \text{ a} \\
 C(u, \mathbf{p}^1) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^{1T} \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} = \mathbf{p}^{1T} \mathbf{x}^1. \text{ Nyní} \\
 C(u, \lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{(\lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1)^T \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} \\
 &= (\lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1)^T \mathbf{x}^\lambda \\
 &= \lambda \mathbf{p}^{0T} \mathbf{x}^\lambda + (1 - \lambda) \mathbf{p}^{1T} \mathbf{x}^\lambda \\
 &\geq \lambda \mathbf{p}^{0T} \mathbf{x}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^{1T} \mathbf{x}^1, \text{ neboť } \mathbf{x}^\lambda \text{ je přípustné pro} \\
 &\quad \text{minimalizaci nákladů ve spojitosti s cenovým} \\
 &\quad \text{vektorem vstupů } \mathbf{p}^0 \text{ a } \mathbf{p}^1, \text{ ale není nutně} \\
 &\quad \text{optimální pro tyto úlohy} \\
 &= \lambda C(u, \mathbf{p}^0) + (1 - \lambda) C(u, \mathbf{p}^1).
 \end{aligned}$$

Základní idea ve výše uvedeném důkazu je opakovaně použita v duální teorii. Vzhledem k neintuitivní povaze vlastnosti 4 je asi výhodné poskytnout geometrickou interpretaci ve 2–vstupovém případě (tj. $N = 2$).

Předpokládejme, že výrobce produkuje výstup úrovně u . Definujme množinu S^0 jako množinu nezáporných kombinací vstupů, které jsou buď na nebo pod optimální nákladovou čarou (izokvantou), kdy výrobce počítá s cenami \mathbf{p}^0 ; tj. $S^0 \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^{0T} \mathbf{x} \leq C(u, \mathbf{p}^0), \mathbf{x} \geq 0_N\}$, kde $C^0 \equiv C(u, \mathbf{p}^0) = \mathbf{p}^{0T} \mathbf{x}^0$ je minimum produkčních nákladů výstupu u daných tak, že výrobce počítá s cenami $\mathbf{p}^0 \gg 0_N$. Všimněme si, že vektor vstupů \mathbf{x}^0 řeší nákladovou minimalizační úlohu v tomto případě. Nyní předpokládejme, že výrobce počítá se vstupními cenami $\mathbf{p}^1 \gg 0_N$ a definujme S^1, C^1 , a \mathbf{x}^1 analogicky, tj. $S^1 \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^{1T} \mathbf{x} \leq C(u, \mathbf{p}^1), \mathbf{x} \geq 0_N\}$, $C^1 \equiv C(u, \mathbf{p}^1) = \mathbf{p}^{1T} \mathbf{x}^1$, kde vektor vstupů \mathbf{x}^1 řeší nákladový minimalizační problém, kdy výrobce počítá s cenami \mathbf{p}^1 .

Necht' $0 < \lambda < 1$ a nyní předpokládejme, že výrobce počítá s průměrnými cenovými vstupy $\lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1$.

Definujme S^λ, C^λ a \mathbf{x}^λ jako předtím:

$$\begin{aligned} S^\lambda &\equiv \{\mathbf{x} : (\lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1)^T \mathbf{x} \leq C(u, \lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1), \mathbf{x} \geq 0_N\}, \\ C^\lambda &\equiv C(u, \lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1) = (\lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1)^T \mathbf{x}^\lambda, \end{aligned}$$

kde \mathbf{x}^λ řeší nákladový minimalizační problém, kdy výrobce počítá s průměrnými cenami $\lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1$. Nakonec uvažujme nákladovou izokvantu, která by byla výsledkem, jestliže výrobce spotřebovává průměr ze dvou počátečních nákladů $\lambda C^0 + (1 - \lambda) C^1$, odpovídajících průměru cen vstupů $\lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1$. Množina nezáporných kombinací vstupů, která je buď na nebo pod nákladovou linií, je definována jako množina $S^* \equiv \{\mathbf{x} : (\lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1)^T \mathbf{x} \leq \lambda C^0 + (1 - \lambda) C^1, \mathbf{x} \geq 0_N\}$. K ukázání konkávnosti C potřebujeme ukázat, že $C^\lambda \geq \lambda C^0 + (1 - \lambda) C^1$ nebo (ekvivalentně) potřebujeme ukázat, že S^λ obsahuje množinu S^* . To může být dokázáno tak, že nákladová izokvanta příslušící množině S^* , $L^* \equiv \{\mathbf{x} : (\lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1)^T \mathbf{x} = \lambda C^0 + (1 - \lambda) C^1\}$ protíná průnik nákladových izokvant příslušících množinám S^0 a S^1 . Nákladová izokvanta příslušící množině S^λ , $L^\lambda \equiv \{\mathbf{x} : (\lambda \mathbf{p}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{p}^1)^T \mathbf{x} = C^\lambda\}$ je zřejmě souběžná (paralelní) s L^* . A konečně L^λ musí být buď shodná s L^* nebo ležet nad ní, protože kdyby L^λ byla pod L^* , tak by existoval bod na u izokvantě, který by ležel pod alespoň jednou z nákladových izokvant $L^0 \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^{0T} \mathbf{x} = C^0\}$ nebo $L^1 \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^{1T} \mathbf{x} = C^1\}$, což by odporovalo minimalizaci nákladů v \mathbf{x}^0 nebo \mathbf{x}^1 .

Vlastnost 5 pro C

Pro všechna $u \in \text{range} F$, $C(u, \mathbf{p})$ je spojitá v p pro $p \gg 0_N$. [Důkaz této vlastnosti je založen na výsledcích ve Fenchelovi (1953, str.75) a Rockafellarovi (1970, str. 82).]

Vlastnost 6 pro C

$C(u, \mathbf{p})$ je neklesající v u pro pevné p , tj. jestliže $p \gg 0_N, u^0, u^1 \in \text{range} F$, a $u^0 \leq u^1$, pak $C(u^0, \mathbf{p}) \leq C(u^1, \mathbf{p})$.

Důkaz:

Nechť $p \gg 0_N$, $u^0, u^1 \in$ prostor F a $u^0 \leq u^1$. Pak

$$\begin{aligned} C(u^1, \mathbf{p}) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^T \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u^1\} \\ &\geq \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^T \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u^0\}, \text{ neboť kdyby } u^0 \leq u^1, \text{ pak} \\ &\quad \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u^1\} \subset \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u^0\} \text{ a minimum} \\ &\quad \mathbf{p}^T \mathbf{x} \text{ nad větší množinou nemůže růst} \\ &\equiv C(u^0, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

V porovnání s předcházejícími vlastnostmi nákladové funkce vyžaduje následující vlastnost silný matematický aparát. Protože tyto matematické závěry jsou užitečné nejenom v této kapitole, ale i v kapitolách následujících, na chvíli odbočíme a uvedeme je.

V následujících definicích necht' S značí podmnožinu \mathbb{R}^M , T je podmnožinou \mathbb{R}^K , $\{x^n\}$ je posloupnost bodů z množiny S a $\{y^n\}$ posloupnost bodů z množiny T . Pro úplnější diskusi o následujících definicích a teoriích — viz. [3, Chapter 1 of the Handbook, Green a Heller].

Definice:

Φ je *korespondence* (mnohoznačné zobrazení) z S do T , jestliže pro každé $x \in S$ existuje neprázdná množina obrazů $\Phi(x)$, která je podmnožinou T .

Definice:

Korespondence Φ je *shora semispojité* (neboli *shora hemispojité*) v bodě $x^0 \in S$, jestliže $\lim_n x^n = x^0$, $y^n \in \Phi(x^n)$, $\lim_n y^n = y^0$, implikuje $y^0 \in \Phi(x^0)$. Korespondence Φ je *zdola semispojité* v bodě $x^0 \in S$, jestliže $\lim_n x^n = x^0$, $y^0 \in \Phi(x^0)$ implikuje, že existuje posloupnost $\{y^n\}$, tak že $y^n \in \Phi(x^n)$ a $\lim_n y^n = y^0$. Korespondence Φ je *spojité* v $x^0 \in S$, jestliže je shora a zdola semispojité v bodě x^0 .

Lemma 2 [Berge (1963, p. 116)]:

Φ je shora semispojité korespondence na S právě tehdy, když graf $\Phi \equiv \{(x, y) : x \in S, y \in \Phi(x)\}$ je uzavřená množina $S \times T$.

Theorem shora semi-spojitého maxima [Berge (1963, p. 116)]

Nechť f je shora spojitá funkce definovaná na $S \times T$, kde T je kompaktní (uzavřená, ohraničená) podmnožina \mathbb{R}^K . Předpokládejme, že Φ je korespondence z S do T a že Φ je shora semi-spojité na S . Pak funkce g definovaná $g(x) \equiv \max_V \{f(x, y) : y \in \Phi(x)\}$ je jednoznačně definována a je shora semi-spojité na S .

Theorem maxima [Debreu (1952, pp. 889 – 890); (1959, p. 19); Berge (1963, p. 116)]

Nechť f je spojitá funkce reálných hodnot definovaná na $S \times T$, kde T je kompaktní podmnožina \mathbb{R}^K . Nechť Φ je korespondence z S do T a nechť Φ je spojitá na S . Definujme (maximum) funkce g jako $g(x) \equiv \max_y \{f(x, y) : y \in \Phi(x)\}$ a korespondenci ξ jako $\xi(x) \equiv \{y : y \in \Phi(x) \text{ a } f(x, y) = g(x)\}$. Potom funkce g je spojitá na S a korespondence ξ je shora semi-spojité na S .

Vlastnost 7 pro C

Pro každé $p \gg 0_N$, $C(u, p)$ je zdola spojitá v u ; tj. jestliže $p^* \gg 0_N$, $u^* \in \text{range } F$, $u^n \in \text{range } F$ pro všechna n , $u^1 \leq u^2 \leq \dots$ a $\lim u^n = u^*$, pak $\lim_n C(u^n, p^*) = C(u^*, p^*)$.

Důkaz vlastnosti 7 se nachází v Diewert (1982).

Za účelem přiblížení této vlastnosti v C , čtenář může zjistit, že je výhodné zvolit $N = 1$ a nechat produkční funkce $F(x)$ jako následující *krokovací* funkci (shora spojitá) [Shepard (1970, p. 89)]:

$$F(x) \equiv \{0, \text{ jestliže } 0 \leq x < 1; 1, \text{ jestliže } 1 \leq x < 2; 2, \text{ jestliže } 2 \leq x < 3; \dots\}.$$

Pro $p > 0$ je odpovídající nákladová funkce $C(u, p)$ následující (zdola spojitá) *krokovací* funkce:

$$C(u, p) \equiv \{0, \text{ jestliže } 0 = u; p, \text{ jestliže } 0 < u \leq 1; 2p, \text{ jestliže } 1 < u \leq 2; \dots\}.$$

Výše uvedené vlastnosti nákladové funkce mají empirické důsledky, jak si ukážeme později. Nicméně, jeden důsledek může být uveden na tomto místě. Předpokládejme, že můžeme sledovat náklady, vstupní ceny a výstup (zisk) pro firmu a předpokládejme dále, že máme ekonometricky odhadnutou následující lineární nákladovou funkci:

$$C(u, p) = \alpha + \beta^T p + \gamma u \quad (2.2)$$

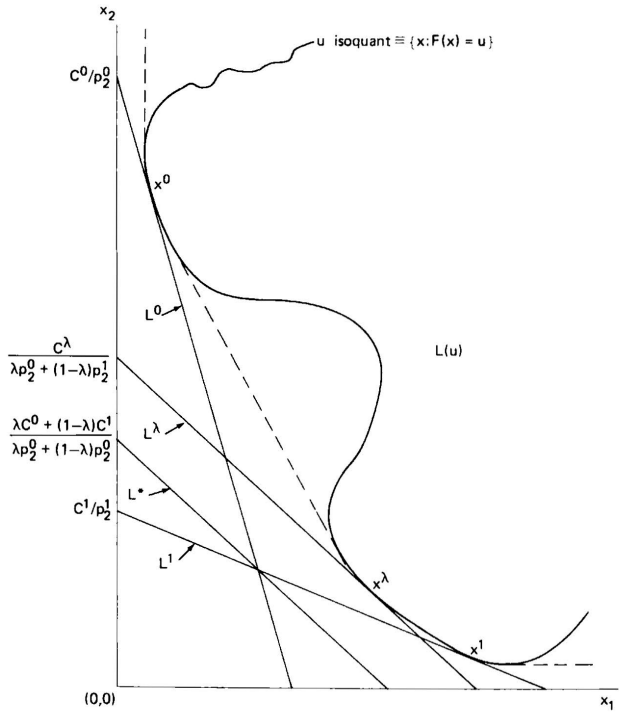
kde α a γ jsou konstanty a β je vektor konstant. Může být (2.2) skutečnou nákladovou funkcí firmy? Odpovědí je ne, jestliže firma konkurenčně minimalizuje náklady a jestliže jedna ze dvou konstant α a γ je nenulová, v tomto případě C nevyhovuje Vlastnosti 2 (lineární homogenita cen vstupů).

Nyní předpokládejme, že máme určenou nějakou skutečnou nákladovou funkci C firmy, ale že neznáme produkční funkci F firmy (s výjimkou toho, že F splňuje Předpoklad 1). Jak můžeme použít danou nákladovou funkci $C(u, p)$ (splňující výše uvedené vlastnosti 1 – 7) k vytvoření příslušné produkční funkce $F(x)$ firmy?

Odpovídající k produkční funkci $u = F(x)$ je skupina produkčních isoploch $\{x : F(x) = u\}$ nebo skupina rovinných množin $L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u\}$. Pro každé $u \in$ prostoru F může být nákladová funkce použita k vytvoření *krajní* aproximace množiny $L(u)$ následujícím způsobem. Vyberte ceny vstupů $p^1 \gg 0_N$ a nakreslete povrch izokvanty $\{x : p^{1T}x = C(u, p^1)\}$. Množina $L(u)$ musí ležet nad (a protínat) touto množinou, protože $C(u, p^1) \equiv \min_x \{p^{1T}x : x \in L(u)\}$; tj. $L(u) \subset \{x : p^{1T}x \leq C(u, p^1)\}$. Vyberte další dodatečné vstupní cenové vektory $p^2 \gg 0_N, p^3 \gg 0_N, \dots$ a graf povrchů izokvanty $\{x : p^{1T}x = C(u, p^1)\}$. Je lehce vidět, že $L(u)$ musí být podmnožinou všech množin $\{x : p^{1T}x \leq C(u, p^1)\}$. Tedy:

$$L(u) \subset \bigcap_{p \gg 0_N} \{x : p^T x \leq C(u, p)\} \equiv L^*(u), \quad (2.3)$$

tj. $L(u)$ množina skutečných produkčních možností musí být obsažena v množině $L^*(u)$ *krajních* aproximovaných produkčních možností, která je obdržena jako průnik všech opěrných celkových nákladových poloprostorů na skutečné množině technologií $L(u)$.



Obrázek (2.1)

Je jasné (viz. obrázek 2.1), že aproximovaná produkční funkce F^* se nebude obecně překrývat se skutečnou funkcí F . Je tedy také jasné, že z hlediska sledovaného tržního chování, jestliže výrobce konkurenčně minimalizuje náklady, potom nezáleží, zda výrobce minimalizující náklady podléhá omezení produkční funkce dané jako F nebo F^* : pozorovaná tržní data nás nikdy nepřivedou ke zjištění, zda výrobce má výrobní funkci F nebo aproximovanou funkci F^* .

Je také jasné, že jestliže chceme, aby se aproximovaná produkční funkce F^* kryla se skutečnou funkcí F ,

Na obrázku (2.1) je $L^*(u)$ označena přerušovanou čarou. Povšimněte si, že okraj (hranici) této množiny vytváří aproximace skutečných isokvant u a že tyto aproximované isokvanty se kryjí se skutečnými jen zčásti, nemají zpětné zakřivení a nekonvexní části skutečných isokvant.

Jestliže již byla skutečná skupina množin $L^*(u)$ aproximovaných produkčních možností vytvořena, aproximované produkční funkce může být definována jako

$$\begin{aligned} F^*(x) &\equiv \max\{u : x \in L^*(u)\} \\ &= \max\{u : p^T x \leq C(u, p) \\ &\quad \text{pro každé } p \gg 0_N\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

pro $x \geq 0_N$. Všimněme si, že maximalizační problém definovaný ve (2.4) má nekonečný počet omezení (jedno omezení pro každé $p \gg 0_N$). Tedy (2.4) může být použito k definování aproximované produkční funkce F^* , máme-li pouze nákladovou funkci C .

pak je nezbytné, aby F splňovala následující dva předpoklady:

Předpoklad 2 pro F

F je neklesající, tj. jestliže $x^2 \geq x^1 \geq 0_N$, pak $F(x^2) \geq F(x^1)$.

Předpoklad 3 pro F

F je kvazi-konkávní funkce, tj. pro každé $u \in$ prostoru F , $L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u\}$ je konvexní množina.

Jestliže F splňuje Předpoklad 2, potom zpětné zakřivení izokvant nemůže nastat, jestliže F splňuje Předpoklad 3, potom nekonvexní izokvanty, znázorněného modelu, na obrázku 2.1, nemohou nastat.

Není příliš obtížné si všimnout, že pokud F splňuje Předpoklady 1–3 a nákladová funkce C se počítá podle (2.1), potom aproximovaná produkční funkce F^* (spočítaná podle (2.4)) se bude krýt se skutečnou produkční funkcí F , tj. je zde *dualita* mezi nákladovými funkcemi splňujícími Vlastnosti 1–7 a produkčními funkcemi splňujícími Předpoklady 1–3. První člověk, který dokázal Theorem formální duality byl Shephard (1953).

V následující části si uvedeme podobný Theorem duality po zavedení některých silnějších podmínek na příslušnou produkční funkci F .

Následující výsledek je podklad pro mnoho teoretických a empirických aplikací teorie duality.

Lemma 3 [Hicks (1946, p. 331); Samuelson (1947, p. 68); Karlin (1959, p 272); a Gorman (1976)]

Předpokládejme, že produkční funkce F splňuje Předpoklad 1 a že nákladová funkce C je definována pomocí (2.1). Nechť $u^* \in$ prostoru F , $p^* \gg 0_N$ a předpokládejme, že x^* je řešení minimalizace nákladů při produkci u^* , když ceny vstupů p^* existují, tj.

$$C(u^*, p^*) \equiv \min_x \{p^{*T} x : F(x) \geq u^*\} = p^{*T} x^*. \quad (2.5)$$

Jestliže navíc je C derivovatelná podle cen vstup; v bodě (u^*, p^*) , pak:

$$x^* = \nabla_p C(u^*, p^*), \quad (2.6)$$

kde

$$\nabla_p C(u^*, p^*) \equiv [\partial C(u^*, p_1^*, \dots, p_N^*) / \partial p_1, \dots, \partial C(u^*, p_1^*, \dots, p_N^*) / \partial p_N]^T$$

je vektor prvních parciálních derivací C podle složek cenového vektoru vstupů p .

Důkaz:

Libovolný vektor vhodných vstupních cen $p \gg 0_N$, x^* je přípustný pro problém minimalizace nákladů definovaný pomocí $C(u^*, p)$, ale není nutně optimální, tj. pro každý $p \gg 0_N$ máme následující nerovnost:

$$p^T x^* \geq C(u^*, p). \quad (2.7)$$

Pro $p \gg 0_N$ definujme funkci $g(p) \equiv p^T x^* - C(u^*, p)$. Z (2.7) plyne, že $g(p) \geq 0$ pro $p \gg 0_N$ a z (2.5) $g(p^*) = 0$. Tedy, $g(p)$ nabývá globálního minima v $p = p^*$. Protože g je diferencovatelná v p^* , musí být splněna první nezbytná podmínka pro lokální minimum:

$$\nabla_p g(p^*) = x^* - \nabla_p C(u^*, p^*) = 0_N,$$

které implikuje (2.6). Q.E.D.

Tedy derivace nákladové funkce výrobce $C(u, p)$ podle cen vstupů p dává výrobcův systém funkcí poptávky po vstupech, který minimalizuje náklady $x(u, p) = \nabla_p C(u, p)$.

Výše uvedená lemma by měla být pečlivě srovnána s následujícím závěrem.

Lemma 4 [Shephard (1953, p. 11)]

Jestliže nákladová funkce $C(u, p)$ splňuje Vlastnosti 1–7 a navíc je diferencovatelná podle cen vstupů v bodě (u^*, p^*) , pak

$$x(u^*, p^*) = \nabla_p C(u^*, p^*), \quad (2.8)$$

kde $x(u^*, p^*) \equiv [x_1(u^*, p^*), \dots, x_N(u^*, p^*)]^T$ je vektor množství vstupů minimalizující náklady potřebných k vytvoření u^* jednotek výstupu, máme-li ceny p^* , kde příslušná produkční funkce F^* je definována pomocí (2.4), $u^* \in$ prostoru F^* a $p^* \gg 0_N$.

Rozdíl mezi Lemmatem 3 a Lemmatem 4 je, že Lemma 3 předpokládá existenci produkční funkce F a nestanovuje vlastnosti nákladové funkce, kromě derivovatelnosti, zatímco Lemma 4 předpokládá pouze existenci nákladové funkce splňující příslušné podmínky regularity a odpovídající produkční funkce F^* je definována za použití dané nákladové funkce. Tedy, z ekonometrického pohledu, Lemma 4 je užitečnější než Lemma 3: za účelem získání podobného systému vstupních poptávkových funkcí, vše, co musíme udělat je předpokládat funkční tvar C , který splňuje příslušné podmínky regularity a derivovat C podle složek cenového vektoru vstupů p . Není nutné odhadnout odpovídající produkční funkci a také není nutné trvat na někdy obtížné algebře při derivování funkcí poptávky po vstupech prostřednictvím Lagrangeových technik.

Historické poznámky

Tvrzení, že existují dva nebo více ekvivalentní způsoby popisující výkony a technologii, tvoří jádro teorie duality. Matematickým základem pro ekonomickou teorii duality je Minkowského Věta (1911), uvedená v Fenchel (1953, p. 48-50) a Rockafellar (1970, p. 95-99): každá uzavřená konvexní množina může být reprezentována jako průnik svých opěrných podprostorů. Tedy, za jistých podmínek, uzavřená konvexní množina $L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u, x \geq 0_N\}$ může být reprezentována jako průnik podprostorů generovaných nákladovými izoplochami dotýkajícími se množiny produkčních možností $L(u), \cap_p \{x : p^T x \geq C(u, p)\}$.

Jestliže spotřebitel (výrobce) má rozpočet $y > 0$, který spotřebuje na N komodit, pak maximální užitek (nebo výstup) při cenách $p \gg 0_N$ může obdržet jako řešení rovnosti $y = C(u, p)$ nebo řešením

$$1 = C(u, p/y) \quad (2.9)$$

(kde upotřebíme lineární homogenitu C v p) pro u jako funkci normalizovaných cen, p/y . Nazvěme výslednou funkci G , tak že $u = G(p/y)$. Alternativně, G může být definována přímo z produkční funkce F následujícím způsobem pro $p \gg 0_N, y > 0$:

$$G^*(p, y) \equiv \max \{F(x) : p^T x \leq y, x \geq 0_N\} \quad (2.10)$$

nebo

$$G\left(\frac{p}{y}\right) \equiv \max \left\{ F(x) : \left(\frac{p}{y}\right)^T x \leq 1, x \geq 0_N \right\}.$$

Houthakker (1951-52, p. 157) nazval funkci G *nepřímou užitkovou funkcí* a, stejně jako nákladovou funkci C , také může charakterizovat preference nebo technologické zvláštnosti za jistých podmínek (Část 4 dále). Důvod pro uvedení tohoto u této části oddílu je, že historicky to bylo zavedeno do ekonomické literatury před nákladovou funkcí od Antonelliho (1971, p. 349) v 1886 a potom Konüsem (Konyus) (1924). Tedy, první článek, který připustil, že preference mohou být ekvivalentně popsány přímou nebo nepřímou funkcí užitku ukázal Konyus a Byushgens (1926, p. 157), kteří si všimli, že rovnice $u = F(x)$ a $u = G(p/y)$ jsou ekvivalentní pro stejné body, ale v odlišných souřadnicích: první rovnice je v bodových souřadnicích, zatímco druhá v rovinných a tečných souřadnicích. Konyus a Byushgens (1926, p. 159) také zavedli minimalizační problém, který dovoluje odvodit přímou užitkovou funkci z nepřímé užitkové funkce a, konečně, znázornili do grafu různé preference v cenovém prostoru pro případ dvou druhů zboží.

Teorie duality v anglicky psané literatuře pravděpodobně začala dvěma články od Hotellinga (1932, 1935), který asi jako první ekonom užil slovo *dualita*:

Stejně tak jako máme užitkovou funkci u spotřebních veličin, jejichž derivací jsou ceny, tak máme duálně funkci cen, jejíž derivací jsou spotřební veličiny.
[Hotelling (1932,p. 594)].

Hotteling (1932, p. 594) také připustil, že nákladová funkce může být zobrazována křivkami, které jsou konkávně rostoucí, tj. poznal, že nákladová funkce $C(u, p)$ by vyhovovala *doplňené* podmínce v p .

Hotelling (1932, p. 590; 1935, p. 68) také zavedl *ziskovou funkci* Π , která poskytuje ještě další způsob jak může být popsána technologie klesajících výnosů z rozsahu. S použitím našeho zápisu je funkce Π definována jako

$$\Pi(p) \equiv \max \{F(x) - p^T x\} \quad (2.11)$$

Hotelling určil, že poptávkové funkce, maximalizující zisk $[x_1(p), \dots, x_N(p)]^T \equiv x(p)$, mohou být obdrženy diferencováním ziskové funkce, tj. $x(p) = -\nabla_p \Pi(p)$. Tedy, jestliže je Π třídy C^2 , tak lze snadno odvodit Hotellingovy *podmínky symetrie* (1935, p. 69):

$$-\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(p) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_i \partial p_j}(p) = -\frac{\partial x_j}{\partial p_i}(p). \quad (2.12)$$

Roy (1942, p. 20) definoval nepřímou užitkovou funkci G^* jako v (2.10) výše a potom odvodil analogii Lemma 3, výše uvedené, která je nazvána *Royova identita* (1942, pp. 18-19),

$$x \left(\frac{p}{y} \right) = \frac{-\nabla_p G^*(p, y)}{\nabla_y G^*(p, y)}. \quad (2.13)$$

kde $x(p/y) \equiv [x_1(p/y), \dots, x_n(p/y)]^T$ je vektor poptávkových funkcí maximalizujících užitek získaných tak, že spotřebitel (výrobce) má ceny $p \gg 0_N$ a důchod $y > 0$ na spotřebu. Roy (1942, pp. 24-27) ukázal, že G^* se snižuje v ceně p , v důchodu a homogenní stupně 0 v (p, y) ; tj. $G^*(\lambda p, \lambda y) = G^*(p, y)$ pro $\lambda > 0$. Tedy $G^*(p, y) = G^*(p/y, 1) \equiv G(p/y) = G(v)$, kde $v \equiv p/y$ je vektor normalizovaných cen. V článku z roku 1947 Roy odvodil následující verzi Royovy identity (1947, p. 219), kde nepřímá užitková funkce G je použita místo G^* :

$$x_i(v) = \frac{\partial G(v)}{\partial v_i} \bigg/ \sum_{j=1}^N v_j \frac{\partial G(v)}{\partial v_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.14)$$

Francouzský matematik Ville (1951, p. 125) také odvodil užitečné vztahy (2.14) v roce 1946. Snad proto by měla (2.14) být nazývána Villeho identita. Ville (1951, p. 126) si všiml, že jestliže přímá užitková funkce $F(x)$ je lineárně homogenní, potom nepřímá funkce $G(v) \equiv \max_x \{F(x) \mid v^T x \leq 1, x \geq 0_N\}$ je homogenní stupně -1 , tj. $G(\lambda v) = \lambda^{-1} G(v)$ pro $\lambda > 0, v \gg 0_n$ a tedy $-G(v) = -\sum_{j=1}^N v_j (\partial G(v)/\partial v_j)$. Substitute poslední identity do (2.14) dává jednodušší rovnici (viz. také Samuelson (1972)):

$$x_i(v) = -\partial \ln G(v)/\partial v_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.15)$$

V tomto oddíle by měl být také uveden Antonelli (1971, p. 349), který získal Royovu verzi identity v 1886 a Konyus a Byushgens (1926, p. 159) téměř odvodili toto v roce 1926 následujícím způsobem: vzali v úvahu problém minimalizovaného nepřímého užitku $G(v)$ s normalizovanou cenou v při omezení $v^T x = 1$. Jak si Houthakker (1951-52, pp. 157-158) později všiml, tento minimalizační problém s omezením generuje přímou užitkovou funkci, tj. pro $x \gg 0_N$ máme:

$$F(x) = \min_v \{G(v) : v^T x \leq 1, v \geq 0_N\}. \quad (2.16)$$

Konyus a Byushgens získali podmínky prvního řádu pro problém (2.16): $\nabla_v G(v) = \mu x$. Jestliže vyloučíme Lagrangeův multiplikátor μ z tohoto posledního systému rovnic užitím $v^\top x = 1$, získáme vztah $x = \nabla_v G(v) / v^\top \nabla_v G(v)$, který je v (2.14) zapsán ve vektorovém tvaru. Konyus a Byushgens však tento poslední krok přesně neprovedli.

Jiné pozoruhodné pojednání napsal Wold (1943–44). Definoval zde nepřímou užitkovou funkci $G(v)$ (nazval ji „funkce cenové preference“) a ukázal, že plochy indiference cenového prostoru jsou konvexní k počátku nebo lineární, tj. ukázal, že $G(v)$ je kvazikonvexní funkce[†] při normalizovaných cenách v . Woldova raná práce je shrnuta v Wold (1953, str. 145–148).

Malmquist (1953, str. 212) také definuje nepřímou užitkovou funkci $G(v)$ a ukazuje, že je to kvazikonvexní funkce ve v .

Jestliže produkční funkce F vyjadřuje konstantní výnosy z rozsahu produkce (tj. $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ pro všechna $\lambda \geq 0, x \geq 0_N$) a je spojitá, potom se odpovídající nákladová funkce rozkládá následujícím způsobem:

Nechť $u > 0, p \gg 0_N$; potom

$$\begin{aligned}
 C(u, p) &\equiv \min_x \{p^\top x : F(x) \geq u\} \\
 &= \min_x \{up^\top (x/u) : F(x/u) \geq 1\} \\
 &= u \min_z \{p^\top z : F(z) \geq 1\} \\
 &\equiv u C(1, p).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

(Výše uvedený důkaz předpokládá, že existuje alespoň jedno $x^* > 0$ takové, že $F(x^*) > 0_N$, takže množina $\{z : F(z) \geq 1\}$ je neprázdná.) Samuelson (1953–54) předpokládá, že produkční funkce F je lineárně homogenní a podléhá *zobecněnému zákonu klesajících výnosů*, $F(x' + x'') \geq F(x') + F(x'')$ (který je ekvivalentní konkávnosti F , pokud je F lineárně homogenní). Definuje (str. 15) jednotkovou nákladovou funkci $C(1, p)$ a zjišťuje, že $C(1, p)$ má stejné vlastnosti v p jako F v x . Také poznamenává (str. 15), že rovina na ploše

[†]Funkce G je kvazikonvexní právě tehdy, když $(-G)$ je kvazikonkávní.

odpovídající jednotkovému výstupu (oblast nekonečné substitučnosti) bude odpovídat rohu na jednotkové nákladové ploše. Tuto poznámku učinil již Shephard (1953, str. 27–28).

Shephardova monografie z roku 1953 se zdá být prvním moderním, přesným pojednáním o teorii duality. Shephard (1953, str. 13–14) uvádí, že nákladovou funkci $C(u, p)$ můžeme interpretovat jako opěrnou funkci pro množinu $\{x : F(x) \geq u\}$, a užívá tohoto faktu k určení vlastností $C(u, p)$ vzhledem k p . Shephard (1953, str. 13) také zmiňuje Minkowského větu (1911) o konvexních množinách a Bonnesenovu a Fenchelovu monografii o konvexních množinách. Musíme poznamenat, že Shephard neobjevil přímo dualitu mezi produkčními a nákladovými funkcemi, objevil dualitu mezi produkčními a distančními funkcemi, kterou budeme definovat v další části, a pak mezi distančními a nákladovými funkcemi.

Shephard (1953, str. 4) definuje *homotetickou* produkční funkci. Je to taková funkce, kterou lze napsat ve tvaru

$$F(x) = \phi[f(x)],$$

kde f je homogenní funkce stupně jedna a ϕ je spojitá, rostoucí funkce f . Seznámíme se s následujícími dodatečnými předpoklady o F (nebo f):

Předpoklad 4 o F

F je (nezáporně) lineárně homogenní; tj. jestliže $x \geq 0_N, \lambda \geq 0$, pak $F(\lambda x) = \lambda F(x)$.

Předpoklad 5 o F

F je slabě pozitivní; tj. pro každé $x \geq 0_N, F(x) \geq 0$, ale $F(x^*) > 0$ pro alespoň jedno $x^* > 0_N$.

Nyní můžeme usuzovat, že $\phi(f)$ je spojitá, rostoucí funkce jedné proměnné pro $f \geq 0$ a $\phi(0) = 0$. Za těchto podmínek existuje inverzní funkce ϕ^{-1} , která má stejné vlastnosti jako ϕ . Pro všechna $f \geq 0$ platí $\phi^{-1}[\phi(f)] = f$. Jestliže $f(x)$ splňuje výše uvedené předpoklady 1, 4 a 5, potom se nákladová funkce

odpovídající $F(x) \equiv \phi[f(x)]$ rozkládá následovně:
 nechť $u > 0, p \gg 0_N$; pak

$$\begin{aligned}
 C(u, p) &\equiv \min_x \{p^\top x : \phi[f(x)] \geq u\} \\
 &= \min_x \{p^\top : f(x) \geq \phi^{-1}[u]\} \\
 &= \phi^{-1}[u] \min_x \{p^\top (x/\phi^{-1}[u]) : f(x/\phi^{-1}[u]) \geq 1\}, \\
 &\quad \text{kde } \phi^{-1}[u] > 0 \text{ pro } u > 0, \\
 &= \phi^{-1}[u]c(p),
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

kde $c(p) \equiv \min_z \{p^\top z : f(z) \geq 1\}$ je *funkce jednotkových nákladů*, která odpovídá lineárně homogenní funkci f , nezáporně (kladně) lineárně homogenní, neklesající, konkávní a spojitě funkci p (viz výše vlastnosti 1–5). Nebudeme, jako obvykle, schopni odvodit původní produkční funkci $\phi[f(x)]$ z nákladové funkce (2.18), ledaže by f také splňovala výše uvedené předpoklady 2 a 3. Shephard (1953, str.43) obdržel faktorizaci (2.18) pro nákladové funkce odpovídající homotetickým produkčním funkcím.

Shephard (1953, str.28–29) uvádí různá praktická využití teorie duality:

- (i) jako pomůcka při agregaci proměnných,
- (ii) v ekonometrických studiích produkce v případě, že nejsou dostupná vstupní data, ale náklady, vstupní ceny a výstupní data dostupná jsou,
- (iii) jako pomůcka při odvozování srovnávacích neměnných výsledků.

Shephard odvodil, nebo předpověděl mnoho teoretických výsledků a praktických aplikací teorie duality.

Věnujme se nyní určitým výsledkům odvozeným v této kapitole. McFadden (1966) ukázal, že minimum z definice (2.1) existuje, pokud F splňuje předpoklad 1. Vlastnost 1 obdržel Shephard (1953, str. 14), vlastnost 2 Shephard (1953, str. 14) a Samuelson (1953-54, str. 15), vlastnost 3 Shephard (1953, str. 14), vlastnost 4 Shephard (1953, str. 15) [naši metodu důkazu použil McKenzie (1956-57, str. 185)], vlastnosti 5 a 6 Uzawa (1964, str. 217) a konečně vlastnost 7 získal Shephard (1970, str. 83).

Metodu konstrukce množin přibližných produkčních možností $L^*(u)$ pomocí nákladové funkce odvodil Uzawa (1964).

Velmi důležitá je skutečnost, že přibližné izokvanty neobsahují zpětné zahnutí, nebo nekonvexní části pravých izokvant. V souvislosti s teorií spotřebitele na to upozorňuje Hotelling (1935, str. 74), Wold (1943, str. 231; 1953, str. 146) a Samuelson (1950b, str. 359–360) a v souvislosti teorie produkce McFadden (1966, 1978a). Abychom tuto skutečnost zdůraznili, budeme citovat Hotellinga a Samuelsona.

Jestliže bude mít indifferenční křivka pro nákupy vlnitý charakter, na některých částech bude konvexní k počátku a na ostatních částech konkávní. Musíme učinit závěr, že můžeme považovat za podstatné pouze ty části, které jsou konvexní k počátku. Ostatní jsou v podstatě nepozorovatelné. Můžeme je objevit pouze v nespojitostech, které mohou nastat v poptávce s nestálými cenovými poměry, které vedou k nečekaným změnám směru tečny ke grafu poptávky v místě nespojitosti, pokud je přímka potočena. Ale zatímco takovéto nespojitosti mohou odhalit existenci mezery, nemohou nikdy změřit její hloubku. Pokud existují konkávní části indifferenčních křivek a jejich vícerozměrné zobecnění, musejí navždy zůstat v neměřitelné temnotě. [Hotelling(1935, str.74), vlastní překlad]

Musíme poznamenat, že na konkurenčním trhu nemůžeme pozorovat body, kde jsou indifferenční křivky spíše konvexní než konkávní. Takové body jsou navěky zahaleny v temnotě – pokud neučiníme našeho spotřebitele monopolistou, který si vybírá mezi zbožím ležícím na velmi konvexní *rozpočtové křivce*, (která zohledňuje cenu zboží, které spotřebitel nakupuje). V monopolním případě můžeme v bodě rovnováhy klidně odvodit sklon spotřebitelovy indifferenční křivky od sklonu pozorovaného omezení. [Samuelson (1950b, str. 359–360), vlastní překlad]

Náš důkaz lemmatu 3 sleduje důkaz připsaný Diamondem a McFaddenem (1974, str. 4) M. W. Gormanovi, nicméně stejná metoda důkazu byla použita také Karlinem (1959, str. 272). Hicksův a Samuelsonův důkaz lemmatu 3 předpokládá diferencovatelnost produkčních funkcí a užívá podmínku prvního řádu pro nákladovou minimalizaci současně s vlastnostmi omezení. V naší citaci uvedené výše Hotelling (1932, str. 594)

naznačuje, že také obdržel Hicksovy (1946, str. 331) a Samuelsonovy (1947, str. 68; 1953–54, str. 15–16) výsledky v nepatrně odlišném kontextu.

3 Dualita mezi nákladovými a agregačními (produkčními nebo užitkovými) funkcemi

V této části předpokládejme, že agregační funkce F splňuje následující vlastnosti:

Podmínky I pro F

- (i) F je reálná funkce N proměnných definovaná na nezáporném ortantu $\Omega \equiv \{x : x \geq 0_N\}$ a *spojitá* na svém definičním oboru.
- (ii) F je *rostoucí*, t.j. $x'' \gg x' \geq 0_N$ implikuje $F(x'') > F(x')$.
- (iii) F je *kvazikonkávní* funkce.

Poznamenejme, že uvedené vlastnosti (i) a (ii) jsou silnější než předpoklady 1 a 2 o F učiněné v předchozí části. To znamená, že můžeme odvodit o něco silnější podmínky pro nákladovou funkci $C(u, p)$, která odpovídá $F(x)$ splňující podmínky I.

Nechť U je obor hodnot funkce F . Z (i) a (ii) je vidět, že $U \equiv \{u : \bar{u} \leq u < \bar{\bar{u}}\}$, kde $\bar{u} \equiv F(0_N) < \bar{\bar{u}}$. Poznamenejme, že nejmenší horní závora $\bar{\bar{u}}$ může být konečné číslo nebo $+\infty$. Při aplikaci teorie spotřebitele nemáme důvod předpokládat, že \bar{u} je konečné číslo (tj. \bar{u} může být rovno $-\infty$), ale to jenom mírně ubírá na obecnosti.

Definujme množinu kladných cen $P \equiv \{p : p \gg 0_N\}$.

Věta 1

Jestliže F splňuje podmínky I, pak $C(u, p) \equiv \min_x \{p^\top x : F(x) \geq u\}$ je definovaná pro všechna $u \in U$ a $p \in P$ splňující podmínky II uvedené níže.

Důkaz viz Diewert(1982).

Podmínky II pro C

- (i) $C(u, p)$ je reálná funkce $N + 1$ proměnných definovaná na $U \times P$ bodově spojitá v (u, p) v definičním oboru.
- (ii) $C(\bar{u}, p) = 0$ pro každé $p \in P$.
- (iii) $C(u, p)$ je rostoucí v u pro každé $p \in P$; t.j. pokud $p \in P, u', u'' \in U$ při $u' < u''$, potom $C(u', p) < C(u'', p)$.
- (iv) $C(\bar{\bar{u}}, p) = +\infty$ pro každé $p \in P$; tj. jestliže $p \in P, u^n \in U, \lim_n u^n = \bar{\bar{u}}$, potom $\lim_n C(u^n, p) = +\infty$.
- (v) $C(u, p)$ je (pozitivně) lineárně homogenní v p pro všechna $u \in U$; tj. $u \in U, \lambda > 0, p \in P$ implikuje $C(u, \lambda p) = \lambda C(u, p)$.
- (vi) $C(u, p)$ je konkávní v p pro všechna $u \in U$.
- (vii) $C(u, p)$ je rostoucí v p pro $u > \bar{u}$ a $u \in U$.
- (viii) C je taková, že funkce $F^*(x) \equiv \max_u \{u : p^\top x \geq C(u, p) \text{ pro každé } p \in P, u \in U\}$ je spojitá pro $x \geq 0_N$.

Důsledek 1.1

Jestliže $C(u, p)$ splňuje podmínky II uvedené výše, potom definiční obor C může být rozšířen z $U \times P$ na

$U \times \Omega$. Rozšířená funkce C je spojitá v p pro $p \in \Omega \equiv \{p : p \geq 0_N\}$ pro všechna $u \in U$.[‡]

Důsledek 1.2

Pro každé $x \geq 0_N$, $F^*(x) = F(x)$, kde F^* je funkce definovaná nákladovou funkcí C v bodě (viii) podmínek II.

Důsledek 1.2 ukazuje, že nákladová funkce dokáže kompletně popsat produkční funkci, která splňuje podmínky I; tj. uijeme-li McFaddenovu (1966) terminologii, nákladová funkce je *postačující statistika* pro produkční funkci.

Důkaz věty 1 je přímý s výjimkou bodů (i) a (viii), které obsahují vlastnost spojitosti produkční nebo nákladové funkce. Spojitost se jeví jako obtížný pojem teorie duality. Proto se snažíme této vlastnosti v předchozí části vyhnout tak, jak je to jen možné. O problému spojitosti již dříve diskutovali Shephard (1970), Friedman (1972), Diewert (1974a), Blackorby, Primont a Russell (1978) a Blackorby a Diewert (1979).

Abychom dokázali vztah mezi spojitostí $L(u)$ a tím, že $C(u, p)$ je spojitá na $U \times P$, požadujeme, aby byla funkce F rostoucí (vlastnost I(ii)).[§] Pokud je vlastnost I(ii) nahrazena předpokladem slabé monotonie (tak, jako náš starý předpoklad 2 o F z předchozí části), pak náhorní rovina na grafu F („tlusté“ indifferenční plochy v jazyce teorie užitku) způsobí nesouvislosti v C vzhledem k u [srov. Friedman (1972, str. 169)].

Poznamenejme, že II(ii) a II(iii) implikují, že $C(u, p) > 0$ pro $u > \bar{u}$ a $p \gg 0_N$ a že II(iv) není nezávislá vlastnost C , protože plyne z II(ii), (iii), (v) a (vi). poznamenejme také, že F není ryze kvazikonkávní, tj. že množina produkčních možností $L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u\}$ je ryze konvexní.

Konečně, je zřejmé, že máme-li danou pouze nákladovou funkci podniku C , můžeme použít funkci F^* defi-

[‡] $C(u, p)$ nemusí být striktně rostoucí v u , pokud p leží na hranici Ω . Např. uvažme funkci $f(x_1, x_2) \equiv x_1$, která má duální nákladovou funkci $C(u, p_1, p_2) \equiv p_1 u$, která není rostoucí v u , pokud $p_1 = 0$.

[§]Friedman (1972) ukazuje, že I(ii) a spojitost shora (předpoklad I o F v předchozí části) postačují k implikaci joint spojitosti C na $U \times P$. Nicméně, pokud nebudeme předpokládat vlastnost aditivity F , ze spojitosti zdola nemůžeme vyvodit, že $C(u, p)$ je rostoucí v u pro $p \in P$ (vlastnost, která plyne z I(i) až I(ii)).

novanou ve smyslu nákladové funkce v II(viii), abychom vytvořili produkční funkci podniku. Tato skutečnost je formálně zapsána v následující větě.

Věta 2

Jestliže C splňuje podmínky II uvedené výše, potom F^* definovaná II(viii) splňuje podmínky I. Navíc, pokud $C^*(u, p) \equiv \min_x \{p^\top x : F^*(x) \geq u\}$ je nákladová funkce definovaná F^* , potom $C^* = C$.

Důsledek 2.1

Množina supergradientů C vzhledem k p v bodě $(u^*, p^*) \in U \times P$, $\partial C(u^*, p^*)$ je množinou řešení problému nákladové minimalizace $\min_x \{p^{*\top} x : F^*(x) \geq u^*\}$, kde F^* je agregační funkce odpovídající dané nákladové funkci, která splňuje podmínky II. [*Supergradienty* splňují $x^* \in \partial C(u^*, p^*)$ právě tehdy, když $C(u^*, p) \leq C(u^*, p^*) + x^{*\top}(p - p^*)$ pro všechna $p \gg 0_N$.]

Důsledek 2.2 [Shephardovo (1953, str. 11) lemma]

Jestliže C splňuje podmínky II a kromě toho je diferencovatelná vzhledem k cenám vstupů v bodě $(u^*, p^*) \in U \times P$, potom řešení x^* problému nákladové minimalizace $\min_x \{p^{*\top} x : F(x) \geq u^*\}$ je jediné a je rovno vektoru partiálních derivací funkce $C(u^*, p^*)$ podle prvků vektoru cen p ; tj.

$$x^* = \nabla_p C(u^*, p^*). \quad (3.1)$$

Předchozí dvě věty poskytly verzi Shephardovy (1953, 1970) věty o dualitě mezi nákladovými a agregačními funkcemi. Podmínky pro C , které odpovídají našim podmínkám I pro F , se zdají být zřejmé kromě bodu II(viii), který nezbytně zaručuje spojitost agregační funkce F^* odpovídající dané nákladové funkci C . Podmínku II(viii) můžeme vynechat, jestliže zesílíme podmínku II(iii): $C(u, p)$ je rostoucí v u pro každé p náležející do $S \equiv \{p : p \geq 0_N, 1_N^\top p = 1\}$. Lze ukázat, že výsledné F^* je spojitě [srov. Blackorby, Pri-

mont a Russell (1978)]. Mnoho užitečných funkcionálních tvarů však nesplňuje zesílení podmínky II(iii).[¶] Alternativní metoda, jak se zbavit podmínky II(viii), která zachovává spojitost přímé agregační funkce F^* odpovídající dané nákladové funkci C , je objevit lokální věty o dualitě, tj. předpokládejme, že C splňuje podmínky II(i)–II(vii) pro $(u, p) \in U \times P$, kde P je nyní omezeno na *kompaktní*, konvexní podmnožinu kladného ortantu. Lokálně spojitá funkce F^* může být definovaná pomocí C a naopak má C jako svou nákladovou funkci na $U \times P$. Tento přístup provozují Blackorby a Diewert (1979).

Historické poznámky

Věty o dualitě mezi F a C dokázali za různých podmínek Shephard (1953, 1970), McFadden (1962), Chipman (1970), Hanoch (1978), Diewert (1971a, 1974a), Afriat (1973a) a Blackorby, Primont a Russel (1978).

Věty o dualitě mezi C a úrovnovými množinami $F, L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u\}$ dokázali Uzawa (1964), McFadden (1966, 1978a), Shephard (1970), Jacobsen (1970, 1972), Diewert (1971a), Friedman (1972) a Sakai (1973).

4 Dualita mezi přímými a nepřímými agregačními funkcemi

Předpokládejme, že přímé agregační (užitkové nebo produkční) funkce F splňují Podmínky I vypsané v předchozí části. Základní optimalizační problém, o kterém budeme v této části uvažovat, je problém maximalizace užitku (nebo výstupu) $F(x)$, který podléhá rozpočtovému omezení $p^\top x \leq y$, kde $p \gg 0_N$ je vektor cen komodit (nebo vstupů) a $y > 0$ je množství peněz, které může spotřebitel (výrobce) utratit. Protože $y > 0$, můžeme rozpočtové omezení $p^\top x \leq y$ nahradit $v^\top x \leq 1$, kde $v \equiv p/y$ je vektor *normalizovaných cen*.

[¶]Např. uvažme funkci $C(u, p) \equiv b^\top pu$, kde $b > 0_N$, ale b není $\gg 0_N$. Tato funkce odpovídá Leontiefově agregační funkci nebo agregační funkci s pevnými koeficienty.

Nepřímá agregační funkce $G(v)$ je definovaná pro $v \gg 0_N$ jako

$$G(v) \equiv \max_x \{F(x) : v^\top x \leq 1, x \geq 0_N\}. \quad (4.1)$$

Věta 3

Jestliže přímá agregační funkce F splňuje podmínky I, potom nepřímá agregační funkce G splňuje následující podmínky:

Podmínky III pro G

- (i) $G(v)$ je reálná funkce N proměnných definovaná na množině kladných normalizovaných cen $V \equiv \{v : v \gg 0_N\}$ a na tomto definičním oboru je *spojitá*.
- (ii) G je *klesající*; tj. jestliže $v'' \gg v' \gg 0_N$, pak $G(v'') < G(v')$.
- (iii) G je *kvazikonvexní* na V .
- (iv) G^\parallel je taková, že funkce $\hat{F}(x) \equiv \min_v \{G(v) : v^\top x \leq 1, v \geq 0_N\}$ definovaná pro $x \gg 0_N$ je spojitá na tomto definičním oboru a má spojitě rozšíření** na nezáporný výsek $\Omega \equiv \{x : x \geq 0_N\}$.

^{||} G zde je rozšíření G na nezáporný výsek, které je definováno Fenchelovou (1953) uzávěrovou operací; tj. definujeme nadgraf původního G jako $\Gamma \equiv \{(u, v) : v \gg 0_N, u \geq G(v)\}$, definujeme uzávěr Γ jako $\bar{\Gamma}$ a definujeme *rozšířené* G jako $G(v) \equiv \inf_u \{u : (u, v) \in \bar{\Gamma}\}$ pro $v \geq 0_N$. Výsledné rozšířené G je zdola spojitě (množiny $\{v : G(v) \leq u, v \geq 0_N\}$ jsou uzavřené pro všechna u). Pokud je oborem hodnot funkce F množina $U \equiv \{u : \bar{u} \leq u < \bar{\bar{u}}\}$, kde $\bar{u} < \bar{\bar{u}}$, potom obor hodnot nerozšířeného G je $\{u : \bar{u} < u < \bar{\bar{u}}\}$ a obor hodnot rozšířeného G je $\{u : \bar{u} < u \leq \bar{\bar{u}}\}$, takže pokud $\bar{\bar{u}} = +\infty$, potom $G(v) = +\infty$ pro $v = 0_N$ a definovaná pro ostatní body v na hranici nezáporného ortantu.

** F je rozšířená na nezáporný výsek Fenchelovou uzávěrovou operací: definujeme podgraf původního \hat{F} jako $\Delta \equiv \{(u, x) : x \gg 0_N, u \leq \hat{F}(x)\}$, definujeme uzávěr Δ jako $\bar{\Delta}$ a definujeme *rozšířenou* \hat{F} jako $F(x) \equiv \sup_u \{u : (u, x) \in \bar{\Delta}\}$ pro $x \geq 0_N$. Jestliže je nerozšířená funkce \hat{F} spojitá pro $x \gg 0_N$, lze dokázat, že rozšířená funkce \hat{F} je spojitá shora pro $x \geq 0_N$. Podmínka III(iv) implikuje, že rozšířená funkce F je spojitá zdola pro $x \geq 0_N$.

Důsledek 3.1

Přímá agregační funkce F může být opět získána z nepřímé agregační funkce G ; tj. pro $x \gg 0_N$, $F(x) = \min_v \{G(v) : v^\top x \leq 1, v \geq 0_N\}$.

Důsledek 3.2

Nechť F splňuje podmínky I a necht' $x^* \gg 0_N$. Definujme uzavřenou konvexní množinu normalizovaných opěrných nadrovin v bodě x^* jako uzavřenou konvexní množinu $H(x^*) = \{x : F(x) \geq F(x^*), x \geq 0_N\}$.^{††} Pak (i) $H(x^*)$ je množina řešení nepřímého užitkového (nebo produkčního) minimalizačního problému $\min_v \{G(v) : v^\top x^* \leq 1, v \geq 0_N\}$, kde G je nepřímá funkce, která odpovídá F podle definice (7.4) a (ii) pokud $v^* \in H(x^*)$, pak x^* je řešením přímého užitkového (nebo produkčního) maximalizačního problému $\max_x \{F(x) : v^{*\top} x \leq 1, x \geq 0_N\}$.

Důsledek 3.3 [Hotellingova (1935, str. 71); Woldova (1944, str. 69–71; 1953, str. 45) identita]

Jestliže F splňuje podmínky I a navíc je diferencovatelná pro $x^* \gg 0_N$ s nenulovým vektorem gradientu $\nabla F(x^*) > 0_N$, potom x^* je řešením přímého užitkového (nebo produkčního) maximalizačního problému $\max_x \{F(x) : v^{*\top} x \leq 1, x \geq 0_N\}$, kde

$$v^* \equiv \frac{\nabla F(x^*)}{x^{*\top} \nabla F(x^*)}. \quad (4.2)$$

Systém rovnic (4.2) známe pod pojmem systém *inverzních poptávkových funkcí*; i -tá rovnice

$$p_i/y \equiv v_i^* = [\partial F(x^*)/\partial x_i] / \left[\sum_{j=1}^N x_j^* \partial F(x^*)/\partial x_j \right]$$

^{††}Jestliže $v^* \in H(x^*)$, pak $v^{*\top} x^* = 1, x^* \geq 0_N$ a $F(x) \geq F(x^*)$ implikuje $v^{*\top} x \geq v^{*\top} x^* = 1$. Uzavřenost a konvexnost $H(x^*)$ ukázal Rockafellar (1970, str. 215).

vyjadřuje cenu i -té komodity p_i podělenou výdaji y jako funkci vektoru množství x^* , které si spotřebitel nebo výrobce vybere, pokud bude maximalizovat $F(x)$ při rozpočtovém omezení $v^{*\top}x = 1$.

Nyní budeme předpokládat, že máme dānu dobře se chovājící nepřímou agregačnĭ funkci G a ukāžeme, že pomocí této funkce lze definovat dobře se chovājící funkci \hat{F} takovou, že G je její nepřímā funkce.

Věta 4

Předpokládejme, že G splňuje podmínky III. Potom $\hat{F}(x)$, která je definovaná pro $x \gg 0_N$

$$\hat{F}(x) = \min_v \{G(v) : v^\top x \leq 1, v \geq 0_N\} \quad (4.3)$$

mā rozšíření na $x \geq 0_N$, které splňuje podmínky I. Navíc, jestliže definujeme $G^*(x) \equiv \max_x \{\hat{F}(x) : v^\top x \leq 1, x \geq 0_N\}$ pro $v \gg 0_N$, potom $G^*(v) = G(v)$ pro všechna $v \gg 0_N$.

Důsledek 4.1

Nechť G splňuje podmínky III a necht' $v^* \gg 0_N$. Definujme uzavřenou konvexnĭ množinu normalizovaných opěrných nadrovin v bodě v^* jako uzavřenou konvexnĭ množinu $H^*(v^*) = \{v : G(v) \leq G(v^*), v \geq 0_N\}$. Pak (i) $H^*(v^*)$ je množina řešenĭ přímého užitkového (nebo produkčnĭho) maximalizačnĭho problému $\max_x \{\hat{F}(x) : v^{*\top}x \leq 1, x \geq 0_N\}$ kde \hat{F} je přímā funkce, která odpovídā dané nepřímé funkci G podle definice(4.3) a (ii) pokud $x^* \in H^*(v^*)$, pak v^* je řešenĭm přímého užitkového (nebo produkčnĭho) minimalizačnĭho problému $\min_v \{G(v) : v^\top x^* \leq 1, v \geq 0_N\}$.

Důsledek 4.2 [Villeova (1946, str. 35); Royova (1947, str. 222) identita]

Jestliže G splňuje podmínky III a navíc je diferencovatelnā pro $v^* \gg 0_N$ s nenulovĭm vektorem gradientu $\nabla G(v^*) < 0_N$, potom x^* je jedinĭm řešenĭm přímého užitkového (nebo produkčnĭho) maximalizačnĭho

problému $\max_x \{F(x) : v^{*\top} x \leq 1, x \geq 0_N\}$, kde

$$x^* \equiv \frac{\nabla G(v^*)}{v^{*\top} \nabla G(v^*)}. \quad (4.4)$$

Vidíme, že (4.4) poskytuje protějšek Shephardovu lemmatu v předchozí části. Jak uvidíme později, Shephardovo lemma a Royova identita jsou základem pro mnoho teoretických i empirických aplikací.

Závěrem poznamenejme, že podmínka III(iv) se zdá být také trochu divná. Umožňuje nám odvodit přímou agregační funkci z dané nepřímé funkce splňující podmínky III.^{‡‡}

Historické poznámky

Věty o dualitě mezi přímými a nepřímými agregačními funkcemi dokázali Samuelson (1965, 1969, 1972); Newman (1965, str. 138–165); Lau (1969); Shephard (1970, str. 105–113); Hanoch (1978); Weddepohl (1970, kap. 5); Katzner (1970 str. 59–62); Afriat (1972a, 1973c) a Diewert (1974a).

Práce, které uvádějí do souvislosti předpoklady na systém poptávkových funkcí spotřebitele a přímou agregační funkci F (problém integrovatelnosti) napsali Samuelson (1950b); Hurwicz a Uzawa (1971); Hurwicz (1971) a Afriat (1973a, b).

Geometrickou interpretaci Royovy identity najdeme v Darrough a Southey (1977), některá rozšíření viz Weymark (1980).

^{‡‡}Bez podmínky III(iv) můžeme stále vyvozovat spojitost $\hat{F}(x)$ přes $x \gg 0_N$, ale výsledná F nemusí nutně mít spojitě rozšíření na $x \geq 0_N$. (Pokud \hat{F} není nutně konkávní, ale je pouze kvazikonkávní pro $x \gg 0_N$, její rozšíření nemusí být nutně spojitě.) Diskuse a příklady k problému spojitosti viz Diewert (1974a, str. 121–123).

5 Dualita mezi přímými agregačními a distančními nebo deflačními funkcemi

V této části budeme uvažovat o *čtvrté* alternativní metodě charakterizace preferencí spotřebitelů nebo technologií. Tato metoda je zvláště užitečná pro definici jisté třídy indexních čísel podle Malmquista (1953, str. 232).

Jako obvykle, necht' $F(x)$ je agregační funkce splňující podmínky I uvedené výše v části 3. Pro u náležející do vnitřku oboru hodnot F (tj. $u \in \text{int } U$, kde $U \equiv \{u : \bar{u} \leq u < \bar{\bar{u}}\}$) a $x \gg 0_N$, definujme *distanční* nebo *deflační funkci*.^{*} † Pojem *deflační* funkce pro D je výstižnější z ekonomického pohledu. D jako

$$D(u, x) \equiv \max_k \left\{ k : F\left(\frac{x}{k}\right) \geq u, k > 0 \right\}. \quad (5.1)$$

Takže $D(u^*, x^*)$ je největší číslo, které bude snižovat (zvyšovat pokud $F(x^*) < u^*$) bod $x^* \gg 0_N$ na hranici množiny užitkových (nebo produkčních) možností $L(u^*) \equiv \{x : F(x) \geq u^*\}$. Pokud $D(u^*, x^*) > 1$, pak $x^* \gg 0_N$ produkuje vyšší stupeň užitku, nebo produkce než stupeň označený u^* .

Ukázalo se, že matematické vlastnosti $D(u, \mathbf{x})$ podle \mathbf{x} jsou ty samé jako vlastnosti $C(u, \mathbf{p})$ podle \mathbf{p} , ale vlastnosti D podle u jsou převrácené vlastnostem C podle u , jak ukazuje následující věta.

Věta 5

Pokud F splňuje podmínku I, potom D definované v (5.1) splňuje Podmínku IV níže.

Podmínka IV pro D

^{*}Shephard (1953, str. 6; 1970, str. 65) zavedl distanční funkci do ekonomické literatury. Užil mírně odlišné, ale ekvivalentní definice $D(u, x) \equiv 1 / \min_{\lambda} \{\lambda : F(\lambda x) \geq u, \lambda > 0\}$.

[†]McFadden (1978a) a Blackorby, Primont a Russell (1978) nazvali D *transformační* funkcí. V matematické literatuře [např. Rockafellar (1970, str. 28)] je D nazýváno jako *měrná (kontrolní) funkce*.

- (i) $D(u, \mathbf{x})$ je funkce nabývající reálných hodnot s $N + 1$ proměnnými definovanými na $intU \times int\Omega = \{u : \bar{u} < u < \bar{u}\} \times \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \gg 0_N\}$ a je *spojitá* na této oblasti.
- (ii) $D(\bar{u}, \mathbf{x}) = +\infty$ pro každé $\mathbf{x} \in int\Omega$; tj. $u^n \in intU, \lim u^n = \bar{u}, \mathbf{x} \in int\Omega$ implikuje $\lim_n D(u^n, \mathbf{x}) = +\infty$
- (iii) $D(u, \mathbf{x})$ je *klesající* v u pro každé $\mathbf{x} \in int\Omega$; tj. jestliže $\mathbf{x} \in int\Omega, u', u'' \in intU$ s $u' < u''$, potom $D(u', \mathbf{x}) > D(u'', \mathbf{x})$.
- (iv) $D(\bar{u}, \mathbf{x}) = 0$ pro každé $\mathbf{x} \in int\Omega$; tj. $u^n \in intU, \lim u^n = \bar{u}, \mathbf{x} \in int\Omega$ implikuje $\lim_n D(u^n, \mathbf{x}) = 0$
- (v) $D(u, \mathbf{x})$ je (pozitivně) lineárně homogenní v \mathbf{x} pro všechna $u \in intU$; tj. $u \in intU, \lambda > 0, \mathbf{x} \in int\Omega$ implikuje $D(u, \lambda \mathbf{x}) = \lambda D(u, \mathbf{x})$.
- (vi) $D(u, \mathbf{x})$ je konkávní v \mathbf{x} pro všechna $u \in intU$
- (vii) $D(u, \mathbf{x})$ je rostoucí v \mathbf{x} pro všechna $u \in intU$; tj. $u \in intU, \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in int\Omega$ implikuje $D(u, \mathbf{x}' + \mathbf{x}'') > D(u, \mathbf{x}')$.
- (viii) D je taková, že funkce

$$\tilde{F}(\mathbf{x}) \equiv \{u : u \in intU, D(u, \mathbf{x}) = 1\} \quad (5.2)$$

definovaná pro $\mathbf{x} \gg 0_N$ má spojité rozšíření na $\mathbf{x} \geq 0_N$.

Důsledek 5.1

$\tilde{F}(\mathbf{x}) \equiv \{u : u \in intU, D(u, \mathbf{x}) = 1\} = F(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \gg 0_N$ a tudíž $\tilde{F} = F$; tj. původní agregační funkce F je získána z distanční funkce D podle definice (5.2) pokud F splňuje Podmínku I.

Stejně tak jako pro nákladovou funkci $C(u, \mathbf{p})$ popisovanou v Sekci 3, D splňující Podmínky IV na $intU \times int\Omega$ může být jednoznačně rozšířena na $intU \times \Omega$ použitím Fenchelovy uzávěrové operace. Může být ověřeno, že rozšířená D splňuje Podmínky IV (v), (vi) a (vii) na $intU \times \Omega$, ale společná Podmínka spojitosti IV(i) a podmínky monotónnosti v u nemusí být splněny. Mělo by být také poznamenáno, že jestliže Podmínka I (iii) (kvazi-konkávnost F) by byla vynechána, platnost Věty 5 by byla zachována s tím rozdílem, že by musela být vynechána Podmínka IV(vi) (konkávnost D v \mathbf{x}).

Následující věta ukazuje, že deflační funkce D může být také použita pro definici spojité agregační funkce \tilde{F} .

Věta 6

Jestliže D splňuje Podmínky IV, má \tilde{F} definovaná v (5.2) pro $\mathbf{x} \in \text{int}\Omega$ rozšíření na Ω , které splňuje Podmínky I. Navíc, jestliže definujeme deflační funkci D^* korespondující s \tilde{F} jako

$$D^*(u, \mathbf{x}) \equiv \{k : \tilde{F}\left(\frac{\mathbf{x}}{k}\right) = u, k > 0\}, \quad (5.3)$$

potom $D^*(u, \mathbf{x}) = D(u, \mathbf{x})$ pro $(u, \mathbf{x}) \in \text{int}U \times \text{int}\Omega$.

Důsledek 6.1

Pokud D splňuje Podmínky IV a navíc je spojitě diferencovatelná v $(u^*, \mathbf{x}^*) \in \text{int}U \times \text{int}\Omega$ s $D(u^*, \mathbf{x}^*) = 1$ a $\frac{\partial D(u^*, \mathbf{x}^*)}{\partial u} < 0$, potom \mathbf{x}^* je řešení přímé maximalizační úlohy $\max_{\mathbf{x}} \{\tilde{F}(\mathbf{x}) : v^{*\perp} \mathbf{x} \leq 1, \mathbf{x} \geq 0_N\}$, kde \tilde{F} je definováno v (5.2) a $v^* > 0_N$ je definováno jako

$$v^* \equiv \nabla_{\mathbf{x}} D(u^*, \mathbf{x}^*). \quad (5.4)$$

Navíc, \tilde{F} je spojitě diferencovatelná v \mathbf{x}^* s

$$\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{F}(\mathbf{x}^*) = \frac{-\nabla_{\mathbf{x}} D(u^*, \mathbf{x}^*)}{\partial D(u^*, \mathbf{x}^*) / \partial u}. \quad (5.5)$$

Tudíž spotřebitelský systém inverzních poptávkových funkcí může být získán diferencováním deflační funkce D splňující Podmínky IV (plus diferencovatelnost) podle složek vektoru \mathbf{x} .

Historické poznámky

Věty o dualitě mezi distančními nebo deflačními funkcemi D a agregačními funkcemi \tilde{F} byly dokázány Shephardem (1953,1970), Hanochem (1978), McFaddenem (1978a) a Blackorbyem, Primontem a Russellem (1978).

Je zde řada zajímavých souvislostí (a vět o dualitě) mezi přímou a nepřímou agregační, nákladovou a deflační funkcí. Například Malmquist (1953, str. 214) a Shephard (1953, str. 18) ukazují, že se deflační funkce pro nepřímou agregační funkci, $\max_k \{k : G(\frac{v}{k}) \leq u, k > 0\}$, rovná nákladové funkci, $C(u, v)$. Úplný popis těchto vzájemných vazeb a dalších vět o dualitě s různými podmínkami regularity mohou být nalezeny v dílech Hanocha (1980) a Blackorbyho, Primonta a Russella (1978). Některé aplikace jsou v Deatonovi (1979).

Lokální věty o dualitě mezi deflační a agregační funkcí jsou v dílech Blackorbyho a Diewerta (1979).

6 Další věty o dualitě

Konkávnní funkce mohou být také popsány pomocí *konjungovaných* funkcí. Navíc se ukázalo, že uzavřené konvexní množiny mohou také být za určitých podmínek (viz Rockafellar (1970, str. 102-105) a Karlin (1959, str. 226-227)) popsány pomocí konjugované funkce. Tudíž přímá agregační funkce F , mající množiny na konvexní úrovni $L(u) \equiv \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\}$, může být také popsána svojí konjugovanou funkcí stejně tak jako svojí nákladovou, deflační či nepřímou agregační funkcí. Tento přístup pomocí konjugovaných funkcí byl započat Hotellingem (1932, str. 36-39; 1960; 1972) a rozšířen Samuelsonem (1947, str. 36-39; 1960; 1972), atd. Nebudeme se zabývat tímto přístupem detailně, i když v další části si zopakujeme těsnou spojitost vět o dualitě mezi užitkovou a transformovanou funkcí.

Další třída vět o dualitě (které také začal Hotelling (1935, str. 75) a Samuelson(1960)) je získána rozdělením komoditního vektoru $\mathbf{x} \geq 0_N$ na dva vektory \mathbf{x}^1 a \mathbf{x}^2 a potom definováním spotřebitelskou proměnnou agregátní funkcí (alternativně je nazvána podmínkovou nepřímou funkcí užitku) g jako

$$g(\mathbf{x}^1, \mathbf{p}^2, y^2) \equiv \max_{\mathbf{x}^2} \{F(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) : \mathbf{p}^{2T} \mathbf{x}^2 \leq y^2, \mathbf{x}^2 \geq 0_{N_2}\}, \quad (6.1)$$

kde $\mathbf{p}^2 \gg 0_N$ je pozitivní spotřebitelský cenový vektor zboží \mathbf{x}^2 , a $y^2 > 0$ je spotřebitelský rozpočet, který byl určený na utracení za zboží \mathbf{x}^2 . Množina řešení (6.1), $\mathbf{x}^2(\mathbf{x}^1, \mathbf{p}^2, y^2)$, je spotřebitelská podmíněná (na \mathbf{x}^1) poptávková korespondence. Pokud g splňuje náležitosti podmínek regularity, podmíněné poptávkové funkce mohou být generovány aplikováním Royovy identity (4.4) na funkci $G(v^2) \equiv g(\mathbf{x}^1, v^2, 1)$, kde $v^2 \equiv \mathbf{p}^2/y^2$. Pro formální věty o dualitě mezi přímou a variabilně nepřímou agregační funkcí viz. Epstein, Diewert a

Blackorby, Primont a Russell. Pro další aplikace této duality viz. Epstein (pro aplikace spotřebitelské volby v nejistotě) a Pollak a Diewert (estimace preferencí pro veřejné zboží použitím tržních poptávkových funkcí). Konečně, variabilně nepřímá funkce užitku může být použita pro důkaz Hicksovy verze věty o složeném zboží - skupina zboží se chová stejně jako jedna komodita, pokud se ceny ve skupině zboží mění ve stejném poměru - pro aplikace při méně striktních podmínkách než u Hickse viz. Pollak, Diewert a Blackorby, Primont a Russell.

Nyní stručně pojednáme o rozsáhlé literatuře, tj. o důsledcích různých speciálních struktur jedné z mnoha ekvivalentních reprezentací technologie (jako třeba přímá či nepřímá agregační funkce nebo nákladová funkce). Například Shephard ukázal, že homoteticita přímé funkce implikuje, že nákladová funkce je faktorovaná do $\phi^{-1}(u)c(\mathbf{p})$ (viz rovnice (2.18)). Jiným příkladem speciální struktury je separabilita. Reference, které se zabývají implikacemi separability a/nebo homoteticity zahrnují Shephard, Samuelson, Gorman, Lau, McFadden, Hanoch, Pollak, Diewert, Jorgenson a Lau, Blackorby, Primont a Russell a Blackorby a Russell. Pro implikace separability a/nebo homoteticity na Slutského koeficientech nebo na parciálních elasticitách substitute viz Sono, Pearce, Goldman a Uzawa, Geary a Morishima, Berndt, Blackorby a Russell, Diewert a Blackorby a Russell. Pro implikace Hicksovy Věty o agregovaných elasticitách substitute viz. Diewert.

Pro empirické testy předpokladu separability viz. Berndt a Christensen, Burgess a Jorgenson a Lau; pro teoretické diskuse o těchto testových procedurách viz. Blackorby, Primont a Russell a Jorgenson a Lau, Lau, Woodland a Denny a Fuss.

Pro implikace předpokladu konkávnosti přímé agregační funkce nebo předpokladu konvexity nepřímé agregační funkce viz. Diewert.

Výše zmíněné věty o dualitě jsou v podstatě "globální". "Lokální" přístup uvedl ve své práci Blackorby a Kiewer, kde je předpokládáno, že daná nákladová funkce $C(u, \mathbf{p})$ splňuje Podmínky II na $U \times P$, kde U je konečný interval a P je uzavřená, konvexní a ohraničená podmnožina pozitivních cen. Potom zkonstruovali odpovídající přímou agregační, nepřímou agregační a deflační funkci, které jsou duální k dané "lokálně" platné nákladové funkci C . Důkazy těchto "lokálních" vět o dualitě se ukázaly být mnohem jednodušší než odpovídající "globální" věty o dualitě presentované v tomto článku (a jinde), a to z toho důvodu, protože problém spojitosti se neobjevuje díky předpokladu, že $U \times P$ je kompaktní. Tyto "lokální" věty o dualitě

jsou prospěšné v empirických aplikacích, protože ekonometrické estimace nákladových funkcí často nesplňují příslušné podmínky regularity pro všechny ceny, ale podmínky mohou být splněny na menší podmnožině cen, která je empiricky relevantní množinou cen.

Epstein rozšířil teorii duality tak, aby pokrývala více obecných maximalizačních úloh. V Epsteinovi je uvažována následující úloha maximalizace užítku, která se objevila v kontextu teorii volby v podmínkách nejistoty:

$$\max_{\mathbf{x}, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2} \{F(\mathbf{x}, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) : \mathbf{x} \geq 0_N, \mathbf{x}^1 \geq 0_{N_1}, \mathbf{x}^2 \geq 0_{N_2}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{p}^\top \mathbf{x} + \mathbf{p}^1 \top \mathbf{x}^1 \leq y^1, \mathbf{p}^\top \mathbf{x} + \mathbf{p}^2 \top \mathbf{x}^2 \leq y^2\}, \quad (6.3)$$

kde \mathbf{x} představuje současnou spotřebu, \mathbf{x}^i představuje spotřebu ve stavu i ($i = 1, 2$), p je současný cenový vektor, \mathbf{p}^i je diskontní budoucí cenový vektor, který nastane jestliže nastane stav i a $y^i > 0$ je spotřebitelský diskontní příjem jestliže nastane stav i . V Epsteinovi je uvažována následující maximalizační úloha:

$$\max_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \geq 0_N, c(\mathbf{x}, \alpha) \leq 0\}, \quad (6.4)$$

kde c je daná omezovací funkce, která závisí na vektoru parametrů α .

Nebudeme se snažit provést detailní analýzu Epsteinových výsledků, ale raději budeme prezentovat více abstraktní verzi jeho základní techniky, která snad zachytí základ teorie duality. Základní maximalizační úloha, kterou jsme studovali je $\max_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v)\}$, kde F je funkce N reálných proměnných \mathbf{x} definovaných na nějaké množině S a $B(v)$ je omezující množina, která závisí na vektoru o M parametrech v , které se mění na množině V . Naše předpoklady o množinách S a V a o omezující množině odpovídající B jsou:

- (i) S a V jsou neprázdné kompaktní množiny v \mathbb{R}^N a \mathbb{R}^M .
- (ii) Pro každé $v \in V$, je $B(v)$ neprázdná a $B(v) \subset S$.
- (iii) Pro každé $\mathbf{x} \in S$, je inverzní korespondence $B^{-1}(\mathbf{x})$ neprázdná a

$$B^{-1}(\mathbf{x}) \subset V. \quad (6.5)$$

- (iv) Korespondence B je spojitá na V .
- (v) Korespondence B^{-1} je spojitá na S .

Naše předpoklady na základní funkci F jsou:

- (i) F je reálná funkce N proměnných definovaná na S a je na S spojitá.

(6.6)

- (ii) Pro každé $\mathbf{x}^* \in S$, existuje $v^* \in V$ takové, že $F(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v^*)\}$.

Funkce G duální k F je definovaná pro $v \in V$ takto:

$$G(v) \equiv \max_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v)\}. \quad (6.7)$$

Věta 7

Jestliže S , V a B splňují (6.4) a F splňuje (6.5), potom G definovaná v (6.6) splňuje následující podmínky:

- (i) G je reálná funkce M proměnných definovaná na V a je na V spojitá.

(6.8)

- (ii) Pro každé $v^* \in V$, existuje $\mathbf{x}^* \in S$ takové, že $G(v^*) = \min_v \{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}^*)\}$.

Navíc, defnujeme-li funkci F^* duální k G pro $\mathbf{x} \in S$ takto:

$$F^*(\mathbf{x}) \equiv \min_v \{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x})\}, \quad (6.9)$$

potom $F^*(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \in S$.

Důsledek 7.1

Nechť $\mathbf{x}^* \in S$ a definujeme $H(\mathbf{x}^*)$ jako množinu $v^* \in V$ takových, že $F(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v^*)\}$. Jestliže $v^* \in H(\mathbf{x}^*)$, potom \mathbf{x}^* je řešením $\max_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v^*)\}$ a v^* je řešením $\min_v \{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}^*)\}$.

Důkaz viz. Diewert (1982).

Všimněte si, že předpoklad na F (6.5) (ii) je náhražka našeho starého předpokladu kvazi-konkávnosti v Sekci 4 a množina $H(\mathbf{x}^*)$ definovaná v důsledku 7.1. nahrazuje množinu normalizovaných pomocných nadrovin, které se objevují v důsledku 3.2.

Díky symetrické podstatě našich předpokladů, je zřejmé, že důkaz následující věty je stejný jako důkaz věty 7 až na to, že nerovnosti jsou převrácené.

Věta 8

Jestliže S, V a B splňují (6.4) a G splňuje (6.7), potom F^* definovaná v (6.8) splňuje (6.5). Navíc, definujeme-li funkci G^* jako duální k F^* pro $v \in V$ takto:

$$G^*(v) \equiv \max_{\mathbf{x}} \{F^*(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v)\}, \quad (6.10)$$

potom $G^*(v) = G(v)$ pro každé $v \in V$.

Důsledek 8.1

Nechť $v^* \in V$ a definujeme $H^*(v^*)$ jako množinu $\mathbf{x}^* \in S$ takových, že $G(v^*) = \min_v \{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}^*)\}$. Jestliže $\mathbf{x}^* \in H^*(v^*)$, potom v^* je řešením $\min_v \{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}^*)\}$ a \mathbf{x}^* je řešením $\max_{\mathbf{x}} \{F^*(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v^*)\}$.

Všimněme si, že Podmínka (6.7) (ii) pro G nahrazuje naši starou podmínku kvazi-konvexity pro G v Sekci 4, a množina $H^*(v^*)$ definovaná v důsledku 8.1 nahrazuje množinu normalizovaných pomocných nadrovin, které se objevují v důsledku 4.1.

Nemůžeme stanovit doplněk k důsledku 3.3 (identita Hotelling-Woldova) a důsledku 4.2 (Ville-Royova identita), protože bylo nutné v těchto důsledcích použít diferencovatelnost F a G a příslušnou omezující funkci. Tudíž, abychom odvodili doplňky k důsledkům 3.3 a 4.2 v současném kontextu, museli bychom přidat předpoklady pro F (nebo G) a pro omezující korespondenci B . Přesto výše zmíněné věty ilustrují podstatu struktury teorie duality. Mohou být také interpretovány jako příklady lokálních vět o dualitě.

7 Minimalizace nákladů a derivovaná poptávka po vstupech

Předpokládejme, že technologie firmy může být popsána její produkční funkcí F , kde $u = F(\mathbf{x})$ je maximální výstup, která může být vyprodukována použitím nezáporného vektoru vstupů $\mathbf{x} \geq 0_N$. Předpokládejme, že F splňuje Předpoklad 1 Sekce 2 (tj. produkční funkce je spojitá shora). Jestliže si firma vezme ceny vstupů $p \gg 0_N$ jako dané (tj. firma se nechová jako vstupní monopol), potom v Sekci 2 uvidíme, že funkce celkových nákladů firmy $C(u, \mathbf{p}) \equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^\top \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\}$ byla korektně definovaná pro všechna $p \gg 0_N$ a $u \in R(F)$, kde $R(F)$ je obor hodnot F . Navíc $C(u, \mathbf{p})$ byla lineárně homogenní a konkávní v cenách p pro každé u a byla neklesající v u pro každé pevné p .

Nyní předpokládejme že C má druhou spojitou derivaci podle jeho argumentů v bodě (u^*, \mathbf{p}^*) , kde $u^* \in R(F)$ a $\mathbf{p}^* \equiv (p_1^*, \dots, p_N^*) \gg 0_N$. Z Lemmatu 3 v Sekci 2 nákladové funkce minimalizující poptávku po vstupech $\mathbf{x}_1(u, \mathbf{p}), \dots, \mathbf{x}_N(u, \mathbf{p})$ existují v (u^*, \mathbf{p}^*) a jsou rovny parciálním derivacím nákladové funkce podle N vstupních cen:

$$\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*) = \frac{\partial C(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial p_i}, i = 1, \dots, N. \quad (7.1)$$

Tudíž, předpoklad že C má spojitě druhé derivace v (u^*, \mathbf{p}^*) zajišťuje, aby nákladové funkce minimalizující poptávku po vstupech $\mathbf{x}_i(u, \mathbf{p})$ existovaly a měly první spojitou derivaci v (u^*, \mathbf{p}^*)

Definujeme $[\partial \mathbf{x}_i / \partial p_j] \equiv [\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*) / \partial p_j]$ jako matici typu $N \times N$ derivací N -vstupních funkcí $\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)$

podle N cen p_j^* , $i, j = 1, 2, \dots, N$. Z (7.1) plyne, že

$$\left[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}\right] = \nabla_{pp}^2 C(u^*, \mathbf{p}^*), \quad (7.2)$$

kde $\nabla_{pp}^2 C(u^*, \mathbf{p}^*) \equiv [\partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_i \partial p_j]$ je Hessova matice nákladové funkce podle vstupních cen vyčíslených v (u^*, \mathbf{p}^*) . Druhá spojitá derivovatelnost C podle p v (u^*, \mathbf{p}^*) implikuje (viz. Youngova věta), že $\nabla_{pp}^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)$ je symetrická matice taková, že použitím (7.2) dostaneme

$$\left[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}\right] = \left[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}\right]^\top = \left[\frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial p_i}\right], \quad (7.3)$$

tj. $\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_j = \partial \mathbf{x}_j(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_i$ pro všechna i a j .

Protože je C konkávní v p a má druhou spojitou derivaci podle p v okolí bodu (u^*, \mathbf{p}^*) , plyne z toho podle Fenchela nebo Rockafellara, že $\nabla^C(u^*, \mathbf{p}^*)$ je negativně semidefinitní matice. Takže podle (7.2),

$$z^\top \left[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}\right] z \leq 0 \text{ pro všechny vektory } z. \quad (7.4)$$

Takže pro $z = e_i$, i -tý jednotkový vektor, (7.4) implikuje

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial p_i} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.5)$$

tj. i -tá nákladová funkce minimalizující poptávku po vstupech nemůže mít pozitivní sklon vzhledem k i -té vstupní ceně pro $i = 1, 2, \dots, N$.

Protože je C lineárně homogenní v p , máme $C(u^*, \lambda \mathbf{p}^*) = \lambda C(u^*, \mathbf{p}^*)$ pro všechna $\lambda > 0$. Budeme-li derivovat tuto poslední rovnici podle p_i pro λ blízké 1, získáme rovnici $C_i(u^*, \lambda \mathbf{p}^*)\lambda = \lambda C_i(u^*, \mathbf{p}^*)$, kde $C_i(u^*, \mathbf{p}^*) \equiv C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_i$. Tudíž $C_i(u^*, \lambda \mathbf{p}^*) = C_i(u^*, \mathbf{p}^*)$ a derivováním této poslední rovnice podle λ dostaneme (pokud se $\lambda = 1$)

$$\sum_{i=1}^N p_i^* \partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_i \partial p_j = 0,$$

pro $i = 1, 2, \dots, N$. Takže, použitím (7.2) najdeme vstupní poptávkové funkce $\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)$ splňující následujících N omezení:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}\right] \mathbf{p}^* = \nabla_{pp}^2 C(u^*, \mathbf{p}^*) \mathbf{p}^* = 0_N, \quad (7.6)$$

kde $\mathbf{p}^* = [p_1^*, \mathbf{p}^*, \dots, p_N^*]^\top$.

Závěrečné obecné omezení pro derivování vstupní poptávkové funkce můžeme získat následovně: pro λ blízké 1, derivujme obě strany $C(u^*, \lambda \mathbf{p}^*) = \lambda C(u^*, \mathbf{p}^*)$ podle u a potom výslednou rovnici derivujme podle λ . Pro $\lambda = 1$ dostaneme poslední rovnici ve tvaru:

$$\sum_{i=1}^N p_j^* \partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*) / \partial u \partial p_j = \partial C(u^*, \mathbf{p}^*) / \partial u.$$

Všimněme si, že druhá parciální diferencovanost C a (7.1) implikují, že

$$\begin{aligned} \partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*) / \partial u \partial p_j &= \partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*) / \partial p_j \partial u = \\ &= \partial [\partial C(u^*, \mathbf{p}^*) / \partial p_j] / \partial u = \partial \mathbf{x}_j(u^*, \mathbf{p}^*) / \partial u. \end{aligned}$$

Takže

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N p_j^* \frac{\partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial u \partial p_j} &= \sum_{j=1}^N p_j^* \frac{\partial \mathbf{x}_j(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial u} = \\ &= \frac{\partial C(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial u} \geq 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Nerovnost $\partial C(u^*, \mathbf{p}^*) / \partial u \geq 0$ plyne z vlastnosti, že C neklesá v u . Nerovnost (7.7) nám říká, že změny v nákladové funkci minimalizující poptávku po vstupech indukované rozšířením výstupu nemůžou být všechny záporné, tj. ne všechny vstupy mohou být nevýznamné. S dodatečným předpokladem, že F je lineárně

homogenní (a tedy existuje $\mathbf{x} > 0_N$ takové, že $F(\mathbf{x}) > 0$), můžeme vyvodit (Sekce 2), že $C(u, \mathbf{p}) = uc(\mathbf{p})$, kde $c(\mathbf{p}) \equiv C(1, \mathbf{p})$. Tedy, když je F lineárně homogenní,

$$\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*) = u^* \frac{\partial c(\mathbf{p}^*)}{\partial p_i}, i = 1, \dots, N, \quad (7.8)$$

a $\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u = \partial c(\mathbf{p}^*)/\partial p_i$. Tedy jestliže $\mathbf{x}_i^* \equiv \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*) > 0$ pro $i = 1, 2, \dots, N$, užitím (7.8) dostaneme dodatečné omezení

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial u} \frac{u^*}{\mathbf{x}_i^*} = \frac{u^* [\partial c(\mathbf{p}^*)/\partial p_i]}{\mathbf{x}_i^*} = 1, \quad (7.9)$$

jestliže je F lineárně homogenní, tj. všechny elasticity vstupu k výstupu jsou jednotkové.

Pro obecný případ dvou vstupů nám obecné omezení (7.3)-(7.7) umožní dostat se k následujícím omezením šesti parciálních derivací poptávkové funkce pro dva vstupy $\mathbf{x}_1(u^*, \mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$ a $\mathbf{x}_2(u^*, \mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$: $\partial \mathbf{x}_1/\partial p_1 \leq 0$, $\partial \mathbf{x}_2/\partial p_2 \leq 0$, $\partial \mathbf{x}_1/\partial p_2 \geq 0$, $\partial \mathbf{x}_2/\partial p_1 \geq 0$ (a jestliže je jedna z nerovností ostrá, potom jsou ostré všechny, protože

$$p_1^* \partial \mathbf{x}_1/\partial p_1 = -p_2^* \partial \mathbf{x}_1/\partial p_2 = -p_2^* \partial \mathbf{x}_2/\partial p_1 = (p_2^*)^2 (p_1^*)^{-1} \partial \mathbf{x}_2/\partial p_2) \text{ a} \\ p_1^* \partial \mathbf{x}_1/\partial u + p_2^* \partial \mathbf{x}_2/\partial u \geq 0.$$

Tedy, znaménka u $\partial \mathbf{x}_1/\partial u$ a u $\partial \mathbf{x}_2/\partial u$ jsou neznámé, ale pokud je jedno záporné, druhé musí být kladné. Pro konstatní výnosy z rozsahu výroby nejasnost ohledně znamének vymizí: máme $\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u \geq 0$, $\partial \mathbf{x}_2(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u \geq 0$ a alespoň jedna nerovnost musí být ostrá pokud je $u^* > F(0_2)$.

Výhoda derivování těchto dobře známých komparativních statických výsledků používáním teorie duality je ta, že omezení (7.2)-(7.7) jsou platná i v případech, kdy přímá produkční funkce F není diferencovatelná. Například Leontiefova produkční funkce má lineární nákladovou funkci $C(u, \mathbf{p}) = ua^\top p$, kde $(a_1, a_2, \dots, a_N) \equiv a^\top > 0_N^\top$ je konstantní vektor. Může být ověřeno, že omezení (7.2) jsou platná pro tuto nediferencovatelnou produkční funkci.

Historické poznámky

Analogie k (7.3) a (7.4) v kontextu ziskových funkcí byly získány Hotellingem. Hicks a Samuelson dostali vztahy (7.2)-(7.6) a Samuelson získal také (7.7). Všichni tito autoři předpokládali, že primární funkce F byla diferencovatelná a jejich důkazy používaly podmínku prvního řádu pro úlohu minimalizace nákladů (nebo maximalizace užítku) a vlastnosti determinantů pro důkaz svých výsledků.

8 Funkce zisku

Doposud jsme se zabývali problémem firmy, která používá mnoho různých vstupů na výrobu jednoho výrobku. Avšak ve skutečném světě chrlí převážná většina firem mnoho druhů různých výrobků. Proto bude nezbytné zamyslet se nad problémem modelování firmy s mnoha vstupy a výstupy.

Pro ekonomické aplikace bude užitečné zavést tzv. *variabilní funkci zisku* $\Pi(p, \mathbf{x})$, která označuje maximum tržeb mínus variabilní platby za vstupy, které může být dosaženo při daných cenách $p \gg 0_I$ variabilních vstupů a výstupů a při daném vektoru pevně daných vstupů $\mathbf{x} \gg 0_J$. Označme variabilní vstupy a výstupy I -rozměrným vektorem $u \equiv (u_1, u_2, \dots, u_I)$, fixní vstupy nechť jsou označeny J -rozměrným vektorem $-\mathbf{x} \equiv (-\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_2, \dots, -\mathbf{x}_J)$. Dále označme T množinu všech možných kombinací vstupů a výstupů, které říkáme *množina produkčních možností*. Výstupy jsou zachyceny kladnými čísly, vstupy zápornými, takže je-li $u_i > 0$, pak i -té variabilní zboží jest výstup produkovaný naší firmou. Formálně se definuje Π pro $p \gg 0_I$ a $-\mathbf{x} \ll 0_J$ jako:

$$\Pi(p, \mathbf{x}) \equiv \max_u \{\mathbf{p}^\top u : (u, -\mathbf{x}) \in T\}. \quad (8.1)$$

Je-li T uzavřený, neprázdný konvexní kužel v Euklidovském $I + J$ rozměrném prostoru s následujícími vlastnostmi: (i) pokud $(u, -\mathbf{x}) \in T$, potom $\mathbf{x} \geq 0_J$ (posledních J zboží jsou vždy vstupy); (ii) pokud $(u', -\mathbf{x}') \in T$, $u' \leq u''$ a $-\mathbf{x}' \leq -\mathbf{x}''$, potom $(u'', -\mathbf{x}'') \in T$ (volná dispozice); (iii) pokud $(u, -\mathbf{x}) \in T$, potom jsou komponenty vektoru u ohrazené shora (hranice možností při pevných vstupech). Potom má Π následující vlastnosti: (i) $\Pi(p, \mathbf{x})$ je nezáporná reálná funkce definovaná pro každé $p \gg 0_I$ a $\mathbf{x} \geq 0_J$ taková, že: $\Pi(p, \mathbf{x}) \leq \mathbf{p}^\top b(\mathbf{x})$ pro každé $p \gg 0_I$. (ii) pro každé $\mathbf{x} \geq 0_J$ je $\Pi(p, \mathbf{x})$ (pozitivně) lineárně homogenní, konvexní a spojitá v p a (iii) pro každé $p \gg 0_I$ je $\Pi(p, \mathbf{x})$ (pozitivně) lineárně homogenní, konkávní spojitá

a neklesající v \mathbf{x} . Navíc, Gorman (1968), McFadden (1966) a Diewert (1973a) ukázali, že množina T může být zkonstruována pomocí Π následujícím způsobem:

$$T = \{(u, -\mathbf{x}) : \mathbf{p}^\top u \leq \Pi(p, \mathbf{x}), \forall \mathbf{p} \gg 0_I; \mathbf{x} \geq 0_J\}. \quad (8.2)$$

Tudíž, existuje dualita mezi množinami produkčních možností T a funkcemi variabilního zisku Π , pokud jsou splněny výše uvedené podmínky regularity. Pomocí Shephardova lematu (3.1) a Royovy identity (4.4) můžeme dokázat následující tvrzení:

Holellingovo lemma (1932, str. 594) Splňuje-li funkce variabilního zisku Π podmínky regularity (10.1) a navíc je diferencovatelná vzhledem k cenám variabilního množství v bodě $\mathbf{p}^* \gg 0_I$ a $\mathbf{x}^* \geq 0_J$, potom $\partial\Pi(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)/\partial p_i = u_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ pro $i = 1, 2, \dots, I$, kde $u_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ je takové množství čistého výstupu i , které maximalizuje zisk přičemž je dán vektor variabilních cen \mathbf{p}^* a vektor fixních vstupů \mathbf{x}^* , které jsou k dispozici.

Hotellingovo lema lze použít k odvození funkce nabídky variabilního výstupu a poptávky po variabilních vstupech. Potřebujeme pouze, aby byl zaručen funkcionální tvar $\Pi(p, \mathbf{x})$ konzistentní s podmínkami regularity pro Π a diferencovatelnost vzhledem ke komponentám vektoru p . Například uvažme funkci translogaritmického variabilního zisku Π definovanou:

$$\begin{aligned} \ln\Pi(p, \mathbf{x}) \equiv & \alpha_0 + \sum_{i=1}^I \alpha_i \ln p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^I \sum_{h=1}^I \gamma_{ih} \ln p_i \ln p_h + \\ & + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \delta_{ij} \ln p_i \ln \mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^J \beta_j \ln \mathbf{x}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J \phi_{jk} \ln \mathbf{x}_j \ln \mathbf{x}_k, \end{aligned} \quad (8.3)$$

kde $\gamma_{ih} = \gamma_{hi}$ a $\phi_{jk} = \phi_{kj}$. Lehce nahlédneme, že Π definovaná vztahem (8.3) je homogenní stupně jedna v p tehdy a jen tehdy, pokud:

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i = 1; \sum_{i=1}^I \delta_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J; \sum_{h=1}^I \gamma_{ih} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (8.4)$$

Podobně, $\Pi(p, \mathbf{x})$ je homogenní stupně jedna v \mathbf{x} tehdy a jen tehdy, když:

$$\sum_{j=1}^J \beta_j = 1; \sum_{j=1}^J \delta_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, I; \sum_{k=1}^J \phi_{jk} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (8.5)$$

Je-li $\Pi(p, \mathbf{x}) > 0$, definujeme podíl nabídky i -té proměnné jako: $p_i u_i(p, \mathbf{x}) / \Pi(p, \mathbf{x}) \equiv s_i(p, \mathbf{x})$. Hotellingovo lemma použité na translogaritmickou funkci definovanou v (8.3) dává následující systém funkcí podílu čisté nabídky:

$$s_i(p, \mathbf{x}) = \alpha_i + \sum_{h=1}^I \gamma_{ih} \ln p_h + \sum_{j=1}^J \delta_{ij} \ln \mathbf{x}_j; \quad i = 1, 2, \dots, I. \quad (8.6)$$

Neboť je suma všech podílů jednička, jenom $I - 1$ rovnic v (8.6) je nezávislých. Rovnice (8.3) a $I - 1$ rovnic z (8.6) lze použít k odhadu parametrů funkce translogaritmického variabilního zisku. Povšimněme si přitom, že tyto rovnice jsou lineární v neznámých parametrech stejně jako omezení (8.4) a že můžeme použít modifikace lineárních regresních technik.

Alternativní funkcionální tvary funkcí variabilního zisku jsou navrženy v McFadden (1978b), Diewert (1973a) a Lau (1974a). Empirické poznatky vypracoval Kohli (1978), Woodland (1977c), Harris (Appelbaum (1977) a Epstein (1977).

Velice příbuzný je přístup tzv. *sdrúžené nákladové funkce* $C(u, w) \equiv \min_{\mathbf{x}} \{w^1 \mathbf{x} : (u, -\mathbf{x}) \in T\}$, kde T je množina produkčních možností stejně jako dříve, $w \gg 0_J$ je kladný vektor cen vstupů. Jako obvykle, pokud je $C(u, w)$ diferencovatelná vzhledem k cenám vstupů w (a splňující příslušné podmínky regularity), potom

můžeme z Shephardova lemmatu odvodit systém poptávkových funkcí $\mathbf{x}(u, w)$, které minimalizují náklady. Dostáváme pak:

$$\mathbf{x}(u, w) = \nabla_w C(u, w). \quad (8.7)$$

Sdružené nákladové funkce empiricky odhadoval Burgess (1976a) (který využíval funkcionální tvar Halla (1973)), Brown, Caves, Christensen (1975) a Christensen, Greene (1976) (který využíval translogaritmický funkcionální tvar pro $C(u, w)$, což je analogicky jako u transabilního zisku definované v (8.3).

Historické poznámky Samuelson (1953-54, str.20) nás obeznámil s funkcí národní produkce, což je přístup zmíněné funkce variabilního zisku. Zároveň upozornil na některé vlastnosti. Gorman (1968) a McFadden (1966, 1978a) vynesl na světlo světa tvrzení o dualitě mezi množinou produkčních možností (splňující různé podmínky regularity) a korespondující funkcí variabilního zisku. Alternativní tvrzení o dualitě jsou v Shephard (1970), Diewert (1973a, 1974b), Sakai (1974) a Lau (1976). Pro speciální případ jediného fixního vstupu se lze poučit z Shephard (1970, str.248-250) nebo Diewert (1974b).

McFadden (1966, 1978a) zavedl funkci sdružené nákladové funkce, sepsal její vlastnosti a dokázal tvrzení o formální dualitě mezi sdruženou nákladovou funkcí a množinou produkčních možností T , stejně jako je to i v Shephard (1970) a Sakai (1974).

Existují také mnohem jednodušší tvrzení o množině produkčních možností a transformačních funkcí, které dávají maximální množství jednoho výstupu, jenž daná firma může vyrobit (nebo optimální množství požadovaného vstupu) při pevně daných množstvích ostatních vstupů a výstupů. To nalezneme například v Diewert (1973), Jorgenson; Lau (1974a, 1974b) a Lau (1976).

Hotellingovo lemma lze zobecnit tak, abychom postihli i případ nediferencovatelné funkce variabilního zisku: gradient funkce Π vzhledem k p je nahrazen množinou subgradientů. Toto zobecnění bylo poprvé uveřejněno v Gorman (1968, str.150-151) a McFadden (1966, str.11) a opakováno v Diewert (1973a, str.313) a Lau (1976, str.142).

Je-li $\Pi(p, \mathbf{x})$ diferencovatelná vzhledem ke komponentám vektoru fixních vstupů, potom $w_j = \partial \Pi(p, \mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}_j$ lze interpretovat jako hodnotu, kterou firma přisuzuje jedné dodatečné jednotce j -tého fixního výrobního

faktoru. Neboli je to "stínová cena" j -tého vstupu (Lau (1976, str.142)). Pokud je navíc firma vystavena vektoru cen $w \gg 0_J$ výrobních faktorů pro "fixní" vstupy a během určitého období lze měnit množství těchto "fixních" faktorů, pak pokud firma minimalizuje náklady na dosažení daného množství variabilního zisku, dostaneme (Diewert (1974a, str. 140))

$$w = \nabla_{\mathbf{x}}\Pi(p, \mathbf{x}), \quad (8.8)$$

A tyto vztahy mohou být rovněž využity v ekonometrických aplikacích.

Translogaritmický varibalní zisk byl nezávisle navržen v Russel(Boyce (1974) a Diewert (1974a, str.139). Jde zjevně o přímou modifikaci translogaritmického funkcionálního tvaru podle Christen, Jorgenson(Lau (1971) a Saragan (1971).

Vlastnosti porovnávacích statistik $\Pi(p, \mathbf{x})$ nebo $C(u, w)$ byly popsány v Samuelson (1953-54), McFadden (1966, 1978a), Diewert (1974, str. 142-146) a Sakai (1974).

V teorii mezinárodního obchodu se všeobecně předpokládá existence sektorových produkčních funkcí, fixní domácí zdroje \mathbf{x} a pevné ceny p mezinárodně obchodovatelného zboží. Pokoušíme-li se v takovém případě maximalizovat čistou hodnotu mezinárodně obchodovatelného zboží vyráběného ekonomikou, dostáváme variabilní funkci zisku ekonomiky, $\Pi(p, \mathbf{x})$ nebo Samuelsonovu *funkci národního produktu*. Pokud jsou sektorové produkční funkce "vystaveny" konstantním výnosům z rozsahu, bude mít $\Pi(p, \mathbf{x})$ obvyklé vlastnosti zmíněné výše. Avšak existence sektorových technologií implikuje dodatečná omezení na porovnávací statistiky národní produkční funkce Π : viz. Chipman (1966,1972, 1974b), Samuelson (1966), Ethier (1974), Woodland (1977a, 1977b), Diewert and Woodland (1977), Jones, Schienkman (1977) a další v odkazech těchto prací. Závěrem poznamenejme, že vlastnosti $\Pi(p, \mathbf{x})$ vzhledem k \mathbf{x} jsou přesně ty vlastnosti, které má neoklasická produkční funkce. Když je \mathbf{x} vektor primárních vstupů, potom můžeme $\Pi(p, \mathbf{x})$ interpretovat jako funkci přidané hodnoty. Pokud se mění ceny p (průměrně) proporcionálně v čase, může být $\Pi(p, \mathbf{x})$ očištěna od inflace trendem všeobecných cen, čímž dostáváme funkci reálné přidané hodnoty, která má vlastnosti neoklasické produkční funkce; viz. Khang (1971), Bruno (1971) a Diewert (1978c, 1980).

9 Dualita a nesoutěživé přístupy k mikroekonomické teorii

Doposud jsme předpokládali, že výrobci a spotřebitelé berou ceny jako dané a optimalizují množství proměnných, které mají pod kontrolou. V této kapitole naznačíme, jak může být teorie duality využito v případě monopsonického či monopolistického chování na straně spotřebitelů nebo výrobců. Nebudeme se to pokoušet přesně vysvětlovat, toliko ilustrujeme používané techniky na 4 příkladech.

9.1 První přístup: Problém monopolu

Předpokládejme, že monopolista produkuje výstup \mathbf{x}_0 při produkční funkci $F(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} \gg 0_N$ je vektor variabilních vstupů. Necht' je dále monopolista vystaven (inverzní) poptávkové funkci $p_0 = wD(\mathbf{x}_0)$, tzn. $p_0 \geq 0$ je cena, při které se prodá \mathbf{x}_0 jednotek výstupu, D je spojitá, kladná funkce v \mathbf{x}_0 , proměnná $w > 0$ reprezentuje vliv "dalších proměnných" na poptávku. Dlužno dodat, že pokud prodává monopolista spotřebitelům, w může vyrovnat disponibilní důchod uvažovaného časového období. Pokud monopolista prodává výrobcům, w může být lineárně homogenní funkce cen, kterým jsou vystaveni ostatní výrobci. A konečně, předpokládejme, že monopolista chová "soutěžně" na trhu vstupů, když cenový vektor cen vstupů je dán pevně. Potom lze problém maximalizace monopolistova zisku zapsat takto:

$$\begin{aligned} \max_{p_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}} \{p_0 \mathbf{x}_0 - \mathbf{p}^\top \mathbf{x} : \mathbf{x}_0 = F(\mathbf{x}), p_0 = wD(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} \geq 0_N\} &= \\ &= \max_{\mathbf{x}} \{wD[F(\mathbf{x})]F(\mathbf{x}) - \mathbf{p}^\top \mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0_N\} = \\ &= \max_{\mathbf{x}} \{wF^*(\mathbf{x}) - \mathbf{p}^\top \mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0_N\} \equiv \Pi^*(w, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (9.1)$$

kde $F^*(\mathbf{x}) \equiv D = [F(\mathbf{x})]F(\mathbf{x}) = p_0 \mathbf{x}_0 / w$ je funkce tržeb očištěná od inflace w nebo pseudoprodukční funkce a Π^* je příslušná funkce pseudozisku (vzpomeňme kapitolu 10), která korespondující s F^* . Povšimněme si, že w hraje roli ceny pro $F^*(\mathbf{x})$. Pokud je F^* konkávní funkce, potom bude $\Pi^*(l, p/w)$ funkce konjugovaná k F^* [vzpomeňme na: Samuelson (1960), Lau (1969, 1978) a Jorgenson, Lau (1974a, 1974b) konjugované přístupy

k teorii duality] a Π^* bude duální k F^* (tzn. F^* může být dopočtena z Π^*). I když není F^* konkávní, existuje-li maximum v (11.1) v relevantním okolí cen (w, \mathbf{p}) , potom může být Π^* využito k reprezentaci relevantní části F^* (tzn. "volný dostupný" obal F^* dostaneme z Π^*). Pokud je navíc Π^* diferencovatelná v (w^*, \mathbf{p}^*) a $\mathbf{x}_0^*, p_0^*, \mathbf{x}^*$ řeší (11.1), pak Hotellingovo lemma dává:

$$u_0^* \equiv \frac{p_0^* \mathbf{x}_0^*}{w^*} = \nabla_w \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*) a - \mathbf{x}^* = \nabla_{\mathbf{p}} \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*). \quad (9.2)$$

Pokud je k tomu Π^* spojitě diferencovatelná druhého řádu v (w^*, \mathbf{p}^*) , pak můžeme odvodit obvyklé výsledky pro porovnávací statistiky funkcí prodeje očištěných od inflace, $u_0(w^*, \mathbf{p}^*) \equiv \nabla_w \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*)$ a funkce poptávky $-\mathbf{x}(w^*, \mathbf{p}^*) \equiv \nabla_{\mathbf{p}} \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*)$; zejména $\nabla^2 \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*)$ je pozitivně semidefinitní symetrická matice a $[w^*, \mathbf{p}^{*\top}] \nabla^2 \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*) = 0_{N+1}^\top$.

Vztah (9.2) lze využít k odhadu ekonometrických parametrů Π^* a tudíž nepřímo k odhadu F^* : jednoduše řečeno, postulujeme funkcionální tvar Π^* , diferencujeme Π^* , což "napasujeme" na (9.2) pro danou časovou řadu pozorovaných hodnot p_0, p, w, \mathbf{x}_0 a \mathbf{x} . Nevýhodou metody jsou: (i) nelze vyjádřit D z F ; (ii) nelze testovat, zda-li se vlastně výrobce chová "tržně" na trhu výrobků; (iii) nemůžeme použít naše odhadnuté rovnice k predikci výroby \mathbf{x}_0 nebo prodejní ceny p_0 odděleně.

9.2 Druhý přístup: Problém monopsonu

Uvažme problém spotřebitele, který maximalizuje funkci užitku $F(\mathbf{x})$, která splňuje "Podmínky I", ale odtud již dále pro spotřebitele nepředpokládáme fixní ceny nakupovaných komodit. Takže je spotřebitel schopen monopsonicky využít jednoho či více svých dodavatelů. Pak v období r nechť je vystaven nelineárnímu rozpočtovému omezení ve tvaru: $h_r(\mathbf{x}) = 0$, kde $\mathbf{x} \geq 0_N$ je vektor jeho nákupu (nebo rent). Nechť $\mathbf{x}^r \geq 0_N$ je řešení pro období r problému maximalizace "omezeného" užitku, tzn.:

$$\max_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x}) : h_r(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \geq 0_N\} = F(\mathbf{x}^r); \quad r = 1, \dots, T. \quad (9.3)$$

Dále nechť r -tá funkce rozpočtového omezení h_r je diferencovatelná v \mathbf{x}^r s $\nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}^r) \gg 0_N$ pro každé r . Pak můžeme linearizovat r -té rozpočtové omezení okolo $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$ tak, že vezmeme rozvoj Taylorovy řady prvního

řádu. Linearizované rozpočtové omezení je $h_r(\mathbf{x}^r) + [\nabla_{\mathbf{x}} h_r(\mathbf{x}^r)]^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) = 0$ nebo $[\nabla_{\mathbf{x}} h_r(\mathbf{x}^r)]^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) = 0$, neboť $h_r(\mathbf{x}^r) = 0$ použitím (9.3). Lehce se nahlédne, že povrch užítku: $\{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^r), \mathbf{x} \geq 0_N\}$ je tečná nejenom k původnímu nelineárnímu rozpočtovému povrchu $\{\mathbf{x} : h_r(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \geq 0_N\}$ v $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$, ale také k povrchu linearizovaného rozpočtového omezení $\{\mathbf{x} : [\nabla_{\mathbf{x}} h_r(\mathbf{x}^r)]^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) = 0, \mathbf{x} \geq 0_N\}$ v $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$. Neboť se předpokládá F kvazikonkávní, je množina $\{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq F(\mathbf{x}^r), \mathbf{x} \geq 0_N\}$ konvexní a linearizované rozpočtové omezení je opěrnou nadrovinou k této množině, tzn.:

$$\max_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x}) : \mathbf{p}^{r\top} \mathbf{x} \leq \mathbf{p}^{r\top} \mathbf{x}^r, \mathbf{x} \geq 0_N\} = F(\mathbf{x}^r), \quad r = 1, \dots, T, \quad (9.4)$$

kde $\mathbf{p}^r \equiv \nabla_{\mathbf{x}} h_r(\mathbf{x}^r)$ pro $r = 1, 2, \dots, T$. Nyní je (9.4) pouhou řadou "agregátorových" maximalizačních úloh typu, který jsme studovali v kapitole 4 (r -tý vektor normalizovaných cen se definuje jako $v^r \equiv \mathbf{p}^r / \mathbf{p}^{r\top} \mathbf{x}^r$) a odhadovací techniky nastíněné v kapitole 9 (vzpomeňme například vztah (9.9)) mohou být použity k odhadu parametrů přímých užítkových funkcí duálních k F .

Kapitola 4 se zabývá lineárními rozpočtovými omezeními a proto je irelevantní, jestli je F kvazikonkávní nebo ne (vzpomeňme naši diskusi a diagram v kapitole 2). Avšak nyní požadujeme dodatečné předpoklady, že F je kvazikonkávní, aby se rigorózně ospravedlnila záměna (9.3) za (9.4). Povšimněte si také, že abychom mohli použít tuto proceduru, je nezbytné znát vektor derivací $\nabla_{\mathbf{x}} h_r(\mathbf{x}^r)$ pro každé r ; tzn. musíme znát derivace nabídkových funkcí, které spotřebitel využívá v každém období - informace, kterou první přístup nepožaduje.

Model monopsonu zde prezentovaný je ve skutečnosti mnohem širší než klasický model monopsonistického využívání: ceny, kterým je spotřebitel vystaven se mohou měnit s nakupovaným množstvím kvůli nepřebornému množství důvodů, zahrnující v to i náklady transakce, množstevní slevy a existenci progresivního zdanění. Většina daňových systémů vede k rozpočtovým omezením se skoky nebo nediferencovatelnými body. To nezpůsobuje žádné problémy s výše uvedenou procedurou, jestliže pozorovaná spotřebitelova volba mezi spotřebou a volným časem nepadne přesně do bodu skoku v tomto rozpočtovém omezení.

9.3 Třetí přístup: Problém monopolu jinak

Znovu se věnujme problému monopolu vyloženému výše. Nechť $\mathbf{x}_0^r > 0, \mathbf{x}^r > 0_N$ je řešením problému maximalizace zisku monopolu pro r -té období, což lze zapsat:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}} \{w^r D(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}^{r\top} \mathbf{x} : \mathbf{x}_0 = F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \geq 0_N\} = \\ = w^r D(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r - \mathbf{p}^{r\top} \mathbf{x}^r, r = 1, 2, \dots, T, \end{aligned} \quad (9.5)$$

kde $p_0^r \equiv w^r D(\mathbf{x}_0^r) > 0$ je pozorovaná prodejní cena výstupu během r -tého období, $w^r D(\mathbf{x}_0)$ je inverzní poptávková funkce pro období r , $\mathbf{p} \gg 0_N$ je vektor cen vstupů pro období r . Pokud je funkce F spojitá a konkávní (tak, že množina produkčních možností $\{(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) : \mathbf{x}_0 \leq F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \geq 0_N\}$ je uzavřená a konvexní) a když inverzní poptávková funkce D je diferencovatelná v \mathbf{x}_0^r pro $r = 1, 2, \dots, T$, pak je cílová funkce r -tého maximalizačního problému v (9.5) může být linearizován v okolí $(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{x}^r)$ a tato linearizovaná cílová funkce bude tečná k povrchu produkce $\mathbf{x}_0 = F(\mathbf{x})$ v $(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{x}^r)$. Tudíž:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}} \{\tilde{p}_0^r \mathbf{x}_0 - \mathbf{p}^{r\top} \mathbf{x} : \mathbf{x}_0 = F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \geq 0_N\} \equiv \Pi(\tilde{p}_0^r, \mathbf{p}^r) = \\ = \tilde{p}_0^r \mathbf{x}_0^r - \mathbf{p}^{r\top} \mathbf{x}^r, r = 1, \dots, T, \end{aligned} \quad (9.6)$$

kde $\tilde{p}_0^r \equiv w^r D(\mathbf{x}_0^r) + w^r D'(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r = p_0^r + w^r D'(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r > 0$ je *stínová* neboli *mezní* cena výstupu r -tého období ($\tilde{p}_0^r < p_0^r$ jestliže $w^r > 0$ a $D'(\mathbf{x}_0^r) < 0$ a Π je "pravdivá" funkce firemního zisku, která je duální k produkční funkci F (vzpomeňme Π^* definovanou v prvním přístupu, která je duální ke konvexnímu obalu $D[F(\mathbf{x})]F(\mathbf{x}) \equiv F^*(\mathbf{x})$). Takže problém maximalizace pravdivé nelineární funkce monopolistického zisku (9.6), který má obvyklou strukturu jakmile mezní ceny výstupu \tilde{p}_0^r byly vypočteny tak, aby mohly být použity obvyklé ekonometrické techniky [vzpomeňme vztah (10.5) v Kapitole 10].

Porovnáním třetího přístupu s prvním zjistíme, že třetí přístup vyžaduje extra předpoklad o konkávnosti produkční funkce (konvexní technologie) a dodatečné informace, jako například znalost sklonu poptávkové funkce, kterou monopolista využívá, se požaduje pro každé období.

Lehce se nahlédne, že tento přístup lze zobecnit na firmu vyrábějící víc výrobků, která současně využívá trh se vstupy i výstupy: všechno co potřebujeme je předpoklad konvexnosti technologií a (lokální) znalosti poptávkových a nabídkových funkcí, které firma využívá, aby mohly být spočítány příslušné stínové ceny.

Výše uvedené techniky mohou být zřejmě použity v situacích, kdy se firma nechová monopolisticky ani monopsonisticky ve smyslu využívání trhů, ale je vystavena cenám jejích vstupů a výstupů, které závisí na porizeném nebo prodaném množství, zahrnující náklady na transakce a množstevní slevy.

9.4 Čtvrtý přístup: Problém monopolu ještě jednou

Předpokládejme nyní, že produkční funkce splňuje, jako obvyčejně, "Podmínky I" a necht' $\mathbf{x}_0^r > 0, \mathbf{x}^r > 0_N$ je řešení maximalizační úlohy monopolistického zisku pro období r (9.5), které lze přepsat jako

$$\max_{\mathbf{x}_0} \{w^r D(\mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0 - C(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}^r) : \mathbf{x}_0 \geq 0\} = w^r D(\mathbf{x}_0^r) \mathbf{x}_0^r - \mathbf{p}^{r\top} \mathbf{x}^r, \quad r = 1, \dots, T, \quad (9.7)$$

kde C značí nákladovou funkci duální k F . Pokud je inverzní poptávková funkce D diferencovatelná v $\mathbf{x}_0^r > 0$ a $\partial C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r) / \partial \mathbf{x}_0$ existují, pak podmínky prvního řádu pro r -tý maximalizační problém v (9.7) dávají podmínku $w^r D(\mathbf{x}_0^r) + w^r D'(\mathbf{x}_0^r) \mathbf{x}_0^r - \partial C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r) / \partial \mathbf{x}_0 = 0$ nebo, s použitím pozorované prodejní ceny výstupu v r -tém období $p_0^r \equiv w^r D(\mathbf{x}_0^r)$,

$$p_0^r = -w^r D'(\mathbf{x}_0^r) \mathbf{x}_0^r + \frac{\partial C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r)}{\partial \mathbf{x}_0}, \quad r = 1, \dots, T. \quad (9.8)$$

Jestliže je nákladová funkce C diferencovatelná v cenách vstupů v bodě $(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r)$ pro každé období r , pak dává Shephardovo lemma dodatečné rovnice

$$\mathbf{x}^r = \nabla_p C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r), \quad r = 1, \dots, T. \quad (9.9)$$

Předpokládejme, že část inverzní poptávkové funkce, která záleží na \mathbf{x}_0 , lze $D(\mathbf{x}_0)$ adekvátně aproximovat v relevantním okolí \mathbf{x}_0 následující funkcí:

$$D(\mathbf{x}_0) = \alpha - \beta \ln \mathbf{x}_0, \quad (9.10)$$

kde $\alpha > 0, \beta \geq 0$ jsou konstanty. Substituce (9.10) do (9.8) dává rovnice

$$p_0^r = w^r \beta + \frac{\partial C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r)}{\partial \mathbf{x}_0}, r = 1, \dots, T. \quad (9.11)$$

Při daných pozorovaných rozhodováních dané firmy o cenách a množstvích $p_0^r, \mathbf{p}^r, \mathbf{x}_0^r, \mathbf{x}$ a při informaci o w (většinou lze předpokládat, že $w \equiv 1$) může být systém rovnic (9.9) a (9.11) naráz ekonometricky odhadnut jakmile známe diferenciální funkcionální tvar nákladové funkce $C(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$. Pokud je $\beta = 0$ v (9.11), pak se producent chová tržně, prodává-li výstup za cenu p rovnou mezním nákladům, $\partial C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r)/\partial \mathbf{x}_0$. Rovnice (9.11) je zároveň konzistentní s chováním producenta jako monopolisty, který tvoří cenu "naivní přírůžkou", neboli "naivní markup", (záleží na hodnotě w). Máme tak základ pro statistické testování tržní struktury: (i) když $\beta = 0$, pak je chování producenta v souladu s tržní situací známou jako "price taking"; (ii) když je $\beta > 0$ a $\beta w^r / p_0^r < 1$ pro všechna $r = 1, 2, \dots, T$, pak dostáváme chování klasického monopolisty; (iii) pokud je $\beta > 0$, ale $\beta w^r / p_0^r \geq 1$ pro nějaké r , potom máme chování "markup" monopolisty; (iv) když $\beta < 0$, pak nebude chování firmy v souladu s žádným ze tří popsaných způsobů.

Tento přístup nabízí oproti předchozím přístupům několik výhod: (i) můžeme nyní statisticky testovat soutěžní chování; (ii) požadavky na informace jsou nízké - nepotřebujeme exogenní informaci o poprávkové elasticitě; (iii) nemusíme předpokládat, že produkční funkce F je konkávní, takže model je konzistentní s rostoucími výnosy z rozsahu produkce; a nakonec (iv) postup je velmi jednoduchý - jen vložíme podmínku βw^r do rovnice soutěže, cena se rovná mezním nákladům.

9.5 Historické poznámky

Základ prvního přístupu je v Lau (1974a, str. 193-4; 1978), ale své kořeny má už v Hotelling (1932, str. 609). Druhý přístup je v Diewert (1971b), ale kořeny jsou v práci Fisch (1936, str. 14). Třetí přístup (izomorfní ke druhému přístupu) je popsán v Diewert (1974a, str. 155). Čtvrtý přístup je od Appelbaum (1975), který požaduje trochu jiné předpoklady pro funkcionální tvar inverzní poprávkové funkce. Appelbaum (1975, 1979) také naznačuje, jak by bylo možné jeho přístup rozšířit na několik monopolistických nabídkových výstupů

nebo monopsonistických poptávkových vstupů a ukazuje příklad empirického testování založeného na datech o amerického odvětví zpracovávající naftu a zemní plyn. Další empirický příklad této techniky je založen na obchodu mezi USA a Kanadou v Appelbaum(1979). Čtvrtý přístup byl použit v Schworm (1980) v kontextu investiční teorie, kde se ceny investičního zboží odvíjí od nakupovaného množství.

10 Závěr

Věnovali jsme velkou pozornost duálnímu přístupu k mikroekonomické teorii v Sekcích 2-6 této kapitoly. V Sekcích 7 a 8 jsme ukázali, jak může být teorie duality využito k odvození obvyklých porovnávacích statistických tvrzení pro teorii výrobců a spotřebitelů.

Bohužel, počet děl, využívajících teorii duality je tak veliký, že nejsme schopni je všechny uvést.

Kapitola 8

Teorie výroby

Produkční teorie se zabývá chováním firem při procesech opatřování a rozdělování zdrojů, které slouží k vytváření výstupu firmy.

Tento proces ovlivňují tyto dvě složky:

- Technická omezení, která limitují množství produkce;
- Institucionální rámec, který charakterizuje trh komodit a vstupů.

V současné době byly tyto dva elementy produkční teorie značně rozšířeny o nové rozměry a aplikovány na mnoho nových subjektů. Přesto zůstávají nevyjasněny některé počáteční předpoklady produkční teorie. Jde především o nerealistický předpoklad existence dokonalé konkurence a to jak na trhu komodit, tak na trhu zboží.

1 Technologie výroby

1.1 Vlastnosti množiny produkčních technologií a produkční funkce

Produkční technologie popisuje technická omezení, která limitují rozsah produkčního procesu jedné firmy. Produkční technologie se sestává z několika alternativních metod, které transformují materiál a služby na vznik zboží a služeb. Odlišné zboží a služby, které jsou použity jako vstupy do technologie, se nazývají *výrobní faktory*).

Vlastnosti produkční technologie - formalizace: Necht' $y = (y_1, \dots, y_n)$ je kombinace n nezáporných výstupů, které vznikají za použití m nezáporných vstupů $x = (x_1, \dots, x_m)$. *Množina produkčních možností* L je množina všech vstupních vektorů x , které produkují výstup y . L má následující vlastnosti:

- (i) L je uzavřená množina, tj. pokud $v^n \in L, n = 1, 2, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} v^n = v^0 \implies v^0 \in L$;
- (ii) L je konvexní množina, tj. pokud $v' \in L, v'' \in L, 0 \leq \lambda \leq 1 \Leftrightarrow \lambda v' + (1 - \lambda)v'' \in L$;
- (iii) Pokud $(y; x) \in L, x' \geq x$, pak $(y; x') \in L$;
- (iv) Pokud $(y; x) \in L, 0_n \leq y' \leq y$, pak $(y'; x) \in L$;
- (v) Pro každý konečný vstupní vektor $x \geq 0_m$ je výstupní množina y shora omezená.

Vlastnost (i) je *podmínka slabé regularity*. Vlastnost (ii) říká, že produkční technologie je ovlivňována klesající marginální mírou transmise výstupů na vstupy, rostoucí marginální mírou substituce mezi výstupy a klesající marginální mírou substituce vstupů. Vlastnost (iv) říká, že omezený vektor vstupů může vytvořit pouze omezený vektor výstupů. Je možné, že podmínky (ii) až (iv) nejsou pro nějakou konečnou množinu dat, vlastnost (i) je splněna vždy.

Ne všechny technologicky proveditelné transformace jsou významné *a priori*; některé mohou vyžadovat větší vstupy k dosažení technicky efektivní produkční podmnožiny E , která se nazývá transformáční funkce. Množina efektivních kombinací vstupů a výstupů může být popsána symetricky jako množina všech $(y; x)$,

kteře splňují podmínku $E'(y; x) = 0$, kde E' je transformační funkce. Efektivní množina pro jeden výstup (y_1) může být definována jako $y_1 = E'(y_2, \dots, y_n, x)$, tj. jako maximální produkce y_1 při zadaných vektorech vstupu a ostatních výstupů. Nesymetrická transformační funkce, $y_1 = E(y_2, \dots, y_n, x)$ nemůže být dost dobře definována pro všechny nezáporné vektory vstupů a výstupů. Pokud jsou složky ostatních výstupů, $\hat{y} \equiv (y_2, y_3, \dots, y_n)$ velké, zatímco složky x zůstávají malé, může být nemožné vytvořit nezáporné množství y_1 . V tomto případě $E(\hat{y}, x) = -\infty$. Nesymetrická transformační funkce E je definována jako

$$E(\hat{y}, x) \equiv \begin{cases} \max_{y_1} \{y_1 : (y_1, y, x) \in L\}, & \text{pokud } \exists y_1 : (y_1, \hat{y}; x) \in T \\ -\infty, & \text{jinak,} \end{cases} \quad (1.1)$$

pro všechna $y \geq 0_{n-1}, x \geq 0_m$.

Pokud L splňuje podmínky (i) až (iv), lze ukázat, že transformační funkce definovaná výše splňuje následující podmínky

- E je spojitá shora;
- E je konkávní;
- E je neklesající pro všechna $x > 0$;
- Existuje číslo α dostatečně velké, aby, pokud je kterákoliv z komponent vektoru \hat{y} větší než α , nutně nastalo $E(\hat{y}, x) = -\infty$.

Z obecných předpokladů o vlastnostech produkční funkce, která určuje vlastnosti funkce transformační, lze vygenerovat různé produkční a transformační funkce pro praktické použití.

1.2 Neoklasická teorie firmy

Máme-li dānu charakteristiku produkční funkce a množiny technologií, můžeme hledat rovnováhu firmy vzhledem k produkci komodit a zapojení vstupů. Především uvážíme tato dvě specifika:

- určení optimálního plánu výstupu firmy;
- vlastnosti ziskové funkce.

Optimální plán výstupu firmy

Uvažme firmu, která produkuje n komodit a využívá m vstupů; jejím cílem je maximalizovat zisk, který je dán jako

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m+n} p_i y_i = \sum_{i=1}^n p_i y_i + \sum_{i=1}^m p_i y_i \quad (1.2)$$

kde y_i ($i = 1, \dots, n$) jsou výstupy a p_i ($i = n + 1, \dots, m$) jsou ceny výstupů; $y_{n+i} = -x_i$ ($i = 1, \dots, m$) jsou vstupy a p_{n+i} ($i = 1, \dots, n$) jsou ceny vstupů. Zisk Π maximalizujeme vzhledem k produkční funkci

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{m+n}) \leq 0. \quad (1.3)$$

y_1, y_2, \dots, y_{m+n} jsou někdy nazývány *čisté výstupy*; mají kladná znaménka pro výstupy a záporná pro vstupy.

Předpokládejme, že produkční funkce $f(\cdot)$ je

- Diferencovatelná druhého stupně, tj. existují $\frac{\partial f}{\partial y_i} = f_i$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} = f_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, m + n$);
- Rostoucí v *čistých výnosech*, tj. derivace f_i jsou vždy kladné;
- Konvexní (vzhledem k podmínce $f(\cdot) = 0$ je striktně konvexní).

Pak lze optimální produkční plán firmy stanovit pomocí Lagrangeovy funkce:

$$\begin{aligned} L(y_1, y_2, \dots, y_{m+n}; \lambda) &= \Pi + \lambda f(y_1, y_2, \dots, y_{m+n}) \\ &= \sum_{i=1}^{m+n} p_i y_i + \lambda f(y_1, y_2, \dots, y_{m+n}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

kde λ je Langrangeův multiplikátor spojený s omezením $f(\cdot) \leq 0$. Podle Kuhn-Tuckerovy věty pro konkávní programování koresponduje optimální produkční plán $\{\bar{y}_i\}$ s extrémem Lagrangiánu

$$L(y_1, \dots, y_{m+n}, \bar{\lambda}) = L(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{m+n}, \bar{\lambda}) \quad (1.5)$$

pro nezáporné $\{y_i\}$, ($i = 1, \dots, n$) a nekladné $\{y_i, \lambda\}$, ($i = n + 1, \dots, m + n$). Nutné a postačující podmínky pro extrém jsou

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{\partial L}{\partial y_i} \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \\ (ii) \quad & \frac{\partial L}{\partial y_i} \geq 0 \quad (i = n + 1, \dots, m + n) \\ (iii) \quad & \sum_{i=1}^{m+n} \frac{\partial L}{\partial y_i} \cdot \bar{y}_i = 0 \\ (iv) \quad & \frac{\partial L}{\partial \lambda} \leq 0 \\ (v) \quad & \frac{\partial L}{\partial \lambda} \cdot \bar{\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

kde derivace $\{\frac{\partial L}{\partial y_i}, \frac{\partial L}{\partial \lambda}\}$ jsou vyhodnoceny v $\{\bar{y}_i, \bar{\lambda}\}$. Tyto podmínky dávají kompletní charakterizaci optimálního produkčního plánu. Charakteristiku můžeme shrnout do následujícího tvrzení:

Tvrzení 1.1 *Optimální produkční plán splňuje (za výše uvedených předpokladů): $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{m+n}$:*

$$\begin{aligned} p_i + \bar{\lambda} f_i &= 0 & (i = 1, \dots, n) \\ p_i + \bar{\lambda} f_i &= 0 & (i = n + 1, \dots, m + n) \\ \sum_{i=1}^{m+n} (p_i + \bar{\lambda} f_i) \bar{y}_i &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Navíc,

$$\begin{aligned} f(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{m+n}) &= 0, \\ f \cdot \bar{\lambda} &= 0. \end{aligned}$$

Protože, podle předpokladů, je f rostoucí, kladné ceny pro všechny čisté výstupy implikují, že $\bar{\lambda} < 0$, takže $f = 0$. Pokud je produkční funkce striktně konvexní, jsou podmínky následující

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= f(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{m+n}) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} &= p_i + \bar{\lambda} f_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m + n), \end{aligned} \quad (1.8)$$

kde derivace $\{f_i\}$ je vyčíslena v $\{\bar{y}_i, \bar{\lambda}\}$. Pokud existuje řešení, pak je – dle předpokladu striktní konvexity funkce $f(y_1, y, \dots, y_{m+n}) = 0$ – jediné.

$m + n$ podmínek prvního stupně může být interpretováno jako rovnost marginální ziskovosti každého čistého výstupu s jeho výnosem nebo nákladem. Lagrangeův multiplikátor je změna zisku firmy vzhledem ke změně produkčního plánu firmy. Poměrem těchto hodnot dostaneme

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\partial f / \partial y_i}{\partial f / \partial y_j} = -\frac{\partial_j}{\partial_i} (i = 1, \dots, m + n). \quad (1.9)$$

Pro dvojice vstupů a výstupů tyto rovnovážné stavy ukazují, že marginální míra transformace mezi odpovídajícími komoditami je rovna poměru cen těchto komodit. Pro jeden vstup dostaneme známou rovnost, že marginální cena produktu je rovna jeho marginálním nákladům. Cesta expanze, která je kombinace vstupů při různých hladinách výstupu, kde je marginální míra technické substituce (MRTS) rovna poměru cen, může být lehce zjištěna. Hladiny vstupů a výstupů $(y_i)(i = 1, \dots, m + n)$, které maximalizují zisk, a Lagrangeův multiplikátor $\bar{\lambda}$ jsou funkcemi ceny $p_i(i = 1, \dots, m + n)$.

Čili

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \bar{\lambda}(p_1, \dots, p_{m+n}) \\ & \quad (i = 1, \dots, m + n) \\ \bar{y}_i &= s^i(p_1, \dots, p_{m+n}), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$\bar{\lambda}(\cdot)$ je homogenní stupně jedna, zatímco $s^i(\cdot)$ je homogenní stupně nula. Jednotlivé \bar{y}_i nazýváme *čisté nabídkové funkce*. Pro výstupy jsou \bar{y}_i většinou klasické nabídkové funkce; pro vstupy jsou negativními poptávkovými funkcemi. Proto čistě nabídková funkce existuje, pokud jsou splněny podmínky kladené na marginální ziskovost a na produkční funkci a je-li produkční funkce konvexní.

Zisková funkce

Zisková funkce dává hodnotu účelové funkce $\Pi = \sum_{i=1}^{m+n} p_i y_i$, vzhledem ke vztahu $f(y_1, \dots, y_{m+n}) = 0$ a podmínce, že vstupy a výstupy jsou nezáporné.

Dosažením vztahu 1.10 do účelové funkce dostaneme

$$\Pi(p_1, \dots, p_{m+n}) = \sum_{i=1}^{m+n} p_i s^i(p_1, \dots, p_{m+n}). \quad (1.11)$$

Derivujeme-li tento vztah podle p_i , dostaneme

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_i} = s^i + \sum_{j=1}^{m+n} p_j \frac{\partial s^j}{\partial p_i} \quad (1.12)$$

ale $f(s^1, \dots, s^{m+n}) = 0$, takže

$$-\sum_{j=1}^{m+n} \frac{\partial f}{\partial y_j} \frac{\partial s^j}{\partial p_i} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{m+n} p_j \frac{\partial s^j}{\partial p_i}. \quad (1.13)$$

Proto

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_i} = s^i \quad (i = 1, \dots, m+n). \quad (1.14)$$

Funkce čisté nabídky je homogenní stupně nula, takže zisková funkce je homogenní stupně jedna. Vezmeme-li druhou derivaci Π vzhledem k p_i dostaneme

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial s^i}{\partial p_j} = \frac{\partial s^j}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_j \partial p_i}, \quad (1.15)$$

což implikuje, že křížový vliv cen na čistou nabídku je symetrický.

Zisková funkce může být charakterizována jako diferencovatelná stupně dva, rostoucí s rostoucí cenou výstupu a klesající s rostoucí cenou vstupu; optimální řešení existuje pro kladné hladiny vstupů a výstupů pro všechny cenové hladiny. Zisková funkce je konvexní.

Pomocí podmínek pro optimální výstup a ziskové funkce je možné odvodit zákony pro nabídku a poptávku firmy, která je podle definice rovna nabídce výstupů a poptávce (s opačným znaménkem) po vstupech.

Vlastnosti čistě nabídkové funkce

- Je homogenní stupně nula vzhledem k p_1, p_2, \dots, p_{m+n} a to pro všechny násobky těchto hodnot konstantou;
- Substituční efekt i a j je symetrický, tj. $\frac{\partial s^i}{\partial q_j} = \frac{\partial d^j}{\partial q_i}$;
- Čistá nabídka po zboží i nemůže poklesnout, vzroste-li jeho cena;
- Pokud je množství jednoho ze vstupů nebo výstupů fixní, je čistě nabídková funkce homogenní stupně nula ve všech cenách. Ve speciálním případě, když jsou fixní všechny výstupy je tato funkce negativní poptávkovou funkcí pro vstupy.

2 Škálování, substituce faktorů, technické změny: několik definic

Produkční funkce zahrnuje několik ekonomických efektů, jako třeba škálování a substituční efekty, efekty technologických změn a distribuční efekty. Tyto efekty jsou zachyceny v produkční funkci a v její první a druhé derivaci. Tabulka 8.1 ukazuje vlastnosti produkční funkce, které slouží k porovnávání. Při dané produkční funkci $y = f(x, t)$, kde x je vektor vstupů a t je ukazatel technologické změny je možné odvodit vztahy pro returns to scale, podíl výrobních faktorů, cenovou elasticitu, elasticitu substituce a některé ukazatele technického pokroku (TP).

Efekt	Vzorec	Počet
Hladina výstupu	$y = f(x, t)$	1
Returns to scale	$\mu = (\sum_{i=1}^{m+n} x_i f_i) / f$	1
Distribuční podíl	$s_i = x_i f_i / \sum_{i=1}^n x_i f_i$	$n - 1$
Elasticita ceny	$\epsilon_i = x_i f_{ii} / f_i$	n
Elasticita substituce	$\sigma_{ij} = \frac{\frac{f_{ii}}{f_i^2} + \frac{f_{ij}}{f_i f_j} + \frac{f_{jj}}{f_j^2}}{\frac{1}{x_i f_i} + \frac{1}{x_j f_j}}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
Míra TP	$T = f_t / f$	1
Akcelerace TP	$\dot{T} = (f_u / f) - (f_t / f)^2$	1
Míra TP marginálních produktů	$\dot{m}_i / m_i = f_{it} / f_i$	n

Tabulka 8.1: Ekonomické efekty

Returns to scale neboli škálovací funkce

Nechť $f = f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, kde λ je kladná konstanta. Returns to scale v bodě (x_1, \dots, x_n) jsou měřeny škálovací funkcí, které se někdy také říká *funkční koeficient* či *elasticita výstupu*. Je definována jako

$$\mu(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\lambda}{f(\lambda x)} \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial \ln f(\lambda x)}{\partial \ln \lambda}$$

nebo

$$\mu(\lambda) = \sum_{i=1}^n x_i f_i / f. \quad (2.1)$$

Returns to scale jsou klesající, konstantní nebo rostoucí v závislosti na tom, je-li $\mu(x_1, \dots, x_n)$ menší, rovno, nebo větší než jedna.

Dále platí následující vztahy

- (i) *Marginální produkt vstupu* x_i je první parciální derivace produkční funkce vzhledem k x_i ($i = 1, \dots, n$): $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = MP_i(x) \geq 0$; $MP(x)$ je vektor marginálních produktů x_i , tj. $MP(x) = (MP_1(x), \dots, MP_n(x))$. Returns to scale můžeme definovat jako

$$\mu(x) = \frac{MP(x)}{f(x)} \cdot x; x = (x_1, \dots, x_n). \quad (2.2)$$

- (ii) *Returns to j^{th} input*:

$$\mu_j(x) = \frac{x_j}{f(x)} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_j} = f_j(x) \cdot \frac{1}{f(x)/x_j} = \frac{MP_j(x)}{AP_j(x)}; (j=1, \dots, n) \quad (2.3)$$

kde AP_j je *průměrný produkt faktoru j* , který je definovaný jako $f(x)/x_j$.

(iii) Elasticita průměrného produktu

$$\frac{\partial(f/x_j)}{\partial x_j} \frac{x_j}{(f/x_j)} = \frac{f_j}{f/x_j} - 1 = \mu_j - 1,$$

kteřá naznačuje, že existují rostoucí nebo klesající výnosy v závislosti na tom, je-li μ_j větší nebo menší než jedna.

(iv) *Returns on scale* v libovolném bodě

$$\mu(x) = \sum_{j=1}^n \mu_j(x), \quad (2.4)$$

jsou sumou všech elasticit výstupu vzhledem ke všem vstupům.

Returns on scale pro produkční funkce několika produktů mohou být určeny následovně:

Předpokládejme, že $F(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n) = F(\gamma y_1^0, \dots, \gamma y_m^0, \lambda x_1^0, \dots, \lambda x_n^0)$, kde γ a λ jsou konstanty, y jsou výstupy a x jsou vstupy. Je-li produkční funkci několika produktů separabilní tak, že $h(y_1, \dots, y_m) - f(x_1, \dots, x_n) = 0$ pak je škálovací funkce pro $F = h - f$ definována jako

$$\mu^F = \frac{d\gamma/\gamma}{d\lambda/\lambda} = \frac{\text{proporcionální relativní změna všech výstupů}}{\text{proporcionální relativní změna všech vstupů}}$$

nebo

$$\mu^F = \mu^f / \mu^{-h}, \quad (2.5)$$

kde μ^f a μ^{-h} jsou škálovací funkce pro f a h . Je obtížné vysvětlit ekonomický význam μ^F , pokud je počet výstupů větší než jedna.

2.1 Elasticita substituce

Substituční možnosti jsou takové alternativní kombinace vstupů, které generují stejnou hladinu výstupu.

Místní měření substituce mezi dvěma vstupy - řekněme x_1 a x_2 - při všech ostatních vstupech konstantních a konstantní hladině výstupu, lze provést pomocí *elasticity substituce* σ , která je definována jako

$$\sigma = \frac{d \log(x_2/x_1)}{d \log(f_1/f_2)} \quad (2.6)$$
$$\sigma = \frac{-f_1 f_2 (x_1 f_1 + x_2 f_2)}{x_1 x_2 (f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2)}.$$

Jinými slovy, pro dané y^0 je σ proporcionalní změna poměru $x_2 : x_1$, která plyne ze proporcionalní změny marginální míry substituce mezi x_1 a x_2 . Pokud jsou ceny jednotlivých faktorů neměnné a firma se snaží minimalizovat náklady, pak existuje jednoduchá interpretace σ a to jako procentuální změna vstupů vydělená procentuální změnou marginálního produktu nebo procentuální změnou relativních cen vstupů.

Zakřivení izokvant je určeno velikostí elasticity substituce. *Izokvanta* reprezentuje množinu vstupů, které generují stejnou hladinu výstupu. Tedy

$$\{x \in D | f(x) = y^0\} \quad (2.7)$$

za předpokladu, že $f(x)$ je rostoucí podél *paprsků* tj. $f(\lambda \cdot x) > f(x)$ je-li $\lambda > 1$ a spojitě.

Podle definice

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} dx_j = 0. \quad (2.8)$$

Protože

$$dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n); MP(x)dx = 0$$

což - v případě dvou faktorů x_1 a x_2 - může být zapsáno jako

$$MP_1(x)dx_1 + MP_2(x)dx_2 = 0$$

Sklon izokvanty

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{\text{izokvanta}} = -\frac{MP_2(x)}{MP_1(x)} = MRS_{12} \quad (2.9)$$

kde MRS_{12} je marginální míra substituce jedné jednotky x_1 několika jednotkami x_2 při stejné hladině výstupu.

Tvar produkční funkce klade omezení na substituovatelnost faktorů. Substituce faktorů není například možná pro produkční funkci s fixními poměry, $\sigma = 0$. Naopak pro lineární produkční funkci $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_i > 0$, $\sigma = \infty$ je substituovatelnost úplná. Pro hodnoty σ v intervalu $(0, +\infty)$ je maximální míra substituce větší než žádná, ale není úplná.

Pro obecnou n -faktorovou produkční funkci je náročné stanovit jednoznačnou definice elasticity substituce. V takových případech můžeme definovat pouze parciální elasticity substituce vstupů. Bylo navrženo několik definic:

1. *Přímá Elasticita Substituce* (PES) mezi faktory i a j je zobecněnou dvoufaktorovou elasticitou substituce. Je dána jako

$$\sigma_{ij}^D = \frac{f_i f_j (x_i f_i + x_j f_j)}{x_i x_j (f_{ii} f_j^2 - 2 f_{ij} f_i f_j + f_{jj} f_i^2)}, 0 < \sigma_{ij}^D < \infty. \quad (2.10)$$

2. *Allenova Parciální Elasticita Substituce* (APES) je mírou změny poptávky firmy po faktoru j , která je dána změnou ceny faktoru i s tím, že všechny ostatní veličiny zůstávají konstantní. Tedy

$$\sigma_{ij}^A = \frac{\sum_{k=1}^n x_k f_k}{x_i x_j} \cdot \frac{F_{ij}}{F}; -\infty < \sigma_{ij}^A < \infty \quad (2.11)$$

kde

$$F = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & f_{1n} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

F_{ij} je f_{ij} minor matice F , Podmínky stability vyžadují, aby $F_{nn}/F < 0$. Protože F je symetrická, bude matice parciálních elasticit také symetrická. Některé z parciálních elasticit mohou být záporné, ovšem alespoň některé musí být kladné. Pokud provedeme vážený součet těchto elasticit, musí kladné převládat.

Narozdíl od přístupu PES nemá APES přímou interpretaci. Může být ukázáno, že $\sigma_{ij}^A = \eta_{ij}/(p_i x_i/C)$, kde η_{ij} je parciální elasticita poptávky po faktoru j vzhledem k ceně faktoru i a C jsou celkové náklady. σ_{ij}^D a σ_{ij}^A jsou shodné s dvoufaktorovou elasticitou σ je-li $\eta = 2$. Obecně shodné nejsou. Definice PES a APES lze také použít pro měření přímé a parciální elasticity transformace mezi dvěma produkty.

2.2 Technický pokrok

Technický pokrok souvisí s procesem a důsledky změn produkční funkce způsobené změnou technologie. Jsou-li použity nové technologie, mají na produkční proces buď neutrální vliv, nebo změni vztah mezi vstupy a výstupy. Neutralita technického pokroku může být měřena jeho efektem na některé ekonomické ukazatele (např. poměry: kapitál/výstup, výstup/práce, kapitál/práce), které by měli zůstat invariantní.

Tři nejznámější definice technického pokroku:

$$\left(\frac{\partial(f_K K)/\partial t}{\partial(f_L L)} \right)_{K/L \text{ konst.}} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix}, \text{ Hicks } \begin{cases} \text{šetří práci} \\ \text{neutrální} \\ \text{šetří kapitál} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial(f_K K)/\partial t}{\partial(f_L L)} \right)_{K/Y \text{ konst.}} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix}, \text{ Harrod } \begin{cases} \text{šetří práci} \\ \text{neutrální} \\ \text{šetří kapitál} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial(f_K K)/\partial t}{\partial(f_L L)} \right)_{L/Y \text{ konst.}} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix}, \text{ Solow } \begin{cases} \text{šetří práci} \\ \text{neutrální} \\ \text{šetří kapitál} \end{cases}$$

Je-li technický pokrok ztělesněný v práci a kapitálu bude technická změna záviset na elasticitě substituce σ a různých mírách růstu vtělení práce a kapitálu. Vtělení znamená, že - díky rozvoji technologie - jsou nové vstupy efektivnější než vstupy staré. Vezměme dvoufaktorovou produkční funkci danou jako

$$y = f(\alpha_1 L, \alpha_2 K), \quad (2.12)$$

kde α_1 a α_2 jsou koeficienty růstu faktorů. Protože směr technické změny závisí na poměru α_1/α_2 je technická změna Hicks-neutrální pokud je tento poměr konstantní, Harrod-neutrální je-li α_2 konstantní a Solow-neutrální je-li α_1 konstantní.

Bias technické změny B je definována jako

$$B = \left[\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} - \frac{d\alpha_2}{\alpha_2} \right] \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right). \quad (2.13)$$

3 Vlastnosti produkčních funkcí a dualita

Budeme se zde věnovat pojmům homogenita, aditivita a separabilita. Jiný důležitý pojem je dualita mezi produkční funkcí, normalizovanou ziskovou funkcí nebo nákladovou funkcí. Podle obecných podmínek ze sekce 1, zásadní produkční technologie může být identifikována užitím nákladové nebo ziskové funkce. Principy duality jsou zde zmiňovány pouze letmo. Podrobnější rozprava může být nalezena v kapitole 7. Nejdříve rozebereme podmínky homogenity, aditivity a separability produkční technologie.

3.1 Homogenita, aditivita a separabilita

Homogenita a homoteticita produkčních funkcí

Homogenní produkční funkce stupně k je definována takto:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad \lambda > 0. \quad (3.1)$$

Diferencovatelná, lineárně homogenní produkční funkce má následující vlastnosti:

1. $y = \sum_i^n x_i f_i$, kde, podle Eulerovy věty, $f_i = \partial f / \partial x_i$.
2. První derivace homogenní funkce stupně jedna je homogenní funkce stupně nula.
3. $f_{ii} = (x_j^2 / x_i^2) f_{jj}$, kde $f_{ii} = \partial^2 f / \partial x_i^2$ a $f_{jj} = \partial^2 f / \partial x_j^2$.
4. $x_i f_{ii} + x_j f_{ij} = 0$ a $x_j f_{jj} + x_i f_{ij} = 0$, kde $f_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$.

Z vlastností (iii) a (iv) plyne, že:

5. $f_{ii} - f_{jj} = f_{ij} = 0$, pokud jedna ze tří předcházejících hodnot je nula a předpokládáme kladnou úroveň vstupů.
6. $x_i^2 f_i^2 + 2x_i x_j f_i f_j + x_j^2 f_j^2 = y^2$.

Monotónně rostoucí transformace homogenní produkční funkce se nazývá *homotetická produkční funkce*. Skupiny homotetických produkčních funkcí jsou charakterizovány rostoucí přímkou procházející počátkem, tj. tvary okraje produkčního povrchu jsou radiální vyboulení jednoho do druhého. Homotetická produkční funkce je definována jako:

$$y = g(f(x_1, x_2, \dots, x_n)), \quad (3.2)$$

kde f je homogenní funkce libovolného stupně ($f > 0$); f a g jsou dvakrát derivovatelné funkce a f může být interpretována jako vstupní index faktorů produkce.

Aditivita a homogenita produkčních funkcí

Hranice výrobních možností je homogenní a pokud jde o zboží aditivní tehdy a jen tehdy, když hranice může být vyjádřena jako:

$$\begin{aligned} & F^1(\lambda y_1) + F^2(\lambda y_2) + \cdots + F^n(\lambda y_n) \\ &= F^1(y_1) + F^2(y_2) + \cdots + F^n(y_n) = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

pro libovolné $\lambda > 0$. y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) reprezentuje čistý výstup i -tého zboží, některé z nich jsou vstupy do produkčního procesu. Tato podmínka je být splněna tehdy a jen tehdy

1. funkce $[F^i]$ jsou homogenní stejného stupně, nebo
2. funkce $[F^i]$ jsou logaritmické.

Pokud se každý čistý výstup y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) skládá z m vzájemně se vylučujících a úplných komoditních skupin, například $F(y_1, y_2, \dots, y_n) = F^1(y_1, y_2, \dots, y_n) + F^2(y_{n_1+1}, \dots, y_{n_1+n_2}) + \cdots + F^m(y_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}, \dots, y_{n_1+n_2+\dots+n_m}) = 0$, pak je produkční hranice nazývána *skupinově aditivní*. Podmínky (1) a (2) jsou stále použitelné, když hranice je skupinově aditivní. Příkladem aditivně homogenních hranic výrobních možností jsou lineárně homogenní a dvoustupňové konstanty elasticity substituce produkčních funkcí popsanych stručně v části 3.

3.2 Funkční separabilita produkčních funkcí

Pokud produkční funkce několika argumentů může být rozdělena na podfunkce, potom efektivita produkce může být dosažena postupnou optimalizací. Funkční separabilita hraje důležitou roli při agregování heterogenních vstupů a výstupů, odvozování funkcí přidané hodnoty a odhadování produkčních funkcí; otvírá také možnost konzistentních mnohaetapových estimací, které mohou být jediné uskutečnitelné procedury, pokud je zahrnuto velké množství vstupů a výstupů v produkčních aktivitách vysoce komplexních společností.

Předpokládejme, že produkční funkce $y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ je dvakrát derivovatelná a vyloženě kvazikonkávní s n vstupy označenými $N = (1, \dots, n)$ a je rozdělena do r vzájemně vylučujících se a úplných podmnožin (N_1, \dots, N_r) a část označenou R . $f(x)$ je *slabě separabilní* vzhledem k části R , pokud *mezí míra substituce* (MRS) mezi libovolnými dvěma vstupy x_i a x_j z kterékoliv podmnožiny N_s , $s = 1, \dots, r$, je nezávislá na množstvích mimo N_s . Podmínka slabé separability je uvedena jako [Leontief (1947), Green (1964) a Berndt a Christensen (1973)]:

$$\frac{\partial(f_i/f_j)}{\partial x_k} = 0, \quad \forall i, j \in N_s \text{ a } k \notin N_s. \quad (3.4)$$

Silná separabilita existuje, pokud MRS mezi libovolnými dvěma vstupy uvnitř N_s a N_t nezáleží na množstvích vstupů vně N_s a N_t , tj.

$$\frac{\partial(f_i/f_j)}{\partial x_k} = 0, \quad \forall i \in N_s, j \in N_t, k \notin N_s \cup N_t \quad (3.5)$$

nebo alternativně $f_j f_{ik} - f_i f_{jk} = 0$. *Slabá separabilita* vzhledem k části R je nutná a dostačující, aby produkční funkce $f(x)$ měla tvar $f(x^1, x^2, \dots, x^r)$, kde x^s je funkce pouze z prvků N_s . U *silné separability* je nutné a postačující pro $f(x)$ mít tvar $f(x^1 + x^2 + \dots + x^r)$, kde x^s je funkce pouze z prvků N_s .

Kvazikonkávní homotetická produkční funkce $f(x)$ je slabě separabilní vzhledem k části R v bodě tehdy a jen tehdy, když Allenovy elasticity substituce mezi dvojicemi vstupů jsou si rovny, tj. $AES_{ik} = AES_{jk}$ v bodě, kde $i \neq j \in N_r$, $k \notin N_r$. Funkce je silně separabilní tehdy a jen tehdy, když $AES_{ik} = AES_{jk}$ pro všechna $i \in N_s$, $j \in N_t$, $k \notin N_r \cup N_t$. Pokud $n = R$, pak všechny AES_{ik} , $i \neq k$ jsou si rovny*.

Tyto výsledky mohou být rozšířeny na nákladové a ziskové funkce, stejně jako na případ nehomotetických produkčních funkcí†. Například pokud je $f(x)$ homotetická a separabilní, pak duální nákladová funkce $C(y, p) = H(y) \cdot G(p)$, kde p je vektor vstupních cen, je slabě separabilní. Je třeba říci, že $C_j C_{ik} - C_i C_{jk} = 0$ platí stejně jako $f_j f_{ik} - f_i f_{jk} = 0$.

*Viz Fuss a McFadden, Eds. (1980 kap. II.1, strany 244-248), o derivaci těchto pojmů

†Applikace věty o separabilitě na produkční funkce s lineárními a nelineárními parametry, viz Fuss a McFadden, Eds. (1980).

Tyto věty o separabilitě, pokud platí, poskytují podmínky pro existenci konzistentního agregovaného cenového indexu p^s a konzistentního množstevního indexu X^s na elementech N_s . Většina teoretických a empirických formulací produkční funkce v literatuře implicitně předpokládá, že podmínky separability platí (převládají).

3.3 Dualita produkční technologie a nákladové a ziskové funkce

Alternativní přístup k produkční teorii je použít nákladové a ziskové funkce ke specifikování základů produkční technologie. Teorie duality zajišťuje soulad mezi nákladovými a ziskovými funkcemi a produkční technologií. Výhody používání nákladových a ziskových funkcí k odvozování charakteristik základní technologie jsou výpočetní nenáročnost a zpracováním ekonomických pozorovaných proměnných povolují testování širších tříd hypotéz. Ke stanovení duality mezi nákladovou a ziskovou funkcí a produkční technologií je třeba několika matematických pojmů a tvrzení. Několik z nich je popsáno níže bez pokusu poskytnout nutné důkazy[‡].

3.4 Nějaké definice a vlastnosti nákladové funkce

1. *Vstupně pravidelná množina výrobních možností* je definována, pokud množina produkovatelných výstupů y^* je neprázdná a pro každé $y \in y^*$ vstupní požadavek L je neprázdná a uzavřená množina.
2. *Obecná množina výrobních možností* je definována, pokud je zde volné odstraňování vstupů [vlastnost (b) v části 2 kapitoly 3 na straně 95], a produkční množiny jsou zdola konvexní [vlastnost (h) v části 2 kapitoly 3 na straně 97].

Pokud je firma na konkurečním trhu s vyloženě kladnými vstupními cenami, $p = p(p_1, \dots, p_n)$ a vstupně

[‡]Zájmcem by měl nahlédnout do přírodních kapitol z Shephard (1970) a Fuss a McFadden, Eds. (1980). Viz také kapitola 12 tohoto textu v kapitole 7.

pravidelná množina výrobních možností, její *nákladová funkce* může být definována jako

$$C(y, p) = \min\{p \cdot x \mid x \in L(y)\}. \quad (3.6)$$

Nákladová funkce $C(y, p)$ označuje minimum celkových nákladů vstupních vektorů k získání nejmenšího výstupního vektoru y . Nákladová funkce je nezáporná, protože x a p jsou nezáporné a neklesající ve vstupních cenách pro pevný výstup. Nákladová funkce je kladně lineárně homogenní v p a je také konkávní ve vstupních cenách. Vlastnost konkávnosti vede k výsledku, že nákladová funkce je spojitá ve vstupních cenách, tj. pro $p > 0$ a $y \geq 0$.

Teorie duality tvrdí, že nákladová funkce (3.6) existuje, že existují vstupně pravidelná množina výrobních možností taková, že (3.6) je minimum nákladové funkce. Aplikace vět o dualitě dává následující výsledky:

1. Každá vstupně obecná nákladová funkce udává implicitní množinu produkčních možností, která je vstupně obecná (tj. je vstupně pravidelná a splňuje podmínky volného odstraňování a konvexity).
2. Je zde vztah mezi vstupně obecnou množinou produkčních schopností a vstupně obecnými nákladovými strukturami[§].

Funkce vzdálenosti a nákladová funkce

Funkce vzdálenosti je transformační funkce často používaná k popisu množiny výrobních možností. Používání této funkce dovoluje založení plné a formální matematické duality mezi transformací a nákladovou funkcí, neboť obě jsou použity ze stejné třídy funkcí a mají stejné vlastnosti. Toto naopak umožňuje zavedení tvrzení, že pokud vlastnost A transformační funkce implikuje vlastnost B nákladové funkce, potom podle duality vlastnost A nákladové funkce implikuje vlastnost B transformační funkce.

Uvažujte funkci vzdálenosti

$$F(y, x) = \max\{\lambda > 0 \mid (1/\lambda)x \in L(y)\}, \quad (3.7)$$

[§]Tento výsledek je často označován jako Shephard-Uzawova věta o dualitě. Viz Shephard (1970) a Uzawa (1964)

u které může být ukázáno, že je dobře definována. Pro $y = 0$, vektor 0 může být v $L(0)$, v tomto případě je $F(x, y)$ definováno s hodnotou $+\infty$. Pomocí této definice a vlastností funkce vzdálenosti Shephard ustanovil vztah mezi vstupně obecnými produkčními možnostmi a vstupně obecnými funkcemi vzdálenosti [Shephard (1953, 1970); viz také McFadden (1980, strany 92-112)]. Také pomocí formálního vztahu duality nákladové funkce a funkce vzdálenosti ukázal, že množina výrobních možností má vlastnost A tehdy a jen tehdy pokud má nákladová funkce vlastnost B a naopak. Některé z vlastností duality mezi transformací a nákladovou funkcí jsou ukázány v tabulce (8.2) [McFadden (1980, strany 92-112)].

Tabulka 8.2: Vlastnost A zastupuje vstupně obecnou funkci tehdy a jen tehdy, když vlastnost B zastupuje její vstupně obecnou nákladovou funkci.



	Vlastnost A transformační funkce $F(y, x)$	Vlastnost B nákladové funkce $C(y, p)$
1	Nerosotoucí v y	Neklesající v y
2	Stejněměrně klesající v y	Stejněměrně rostoucí v y
3	Silně shora polospojité v (y, x)	Silně zdola polospojité v (y, p)
4	Silně zdola polospojité v (y, x)	Silně shora polospojité v (y, p)
5	Silně spojitá v (y, x)	Silně spojitá v (y, p)
6	Striktně kvazikonkávní zdola v x	Spojité diferencovatelná v kladném p
7	Spojité diferencovatelná v kladném x	Striktně kvazikonkávní zdola v p
8	Dvakrát diferencovatelná a striktně diferencovatelně kvazikonkávní zdola v x	Dvakrát diferencovatelná a striktně diferencovatelně kvazikonkávní zdola v p

Tedy pomocí formálního vztahu duality mezi nákladovou a transformační funkcí je možné používat nákladové údaje k odhadu základní množiny produkčních možností. Teorie duality může být také použita k

sestavení vlastností "omezené ziskové funkce", která umožňuje optimalizaci firmy nad libovolnou množinou proměnných vstupů a výstupů. Některé příklady principů duality a jejich aplikace jsou uvedeny níže.

3.5 Aplikace principů duality: Zisková a nákladová funkce

Z principů duality plyne, že nákladové a ziskové funkce mohou být použity k charakterizování ekvivalentních strukturálních vlastností produkčního procesu. Protože analýza ziskové funkce je zobecněním přístupu nákladové funkce, níže uvedená rozprava se týká ziskové funkce; avšak příklad nákladové analýzy týkající se proměnné dlouhodobé nákladové funkce je také stručně probrán.

Předpokládejme, že

$$y = F(x_1, \dots, x_n; Z_1, \dots, Z_m) \quad (3.8)$$

je produkční funkce firmy, kde x a Z jsou po řadě proměnné a pevné vstupy. Pokud je výrobní funkce F (1) konečná, nezáporná reálná funkce; (2) spojitá; (3) spojitě a dvakrát diferencovatelná; (4) monotónní v $x = (x_1, \dots, x_n)$ a v $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$; (5) konkávní a lokálně silně konkávní; a (6) ohraničená, pak normalizovaná zisková funkce

$$\phi = pF(x, Z) - \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (3.9)$$

má také tyto vlastnosti. [Formální důkaz viz Lau (1980).] To znamená, pokud doměnky o produkční funkci platí, že existuje korespondence mezi členy normalizovaného zisku a produkční funkce. Rovnice (3.9) může být zapsána termíny normalizovaného zisku, $\phi^*(\Pi/P)$ nebo jednotkovou výstupní cenou, zkráceně "UOP". To je

$$\phi = F(x^*, Z) - Px^* = G(P, Z),$$

kde x^* je volitelný stupeň proměnných vstupů a $P = p_i/p$ je vektor normalizovaných cen vstupů. Duální transformační vztahy mezi normalizovanou ziskovou funkcí $G(P, Z)$ a produkční funkcí $F(X, Z)$ jsou shrnuty v tabulce (8.3).

Tabulka 8.3: Relace duální transformace mezi $F(\cdot)$ a $G(\cdot)$

Produkce $F(x, Z)$	Normalizovaná zisková funkce $G(P, Z)$
(1) $F(x, Z) - G(P, Z) = P'x$	
(2) $\frac{\partial F}{\partial x} = P$	$\frac{\partial G}{\partial P} = -x$
(3) $x = -\frac{\partial G}{\partial P}$	$P = \frac{\partial F}{\partial x}$
(4) $\frac{\partial F}{\partial Z} = \frac{\partial G}{\partial Z}$	$\frac{\partial G}{\partial Z} = \frac{\partial F}{\partial Z}$
(5) $F = G - P\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)$	$G = F - x\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$
(6) Z	Z

Zdroj: Lau (1980, str. 140)

Množina vztahů

$$\frac{\partial G}{\partial P} = -x$$

a

(3.10)

$$\frac{\partial G}{\partial Z} = \frac{\partial F}{\partial Z}$$

je takzvané *Hotellingovo lemma* [Hotelling (1932)], které navrhuje, že požadavek pro x_i může být získán derivováním ziskové funkce podle ceny proměnných vstupů a derivace produkční a nákladové funkce podle pevných faktorů jsou ekvivalentní. Několik vlastností ziskových funkcí jsou:

1. Pokud produkční funkce F je homogenní stupně k (pod podmínkou $k < 1$), pak zisková funkce je homogenní stupně $-k/(1-k)$ a zisk maximalizující náklad proměnného vstupu je $C^* = P[k/(1-k)] \cdot G$.
2. Derivovaná funkce požadavku je homogenní stupně $-1/(1-k)$ v P , pokud výrobní funkce je homogenní stupně k v x .
3. Výrobní funkce je homotetická u proměnných vstupů x tehdy a jen tehdy, když normalizovaná zisková funkce je homotetická v P .
4. Pokud je produkční funkce daná $y = AF(x, Z)$, normalizovaná zisková funkce je daná jako $\phi^* = AG(P/A, Z)$.
5. Odhady produkčních elasticit mohou být odvozeny, dány odhadem normalizovaných ziskových elasticit a naopak. Platí následující vztah:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln G}{\partial \ln p_i} &= -\frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{\partial \ln F}{\partial \ln x_i}, \text{ kde } \varepsilon = \sum \frac{\partial \ln F}{\partial \ln x_i}, \\ \frac{\partial \ln F}{\partial \ln x_i} &= -\frac{1}{(1-\eta)} \frac{\partial \ln G}{\partial \ln p_i}, \text{ kde } \eta = \sum \frac{\partial \ln G}{\partial \ln p_i}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Z (3.11) plyne, že $1/\varepsilon + 1/\eta = 1$.

6. Produkční funkce je aditivně separabilní vzhledem ke zbožovým kategoriím tehdy a jen tehdy, pokud normalizovaná zisková funkce je aditivně separabilní vzhledem k odpovídajícím cenovým kategoriím.
7. Produkční funkce a její normalizovaná zisková funkce jsou silně separabilní vzhledem ke zbožovým kategoriím a odpovídajícím cenovým kategoriím, pouze pokud jsou homoteticky separovatelné.

Obecně, uzavřené formy řešení normalizované ziskové funkce jsou často obtížně získatelné i pro jednoduché technologie. Problém je rozřešen, pokud je použita představa normalizované *omezené ziskové funkce*. Normalizované ziskové funkce s pevnými vstupy se nazývají *normalizované omezené ziskové funkce*. Některé z vlastností, jako homogenita, homoteticita rozebrané výše jsou použitelné pro omezenou ziskovou funkci, ale s nějakými důležitými modifikacemi. Mezi tyto modifikace patří:

1. Omezená zisková funkce $F(x, Z)$ je *téměř homogenní* stupně k_1 a k_2 v X a Z , pokud

$$F(\lambda x, \lambda^{k_2} Z) = \lambda^{k_1} F(X, Z); \quad \lambda > 0, \quad (3.12)$$

tj. když je proměnný vstup zvýšen o nějakou část (λ) a pevné faktory jsou zvýšeny mocninou λ , pak výstup Y vzroste s další mocninou této části [viz Lau (1976)]. Pokud $k_1 = k_2 = 1$, pak převládnu konstantní zisky.

2. Produkční funkce je homogenní stupně k ve všech vstupech, pokud normalizovaná omezená funkce je téměř homogenní stupně $-1/(1-k)$ a $-k/(1-k)$, pokud $k \neq 1$.
3. Pokud je zisková funkce téměř homogenní stupně 1 a $1/k$, základní produkce je homogenní stupně k v Z .
4. Pokud je produkční funkce homogenní stupně k , pak derivace funkcí požadavku jsou homogenní stupňů $-1/(1-k)$ a $-k/(1-k)$.

Další výsledky struktury normalizovaného zisku jako homoteticita a separabilita, mohou být vyvozeny a výsledky mohou být rozšířeny na mnohavýstupní případ [Lau (1980)]. Je postačující říct, že normalizovaná omezená zisková funkce je flexibilní metodou pro analytické a empirické analýzy struktury produkční technologie. Například Lau (1976) ukázal, že normalizovaná (omezená) zisková funkce může být použita k analýze relativní efektivity mezi dvěma firmami. Rozšířil funkci, aby zahrnovala adaptivní a očekávané zpožděné opravy vstupů a vzal v úvahu jistý stupeň nejistoty cen [Lau (1980)].

Zajímavá aplikace je derivace struktury krátkodobé proměnné nákladové funkce a výsledné specifikace dlouhodobých nákladů. Uvažujme proměnnou nákladovou funkci:

$$C_v = F(P, y, \bar{Z}) \quad (3.13)$$

a předpokládejme, že stupeň výstupu y je dán a máme pouze jeden pevný vstup \bar{Z} a vektor N proměnných vstupů x s cenovým vektorem $P = (p_1, \dots, p_n)$. Funkce variabilních nákladů musí být monotónně rostoucí a konkávní ve faktorových cenách P . Odpovídající krátkodobá nákladová funkce je

$$C_s = F(P, y; \bar{Z}) + P_{\bar{Z}}\bar{Z}, \quad (3.14)$$

kde $P_{\bar{Z}}$ je cena \bar{Z} . Optimální použití pevného faktoru je definováno implicitně pomocí obalové podmínky

$$-\frac{\partial f(\cdot)}{\partial \bar{Z}} = P_{\bar{Z}} \quad (3.15)$$

za předpokladu, že funkce variabilních nákladů je klesající a konvexní v \bar{Z} . Při uvažování optimální úrovně pevného vstupu implikovaného (3.15) jako $\bar{Z} = \psi(P, Y, P_{\bar{Z}})$, funkce dlouhodobých nákladů je

$$C = H(P, y, P_{\bar{Z}}). \quad (3.16)$$

Derivací (3.13) a (3.14) podle Y a úpravami dospějeme k vztahu mezi cenovou elasticitou podle proměnné a krátkodobou funkcí nákladů. Tento vztah je vyjádřen jako

$$\eta^s = (1 + d)^{-1} \eta^v, \quad (3.17)$$

kde η^s a η^v jsou elasticity krátkodobých a variabilních nákladových funkcí. a kde $d = P_Z \bar{Z} / C_v$ je poměr fixních a variabilních nákladů.

Na druhou stranu krátko a dlouhodobé elasticity mohou být spojeny pouze pokud platí obalová podmínka. V tomto případě derivováním (3.16) pomocí (3.15) získáme zřejmý výsledek, že krátko a dlouhodobé elasticity jsou identické: $\eta = \eta^s$. Pokud obalová podmínka neplatí, pak neexistuje jedinečný vztah mezi η^s a η .

AES spolu s variabilními náklady je také v relaci. Variabilní náklady AES, σ_{ij}^v , jsou definovány jako

$$\sigma_{ij}^v = \frac{F(\cdot) \partial^2 F / \partial p_j \partial p_j}{\partial F / \partial p_i \partial F / \partial p_j}, \quad \text{pro } i, j \neq k, \quad (3.18)$$

kde dolní indexy označují vstupy. Všimněte si, že $\sigma_{ij}^v = \sigma_{ji}^v$. Z (3.14) a (3.18) okamžitě plyne, že $\sigma_{ij}^v = (1 + d)\sigma_{ij}^v$. AES spolu s dlouhodobou nákladovou funkcí je

$$\sigma_{ij}^v = \frac{H(\cdot) \partial^2 H / \partial p_i \partial p_j}{\partial H / \partial p_i \partial H / \partial p_j}, \quad \forall i, j. \quad (3.19)$$

Vztah mezi σ_{ij} a σ_{ij}^v je vyjádřen takto:

$$\sigma_{ij} = (1 + d) \left[\sigma_{ij}^v + S_i^{-1} \frac{\partial \ln x_j}{\partial \ln k} \frac{\partial \ln k}{\partial \ln p_i} \right], \quad i, j \neq k, \quad (3.20)$$

kde $S_i = P_i X_i / C_v$ je podíl variabilních nákladů na vstupu i . Rovnice (3.20) svazuje variabilní náklady a dlouhodobou AES s proměnnými faktory [Další diskuse viz Schankerman a Nadiri (1980)]. Je jednoduše ověřitelné, že vyžadovaná podmínka $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ je splněna. Dlouhodobá AES vyžadující pevné faktory je získána ze vztahu $\sum_j \alpha_j \sigma_{ij} = 0$, kde $\alpha_j = p_j x_j / C$ je dlouhodobý podíl nákladů vstupu j .

4 Funkcionální forma produkční funkce: Agregace zásoby kapitálu

Bylo vynaloženo značné úsilí na specifikaci základního tvarů produkční funkce. Tyto základní formy jsou přístupné ekonometrické estimaci, v souladu s vlastnostmi technologického produkčního souboru popsaného v části 1 této kapitoly a postihují většinu ekonomických vlivů popsaných v tabulce 8.1 na straně 285. Kritéria pro výběr mezi různými funkcionálními tvary, ačkoliv značně závislým na cílech konkrétních analýz, mohou být vyjádřena takto:

1. konsistentnost s teoretickými vlastnostmi technologie produkce diskutovanými v kapitole 1 – tj. produkční funkce by se měla chovat rozumně, vyazuje soulad se standardními hypotézami, jako je kladný marginální produkt nebo konvexita;
2. hospodárnost v počtu odhadovaných parametrů a jednoduchá interpretace výsledků;
3. malá výpočetní složitost;
4. stabilita funkce v čase nebo v průběhu pozorování.

Příklady určitých funkcionálních tvarů jsou diskutovány v první části tohoto oddílu.

4.1 Tvary produkčních funkcí

Pro empirické analýzy je nezbytné specifikovat tvar produkční funkce mnohem precizněji. Současné úsilí je zaměřeno na odstranění omezujících rysů jako je additivita, separabilita, constanta elasticity substituce atd., které charakterizují tradiční produkční funkce. Krátce jsou diskutovány vlastnosti pár funkcionálních tvarů které se používají při ekonometrickém odhadu.

Lineární homogenní produkční funkce

Nejznámějšími členy této skupiny funkcí jsou :

- Leontiefova produkční funkce

$$y = \min \left(\frac{1}{\alpha} x_1, \frac{1}{\beta} x_2 \right), \text{ kde } \sigma = 0; \alpha, \beta > 0; \quad (4.1)$$

- Cobb-Douglasova produkční funkce

$$y = Ax_1^\alpha x_2^\beta, \text{ kde } \sigma = 0; \mu = \alpha + \beta \text{ a} \quad (4.2)$$

- CES produkční funkce

$$y = \gamma \left[\delta x_1^{-\rho} + (1 - \delta) x_2^{-\rho} \right]^{-\frac{\nu}{\rho}}, \text{ kde } \sigma = \frac{1}{1 + \rho} 0; \mu = \nu \quad (4.3)$$

kde x_1, x_2 jsou vstupy, α, β konstanty elasticity vstupů, A, γ parametry účinnosti, $\delta (0 < \delta < 1)$ je intenzita vstupů, $\infty \geq \rho \geq -1$ je substituční parametr a ν je *return to scale* parametr funkce CES. Můžeme zmínit většinu vlastností třídy homogeních produkčních funkcí za použití CES jako příkladu.

1. Produkční funkce CES je jako Cobb-Douglasova produkční funkce silně separabilní.
2. Mezní produkt CES produkční funkce je kladná, pro nenulové vstupy monotonně klesající funkce.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \delta \gamma^{-\rho} \left(\frac{y}{x_1} \right)^{1+\rho} \text{ a } \frac{\partial y}{\partial x_2} = (1 - \delta) \gamma^{-\rho} \left(\frac{y}{x_2} \right)^{1+\rho}. \quad (4.4)$$

3. Mezní míra technické substituce x_1 za x_2 je

$$MRS = \left(\frac{\delta}{1 - \delta} \right) \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{1 - \sigma}. \quad (4.5)$$

Pro jakoukoliv hodnotu MRS a σ čím větší bude parametr intenzity vstupů δ , tím menší bude poměr vstupů $\frac{x_2}{x_1}$. To znamená, že produkční proces je tím více závislý na x_1 , čím větší je parametr δ .

4. Elasticita substituce pro CES je konstantní, nikoliv však nutně rovna jednotkové. Tedy $\sigma = \frac{1}{1 + \rho}$. Pro hodnotu $\sigma = 1$ se CES produkční funkce redukuje na Cobb-Douglasovu funkci a pro $\sigma = 0$ na Leontiefovou rovnici.

Důležitým rozšířením CES produkční funkce je dvoustupňová produkční funkce CES. Nazývá se dvoustupňová, protože může být sestavena ve dvou fázích, za použití CES v každé z nich. Tato funkce je silně separabilní s ohledem na nejvyšší stupeň rozdělení a silně separabilní v každém subagregátu. V prvním kroku jsou faktory shlukovány do bloků, které mají stejnou nebo velmi podobnou elasticitu substituce. Tato metoda může být aplikována ve více-krokovém produkčním procesu reprezentací hranice produkční pravděpodobnosti jako střední hodnoty výkonových a logaritmických funkcí.

Příklad :

Nechť první úroveň vstupních parametrů, z_s , je definována jako funkce N vstupů x_1, \dots, x_N , respektive S podmnožin s N_1, \dots, N_S vstupy.

$$z_s = \left[\sum_{i \in N_s} \beta_i^s (x_i^s)^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho_s}}, \quad \beta_i^s > 0, \quad -1 < \rho_s = \frac{1 - \sigma_s}{\sigma_s} < \infty, \quad s = 1, \dots, S \quad (4.6)$$

Druhý stupeň produkční funkce pak může být specifikován takto :

$$y = \sum_{s=1}^S [\alpha_s z_s^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}, \quad \alpha_s > 0, \quad -1 < \rho = \frac{1 - \sigma}{\sigma} < \infty \quad (4.7)$$

”Direct partial elasticity of substitution” (DES) pro tuto funkci je:

$$\sigma_{ij}^D = \begin{cases} \sigma_s & \text{pro } i, j \in N_s, i \neq j \\ \text{harmonický průměr } \sigma, \sigma_s \text{ a} & \\ \sigma_r & \text{pro } i \in N_r, j \in N_s, r \neq s, \end{cases} \quad (4.8)$$

získaná jako :

$$\sigma_{ij}^D = \frac{a + b + c}{\frac{a}{\sigma_r} + \frac{b}{\sigma_s} + \frac{c}{\sigma}},$$

kde

$$a = \frac{1}{\Theta_i^r} \frac{1}{\Theta_r}, \quad b = \frac{1}{\Theta_j^s} \frac{1}{\Theta_s} \quad ac = \frac{1}{\Theta_r} \frac{1}{\Theta_s}.$$

Θ^s je relativní podíl nákladů s -té skupiny a Θ_j^s je relativní podíl j -tého prvku s -té množiny na celkových nákladech.

”Allen partial elasticity of substitution” je dána jako:

$$\sigma_{ij}^A = \begin{cases} \sigma + \frac{1}{\sigma_s}(\sigma_s - \sigma) & \text{pro } i, j \in N_s, i \neq j \\ \sigma & \text{pro } i \in N_r, j \in N_s, r \neq s. \end{cases} \quad (4.9)$$

Tedy σ_{ij}^D je konstanta pro faktory *v* podmnožinách; σ_{ij}^A je konstanta pro faktory *mezi* podmnožinami. Každá z nich je přiřazena příslušnému substitučnímu parametru stejným předpisem, jaký se používá u n -faktorových CES funkcí, jmenovitě

$$\sigma_s = \frac{1}{1 - \rho_s}; \quad \sigma = \frac{1}{1 - \rho}.$$

Funkce proměnné elasticity substituce

Máme dobré teoretické důvody, podpořené empirickými pozorováními, očekávat, že elasticita substituce je často proměnná a ne konstantní. Proměnné funkce elasticity produkce (VES) jsou často zobecněním CES

produkčních funkcí. Narozdíl od CES produkčních funkcí VES funkce požadují, aby σ sledovalo expanzní cestu, ale lišilo se od isokvant. Bylo zkonstruováno a odhadnuto několik takových funkcí.

Příklady :

1. Liu-Hildenbrandova funkce :

$$y = \gamma [(1 - \delta)K^{-rho} + K^{-m\rho}K^{-(1-m)\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}, \quad (4.10)$$

kde m je konstanta. Pokud $m = 0$, (4.10) se redukuje na známou CES produkční funkci, která obsahuje Leontiefovou a Cobb-Douglasovu funkci jako speciální případy. Elasticita substituce pro tuto funkci je :

$$\sigma(m) = \frac{1}{1 + \rho - \frac{m\rho}{s_k}}, \quad (4.11)$$

kde s_k je podíl na kapitálu. (4.11) znamená, že $\frac{y}{L}$ závisí jak na podílu mezd w , tak na podílu pracovního kapitálu $\frac{K}{L}$. Protože m a s_k jsou kladná, vztah mezi proměnnou elasticitou substituce $\sigma(m)$ a konstantní elasticitou substituce σ závisí na významnosti parametru ρ . Je-li $\rho \geq 0$ ($\sigma \geq 1$), potom $\sigma(m) \geq \sigma$

2. Transcendentální produkční funkce:

$$y = \gamma e^{(a_1 \frac{K}{L} + a_2 L)} K^{(1-\beta)}, \quad \text{kde } \gamma \text{ je konstanta.} \quad (4.12)$$

Tato funkce se redukuje na Cobb-Douglasovu funkci položí-li $a_1 = a_2 = 0$. Elasticita substituce závisí na vzájemném poměru faktorů L a K a je dána vztahem:

$$\sigma = \frac{(1 - \beta + a_1 K)(\beta + a_2 L)}{(1 - \beta)(\beta + a_2 L) + \beta(1 - \beta + a_1 K)^2}. \quad (4.13)$$

3. Constant marginal shares (CMS) funkce:

$$y = \gamma K^\alpha L^\beta - mL, \quad \text{, } m \text{ je konstanta.} \quad (4.14)$$

tato funkce je přímým zobecněním Cobb-Douglasovy produkční funkce (pro $m = 0$) a obsahuje speciální případ lineární funkce pro $a = 1$, $(\alpha + \beta) = 1$ a m je záporné. Elasticita substituce má tvar:

$$\sigma = 1 - \left(\frac{m\alpha}{\beta} \right) \frac{L}{y}, \quad (4.15)$$

což způsobuje, že průměrná produktivita $\frac{Y}{L}$ roste, když $\sigma \rightarrow 1$, a že hodnota q závisí na levelu výstupu Y .

4. Revankarova funkce proměnné elasticity:

$$y = \gamma K(1 - \delta\rho)[L + (\rho - 1)K]^{\alpha\delta\rho}; \quad \gamma > 0, \alpha > 0, 0 < \delta < 1, 0 < \delta\rho < 1. \quad (4.16)$$

Elasticita substituce této funkce je definována jako:

$$\sigma(K, L) = 1 + \frac{\rho - 1}{1 - \delta\rho} = 1 + \beta \frac{K}{L}. \quad (4.17)$$

Pro produkční funkci (4.16) je marginální produkt kladný, obsahuje Cobb-Douglasovu produkční funkci, lineární produkční funkci a produkční funkci s pevnými koeficienty. Neobsahuje však CES produkční funkci. Nesmíme také zapomenout, že σ závisí lineárně na $\frac{K}{L}$. Toto je slabinou VAS funkcí.

Obecnější případ VES produkčních funkcí, který překonává předchozí nedostatek může být formulován následovně:

$$y = f(x_1, x_2) = E[\omega_{11}x_1^{2\rho_1} + 2\omega_{12}x_1^{\rho_1}x_2^{\rho_2} + \omega_{22}x_2^{2\rho_2}]^{\frac{1}{2}\rho}, \quad (4.18)$$

kde E je efektivnost; ρ, ρ_1, ρ_2 jsou substituční parametry; $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{22}$ jsou váhy. Při $\omega_{11} + 2\omega_{12} + \omega_{22} = 1$ a $\rho_1 + \rho_2 = 2\rho$ se (4.18) redukuje na CES produkční funkci pro $\omega_{12} = 0$, na VES funkci (Lu a Fletcher) pro $\omega_{22} = 0$ a na VES funkci (Sato a Hoffman) pro $\omega_{11} = 0$. Při $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ se redukuje na:

$$y = G(x_1, x_2) = E[\omega_{11}x_1^{2\rho} + 2\omega_{12}x_1^\rho x_2^\rho + \omega_{22}x_2^{2\rho}]^{\frac{1}{2}\rho}, \quad (4.19)$$

pro které elasticita substituce má tvar:

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 - \rho + R}, \quad (4.20)$$

kde

$$R = \frac{\rho(\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}^2)}{(\omega_{11}x^{-\rho} + \omega_{12})(\omega_{12} + \omega_{22}x^{-\rho})}$$

a

$$x = \frac{x_2}{x_1}.$$

Použitím vhodných hodnot pro ρ se (4.19) redukuje na Cobb-Douglasovu ($\rho = 0$), s pevnými koeficienty ($\rho = \infty$) a lineární ($\rho = \frac{1}{2}$ a $\omega_{12} = 0$) produkční funkci. Nezapomenout na to, že marginální produkt jenezáporný a elasticita substituce není monotónní funkce nebo kombinace faktorů. Přesto však tyto funkce mohou být zobecněny na mnoho vstupních proměnných a na funkce homogenní případně se sklonem větším než 1.

Homothetická produkční funkce

Každá homogenní funkce je homothetická, ale ne naopak, tedy homothetické funkce obsahují i nehomogenní funkce, tj. produkční funkce s proměnným výstupem. Jako příklad poslouží obecná produkční funkce

$$y = g(f(K, L)), \quad (4.21)$$

kde $f(K, L)$ je homogenní funkce libovolného stupně. Pro takovou funkci:

1. *return to scale* je zmenšený předdefinovaným způsobem s y ,
2. příslušná křivka průměrných nákladů ukazuje klesající náklady na nízké úrovni výstupu a rostoucí náklady na vysoké úrovni výstupu,
3. funkce (4.21) může být zobecněna na n vstupů.

1. Marginální produkt (4.21) je kladný:

$$\frac{\partial y}{\partial L} = \frac{\partial g}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial L} > 0 \text{ a } \frac{\partial y}{\partial K} = \frac{\partial g}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial K} > 0.$$

2. Elasticita substituce příslušející k $Y = g(f)$ je stejná jako příslušející k funkci f

3. Je-li f neoklasická homogenní produkční funkce stupně α_f a funkce $y = g(f)$ má předdefinovanou funkci *return to scale* $\mu(y)$, pak platí následující diferenciální rovnice:

$$\frac{dg}{df} = \frac{y}{f} \frac{\mu(y)}{df}. \quad (4.22)$$

Aplikací Eulerovy věty dostáváme:

$$\frac{\partial g}{\partial f} \left(L \frac{\partial f}{\partial L} + K \frac{\partial f}{\partial K} \right) = y \mu(y) \quad (4.23)$$

a neboť f je homogenní stupně α_f :

$$L \frac{\partial f}{\partial L} + K \frac{\partial f}{\partial K} = \alpha_f f$$

Dosazením tohoto výrazu do (4.23) dostáváme (4.22). To znamená, že elasticita substituce může být vyjádřena právě tehdy když f je homogenní.

Mnohem obecnější případ homothetických produkčních funkcí je třída paprskovitě homothetických funkcí jejichž *return to scale* závisí jak na vstupu, tak i na úrovni výstupu pro všechny apriory dané elasticity substituce. Produkční funkce $\Phi : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ s vlastnostmi definovanými v oddílu 1 je paprskovitě homothetická právě tehdy když $\Phi(\lambda x) = F(\lambda^{H \frac{\alpha}{|x|}} G(x))$ dá $\lambda > 0$,

$$F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^n \text{ a } H : \left\{ \frac{x}{|x|} \mid x \geq 0 \right\} \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$\text{kde } G(x) = F^{-1}(\Phi(x)). \quad (4.24)$$

Tato třída funkcí obsahuje paprskovitě homogenní funkce a homothetické funkce jako speciální případ. Φ je paprskovitě homogenní funkce má-li tvar:

$$\Phi(\lambda x) = \lambda^{H\left(\frac{x}{|x|}\right)} \Phi(x); \quad \lambda > 0. \quad (4.25)$$

Je homothetická, pokud $H\left(\frac{x}{|x|}\right) = \alpha$, kde α je konstanta, tj.:

$$\Phi(\lambda x) = F(\lambda^\alpha G(x)); \quad \lambda > 0. \quad (4.26)$$

Funkce (4.26) bude homogenní, pokud je navíc funkce F identita:

$$\Phi(\lambda x) = \lambda^\alpha \Phi(x); \quad \lambda > 0. \quad (4.27)$$

Jednou z vlastností těchto funkcí je *scale* elasticita μ definovaná jako

$$\mu = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left(\frac{\partial \Phi(\lambda x)}{\partial \lambda} \frac{\lambda}{\Phi(x)} \right).$$

Tento výraz má specifické tvary:

- (i) $\mu_1 = \mu_1\left(\frac{x}{|x|}, \Phi(x)\right)$, pro Φ je paprskovitě homothetická
- (ii) $\mu_2 = \mu_2\left(\frac{x}{|x|}\right)$, pro Φ je paprskovitě homogenní
- (iii) $\mu_3 = \mu_3(\Phi(x))$, pro Φ je homothetická
- (iv) $\mu_4 = \mu_4 = \alpha$, pro Φ je homogenní.

Optimální výstup paprskovitě homothetické funkce a homothetické funkce dostaneme, je-li $\mu_1 = 1$ nebo $\mu_3 = 1$; je to 0, nedeterminováno nebo ∞ pro paprskovitě homogenní nebo homogenní funkce.

Příkladem paprskovitě homothetické produkční funkce (Fare, Jansson, Lovell) je:

$$y_e^{\Theta y} = AK^{\alpha+\gamma} \left(\frac{K}{L} + \delta \frac{L}{K}\right)^{-1} L^{\beta+\gamma} \left(\frac{K}{L} + \delta \frac{L}{K}\right)^{-1}, \quad (4.28)$$

kde $\Phi, \gamma \in \mathbb{R}$, $A, \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}_+$ a $\alpha + \gamma(\frac{K}{L} + \delta\frac{L}{K})^{-1} > 0$. $\forall \frac{K}{L} : \beta + \gamma(\frac{K}{L} + \delta\frac{L}{K})^{-1} > 0$. Pro $\gamma = 0$ se (4.28) redukuje na homothetickou Cobb-Douglasovu funkci doporučovanou Zellnerem a Revankarem. Je-li $\sigma = 0$ je (4.28) paprskovitě homothetická a pro $\gamma = \sigma = 0$ je homogenní Cobb-Douglasovou funkcí. Míra *return to scale* pro (4.28) je definována takto:

$$\mu\left(\frac{x}{|x|}, \Phi(x)\right) = \frac{\alpha + \beta}{1 + \Theta y} + \frac{2\gamma}{(1 + \Theta)(\frac{K}{L} + \delta\frac{L}{K})}. \quad (4.29)$$

Technicky optimální výstup je přitom $\mu\left(\frac{x}{|x|}, \Phi(x)\right) = 1$, tedy

$$y^* = \frac{\alpha + \beta - 1}{\Theta} + \frac{2\gamma}{\Theta(\frac{K}{L} + \delta\frac{L}{K})}. \quad (4.30)$$

Pro homothetické funkce, *return to scale* je (monotonně klesající) funkce pouze výstupu a tudíž technicky optimální výstup je stajná konstanta pro všechna pozorování. Pro paprskovitě homogenní funkce je *return to scale* (monotonně klesající) funkcí pouze vstupů a tudíž je technicky optimální výstup pro všechna pozorování nekonečno. Tyto nepravděpodobné výsledky však neplatí pro paprskovitě homothetické funkce. U nich *return to scale* závisí jak na vstupech, tak i na výstupech nechávaje technicky optimální výstup jak by každý očekával závislý na pozorováních.

Nehomothetické produkční funkce

Tyto funkce jsou charakterizovány *isoclinami*, které jsou definovány jako množiny bodů se stejnými marginálními měrami technické substituce, ale závisející na *return to scale* a optimálních vstupních poměrech. Mají flexibilní funkcionální tvar a tudíž jsou lehce adaptovatelné na více vstupů a produktů. Příkladem této třídy funkcí je nedávno vyvinutá transcendentální logaritmická produkční funkce, která je často nazývána jako "translog" produkční hranice. Pravděpodobnostní produkční hranice F má tento tvar :

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n, A) = 0, \quad (4.31)$$

kde y_i odpovídá výstupům (a vstupům) a A je index míry technického pokroku. Translog funkce jsou často aproximovány logaritmickými funkcemi jako

$$\ln(F + 1) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln y_i + \gamma_0 \ln A + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \ln y_i \ln y_j + \sum_{i=1}^n \gamma_i \ln A \ln y_i \quad (4.32)$$

Translog funkce nespĺňují separabilitu, proto je vhodné otestovat podmínky separability. Translog funkce F je striktně quasikonkávní (striktně konvexní isokvanty) pokud korespondující hraniční Hessian matice prvních a druhých parciálních derivací je negativně definitní. To lze často prokázat empiricky v každém bodě (z dat) pro kteroukoliv odhadovanou translog funkci. Okrajové podmínky pro vstupy a výstupy jsou dány takto:

$$\Psi_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \ln y_j + \gamma_i \ln A, \quad i, j = (1, \dots, n). \quad (4.33)$$

Mezní míry technické substituce mezi výstupy, mezi vstupy a mezi vstupy a výstupy je

$$\frac{p_i y_i}{p_j y_j} = \frac{\Psi_i}{\Psi_j}; \quad i \neq j, i, j = (1, \dots, n).$$

Abychom získali speciální funkcionální tvary je třeba aplikovat tyto podmínky na (4.32). Pro ilustraci těchto podmínek a flexibility translog funkcí pro empirickou analýzu použijeme následující translog nákladové funkce s jedním výstupem. Podobné specifické funkcionální tvary lze získat přímou aplikací produkční funkce (4.32). Nákladové funkce jsou však často odhadnutelné jednodušeji.

$$\begin{aligned} \ln C = & \alpha_0 + \alpha_y \ln y + \frac{1}{2} \gamma_{yy} (\ln y)^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln p_i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \gamma_{ij} \ln p_i \ln p_j \\ & + \Theta_y \ln y \ln T + \sum \Theta_{it} \ln p_i \ln T + B_T \ln T \\ & + \frac{1}{2} B_{TT} (\ln T)^2, \end{aligned} \quad (4.34)$$

kde C jsou celkové náklady, y je úroveň výstupu, p_i jsou ceny vstupů a T je index času jako zástupce A indexu technického pokroku. Odvozený dopad na vstup x_i získáme parciálním zderivováním nákladové funkce podle ceny vstupu.

$$\frac{\partial C(\cdot)}{\partial p_i} = x_i. \quad (4.35)$$

Použitím Shephardova Lemmatu a parciálním zdiferencováním (4.34) dostáváme

$$\frac{\partial \ln C}{\partial \ln p_i} = m_i = \alpha_i + \frac{1}{2} \sum \gamma_{ij} \ln p_j + \gamma_{iy} \ln y + \Theta_{iT} \ln T, \quad (4.36)$$

kde $m_i = \frac{p_i x_i}{C}$ je podíl nákladů příslušejících k -tému vstupu. Teorie duality a translog aproximace vyžaduje následující omezení. První je, že nákladová funkce musí být lineární homodenní funkce ceny. To znamená, že

$$\sum \alpha_i = 1; \quad \sum_j \gamma_{ij} = 0; \quad \sum_i \gamma_{iy} = 0.$$

Druhá – podmínka symetričnosti vyžaduje, aby $\sum_i \gamma_{ij} = \sum_j \gamma_{ij} = 0$. Třetí – technické změny mohou být obě neutrální (β_T a β_{TT}) a zároveň $\Theta_{iT} \neq 0$

Nákladová funkce je homothetická, pokud $\gamma_{iy} = \gamma_{yy} = 0$. Je homogenní pokud $\frac{\partial \ln C}{\partial \ln y} = k$ kde k je konstanta; test homogenity je zahrnut v testech homotheticity.

Allen-Uzawa elasticita substituce (AUES) je definována jako

$$\sigma_{ij} = \frac{\gamma_{ij} + m_i^2 - m_i}{m_i^2}, \quad \text{pro } i = j \quad (4.37)$$

a

$$\sigma_{ij} = \frac{\gamma_{ij} + m_i m_j}{m_i m_j}, \quad \text{pro } i \neq j, \quad (4.38)$$

kde m_i je podíl nákladů vstupů na celkových nákladech výroby výstupu. AUES tedy není konstanta – závisí na podílu nákladů. Vlastní elasticita vlivu fatoru ϵ_{ij} je definována takto:

$$\epsilon_{ij} = m_j \sigma_{ij} \quad \text{pro } i \neq j. \quad (4.39)$$

Speciální případ unitární elasticity substituce dostáváme když

$$\gamma_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Scale elasticita pro (4.34) je definována jako

$$\mu = \left[\alpha_y + \alpha_{yy} \ln y + \sum_i \gamma_{iq} \ln p_i \right]^{-1}, \quad (4.40)$$

kteřá závisí na úrovni výstupu a ceně faktorů pokud je nákladová (produkční) funkce na vstupu homogenní.

4.2 Agregace zásoby kapitálu : Spor Cambridge – Cambridge

Neoklasické vlastnosti produkčních funkcí, jako je diferencovatelnost, kladný mezní produkty, konstantní výnosy atd. jak bylo diskutováno dříve stojí na existenci agregace zásoby kapitálu. Obvyklým předpokladem při tvorbě agregovaného kapitálu jako zboží J (nazýváno Jelly) jsou: lineárně ohraničená cena faktorů, kladné marginální produkty, poměr kapitál–výstup a kapitál–práce jsou klesající funkce výnosů (úrokové míry). Elasticita hranice ceny faktoru by měla být rovna poměru podílu mezd na podílu profitu. Konečně není povolen žádný *reswitching* a *capital reversal*. *Reswitching* nastane, když nějaká metoda produkce je upřednostňována před jinou při vysoké úrokové míře, je neurčitá při střední úrokové míře a opět upřednostňována při nízké úrokové míře. *Capital reversals* nastává tehdy, když se hodnota kapitálu pohybuje stejným směrem jako úroková míra.

Za použití těchto předpokladů může být heterogenní kapitál agregován do zboží J jako

$$J(t) = \int_{-\infty}^t I \nu^{\frac{\beta}{1-\alpha}} e^{\frac{(\lambda+\beta\delta)\nu}{1-\alpha}} d\nu, \quad (4.41)$$

kde $I(\nu)$ je investice do zboží ročníku ν a α a β jsou podíly práce a kapitálu; $(\alpha+\beta) \neq 1$. λ je míra uskutečněné technické změny, která může být neutrální nebo neneutrální v závislosti na σ , elasticitě substituce mezi

kapitálem $J(t)$ a prací $L(t)$. Může být úsporná ke kapitálu pokud $\sigma < 1$, úsporná k práci pro $\sigma > 1$ a nebo neutrální pro $\sigma = 1$. δ je konstantní míra opotřebení všech zařízení nezávisle na jejich stáří.

Budeme potřebovat ještě další předpoklady, než budeme moci agregovat kapitál s různým stářím a zkonstruovat J : že zboží se stejným stářím je identické, to s menším stářím je produktivnější než předchozí o konstantu, že mezní míra substituce mezi kapitálem s různým stářím je nezávislá na ostatních vstupech, že mezní produkt práce je vždy stejný (pro všechny ročníky kapitálu) a konečně že produkční funkce je to, co Fisher nazýval funkce "konstantních výnosů z obecného kapitálu".

Neoklasická produkční funkce pak může být napsána takto:

$$y = F(L, J) = LF \left(1, \frac{J}{L} \right) = Lf \left(\frac{J}{L} \right) \quad (4.42)$$

je tedy diferencovatelná, má kladný marginální produkt a konstantní výnosy a má následující vlastnosti:

1.

$$w = \frac{\partial y}{\partial L} = f \left(\frac{J}{L} \right) - \frac{J}{L} f' \left(\frac{J}{L} \right) \quad (4.43)$$

a

$$r = \frac{\partial y}{\partial J} = f' \left(\frac{J}{L} \right)$$

2. Reálný poměr mezd je rostoucí funkce a poměr úroků (výnosů) je klesající funkce poměru kapitálu a práce

$$\frac{dw}{d\frac{J}{L}} = \frac{J}{L} f'' \left(\frac{J}{L} \right) > 0, \quad (4.44)$$

$$\frac{dr}{d\frac{J}{L}} = f'' \left(\frac{J}{L} \right) < 0 \quad (4.45)$$

3.

$$-\frac{dw}{dr} \frac{r}{w} = \frac{Jr}{Lw}. \quad (4.46)$$

Pokud jsou splněny tyto podmínky, přítomnost heterogenního kapitálu a různé technologie produkce nebudou mít vliv na závěry neoklasické teorie produkce a produkční funkce bude existovat.

Základní otázkou však je, zda tyto předpoklady budou obecně splněny. Cambridge School zpochybnila většinu těchto neoklasických předpokladů, zejména pak předpoklad ne *reswitching*, ne *capital reversability* a nakonec potom i existenci agregované produkční funkce.

Reswitching a capital reversability

Reswitching nebo *double-switching* fenomén vzniká díky třem podmínkám: ohromující aplikace vstupů do produkčního procesu, různá doba vývoje alternativních technologických procesů a fakt, že výstup jednoho procesu někdy vstupuje jako vstup do jiného procesu. Důvody pro *reswitching* jsou poněkud jednodušší: více řešení vnitřních souvislostí míry návratnosti, která vznikají díky změnám úrokových měr, které pozměňují srovnávací cenu vstupů aplikovanou v různých dnech stejného technologického procesu.

Je zřejmé, že *reswitching* znemožňuje jednoznačná nařízení k technikám ve smyslu výnosnosti a míry kapitalizace. Nejjednodušší cesta jak toto ukázat na dvou postupech využívajících různé mzdové křivky (obr. 3.1). Pro $0 < r < r_1$ se použije postup α , pro $r_1 < r < r_2$ je nejvýnosnější postup β a pro $r > r_2$ se použije opět postup α . Neboť $\frac{1}{a_{10}(\alpha)} > \frac{1}{a_{10}(\beta)}$ a $\frac{1}{a_{11}(\alpha)} > \frac{1}{a_{11}(\beta)}$ (a_{10} a a_{11} jsou vstupní požadavky práce a kapitálu) a protože profit roste monotonně od $r = 0$ bude firma používat buď techniku α nebo β v závislosti na míře výnosnosti. Při *reswitching* není možné jednoznačně rozhodnout, která technika je kapitálově náročnější. *Capital reversal* vzniká, když je hranice faktoru mezd konkávní.

K ilustraci tohoto problému si představme ekonomiku se dvěma sektory, 1 a 2, ve kterých jsou vyráběny dvě komodity, y_0 a y_1 , v pevném poměru. Je mnoho technologií a každá technologie má přiřazenu hlavní specifikaci kapitálu. Pro n heterogenních skupin kapitálu, technologie ekonomiky může být vysvětlena pomocí knihy technologií.

Nechť má kapitál nekonečnou životnost. V kompetiční rovnováze budou rovnice ceny vypadat následovně:

$$p_0 = a_0 W_0 + r a_{10} p_1(\alpha) \quad (4.47)$$

$$p_1(\alpha) = a_1 W_0 + r a_{11} p_1(\alpha), \quad (4.48)$$

kde $a_{1j} = \frac{L_j}{y_j}$ a $a_{0j} = \frac{K_{1j}}{y_j}$ pro $j = 0, 1$, p_0 a $p_1(\alpha)$ jsou ceny y_0 a $y_1(\alpha)$, respektive $y_1(\alpha)$ je výstup kapitálu typu α ; r je míra výnosnosti; W_0 je poměr nominálních mezd; $k_{1j}(\alpha)$ je množství kapitálu typu α použitého při výrobě jedné jednotky produkce j , $j = 0, 1$ a L_j je množství práce užitá při produkci jedné jednotky zboží j . Pro danou technologickou je matice α lze z (4.47) a (4.48) odvodit následující závislost ceny práce a relativní cenové relace :

$$w_0 = \frac{W_0}{P_0} = \frac{1 - a_{\ell 1} r}{(1 - a_{11} r) a_{\ell 0} + a_{10} a_{\ell 1} r}, \quad (4.49)$$

$$\frac{p_1(\alpha)}{p_0} = \frac{a_{\ell 1}}{(1 - a_{11} r) a_{\ell 0} + a_{10} a_{\ell 1} r}. \quad (4.50)$$

Je-li $\ell \equiv \frac{\frac{a_{10}}{a_{\ell 0}}}{\frac{a_{11}}{a_{\ell 1}}} > 1$ je kapitálově náročnější sektor 1, v případě že $\ell < 1$ je náročnější sektor 2.

Vlastnosti ceny práce a relativních cenových vztahů, popsanych v (4.49) a (4.50) jsou v přímém rozporu s *reswitching* a *capital reversing*. Poměr cen faktorů ($w - r$) může být jak konvexní tak i konkávní k počátku. Ve speciálním případě kdy je vztah ceny (4.50) lineární tj. $\ell = 1$ ukazuje, že poměr kapitálu a práce je v obou sektorech stejný. V tomto případě není užit *reswitching* a hodnota kapitálu je zároveň nezávislá na hodnotě r , tj. *capital reversing* se také nepoužívá. Jakmile poměr kapitálu a práce není stejný v obou sektorech cenová křivka nemá tvar přímky. Bude konkávní, pokud proporce faktorů je vyšší v sektoru 1 než v sektoru 2. V opačném případě bude konvexní. Ve skutečnosti pokud máme více komodit může tato křivka například být ze začátku konvexní, pak konkávní a následně opět konvexní.

Závěrem této diskuse pak je, že v okamžiku přítomnosti *reswitching* a *capital reversing* není konstrukce agregované produkční funkce logicky možná. Tudíž závěry vytvořené na základě literatury o agregovaných produkčních funkcích stojí na velmi křehkém základě. Existuje několik metod, jak překonat tento problém; dále uvedeme jenom dvě z nich.

Pseudoprodukční funkce

Joan Robinson (1956) doporučil měřit různé části zásoby kapitálu pomocí času zaměstnanců, který je potřeba k jeho vytvoření nezávisle na změnách úrokových měr v době jeho tvorby. Zařízení, které bude ve skutečnosti použito v dané rovnovážné situaci bude to s nejvyšší mírou výnosnosti při dané mzdové míře.

Předpokládejme dokonalou konkurenci, známé míry mezd a zisku a konstantní *return to scale* produkce. Potom rovnováha nastane když:

$$K = wLq(1+r)^t = \frac{y - wL_c}{r}, \quad (4.51)$$

kde K je kapitál měřený ve formě spotřebního zboží, w je míra mezd, r je míra ziskovosti, Lg je práce potřebná k vytvoření jednotky kapitálu za období t , y je vyprodukované spotřební zboží za použití L_c práce a jednotky zařízení. Kapitál měřený prostřednictvím práce pak je

$$K_L = \frac{K}{w} = Lg(1+r)^t. \quad (4.52)$$

Pro každou jednotku zařízení,

$$y = wL_c + rwLg(1+r)^t \quad (4.53)$$

což může být přepsáno jako

$$w = \frac{y}{L_c + rLg(1+r)^t}. \quad (4.54)$$

Tento vztah popisuje náklady a hodnotu každé položky vybavení a vede na Robinsonovu Pseudoprodukční funkci zobrazenou na obrázku 3.3 závislosti výstupu na hlavu na kapitálu na hlavu. Všimněme si, že

1. body a, b, \dots, f reprezentují stacionární body rovnováhy a mohou být navzájem porovnány, protože kapitál i výstup je měřen ve stejných jednotkách, ale posunypo křivce porovnány být nemohou
2. pseudoprodukční funkce nemůže být diferencovaná, abychom posoudily důležitost cen faktorů.

Z pohledu teorie produkce má tato procedura nevýhodu, že stejný kapitál může mít různou hodnotu ve dvou různých rovnovážných situacích, neboť souvisí s různým poměrem mezd k profitu.

Metoda řetězového indexu

Champernowne se pokusil zkonstruovat jednotku k měření zásoby kapitálu za pomocí své techniky řetězového indexu. Pokud může být taková jednotka změřena, pak může být zkonstruována produkční funkce sledující konkávní vztah mezi výstupem na jednotku práce a kapitálu na na jednotku práce, což umožňuje aplikovat teorii mezního produktu.

Příklad:

Nechť základem indexu je reálná hodnota γ vybavení r_w a nazvěme ji $K(\gamma)$. Předpokládejme, že poměr kapitálových nákladů

$$\frac{\frac{p_a(\beta)}{p-0} \sum K_{ij}(\beta)}{\frac{P_1(\gamma)}{p_0} K_{ij}(\gamma)}$$

β ke γ technologii při r_2 je 3 : 1 a že poměr kapitálových nákladů β k α technologii při r_1 je 6 : 5. Potom řetězový index této heterogenní množiny kapitálu bude $K(\gamma) = (1 : 3 : 3 \times 6/5)$. Tedy když klesne úroková míra dojde k nárůstu množství kapitálu. Champernowne je potom schopen poskládat všechny alternativní postupy do řetězu pro nějaké predeterminované míry výnosnosti. Rozdílné zásoby kapitálu jsou potom seřazeny jednoznačným způsobem. Konvenční produkční funkce, jejíž výstup je vyjádřen jako vztah mezi prací a kapitálem může být rozšířen pomocí parametrických variant míry ziskovosti a obvyklá analýza mezního produktu může být použita.

Několik předpokladů tvoří základ metody řetězového indexu ke konstrukci produkční funkce:

1. konečný počet stacionárních bodů
2. stacionární rovnovážné situace pro všechny nezáporné hodnoty úrokové míry, minimálně do maximální míry.
3. jednoznačný vztah mezi cenami a přípustnými úrokovými mírami
4. žádný stacionární bod se neopakuje

5. žádné překryvy mezi stacionárními stavy, kromě koncového bodu
6. množina hodnot úrokových měr je uzavřená

Kapitola 9

Teorie oligopolu

Teorie oligopolu se zabývá stavem, který lze popsat jako stojící na rozmezí mezi monopolem a standardní konkurencí. Na trhu se nenachází jediná firma, tudíž neřeší jen problém maximalizace zisku jako v monopolu, zároveň jsou však firmy dostatečně velké k tomu, aby jejich akce ovlivňovaly firmy ostatní. Poptávková strana je na rozdíl od nabídkové reprezentována jednotlivými nakupujícími, kteří nejsou schopni jakoukoliv svou akci ovlivnit ostatní nakupující nebo prodejce. Navíc se pro většinu modelů neuvažuje, že by nakupující mohli vytvořit nějaké organizované skupiny.

V následujících kapitolách se budeme zabývat modely vysvětlující optimalizaci převážně v jednom období, začneme **Cournotovým modelem**, který je historicky prvním výplodem snahy o modelování oligopolních struktur, a budeme postupovat přes Cournotovy odpůrce až k modelům založeným na teorii her.

Ačkoliv byl Cournotův model prvním snažil se nejen o vysvětlení optimalizace oligopolní firmy v jednom období, ale také v mnoha obdobích (reakční křivky). Přestože se této myšlence nedostalo v Cournotově modelu dalšího rozvoje, stala se inspirací pro další modely, které se snaží řešit optimalizaci v mnoha obdobích pomocí maximalizace diskontovaného příjmu. V následující části si povíme právě o těchto modelech optimalizace ve více obdobích.

1 Prvopočátky studia oligopolu - modely s jedním obdobím

Jak již bylo naznačeno v předcházející části, prvním člověkem, který se zabýval studiem oligopolních struktur, byl **Antoine Augustin Cournot**. Ve své práci popisoval monopol a také prostředí se značnou konkurenční silou a zřejmě pro pořádek se rozhodl také uvést jako přechod mezi těmito dvěma protipóly situací prostřední. Tedy trh s malým množstvím větších firem.

Jelikož byl Cournotův model prvním, našla se řada nesouhlasných názorů. **Bertrand** namítal, že firmy nevolí vyráběné množství na základě trhem určené ceny, ale samy určují cenu pro svůj výrobek a podle tohoto argumentu vytvořil model vlastní. Dalším odpůrcem Cournotova modelu byl **Chamberlin**, který rozporoval naprostou homogenitu produktů jednotlivých firem. I tato domněnka se dočkala svého vlastního modelu.

1.1 Cournotův model

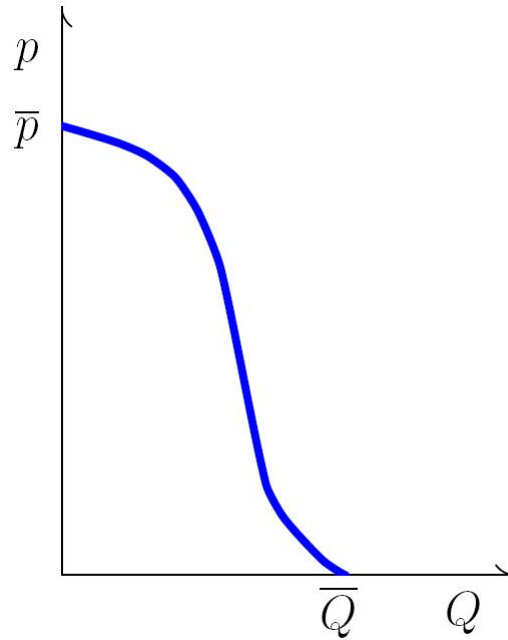
Nechť máme trh s n firmami, které prodávají homogenní produkt. Celkové množství vyrobených výrobků všech firem označíme Q , přičemž i -tá firma do tohoto množství přispívá množstvím q_i , tedy musí platit

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i. \quad (1.1)$$

Pokud cenu na trhu označíme p , potom můžeme zapsat *inverzní funkci poptávky* jako

$$p = f(Q), \quad (1.2)$$

přičemž f musí být dvakrát diferencovatelnou, klesající, protínající obě osy. Její tvar vystihuje graf níže (na straně 325).



Obrázek 9.1: Inverzní funkce poptávky

Každá firma má svou vlastní **nákladovou funkci** $C_i(q_i)$. Požadavky na tuto funkci jsou, aby byla

- dvakrát diferencovatelná,
- nezáporná,
- konvexní

a měla

- kladnou první derivaci.

Z ekonomického hlediska tyto požadavky znamenají

- fixní náklady jsou nezáporné
- mezní náklady jsou kladné a neklesající s rostoucím výstupem.

Ziskovou funkci je potom možné získat jako

$$\pi_i = \mathbf{q}_i \mathbf{f}(\mathbf{Q}) - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Jak je vidět, model se zaměřuje na rozhodování v jediném období a neposkytuje tak firmám žádnou možnost měnit svá rozhodnutí na základě minulosti.

Zisková funkce musí splňovat, že je konkávní vzhledem k množství výstupu, tedy

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_i^2} < 0. \quad (1.4)$$

Podmínku dosažení optima můžeme definovat dvěma způsoby:

- Je dosažen kladný výstup za kladnou tržní cenu, při kterém platí

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = f(Q) + q_i f'(Q) - C'_i(q_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

- vektor množství produkce q^c je optimem, pokud $q_i^c \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) a žádná firma nemůže zvýšit svůj zisk volbou $q_i \neq q_i^c$

Druhá možnost plyne z podmínky (1.5) a je charakteristickou pro Cournotův model. Jediná firma sama o sobě nemůže zvýšit svůj příjem, pokud ostatní firmy zvolí množství výroby z bodu optima.

Samo dosažení Cournotovy rovnováhy však pro firmy nemusí znamenat výhru. Bod rovnováhy totiž nemusí být nejlepším možným výsledkem a dokonce není ani Pareto optimální. Toto tvrzení se pokusíme dokázat přes předpoklady, které model splňuje.

Předpoklad 1

Inverzní funkce poptávky $f(Q)$ je definovaná pro $Q \geq 0$ a je spojitá. Existuje $\bar{Q} > 0$ takové, že pro $Q \geq \bar{Q}$ platí $f(Q) = 0$ a pro $Q < \bar{Q}$ platí $f(Q) > 0$. Dále předpokládáme, že $f(0) = \bar{p} < \infty$, a pro $0 < Q < \bar{Q}$ má f spojitou druhou derivaci a zápornou derivaci první.

Předpoklad 2

Nákladová funkce i -té firmy $C_i(q_i)$ je definovaná a spojitá pro veškerá nezáporná množství výstupu, $C_i(0) \geq 0$. Funkce $C_i(q_i)$ má spojitou druhou derivaci pro $q_i > 0$ a kladnou derivaci první.

Předpoklad 3

Pro každé $q_i > 0$ a $Q < \bar{Q}$ platí

$$\begin{aligned} f' - C_i'' &< 0, \\ f' + q_i f'' &< 0. \end{aligned}$$

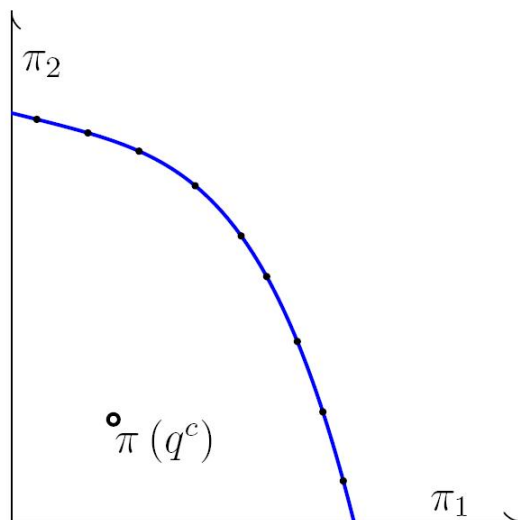
Věta 1

Cournotův model oligopolu splňující podmínky 1 - 3 má jediný bod optima.

Věta 2

Pokud $q^c \gg 0$, pak existuje $q^* \geq 0$ takové, že $\pi_i(q^*) \gg \pi_i(q^c)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Věta 2 ukazuje, že Cournotova rovnováha je vnitřní, tedy není Pareto optimální. Význam pojmu vnitřní můžeme ukázat na případě, kdy $n = 2$ pomocí následujícího obrázku (na straně 328).



Obrázek 9.2: Hranice množiny dosažitelných zisků

Obrázek 9.2 zobrazuje množinu veškerých dosažitelných zisků při situaci, že na trhu se nachází pouze dvě firmy. Bod označený $\pi(\mathbf{q}^c)$ určuje zisky firem, při situaci odpovídající Cournotově rovnováze. Je však možné dosáhnout vyššího zisku současně pro obě zúčastněné firmy, tedy situace není Pareto optimální. Pareto optimálními situacemi jsou body na modré křivce, která zároveň určuje hranici množiny dosažitelných zisků.

Čím je tato situace způsobena? Víme, že pro každé i bude platit rovnice (1.5) a zároveň

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial \mathbf{q}_j} = \mathbf{q}_i^c \mathbf{f}'(\mathbf{Q}^c) < \mathbf{0}, \quad \forall i, j, i \neq j.$$

Z toho můžeme odvodit, že pokud každá firma zmenší své množství dodávané na trh o malé množství, zisk každé firmy by měl vzrůst.

Abychom lépe porozuměli Cournotově rovnováze, musíme rozebrat možnost firem se vzájemně dorozumívat a koordinovat nějakým způsobem své strategie. Předpokládáme, že firmy jsou v jedné z dvou následujících situací.

- *Firmy nemohou komunikovat.*
- *Firmy mohou komunikovat, ale nemohou vytvářet závazné dohody.*

V prvním případě je zřejmé, že Cournotova rovnováha bude jedinou možnou rovnováhou. Předpokládejme, že by si firmy uvědomily, že Cournotova rovnováha není Pareto optimální a sníží svoji produkci, aby dosáhly většího zisku. Označme \mathbf{q}^* takovýto vektor výstupu. Jelikož \mathbf{q}^* není Cournotova, rovnováha musí existovat alespoň jedna firma j , taková, že pro ni platí

$$\pi_j(\mathbf{q}^*) < \max_{q_j} \pi_j(q_j, \bar{q}_j^*).$$

I kdyby se ostatní firmy rozhodly z jakéhokoliv důvodu vyrábět množství odpovídající \bar{q}_j^* , tak j -tá firma nebude vyrábět q_j^* , protože může dosáhnout lepšího výsledku. Také i -tá firma ($i \neq j$) si je vědoma toho, že jiná z firem na trhu si může polepšit změnou vyráběného množství na její úkor a tudíž ani ona nebude mít přílišnou motivaci volit \bar{q}_i^* .

Nyní zvažme situaci, kdy firmy sice mohou komunikovat, avšak nemohou uzavírat závazné dohody. Vedení firem se tedy může dohodnout na společném postupu, ale jakmile se uzavřou dveře jednací místnosti, má každá firma volné ruce k volbě jakéhokoliv množství produkce. Pokud převedeme předchozí příklad na nynější situaci, tak j -tá firma by podle dohody měla vyrábět množství q^* , avšak firma si může polepšit volbou jiného množství produkce a není ničím nucena tuto volbu zavrhnout.

Existuje jedna výjimka a to situace, kdy existuje více nekooperativních rovnováh. V tom případě, pokud se dohodnou firmy na jednu z těchto rovnováh, pro každou firmu bude produkce odpovídající této rovnováze nejlepší možnou volbou a bude se na trh dodávat právě dohodnuté množství, i když dohoda není závazná. Pokud by firmy nemohly komunikovat, není pravděpodobné, že dosáhnou některé rovnováhy, jelikož je rovnováh více a firmy se navzájem nemohou informovat o zamýšlené rovnováze.

1.2 Nový důkaz o existenci a jednoznačnosti Cournotovy rovnováhy

Mějme m firem. Necht' $M = \{1, \dots, m\}$. Necht' $q_i \geq 0$ je výstup i -té firmy. Její nákladová funkce je tvaru $C_i(q_i, \alpha_i)$, kde α_i je parametr. Máme na mysli aplikace pro dvoustupňové Cournotovy hry, kde ve druhé etapě jsou firmy Cournotovi soupeři, a v první fázi, firmám vznikají náklady na změnu parametru. Například, α_i může být základní kapitál i -té firmy, který je vybrán v první fázi.

Funkce inverzní poptávky budeme značit $P(Q)$ a položíme $Q = \sum_{i \in M} q_i$. Budeme pracovat s následujícími předpoklady.

A1: Existuje nějaké $\bar{Q} > 0$ takové, že $P(Q) > 0$ pro všechna $q_i \in (0, \bar{Q})$. a $P(Q) = 0$ pro $Q \geq \bar{Q}$.

A2: $P''(Q)$ je spojitá funkce, $P(0) = \bar{P} > 0$ a $P'(Q) < 0$ pro $Q \in [0, \bar{Q})$.

A3: $C_i(q_i, \alpha_i)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná v proměnné q_i , a $\frac{\partial C_i}{\partial q_i} > 0$ pro všechna $q_i \in (0, \bar{Q})$.

A4: $C_i(0, \alpha_i) = 0$, $\frac{\partial C_i}{\partial q_i}(0, \alpha_i) = 0$ a $\frac{\partial^2 C_i}{\partial q_i^2} > 0$ pro všechna $q_i \in (0, \bar{Q})$.

A5: $q_i P''(Q) + 2P'(Q) < 0$ pro všechna $0 < q_i \leq Q \leq \bar{Q}$.

A5(b): $q_i P''(Q) + P'(Q) < 0$ pro všechna $0 < q_i \leq Q \leq \bar{Q}$.

A6: $-P'(Q) > \delta > 0$ pro $Q \in [0, \bar{Q})$ a, pro všechna $0 < q_i \leq \bar{Q}$, $\frac{\partial^2 C_i}{\partial q_i^2} < b$ pro vhodné $b > 0$.

Všimněme si, že A5 (b) implikuje A5, to je zajištěno tím, že reakční funkce $P'(Q)$ mají negativní sklon. Definujme mezní náklady firmy i jako

$$\theta_i = \frac{\partial C_i}{\partial q_i} > 0 \tag{1.6}$$

Rovnice 1.6 nám z duality mezi produkční a nákladovou funkcí bezprostředně dává rovnici 1.7

$$q_i = \rho_i(\theta_i, \alpha_i), \quad (1.7)$$

příčemž $\frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_i} > 0$ pro všechna $\theta_i \geq 0$. Kromě toho, z důvodu platnosti A4, máme $\rho_i(0, \alpha_i) = 0$.

Uvažme podmínku prvního řádu pro vnitřní rovnováhu:

$$\hat{q}_i P'(\hat{Q}) + P(\hat{Q}) = \theta_i, \quad (1.8)$$

kde stříška označuje rovnovážné hodnoty. Sčítáním rovnic 1.8 přes všechna $i \in M$ dostaneme rovnici 1.9:

$$\hat{Q} P'(\hat{Q}) + m P(\hat{Q}) = m \theta_M, \quad (1.9)$$

kde $m \theta_M = \sum_{i \in M} \theta_i$.

Definujme $\psi(Q) = Q P'(Q) + m P(Q)$. Z A2 a A5 pal $\psi'(Q) < 0$ pro $Q \in [0, \bar{Q})$. Všimněme si, že $\psi(0) = m P(0) = m \bar{P} > 0$ a $\psi(\bar{Q}) < 0$. Z toho vyplývá, že pro všechna $\theta_M \in [0, \bar{P}]$ existuje jediné $\hat{Q}(\theta_M)$ tak, že splňuje 1.9, a zároveň platí

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \theta_M} = \frac{m}{\psi'} < 0.$$

Po úpravě rovnice 1.8 obdržíme rovnici

$$\hat{q}_i = \frac{P(\hat{Q}) - \theta_i}{-P'(\hat{Q})}. \quad (1.10)$$

Použitím rovnic 1.10 a 1.7 dostaneme rovnovážnou podmínku pro mezní náklady firmy i v závislosti na θ_M a α_i , tj. rovnici 1.11:

$$\rho_i(\theta_i, \alpha_i) = \frac{P(\hat{Q}(\theta_M)) - \theta_i}{-P'(\hat{Q}(\theta_M))}. \quad (1.11)$$

Tato rovnice má jediné řešení

$$\hat{\theta}_i = \gamma_i(\theta_M, \alpha_i). \quad (1.12)$$

Jednoznačnost $\hat{\theta}_i$ v závislosti na θ_M a α_i je zřejmá z následujících skutečností: (i) levá strana rovnice 1.11 roste v závislosti na θ_i a má hodnotu 0 v bodě $\theta_i = 0$, (ii) pravá strana rovnice 1.11 ostře klesá v závislosti na θ_i pro daná θ_M a α_i a má pozitivní hodnotu $\frac{P(\hat{Q}(\theta_M))}{-P'(\hat{Q}(\theta_M))} > 0$ v bodě $\theta_i = 0$.

Dále je funkce $\gamma_i(\theta_M, \alpha_i)$ spojitá pro všechna $\theta_M \in [0, \bar{P}]$. Definujme funkci

$$\Gamma(\theta_M, \alpha) = \frac{1}{m} \sum_{i \in M} \gamma_i(\theta_M, \alpha_i), \quad (1.13)$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Pro dané α je funkce $\Gamma(\theta_M, \alpha)$ spojitá v proměnné θ_M pro všechna $\theta_M \in [0, \bar{P}]$ zobrazuje množinu $[0, \bar{P}]$ do sebe.

Z Kakutaniho věty o pevném bodě plyne, že existuje pevný bod $\hat{\theta}_M$, který splňuje rovnici $\Gamma(\theta_M, \alpha) = \hat{\theta}_M$. Zbývá ukázat jedinečnost $\hat{\theta}_M$ tak, že ověříme, že zobrazení $\Gamma(\theta_M, \alpha)$ je kontrakce.

Pojďme najít $\frac{\partial \gamma_i}{\partial \theta_M}$. Z 1.11 máme

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \theta_M} = \frac{\Lambda_i}{D_i} \left[\frac{-\partial \hat{Q}}{\partial \theta_M} \right], \quad (1.14)$$

kde

$$D_i = [-P'(\hat{Q}(\theta_M))] \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_i} + 1 > \frac{\delta}{b} + 1 = D > 1$$

a

$$\Lambda_i = -\hat{q}_i P''(\hat{Q}(\theta_M)) - P'(\hat{Q}(\theta_M)) > 0.$$

Tudíž

$$0 < \frac{\partial \gamma_i}{\partial \theta_M} < \frac{1}{D} \left[\frac{m\Lambda_i}{-P''(\hat{Q}(\theta_M))\hat{Q}(\theta_M) - (m+1)P'(\hat{Q}(\theta_M))} \right]$$

dle A5(b) a A6. Zejména pak celkem

$$0 < \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta_M} < \frac{1}{D} \left[\frac{-P''(\hat{Q}(\theta_M))\hat{Q}(\theta_M) - mP'(\hat{Q}(\theta_M))}{-P''(\hat{Q}(\theta_M))\hat{Q}(\theta_M) - (m+1)P'(\hat{Q}(\theta_M))} \right] < \frac{1}{D} < 1.$$

To ukazuje, že je zobrazení $\Gamma(\theta_M, \boldsymbol{\alpha})$ kontrakce. Můžeme tedy nyní vyslovit následující tvrzení.

Tvrzení 1.1 *Za platnosti předpokladů A1 až A6 bude existovat jediná Cournot rovnováha.*

Tento přístup má dvě výrazné výhody. Za prvé, přístup pomocí kontrakce usnadňuje numerický výpočet rovnováhy. Za druhé, Cournotova rovnováha je charakterizován z hlediska mezních nákladů, a to usnadňuje studium dvoustupňových Cournotův her prostřednictvím manipulací s náklady, kde v 1.etapě firmy manipulují se svými mezními náklady výběrem parametrů α_i a vzniklými náklady na manipulaci, $\phi_i(\alpha_i)$.

1.3 Bertrandova kritika

Bertrandova kritika spočívá ve dvou hlavních bodech

- *firmy spolupracují a získávají vyšší zisky, než naznačuje Cournotův model,*
- *i kdyby firmy nespolpracovaly, volily by spíše cenu než množství dodávané na trh.*

První bod kritiky může být odmítnut s tím, že je nutné prozkoumat i situace, kdy firmy nespolpracují, jelikož za některých okolností nejsou závazné smlouvy možné.

Druhý bod kritiky je závažnější, jelikož určování ceny v situaci oligopolu v případě, že by ji neurčovaly firmy, by bylo těžce představitelné. Jelikož předpokládáme homogenní výstup, Bertrand vyvozuje, že zákazníci

by jednoduše koupili výrobky od firmy s nejnižší cenou. Na příkladě minerálního pramenu, ze kterého by firmy prodávaly vodu s nulovými náklady, ukázal, že neexistuje jiná rovnováha než při nulových cenách.

Bertrandovy teorie ovšem příliš neodpovídaly reálným datům. V opravdovém světě všichni lidé nekupují u firmy, která nabídne nejnižší cenu a firmy nemusí být schopny vyrábět dostatečné množství výrobku, aby samy nasytily celý trh. Soulad mezi Cournotovým modelem a Bertrandovou kritikou přináší Chamberlinův model.

1.4 Diferencovaný produkt s cenami jako proměnnými - Chamberlinova modifikace

Chamberlin (1956) upozornil na problematiku diferencovaného produktu. Základní ideu lze snadno uchopit a dá se modelovat jako částečná rovnováha. Význam diferencovaného produktu v kontextu modelu všeobecné rovnováhy se ovšem potýká s problémy, které si rozebereme v této kapitole. Srdcem modelů diferencovaných produktů je předpoklad, že žádné dvě firmy nevyrábějí identický produkt a můžeme rozdělit firmy do skupin podle typu produktu, který vyrábějí. Produkty firem jedné skupiny považujeme za blízké substituty, zatímco produkty firem z různých skupin jsou buď komplementy nebo velmi slabé substituty.

Ilustrační příklad: dva druhy benzínu a aspirín. Obvykle ovšem bývá problém najít jasnou hranici mezi dvěma skupinami. Navíc, produkty dvou firem mohou být za určitých podmínek (např. pro určité ceny a distribuci příjmu) extrémně blízké substituty a za jiných podmínek komplementy. Pak je skoro nemožné rozhodnout, zda dva různé produkty dát společně do jedné skupiny či do jiných.

Námítky proti Chamberlinově monopolistické konkurenci můžeme nalézt např. v Triffinovi (1940).

Ačkoli Chamberlin pracoval s oligopoly, jeho hlavní nápady vznikaly v rámci monopolistické konkurence, která je analogií k normální konkurenci v ekonomice, ve které žádné dvě firmy nevyrábějí úplně identické zboží. U monopolistické konkurence, stejně jako u dokonalé konkurence, akce jedné firmy nemá žádný vliv na ostatní firmy ve stejné skupině (či odvětví). Také platí, že v každé skupině je mnoho firem. Chceme ovšem pracovat s oligopoly, proto si předpoklad diferencovaného produktu “vypůjčíme” a vložíme do modelu

oligopolů. V průběhu celé kapitoly budeme brát povahu produkce firem jako absolutně fixní. Předpoklad diferencovaného produktu znamená, že každá firma má svou vlastní poptávkovou funkci a poptávka všech firem je spojitá funkce pro všechny ceny na trhu. To znamená, že problém Bertrandovy nespojitosti je odstraněn. A není tak třeba dávat důraz na to, aby dvě firmy účtovaly stejné ceny, na poptávku firmy nebude mít žádný významný dopad fakt, že její ceny se různí od ceny jejího rivala.

Chamberlinův model, odvozený níže, poskytuje cenovou analogii ke Cournotově modelu. Je také základem modelů, které budeme studovat v sekcích 2 a 3. Cena i -té firmy je označena p_i a vektor cen p . Poptávková funkce i -té firmy je $q = F_i(p)$. F_i je dvakrát spojitě diferencovatelná se zápornou první derivací podle p_i a kladnou první derivací podle p_j pro $j \neq i$ a vlastní derivace dominuje. To znamená, že pokud i -tá firma zvedne cenu a ostatní nikoli, poklesnou její prodeje, pokud jakákoli jiná firma zvedne cenu a i -tá nikoli, pak jí vzrostou prodeje a nakonec, pokud všechny firmy zvýší ceny o stejnou jednotku, všem poklesnou prodeje. Toto se děje, pokud při konkrétním cenovém vektoru všechny firmy prodávají (jejich prodeje jsou kladné). Pokud pro nějakou firmu i platí $F_i(p) = 0$, pak růst ceny firmy i nebo pokles ceny jiné firmy neovlivní její poptávku. Nakonec, předpokládáme, že existují ceny, při kterých žádná firma neprodává. Nechť je dána oblast, ve které je poptávka i -té firmy kladná, tedy

$$\mathring{A}_i = \{p \mid p \geq 0, F_i(p) > 0\}.$$

Uzávěr množiny \mathring{A}_i se označuje A_i , množina bodů, ve kterých F_i je nulová, se označuje a_i . Dále klademe

$$A = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Zapišme si formálně podmínky pro poptávku:

Předpoklad 4

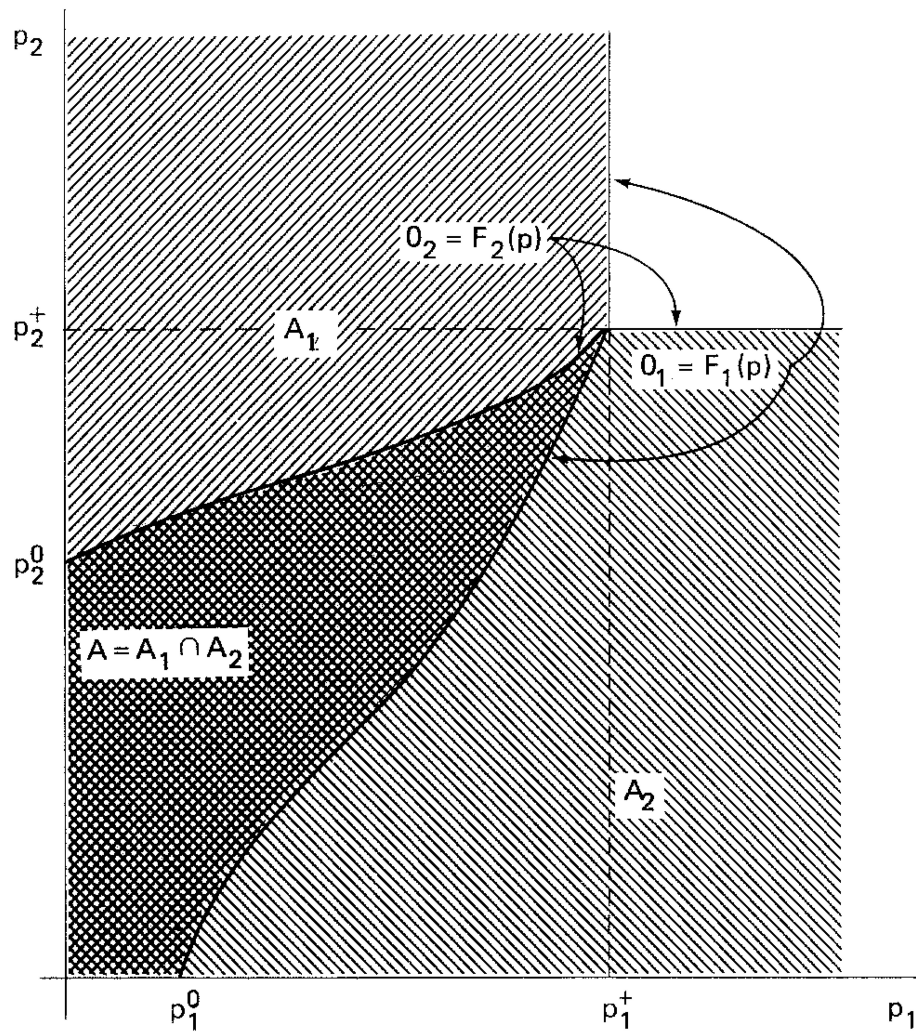
$F_i(p)$ je definovaná, spojitá a ohraničená pro všechna $p \geq 0$. $F_i(p)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná pro všechna $p \gg 0$, kromě $p \in \cup_j a_j$. Pokud $p \in a_j$ pro $j = i_1, \dots, i_k$ a $p \notin a_i$ pro $j = i_{k+1}, \dots, i_n$, pak existují

v p spojité druhé derivace podle $p_{i_{k+1}}, \dots, p_{i_n}$. Všechny derivace jsou ohraničené a pokud $F_i(p) = 0$ pro $p \notin A$, všechny derivace F_j ($j = 1, \dots, n$) podle p_i jsou nulové. Pro $p \in \overset{\circ}{A}_i \cap \overset{\circ}{A}_j$ ($j \neq i$), $F_i^j(p) > 0$ a pro $p \in \overset{\circ}{A}_i \cap \overset{\circ}{A}_{i_1} \dots \overset{\circ}{A}_{i_k}$, $F_i^i(p) + \sum_{j=1}^k F_i^{i_j}(p) < 0$. Dále je množina A ohraničená.

Nyní můžeme napsat funkci zisku firmy:

$$\pi_i(p) = p_i F_i(p) - C_i(F_i(p)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Pro poptávkový systém daný předpokladem 4 je charakteristické, že množina A obsahuje jediný maximální prvek p^+ . To znamená, že existuje takové $p^+ \in A$, $F_i(p^+) = 0$ (pro všechna i) a pro jakékoli $p \in A$, $p \neq p^+$, $F_i(p) > 0$ pro aspoň jedno pevné i .



Obrázek 9.3: Znáornění předpokladu 4

Můžeme definovat rovnováhu v Cournotově duchu. Ačkoli striktně řečeno Cournotova rovnováha se používá pro jeho kvantitativní model, základní idea se dá zjevně přenést do současného modelu, takže se zdá být logické nazývat její protějšek, definovaný níže, úplně stejným jménem.

Řekneme, že p^c je *cenový vektor Cournotovy rovnováhy*, pokud $p^c \geq 0$ a platí

$$\pi_i(p^c) \geq \pi_i(p_i, \bar{p}_i^c), \quad \text{pro všechna } p_i \geq 0 \text{ a } i = 1, \dots, n.$$

Připomeňme znovu, že základní vlastností je ta, že pokud všechny ostatní firmy zvolí p_j^c , pak nejlepší možností pro i -tou firmu je také zvolit p_i^c . A toto platí pro jakékoli i .

Existuje určitá podmnožina množiny A_i , které musíme věnovat pozornost. Je to

$$A_i^* = \{p \mid p \in A_i \text{ a } p_i \geq C_i'(F_i(p)), i = 1, \dots, n\}.$$

A_i^* je množina cenových vektorů z A_i , pro které jsou ceny firmy i aspoň tak velké jako její mezní náklady. Je zřejmé, že pro jakékoli $p \notin A_i^*$ bude celkový příjem firmy menší než její variabilní náklady (samozřejmě za předpokladu nenulových prodejů). Tedy v Cournotově rovnováze platí pro každou firmu buď $p^c \in A_i^*$ nebo $p_i^c = p_i^+$. Vnitřek množiny A_i^* označíme \mathring{A}_i^* , $A^* = \cup_{i=1}^n A_i^*$ a \mathring{A}^* je vnitřkem A^* . Než budeme pokračovat dále, potřebujeme definovat ještě jednu speciální cenu. Tou je nejnižší cena, při které firma může mít nulové prodeje. Tato cena p_i^0 splňuje podmínku $(p_i^0, 0) \in a_i$.

Dalšími předpoklady modelu jsou:

Předpoklad 5

Pro každé $p \in \mathring{A}_i^*$, $\partial^2 \pi_i / \partial p_i^2 < 0$.

Předpoklad 6

Pro každé $p \in \mathring{A}^*$,

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial p_i^2} + \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial p_i \partial p_j} \right| < 0.$$

Předpoklad 7

$$p_i^0 > C'_i(F_i(p_i^0, 0)) = C'_i(0).$$

Předpoklad 5 zavádí konkávnost ziskové funkce i -té firmy vzhledem k p_i , vlastní ceně firmy v množině, ve které její cena není nižší než mezní náklady. Tento předpoklad se používá pro důkaz existence Cournotovy rovnováhy, což uvidíme níže. Předpoklad 6, který implikuje Předpoklad 5, zajišťuje, že cenový vektor Cournotovy rovnováhy je pevný bod kontrakce, to tedy znamená, že rovnováhy je jediná. Předpoklad 7 nám říká, že ať ostatní firmy zvolí jakékoli ceny, pro i -tou firmu je nejvýnosnější cena taková, při níž firma prodává (tedy prodeje jsou kladné). Díky tomuto předpokladu tedy dokáže firma vždy najít cenu, při níž jsou mezní příjmy a mezní náklady stejně velké (při kladných prodejkách).

Věta 3

Pokud platí Předpoklady 2, 4 a 5, model oligopolu s jedním obdobím má Cournotovu rovnováhu.

Věta 4

Pokud platí Předpoklady 2, 4, 5 a 7, ceny a výstupy jsou kladné pro všechny firmy v jakékoli Cournotově rovnováze.

Věta 5

Pokud platí Předpoklady 2, 4, 5 a 6, Cournotova rovnováha je jediná. Pokud navíc platí Předpoklad 7, pak všechny ceny a výstupy jsou v rovnováze kladné.

Věta 6

Nechť p^c je cenový vektor Cournotovy rovnováhy uspokojující Předpoklady 2 a 4 a $p^c \ll p^+$. Pak zisky dosahované v rovnováze $\pi(p^c)$ nejsou Pareto optimální.

Důkaz Věty 3 je důležitý, protože metoda důkazu se velmi často používá k ukázání existence Courno-

tovy (speciálně Nashovy nekooperativní) rovnováhy ve velmi širokém spektru modelů. Pro jakoukoli firmu, řekněme firmu i , můžeme vždy vybrat optimální cenu p_i v reakci na ostatní firmy, které zvolí cenu \bar{p}_i . Tento vztah můžeme zapsat jako

$$p_i = r_i(\bar{p}_i),$$

kde r_i se často nazývá *funkce nejlepší odpovědi firmy i* . Pokud ostatní firmy zvolí nějaké \bar{p}_i , pak firma i nemůže udělat lépe, než zvolit $r_i(\bar{p}_i)$. Z definice pak vyplývá, že pokud pro nějaký cenový vektor p^* splňující $p_i^* = r_i(\bar{p}_i^*)$, $i = 1, \dots, n$, pak p^* dává Cournotovu rovnováhu. žádná firma si nemůže zvýšit zisk volbou $p_i \neq p_i^*$, pokud ostatní zvolí \bar{p}_i^* . Obráceně, pokud p^* je Cournotova rovnováha, pak $p_i^* = r_i(\bar{p}_i^*)$, $i = 1, \dots, n$. Je možné se podívat na všechny r_i dohromady a pracovat s nimi jako s funkcí jednoho cenového vektoru z \mathbb{R}_+^n do druhého. Pak

$$r(p) = (r_1(\bar{p}_1), \dots, r_n(\bar{p}_n)).$$

Je potřeba zdůraznit, že množina pevných bodů funkce r (tedy cenové vektory p' , které se zobrazují samy na sebe, splňující $p' = r(p')$) a množina Cournotových rovnováh jsou identické. Při dokazování pak musíme ukázat, že funkce r má pevný bod. V závislosti na povaze modelu používáme různé věty o pevných bodech. To závisí na tom, zda je r funkce, tak jako zde, nebo zobrazení, které zobrazuje bod na množinu; zda její argument p je prvkem konečně dimenzionálního prostoru atd.

Poté, co jsme vyřkli Větu 3, Věta 5 o jednoznačnosti rovnováhy následuje okamžitě. Předpoklad, o který má tato věta navíc, zajišťuje, že funkce nejlepší odpovědi r je kontrakce. A to dále implikuje to, že r má aspoň jeden pevný bod.

*Ze všech třech modelů - Cournotova modelu, Bertrandově verzi Cournotova modelu a modelu diferencovaných produktů - je poslední zmiňovaný nejvíce vyhovující. Předpokládá, že **firmy jsou tvůrci cen a zisky firem se mění spojitě se změnami cen**. Pokud si někdo musí vybrat mezi Cournotovým a Bertrandovým modelem pro zkoumání oligopolů, jeví se Cournotův model jako lepší, protože neobsahuje žádné nespojitosti zisků s ohledem na rozhodnutí firem. Oušem model diferencovaných produktů je lepší než kterýkoli z těch dvou, protože je postaven na více vyhovujících předpokladech, aniž by byl zbytečně složitý.*

1.5 Kooperativní versus nekooperativní rovnováhy

V předchozím textu jsme modelovali rovnováhy pro případ, kdy firmy mezi sebou nemohou uzavírat závazné smlouvy. Podívejme se na ně nyní. Některé situace mohou být vyřešeny závaznými smlouvami a některé ne. Například v oblasti amerického průmyslu či průmyslu jiných zemí jsou takovéto druhy smluv většinou nelegální. Výjimky existují například v odvětvích regulovaných vládními směrnicemi, které mají tu sílu zamezit určitému způsobu chování firem. Je možné, že firmy budou chtít uzavřít smlouvu mimo oblast kontrolovanou regulačními agenturami. Závazné smlouvy spolu často uzavírají odbory a management a jejich vyjednávání můžeme považovat za oligopolní, mají totiž stejný hře podobný charakter. Velké množství různých okolností umožňuje uzavírání závazných smluv, i když to není univerzální. Vyjednávání mezi odbory a managementem se dá dobře modelovat jako bilaterální monopol, o kterém se krátce zmíníme v sekci 6.

Vraťme se k situaci, ve které je zakázáno takovéto smlouvy uzavírat. Tím se ovšem neříká, že není žádný prostor pro uzavírání těchto smluv. Obecně zde prostor většinou bývá (např. uzavření smlouvy nelegálně, mimo vědomí úřadů); jedna věc je pak jistá: pokud je smlouva nevynutitelná nějakým mechanismem daným zvenčí (např. pomocí soudů) - což tyto smlouvy většinou nejsou - pak, pokud se má dodržovat, musí být sebenaplňující. Dohoda je sebenaplňující, pokud se firmy dohodnou na nekooperativní rovnováze, tzn. pokud se zavážou na chování, které vede ke Cournotově rovnováze, takové, že žádná firma nemůže změnit své chování a zvýšit svůj zisk. Pokud existuje pouze jediná taková rovnováha, pak je taková smlouva zbytečná. Pokud takových rovnováh existuje více, pak dohoda může být klíčem k dosažení konkrétní rovnováhy. Pokud firmy dělají rozhodnutí nezávisle na sobě (tzn. firmy spolu nemůžou komunikovat před tím, než se rozhodnou), není zde žádná jistota, že firmy k nějaké rovnováze dospějí. Když spolu ovšem komunikují a vzejde z toho dohoda na konkrétní rovnováze, je v zájmu každé firmy dodržet své slovo. Totiž, pokud ostatní firmy udělají, jak řekly, pak si jedna firma nemůže polepšit tím, že by udělala cokoli jiného, než slíbila. Tedy, dohoda je sebenaplňující.

K vyjednávání samozřejmě patří i hrozby. Při práci s model pro jedno období je však velmi těžké hrozby firem postihnout. Přesto, udělejme k tomu pár poznámek.

První je ta, že hrozba není kredibilní, dokud není jasné, že vyhrožující firma hrozbu uskuteční, pokud se dostane do situace, ve které řekla, že jí použije. Jsou dva způsoby, jak může být hrozba kredibilní: prvním je

případ, kdy se vyhrožující firma postaví do situace, ve které musí uskutečnit svou hrozbu, pokud nastanou podmínky pro její spuštění. Firma už mohla učinit takové kroky, že nyní už nemá jinou možnost, ať se jí to líbí nebo ne. Druhá skupina kredibilních hrozeb je taková akce, která je pro vyhrožující firmou nejlepší možností, pokud se ocitne v situaci, o které tvrdila, že v ní hrozbu uskuteční. Uvedmě si příklad. Mějme Cournotovský trh se 3 firmami a jedinou rovnováhou s výstupem $q^c = (5, 7, 3)$. Předpokládejme také, že $q_1 = 10$ přináší firmě š menší zisk než $q_1 = 0$ nezávisle na tom, jaké volby udělají ostatní firmy. Pak firma 1 nemůže úspěšně vyhrožovat ostatním tím, že pokud ostatní nezvolí $(5, 6, 2)$, zvolí ona $q_1 = 10$. Pokud by totiž neudělaly to, co po nich chce, pak by nebylo v nejlepším zájmu firmy volit š0. Ublížila by jen sama sobě.

Výhružky jsou více zajímavé v modelech pro více období, základní principy však zůstávají stejné. Hrozba je kredibilní, když firma nemá na výběr jinou možnost nebo pokud hrozba přinese aspoň stejný diskontovaný zisk jako jakékoli jiné rozhodnutí v dané situaci.

2 Stabilita a reakční funkce - první kroky směrem k modelům více období

Pokud přemýšlíme o chování oligopolů, jistě nás to brzy zavede k otázce, jak bude firma přizpůsobovat své chování ve světle změny chování některého z rivalů. Cournot se angažoval i v tomto tématu. Udělal pokus pochopit dynamické chování bez opuštění vlastností modelů jednoho období. Ačkoli výsledky takových snah musí přinést určité zklamání z výsledků, velice sugestivně ukazují cestu, kterou by se měla vydat další práce. Hlavní nevýhoda je ta, že modely ztrácejí svou názornost a srozumitelnost, které měly v jednom období. V první části této kapitoly definujeme Cournotovy reakční křivky a Bowleyho variaci na ně. Potom, v další sekci jsou diskutovány známé modely Sweezyho a Stackelberga.

2.1 Cournotovy reakční křivky a Bowleyho hypotetická variace

Pro dvě firmy Cournot diskutoval problém stability rovnováhy. Z rovnice 5, pokud aplikujeme větu o implicitní funkci, můžeme psát

$$q_i = w_i(\bar{q}_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Toto jsou samozřejmě nejlepší reakční funkce obou firem. Pokud $n = 2$, pak zobrazení z \mathbb{R}_+^2 do sebe definované jako $w = (w_1, w_2)$ je kontrakce; proto je model stabilní, pokud $q'_1 = w_1(q_2)$ je odpovědí na q_2 a $q'_2 = w_2(q_1)$ je odpovědí na q_1 . Takto můžeme nakreslit cestu výstupních párů, což vede k q^c . Ať už Cournot zamýšlel zavést stabilitu nebo popsat mechanismus fungování v modelu s více obdobími, udělal pouze úplný začátek. Pokud chceme popisovat nějaký systém v čase, musíme nejdříve explicitně specifikovat časovou strukturu modelu. Kdo dělá jaké rozhodnutí a kdy? Jaké a čí jsou výnosy a v jakém čase? Na tyto otázky musí být odpovězeno. Pokud firmy mají fungovat na trhu s více obdobími, je logické se domnívat, že se budou snažit maximalizovat (diskontovaný) tok zisků nežli maximalizovat krátkozrace jen pro současnost. Ovšem je možné, že krátkozraká maximalizace může maximalizovat tok zisků; nicméně toto nemůže předpokládat, nýbrž musíme dokázat. V každém případě Cournot se nad tímto nezamýšlí. Místo toho zavádí věci, které mohou vést ostatní k položení těchto otázek a udělat s tím něco dál.

Bowley (1924) (ve své práci, která je velmi podobná Cournotově) přepsal rovnici 5 do následujícího tvaru:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = f(Q) + q_i f'(Q) - C'_i(q_i) + q_i f'(Q) \frac{dq_j}{dq_i} \quad i \neq j, i = 1, 2$$

Poslední člen v předchozím vzorci se nazývá hypotetická variace. část $q_i f'(Q)$ je parciální derivace zisku i podle výstupu j a derivace dq_j/dq_i udává změnu q_j , která je podle firmy i spojena se změnou q_i , tzn. firma i očekává, že firma j volí q_j jako funkci závislou na q_i . Ovšem Bowley také nespecifikuje časovou strukturu. Poukazuje však na důležitou věc: politika, které se firma drží, je ovlivňována politikami, které si myslí, že používají její rivalové. říká tedy, že firma volí podle toho, co si myslí, že ostatní firmy budou dělat, nikoli podle toho, co skutečně dělají.

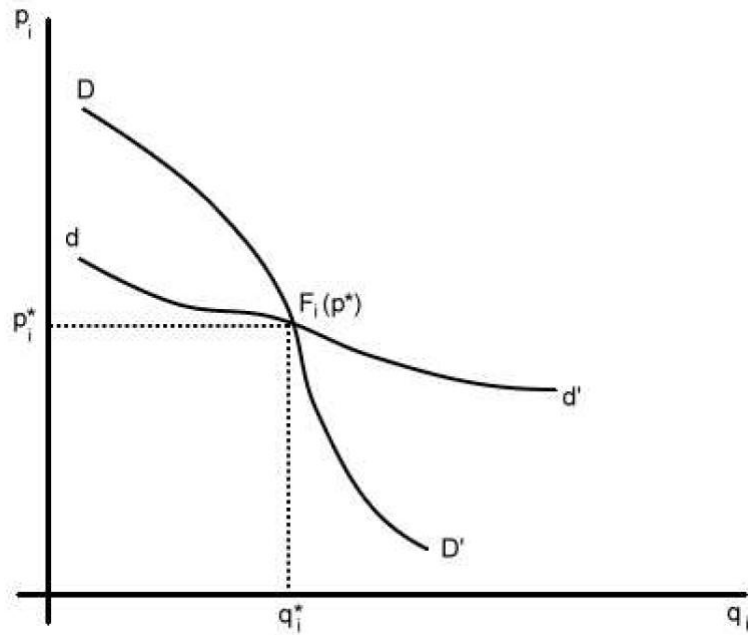
Bowley má pravdu, ale ne úplně. Zanechává dojem, že to, jak se firmy chovají a jak se očekává, že se budou chovat, jsou dvě naprosto odlišné věci. Jestli je toto pravda však závisí na povaze modelu a v některých důležitých případech není příliš místa na nějakou persistentní divergenci mezi skutečným a očekávaným chováním rivalů. Takové rozdíly mohou existovat a přetrvávat v rovnováze pouze když firmy dostávají informace, které nenarušují jejich očekávání. To můžeme ilustrovat na specifické verzi Cournotova modelu pro více období, používající funkci nejlepší odpovědi jako reakční funkci. Pro účely této kapitoly reakční funkce firmy je funkce, která dává rozhodnutí v období t (o ceně nebo výstupu), vystupující jako funkce rozhodnutí z období $t - 1$. Tedy

$$q_{i,t} = w_i(\bar{q}_{i,t-1}), \quad i = 1, \dots, n,$$

definuje Cournotovu reakční funkci. Dvě podmínky jsou vyžadovány pro $w_i(\bar{q}_{i,t-1})$, aby poskytovala optimální chování firmy i . První udává, že firma maximalizuje svůj současný zisk pomocí současných rozhodnutí. Druhý je ten, že firma i očekává rovnost mezi $q_{j,t}$ a $q_{j,t-1}$ pro $j \neq i$. První podmínka je otázkou preferencí firmy a nečiní nám žádný problém. Druhá ovšem může přijít do konfliktu s jinými fakty. Představme si situaci, kdy $q_{t-1} \neq q^c$ a firma, před tím, než si zvolí své rozhodnutí, se dozví skutečná rozhodnutí ostatních firem v předchozím období. Když si pak firma uvědomí všechny své minulé volby, musí si všimnout toho, že ostatní firmy obecně neopakují svá minulé rozhodnutí. Tedy tato podmínka nemůže být pravdivá. Poin-tou zde je zjištění, že skutečné a očekávané chování firmy se mění podle časového hlediska. Cournotovy i Bowleyovy příspěvky pro teorii oligopolu stále zůstávají v centru dění, ikdyž se pro mnoho autorů staly časem nestravitelné.

2.2 Behaviorální hypotézy Sweezyho a Stackalberga

Následující obrázek (9.4) znázorňuje známé Chamberlinovi dd' a DD' křivky. Každá znázorňuje poptávku, které čelí jedna firma, jako funkci stanovené ceny výrobku. Pro dd' se předpokládá, že ostatní výrobci cenu nijak nepřizpůsobí. Naproti tomu DD' křivka je sestrojena na základě předpokladu, že všichni výrobci změní cenu přesně podle změny p_i .



Obrázek 9.4: Chamberlinova rovnováha

V místě rovnováhy, kde dochází k protnutí obou křivek označené jako p_i^* , Sweezy předpokládá chování firem následovně. Jestliže firma zvýší cenu, pak ostatní firmy ceny ponechávají nezměněny, a tedy pro firmu to bude znamenat posunutí po křivce dd' . Naopak pokud by se firma rozhodla cenu snížit, pak by ji ostatní firmy následovali, a tedy by došlo k posunutí po křivce DD' . Za těchto předpokladů firma nemůže zvýšit

svůj zisk, jestliže:

$$\pi_i^i(p^*) \leq 0 \leq \sum_{j=1}^n \pi_i^j(p^*) \quad (2.1)$$

Sweezyho rovnováhy je potom dosaženo, jestliže nerovnost (2.1) je při ceně p^* splněna pro všechny firmy.

Za jakých okolností je však této rovnováhy dosaženo? Ve statických modelech, o nichž jsme pojednávali v předchozí subkapitole, tato rovnováha nedává smysl*. V dynamickém modelu, kdy se jednotlivé firmy snaží maximalizovat současnou hodnotu budoucích zisků, a kdy se změnami cen jsou spojeny dodatečné náklady, které převyšují možný zisk plynoucí ze změny ceny, pak stav odpovídající Sweezyho rovnováze skutečně může být udržován. Bližší pohled na Sweezyho rovnováhu odhaluje jednu nepříjemnou skutečnost. Uvažujme o rozhodování jedné firmy. Rozhoduje se:

- (a) jestli se odchýlit od p^* za předpokladu, že je cena p^* dosaženo, a že ostatní firmy se budou chovat podle svých reakčních funkcí, které určují stanovení ceny v případě, že někdo zahraje odlišnou cenu od p_i^*
- (b) jakou reakční funkcí se sama bude řídit

Označme reakční křivku i -té firmy jako $\phi_i(p^*, p'_j)$, která udává cenu, jakou má i -tá firma zvolit, pokud je na trhu stanovena cena p^* a j -tá firma se odchýlila od p_j^* zahráním p'_j . Sweezyho reakční křivku pak můžeme vyjádřit následovně:

$$\phi_i(p^*, p'_j) = \begin{cases} p_i^* + (p'_j - p_j^*) & \text{pokud } p'_j < p_j^* \\ p_i^* & \text{pokud } p'_j > p_j^* \end{cases}, \quad (2.2)$$

přičemž výše uvedené (a) a (b) musí být určeno pro libovolné možné p^* . Otázkou však zůstává, jestli takto zvolená strategie firmy je nejlepší možnou odpovědí na strategie ostatních firem. Uvažme Chamberlinův model vyhovující předpokladům 2 a 4, a kde pro cenu p^* platí rovnice (2.1). Řekněme, že první firma se

Smysl by dávala jen pokud by byla cena p^ dána, tak aby vyhovovala rovnici (2.1) a pokud by rozhodnutí o změně ceny jakékoliv firmy bylo oznámeno ostatním firmám dopředu, tak aby mohli vybrat optimální akci na toto rozhodnutí.

odchýlí od p^* o dp_1 a ostatní firmy $2, \dots, n$ reagují dle Sweezyho reakční funkce. Tedy, že $dp_j = dp_1$, jestliže $dp_1 < 0$ a $dp_j = 0$, jestliže $dp_1 > 0$. Zisk maximalizující reakce n -té firmy je charakterizována rovnicí $\pi_n^n(p') = 0$. Pro malé hodnoty dp_1 je to aproximativně $\pi_n^n(p'_n, \bar{p}_n^*) = 0$, tedy optimální reakce n -té firmy nebude záležet na tom, jestli první firma zvýšila či snížila cenu.

Výše popisovaná rovnováha, založená na reakčních křivkách však převyšuje to, co tvrdil Sweezy. Tedy pouze to, že při daném p^* splňujícím rovnici (2.1) a při daných reakčních křivkách, žádná firma nemůže změnit cenu tak, aby zvýšila svůj zisk. To je skutečně pravda, i když takto zadané reakční křivky nejsou optimálními reakčními křivkami. Stackelberg podobně jako Sweezy svým modelem popisuje speciální případ oligopolu. V jeho případě však zvláštnost modelu nespočívá v žádném předpokladu určitého chování firem, ale v postavení firem na trhu. V jeho podání se v podstatě jedná o zasazení Cournotova modelu duopolu do dynamického rámce tím, že se předpokládá, že jedna z firem je cenovým tvůrcem (*leader*) a ta druhá cenovým příjemcem (*follower*). Předpokládáme, že první firma by byla cenovým příjemcem. Potom její rozhodování o tom, kolik vyrobí, je dáno její reakční křivkou $q_{1,t} = w_1(q_{2,t-1})$. Pokud by i druhá firma byla cenovým příjemcem, pak by i ona se řídila na základě w_2 , což postupně směřovalo k rovnováze q^c . Naopak je-li druhá firma cenovým tvůrcem, pak předpokládá, že se první firma jejímu rozhodnutí podrobí. Tím je do modelu zasezen dynamický rámec, neboť druhá firma ví, jak na její výrobní politiku odpoví první firma. Potom její zisk v čase t můžeme vyjádřit jako funkci $\pi_2(w_1(q_{2,t-1}), q_{2,t})$. Nalezení optimálního q_2 pak spočívá ve splnění podmínek prvního řádu, tedy:

$$\pi_2^1(w_1(q_2), q_2)w_1'(q_2) + \pi_2^2(w_1(q_2), q_2) = 0$$

Tento model je však odvozen jen za výše uvedeného předpokladu konceptu chování, přestože nebyl nikde teoreticky zdůvodněn, proč by se firmy měly chovat právě tak. Další slabinou je to, že model nepředpokládá, že by firmy mohly změnit svá rozhodnutí během dalších období. Výše uvedeným postupem je získané rovnovážné množství Nashovou rovnováhou právě pro hru, která končí rozhodnutím první firmy.

Závěrem ještě doplníme naši úvahu o případ, kdy by si obě firmy myslely, že jsou cenovými tvůrci. Tato situace je nazývána Stackelbergova nerovnováha. Nejenže každá firma dělá špatný předpoklad o chování té druhé, ale také odpovídajícím způsobem vzniklá rovnovážná dvojice cen nebyla žádnou z firem očekávána.

3 Dynamické modely

Zde zmíněné dynamické modely můžeme rozčlenit do následujících čtyř skupin:

- *Tradiční funkčně reakční modely* – tyto modely jsou odvozeny od Cournotovy stability popisované z roku 1927. Klíčovým prvkem těchto modelů s diferencovaným produktem je to, že každá firma se rozhoduje podle spojitě funkce $p_{i,t} = \psi_i(p_{t-1})$, která udává stanovení ceny v čase t na základě minulého cenového vektoru p . Druhým klíčovým prvkem těchto modelů je to, že každá firma volí svoji reakční křivku ψ_i s ohledem na maximalizaci současné hodnoty všech budoucích zisků.
- *Modely s náklady na změnu cen* – v těchto modelech se firmy rovněž snaží maximalizovat současnou hodnotu všech budoucích zisků, ale zde již každá provedená změna cen něco stojí. Alternativní přístup spočívá v předpokladu určité časové prodlevy mezi oznámením a projevením se cenové změny
- *Modely formulované jako abstraktní hry* – tyto modely mohou být jednoduše aplikovány i na oligopoly. V podkapitole 4.3 je ukázán model, který i za podmínky nekooperativity dosahuje Paretovské rovnováhy.
- *Model s časovou závislostí* – v tomto modelu zisky závisí na akcích ze dvou předchozích období. Díky tomu je mj. možné zvést do modelu investice, kdy pak kapitál v období t je dán minulou velikostí zásoby kapitálu a investicemi v čase $t - 1$.

3.1 Zpožděné funkčně reakční modely

Vyjděme z náhodně vybraná dvojice výstupu (q'_1, q'_2) . Poté první firma na základě své reakční křivky zvolí $q''_1 = w_1(q_2)$. Následná dvojice výstupu je získána reakcí druhé firmy na q''_1 , tedy $q''_2 = w_2(q''_1)$. Takto Cournotem popsáný princip dosahování rovnováhy Cyert a deGroot zasadili do dynamického rámce, v němž

výplatní funkce mají následující podobu:

$$\sum_{t=1}^T \pi_i(q_{1,t}, q_{2,t}), \quad i = 1, 2$$

S tím, že firma 1 volí výstup pouze v lichých obdobích, takže $q_{1,t} = q_{1,t-1}$. Druhá pak výstup může měnit v sudých obdobích. Současná možnost změny výroby je tedy v tomto modelu znemožněna. Uvažíme-li model, ve kterém je poptávková funkce lineární a nákladová funkce kvadratická, pak bude i zisková funkce, od níž odvozujeme reakční křivky, kvadratická. Pro první firmu pak optimální rozhodnutí je dáno touto dvojicí reakčních křivek:

$$q_{1,2t+1} = w_{1,T-2t-1}(q_{2,2t}), \quad t = 1, 2, \dots, T_1 \quad (3.1)$$

$$q_{2,2t} = w_{2,T-2t}(q_{1,2t-1}), \quad t = 2, 3, \dots, T_2, \quad (3.2)$$

kde T_1 je největší hodnota t , pro kterou $T - 2t - 1 \geq 0$ a T_2 je definován obdobným způsobem. Takto zadaným systémem rovnic je pro obě firmy nemožné, je-li splněna rovnice 3.2, najít odlišnou posloupnost reakčních funkcí, která by zajistila vyšší zisk. Navíc při splnění Cyert a deGrootových předpokladů optimální reakční funkce pro daný časový okamžik konverguje, jakmile T jde do nekonečna. Tedy $w_{1,T-2t-1}$ je optimální reakční funkce pro firmu 1, když časový horizont je $T - 2t - 1$ období. Optimalita funkce nezávisí na aktuálním čase, $2t - 1$, ale pouze na délce časového horizontu.

Kdybychom do modelu zahrnuli více firem, museli bysme popsání způsoby rozhodování modifikovat tak, aby v každém období mohla změnit výstup pouze jedna firma. Takové chování však neodpovídá jak intuici tak ani běžné empirii. Na druhou stranu však nabízí silnější koncept rovnováhy než dále uvedený Friedmanův koncept (1976).

Friedmanův model dosavadní analýzu značně obohacuje tím, že uvažuje diferencovanou produkci firem. Uvedený model je odvozen za předpokladů 2,4,5 a 7 a dalších podmínek regularity. Diskontovaná zisková funkce má následující podobu:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_i^{t-1} \pi_i(p_t) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

Další analýza se snaží najít takovou rovnováhu, při které by se všechny firmy rozhodovaly podle stacionárních reakčních funkcí, tedy kdy by $p_{i,t} = \psi_i(p_{t-1})$.

K dosažení výsledku modelu bude nejprve vhodné vyhodnotit nejlepší odpověď (maximalizující diskontovanou ziskovou funkci) i -té firmy za předpokladu, že všechny ostatní firmy jednají na základě svých stacionárních reakčních křivek, které jsou pro i -tou firmu známy. O reakčních funkcích ostatních firem $p_{j,t} = \psi_j(p_{t-1})$, ($i \neq j$) předpokládáme, že splňují následující dvě podmínky:

1. Pro každý vektor p_{t-1} platí, že $0 \leq p_{k,t-1} \leq p_k^+$, $k = 1, \dots, n$, $0 \leq p_{j,t} = \psi_j(p_{t-1}) \leq p_j^+$.
2. $\psi_j(p_{t-1})$ je dvakrát spojitě diferencovatelná, kde $\psi_j^k > 0$ a $\sum_{k=1}^n \psi_j^k \leq \lambda < 1$

Cílem firmy je maximalizovat rovnici 3.3 za podmínky $p_{j,t} = \psi_j(p_{t-1})$, ($i \neq j$). Jedná se tedy v podstatě o konečněkrokový problém dynamického programování.

K řešení této úlohy budeme hledat posloupnost reakčních funkcí. Označme $p_{i,t} = \phi_{i,s}(p_{t-1})$, $s = 1, 2, \dots$, kde $\phi_{i,s}$ je optimální reakční funkce, jestliže do konce časového horizontu zbývá s období, za předpokladu, že v následujících obdobích se firma bude řídit funkcemi $\phi_{i,s-1}, \dots, \phi_{i,1}$. Tedy pokud časový horizont firmy i bude T období, pak strategie (zisk maximalizující plán akcí) spočívá ve výběru

$$p_{i,1} = \phi_{i,T}(p_0), p_{i,2} = \phi_{i,T-1}(p_1), \dots, p_{i,T} = \phi_{i,1}(p_{T-1}).$$

Pokud časový horizont jde do nekonečna, pak posloupnost reakčních funkcí $\phi_{i,s}$ konverguje k ϕ_i . Hlavní skutečnosti související s nejlepší odpovědí i -té firmy na $\bar{\psi}_i$ jsou obsaženy v následující větě:

Věta 3.1 (a) Pro $s = 1, 2, \dots$, $\phi_{i,s}(p)$ existuje.

(b) $p_i^* > \phi_{i,s}(p) > \phi_{i,s-1}(p) \geq 0$ pro všechny p a všechna $s > 1$.

(c) $\lim_{s \rightarrow \infty} \phi_{i,s} = \phi_i$ existuje a vyhovuje každé Lipschitzově podmínce, kterou splňují i $\phi_{i,s}$.

(d) Jestliže π_i a $\bar{\psi}_i$ je spojitě diferencovatelná do řádu vyššího než k , pak $\phi_{i,s}$ je spojitě diferencovatelná do řádu vyššího než $k - 1$ a ϕ_i do řádu vyššího než $k - 2$.

(e) Všechny první parciální derivace ϕ_i a $\phi_{i,s}$ jsou nezáporné a funkce splňují stejnou Lipschitzovu podmínku jako ψ_i .

(f) Jestliže π_i a $\bar{\phi}_i$ je nekonečně spojitě diferencovatelná, pak totéž platí i pro ϕ_i a $\phi_{i,s}$.

(g) Pro funkce platí, že

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T \alpha_i^{t-1} \pi_i(\phi_{i,T-t+1}(p_{t-1}), \bar{\psi}_i(p_{t-1})) \\ = \sum_{t=1}^{\infty} \alpha_i^{t-1} \pi_i(\phi_i(p_{t-1}), \bar{\psi}_i(p_{t-1})). \end{aligned} \quad (3.4)$$

(h) Limitní reakční funkce, ϕ_i , je optimální pro nekonečně krokový rozhodovací proces.

Obsah (a) nám říká, že v pevně daném konečně krokovém rozhodovacím procesu existuje jediný nejlepší způsob jak se rozhodovat, který je dán posloupností reakčních funkcí. Když by se firma rozhodovala co udělá, aniž by se přitom omezovala na použití reakčních funkcí, které využívají její konkurenti, přesto bude pro ni nejlepší rozhodnutí je použít. Z (b) můžeme vidět, že tyto reakční funkce mají monotonní vlastnost, Tedy pro daný p_{t-1} je p_t tím větší, čím je delší zbývající časový horizont. (c) zajišťuje, že posloupnost reakčních funkcí konverguje, zatímco (d)–(f) udává určité důsledky regularity. Z (g) vyplývá, že jakmile časový horizont se blíží nekonečnu, pak diskontovaný zisk se blíží k hodnotě, jaké by bylo dosaženo trvalým používáním ϕ_i . Tento limitní zisk je pak podle (h) i optimálním ziskem pro nekonečně krokový rozhodovací proces.

Je dobré si uvědomit, že ϕ_i je nejlepší odpovědí i -té firmy na $\bar{\psi}_i$. Tuto skutečnost vyjádříme jako:

$$\phi_i = W_i(\bar{\psi}_i) \quad (3.5)$$

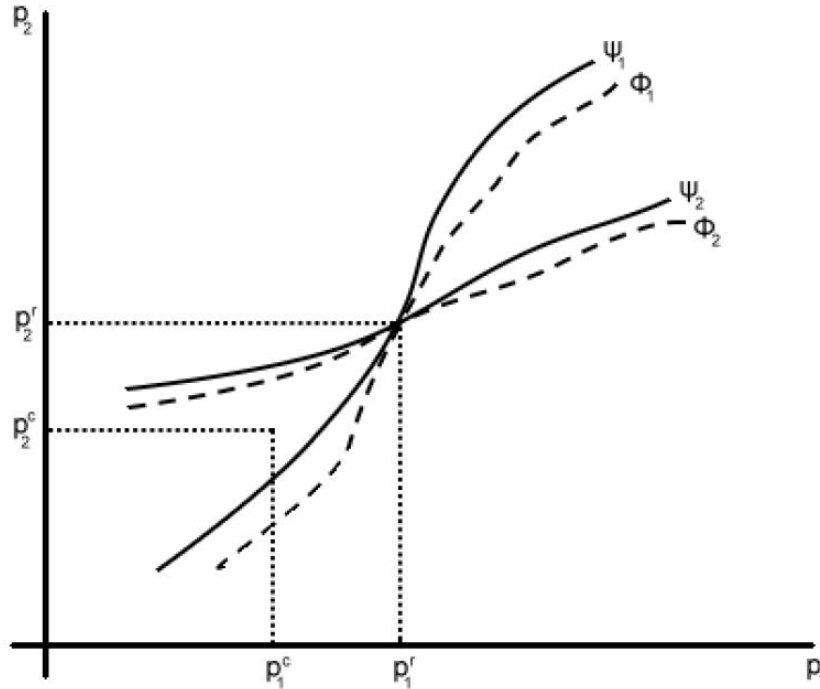
Poznamenejme ještě, že ϕ_i je členem stejné třídy funkcí jako ψ_i . Všechno jsou to rostoucí diferencovatelné kontrakce, které zobrazují p_{t-1} do $p_{i,t}$ či $p_{j,t}$.

To co jsme odvodili pro i -tou firmu můžeme samozřejmě odvodit i pro každou jinou, a tedy i nejlepší odpověď popsanou rovnicí 3.5 můžeme následovně využít k zobrazení celé množiny reakčních funkcí do jiné:

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) = (W_1(\bar{\psi}_1), \dots, W_n(\bar{\psi}_n)) = W(\psi).$$

Je zřejmé, že pevný bod z W je Nashovou nekooperativní rovnováhou a je přirozeným rozšířením Cournotovy rovnováhy. Kromě triviálního případu jsme však existenci pevného rovnovážného bodu, $\psi^* = W(\psi^*)$, zatím neprokázali. Triviálním případem jsou myšleny reakční funkce, kdy $p_{i,t} = p_i^c$, $i = 1, \dots, n$. Pokud všechny firmy zvolí body odpovídající Cournotově rovnováze, ať už byla historie hry jakákoli, pak pro žádnou firmu není výhodné se odchýlit od trvale voleného p_i^c . Bylo by zajímavé ukázat existenci funkčně reakční rovnováhy odlišné od této, ale to uděláno nebylo. To co jsme ukázali byla pouze aproximace k ní.

Věta 3.2 *Existuje ψ^* taková, že $\psi^*(p^r) = p^r$. Spolu s ψ^* je $\phi^* = W(\psi^*)$ takové, že $\phi^*(p^r) = p^r$ a $\psi_i^{*j}(p^r) = \phi_i^{*j}(p^r)$, $i, j = 1, \dots, n$.*



Obrázek 9.5: Schématická reprezentace funkcí ϕ a ψ

Protože ψ^* je kontrakce, která zobrazuje množinu $[0, p_1^+] \times \dots \times [0, p_n^+]$ do sebe sama, tak potom pokud vyrazíme z náhodně zvoleného bodu p_0 a vygenerujeme posloupnost cen $p_t = \psi^*(p_{t-1})$, pak p_t musí nutně konvergovat k p^r , kde p^r je jediným pevným bodem ψ^* . Věta 3.2 říká, že existuje vektor reakčních funkcí, ne nezbytně jediný, takový, že nejlepší odpověď na ψ^* , $\phi^* = W(\psi^*)$, má stejný rovnovážný cenový vektor p^r , v němž jsou si obě funkce ψ^* a ϕ^* tečnami. To znamená, že pokud firmy právě používají $\psi_1^*, \dots, \psi_n^*$,

pak za předpokladu, že ceny odpovídají p^r , žádná z firem nemůže zvýšit svůj zisk tím, že by změnila svoje rozhodnutí podle ϕ_i . Navíc při cenách blízkých p^r cenové změny z jednoho období do druhého určené pomocí ψ_i^* jsou přibližně optimální. Na obrázku 9.5 je znázorněna idea vztahu mezi funkcemi ϕ a ψ v případě dvou firem.

Rovnovážné ceny p^r jsou vyšší než ceny p^c odpovídající Cournotově statické rovnováze. Ukažme, že mnohé ceny mohou být rovnovážnými cenami vyhovující reakčně funkční rovnováze dané větou 3.2. Vyberme vektor p^r takový, že $p_i^r - p_i^c = p_j^r - p_j^c > 0$, pro všechna i, j . Je zřejmé, že je snadné najít takové p^r , aby pro všechny firmy platilo, že $\pi_i(p^r) > \pi_i(p^c)$. Určitě to bude platit pro takové p^r , které jsou blízké p^c . Tedy jsme ukázali, že reakční funkční rovnováhy mohou vést k vyšším ziskům než odpovídá statické Cournotově rovnováze.

3.2 Modely s rychlou reakcí (odezvou) nebo náklady na dohodu

Marschak a Selten (1978) vytvořili dvojici paralelních modelů, jejichž hlavní rysy popisujeme níže. Představili tyto modely ve formě abstraktní hry. Nicméně velmi jasně ukázali, že hlavní pole aplikací pro tyto modely jsou oligopoly. V závěrečné části jejich článku je aplikace pro oligopoly uvedena. Hlavní rysy jejich modelů a názor na rovnováhu vycházejí z dříve popsaného cenově produktově odlišujícího se modelu. Model s jedním obdobím, ve kterém jsou ceny stanoveny, jakoby se žádná s firem nerozhodla odchýlit se od svých vnitřně stanovených cen. Pokud se jedna s firem rozhodne změnit cenu, ostatní mají možnost si cenu zvolit. To je pouze formalizace postupu stanovení ceny uváděném v oddíle Behaviorální hypotéza Sweezyho a Stackelberga v souvislosti se Sweezy modelem. Ve druhém modelu si firmy stanovují cenu při nekonečné posloupnosti časové periody. Účelová funkce firmy se liší ve dvou místech vzhledem k rovnosti (4.4). Zprvé firmy nediskontují zisk. Místo toho se snaží maximalizovat průměrný zisk za období, přes nekonečný horizont. Zadruhé je jejich zisk v období dán jako $\pi_t(p_t)$ pouze pokud nedochází ke změně jejich ceny v daném období. Pokud se rozhodnou změnit cenu, musí zaplatit dodatečný poplatek spojený s náklady na dohodu. Ukazují, že rovnováha pro tyto dva modely je téměř stejná.

Pro každou firmu v modelu pro jedno období jsou tři věci, které jsou určující:

- a) Výše ceny při statusu quo, p_i^0 .
- b) Rozhodnutí, zda se odchýlit od ceny p_i^0 .
- c) **Funkce odpovědi** $\phi_i(p^0, p_j)$ použitá v případě, že firma j by se rozhodla zvolit jinou cenu než p_j^0 .

Pravidla platná pro informace určují, že všechny firmy mají informaci o ceně p^0 a funkci ϕ_i . Pokud se jedna firma rozhodne odchýlit se od ceny p_j^0 , oznámí to včas a ostatní firmy na to mají možnost reagovat změnou své ceny. Tato pravidla zároveň určují, že pouze jedna firma se může odchýlit od statusu quo v jednotkovém čase. Podmínky nastavení funkce odpovědi jsou tyto:

Předpoklad 8

Poslední požadavek, že $\phi_i(p^0, p_j) = p_i^0$ je pouze konzistentní podmínka k tomu, když odchýlení firmy j neobsahuje vliv na podíl j na trhu, pak ani nemění podíl i . Obdobně podmínka $\phi_i(p^0, p_i) = p_i^0$ znamená, že odezva i na svou vlastní změnu je vlastní odchylkou. Tyto dva předpoklady dovolují definovat ϕ_i pro všechna p^0 a p_i , tedy i pro situace, kdy se $j = i$ a $p_j = p_j^0$. Každá z firem také může vytvořit posloupnost odpovědí na posloupnost odchýlení. Pořád nicméně platí, že odchylku může provést pouze jedna firma.

Posloupnost $\{p_j^1, p_j^2, \dots, p_j^k\}$ jsou odchylky firmy j od ceny p^0 . Proces je pak následující: firma j oznámí cenu p_j^1 , ostatní zareagují $\phi_i(p^0, p_j^1) = p_i^1$. Poté firma j oznámí cenu p_j^2 a ostatní zareagují $\phi_i(p^1, p_j^2) = p_i^2$. Tento proces pokračuje až k poslednímu zveřejnění ceny p_j^k . Po ní následuje odpověď $\phi_i(p^{k-1}, p_j^k) = p_i^k$. Označme nyní **rozšířenou funkci odpovědi** $\hat{\phi}$

$$\hat{\phi}\left(p^0, \{p_j^1, \dots, p_j^k\}\right) = \phi\left(\hat{\phi}\left(p^0, \{p_j^1, \dots, p_j^{k-1}\}\right), p_j^k\right), \quad k \geq 2$$

$$\hat{\phi}\left(p^0, \{p_j^1\}\right) = \phi\left(p^0, p_j^1\right).$$

Cena a funkce odpovědi (p^0, ϕ) vytváří nespolutracující rovnováhu, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- a) i -tá firma nemůže zvýšit svůj zisk odchýlením se od p_i^0 , což vyjadřuje, že p^0 je cena statusu quo a ostatní firmy čelí změně odpovědí $\phi_j (j \neq i)$
- b) i -tá firma nemůže použít jinou reakční funkci a zvýšit svůj profit.

$$\pi_i(p^0) \geq \pi_i\left(\hat{\phi}\left(p^0, \{p_i^1, \dots, p_i^k\}\right)\right)$$

$$\pi_i\left(\hat{\phi}\left(p^0, \{p_j^1, \dots, p_j^k\}\right)\right) \geq \pi_i\left(\hat{\phi}'_i\left(p^0, \{p_j^1, \dots, p_j^k\}\right), \hat{\phi}_i\left(p^0, \{p_j^1, \dots, p_j^k\}\right)\right)$$

Mějme posloupnosti $\{p_i^1, \dots, p_i^k\}$ a $\{p_j^1, \dots, p_j^k\}$, $i \neq j$ a podrobnou odpovědnostní funkci $\hat{\phi}_i^1$, $i = 1, \dots, n$. Pak funkci odpovědi ϕ s cenou p^0 nazveme **konvolucí** (nespolupracující rovnováha). Pokud firma i nemůže odchýlit cenu od p^0 (nebyla by tolik zisková), pak říkáme, že firma i je stabilní v ceně p^0 ve vztahu k ϕ . Pokud je zároveň ϕ_i nejlepší pro ostatní, pak říkáme že ϕ je nestabilizující.

Nakonec definují slabou konvoluci. Může to být také myšleno jako slabá nekooperující rovnováha. Necht' P_i je podmnožina z $[0, p_1^+]$ $X \dots X$ $[0, p_n^+]$ a necht' $P = \cap_{i=1}^n P_i$ je neprázdná, pak (p^0, ϕ) je slabá nekooperující rovnováha a ϕ je slabá konvoluce, pokud je $\phi_i(p', p_j'')$ nejlepší odpovědí pro firmu i pro libovolnou cenu $p' \in P_1$ a $p'' \in [0, p_j^+]$, $j \neq i$, $i = 1, \dots, n$, $\phi(p', p_j'') \in P$ a žádná firma nemůže profitovat z odchylky od p^0 .

Uvažujme nyní model, ve kterém je čas diskrétní a v každém okamžiku si každá firma volí cenu. Podmínky na informace jsou podle sekce 3.1: každá firma provádí rozhodnutí souběžně s ostatními a všechny znají všechny cenové volby ostatních firem z předchozích kol. Tato struktura představujícího multičasového modelu (present multiperiod model) se odlišuje od modelu popsaného v sekci 3.1 ve dvou bodech. Zaprvé, zisk dosažený firmou i v čase t je

$$\pi_i(p_i) - M_i(p_{i,t}, p_{i,t-1}),$$

kde $M_i(p_{i,t}, p_{i,t-1})$ jsou náklady změny ceny pro firmu i . Když $p_{i,t} = p_{i,t-1}$ jsou náklady nulové; a pokud $p_{i,t} \neq p_{i,t-1}$ pak jsou náklady větší než jakýkoliv zisk, který je možný vytvářením odchýlením za jedno časové

období. Formálně:

$$M_i(p_{i,t}, p_{i,t-1}) > \max_{\bar{p}_{i,t}} \left(\pi_i(p_{i,t}, \bar{p}_{i,t}) - (\pi_i(p_{i,t-1}, \bar{p}_{i,t})) \right).$$

V modelu v sekci 3.1 stejně tak jako v modelu sekce 3.3 je dočasný zisk důležitý v utváření přirozené rovnováhy. Význam je markantní zejména v sekci 3.3. Dočasným ziskem je míněn dodatečný zisk získaný za časové období, ve kterém je použita nová cena, na kterou ještě ostatní firmy neměli možnost zohlednit. Podle 3.13, dočasný zisk nehraje roli, protože náklady potřebné na změnu převyšují tento zisk. Firma změní cenu tedy pouze, pokud očekává, že v nové situaci (po reakci okolních firem) se dostane do pozice, kdy zvýší svoje původní zisky (absolutně, protože firma zisky nediskontuje).

Z toho vyplývá účelová funkce:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\pi_i(p_t) - M_i(p_{i,t}, p_{i,t-1}) \right], \quad i = 1, \dots, n.$$

$p_{i,0}$ je bráno jako stejné s $p_{i,1}$. M_i je ohraničené shora, takže nikdy nebude bránit změnám cen, které povedou k permanentnímu růstu zisků.

Nyní můžeme zkonstruovat pravidla chování nebo reakční funkci. Jak je zjevné, níže reakční funkce je odlišná od funkce popsané v části 3.1. Označme ψ_i reakční funkci i -té firmy a $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Pak

$$p_{i,t} = \psi_i(p_{t-1}, p_{t-2}), \quad s \quad p_{i,t} = p_{i,t-1}, \quad \text{když} \quad p_{t-1} = p_{t-2}, \quad t = 2, 3, \dots, \quad \text{a} \quad p_0 = p_1.$$

Výběr ceny i -té firmy závisí na pozorovaných chováních cen za poslední dvě období. Pokud nedošlo k žádné změně cen, i -tá firma zanechá svou cenu nezměněnu. Marschak a Selten nazývají tento typ chování *krátkou pamětí* a *konzervatismem*. Označení krátká paměť používají, protože do vyhodnocovacího procesu vstupují pouze poslední dvě období a označení konzervativní, protože nedochází k změnám ceny, pokud aktuální informace udávají, že nedošlo ke změně ceny.

Ve vztahu k ψ_i zbývá ještě definovat jeden pojem. Představme si, že od času t firma i nikdy nezmění cenu od postupu popsánoho ψ_i . Zároveň uvažujme, že v předcházejícím období se firma j odchýlila d ψ_i .

Od období t dále předpokládejme ψ_i za nejlepší reakci na změnu. Pokud $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ zůstane stejná, říkáme ji *paraperfektní*. Vektor paraperfektních reakcí s cenou P_0 utvářejí nesoutěžní rovnováhu. S těmito danými výchozími podmínkami a chováním ostatních firem podle $\bar{\psi}_i$ je pro firmu j nejlepší rozhodnutí ψ_i . Vzhledem k omezení cen (p_{t-1}, p_{t-2}) , ve kterých může docházet k odchylce (maximálně však v jedné z nich) je možné definovat funkci odpovědi jako reakční funkci. Nastane pak vždy jedna z těchto možností:

- a) $p_{j,t-1} \neq p_{j,t-2}$ pro nějaká $j \neq i$, pak platí $\phi_i(p_{t-2}, p_{j,t-1}) = \psi_i(p_{t-1}, p_{t-2})$,
- b) $p_{i,t-1} \neq p_{i,t-2}$, pak platí $\phi_i(p_{t-2}, p_{i,t-1}) = p_{i,t-1}$,
- c) $p_{t-1} = p_{t-2}$, pak platí $\phi_i(p_{t-2}, p_{i,t-1}) = p_{i,t-2}$.

Funkci odpovědi ϕ můžeme definovat z reakční funkce ψ . Opačný postup nicméně není možný. Problém spočívá v tom, že reakční funkce není kompletně určená (je pouze určená cenami p_{t-1}, p_{t-2}). Hra s jedním obdobím s okamžitou odpovědí je odpovídající multičasové hře získané opuštěním rychle odpovědnostní podmínky a přidáním změnové nákladové funkce M_i a účelové funkcí (4.14) Naopak multičasová hra s modifikovanými náklady může být spojena s jednočasovou rychle odpovědnostní hrou s klesající změnovou funkcí, nahrazením úkolové funkce a uvedením odpovědnostní funkce. Není překvapující, že vznikne rovnost mezi ϕ (která je konvolucí) a ψ , která je paraperfektní.

Věta 9

Nechť je ψ reakční funkcí a ϕ je funkcí odpovědi takovou, že ϕ je stanoveno z ψ a ψ je konzistentní s ϕ . Pak pokud je ψ paraperfektní, pak ϕ je slabá konvoluce. Toto tvrzení platí i v opačném směru.

Aplikace tohoto postupu je použita v oligopolním modelu, ve kterém je dán seznam zboží, které oligopol může produkovat. Všechny firmy vyrábí všechno zboží a to stejnou technologií. Užití funkce odpovědi za předpokladu, že vstupní ceny i poptávka (produkt) pro každý oligopolní statek jsou dány, dává ceny a funkci odpovědi, při které všechny firmy dosahují nulového zisku a je tedy stav nekooperativní rovnováhy.

Tento model je vnořený v modelu celkové rovnováhy. Myšleno je to tak, že je možné ho vidět v částečných rovnováhách.

3.3 Model upřednostňující spolupracující rovnováhy bez kartelů

Rovnováha uvedená v tomto odstavci je rovnováhou pro podobný model jako byl uveden v odstavci 4.1. Firma maximalizuje diskontovanou hodnotu toku zisků, přičemž neexistují náklady na změny cen. V rovnovážném chování lze najít prvek, který odpovídá reakčním funkcím v odstavci 4.2. nicméně přechodné zisky mají vliv na výsledek. Obecnější a ucelenější výklad těchto modelů lze najít v Friedman (kap. 8). Jádrem chování firem lze shrnout takto: Je dán cenový vektor p^* , přidružený pro každou firmu vyšším ziskům než vektor rovnovážný p^c z Cournotova modelu jednoho období. Každá firma i volí v období t cenu p_i^0 , jestliže veškeré ostatní firmy zvolily p_j^0 ve všech obdobích do $t-1$. Pokud se nějaká firma v minulosti odchylovala od ceny p_j^0 , pak si i -tá firma zvolí cenu p_i^c . Tak dlouho, dokud firmy volí cenu p^* , je jejich zisk $\pi_i^* = \pi_i(p^*)$, $j = 1, 2$. Pokud například firma 2 odstoupí v čase t od ceny p_2^* , může dosáhnout $\pi_2' = \pi_2(p_1^*, p_2')$ $\equiv \max_{p_2} \pi_2(p_1^*, p_2)$. Protože 1. firma bude komerčně stanovovat cenu p_1^c v časovém okamžiku $t+1$ firma 2 nemůže udělat nic lepšího než také zvolit cenu p_2^c . Čistý výsledek je takový, že druhá firma může dosáhnout zisku $\pi_2' - \pi_2^*$ v časovém období t , které vymění za budoucí ztrátu $\pi_2^* - \pi_2^c$ v každém dalším časovém období od $t+1$ dále. O výhodnosti takového rozhodnutí rozhoduje diskontní parametr velikosti zisku. Formálně je to zapsáno takto:

$$\begin{aligned} p_{i,1} &= p_i^*, & \text{a pro } t &\geq 2 \\ p_{i,t} &= p_i^*, & \text{pokud } p_{j,\tau} &= p_j^* \text{ pro } j = 1, \dots, n \text{ a } \tau = 1, \dots, t-1, \\ p_{i,t} &= p_i^c & \text{v ostatních případech } i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Nyní uvažujme, že se všechny firmy očekávají, že se i -tá firma bude chovat podle rovnováhy popsané předchozím vztahem a podle toho co je pro ni nejlepší rozhodnutí. Předpokládá se, že jedinou volbou je vybrat cenu p_i^* dávající diskontovaný zisk

$$\frac{\pi_i(p^*)}{1 - \alpha_i}$$

Je také zřejmé, že pokud je časové období t prvním, ve kterém $p_{i,t} \neq p_i^*$, pak od $t+1$ dále není lepší volba než $\pi_{i,\tau} = p_i^c$ ($\tau = t+1, \dots$). To protože neexistuje strukturální poměr mezi časovým obdobím a rozhodnutím firmy vybrat si cenu p_j^c . Není žádný způsob jak zvolenou cenu firmy v jednom časovém období ovlivnit ty ostatní. Pokud se $p_{i,t} \neq p_i^*$, je nejlepší cenou p_i' , která je definována podmínkou

$$\pi_i(p_i', \bar{p}_i^*) = \max_{p_i} \pi_i(p_i, \bar{p}_i^*).$$

Diskontovaný zisk je pak:

$$\sum_{\tau=1}^{t-1} \alpha_i^{\tau-1} \pi_i^* + \alpha_i^{t-1} \pi_i' + \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \alpha_i^{\tau-1} \pi_i^c = \left(\frac{1 - \alpha_i^{t-1}}{1 - \alpha_i} \right) \pi_i^* + \alpha_i^{t-1} \pi_i' + \frac{\alpha_i^t}{1 - \alpha_i} \pi_i^c. \quad (3.6)$$

Vzhledem k stacionaritě modelu, pokud diskontovaný zisk roste změnou ceny p_t' v časovém úseku t , pak ho maximalizujeme změnou v časovém úseku 1. Úroveň diskontního parametru je zásadní. Pokud

$$\alpha_i > \frac{\pi_i' - \pi_i^*}{\pi_i' - \pi_i^c},$$

Firma si nepomůže změnou ceny od p_i^* . Pokud je předchozí nerovnost opačná, pak je optimální změna ceny hned v prvním časovém období. Pokud nastane rovnost je postup firmy lhostejný. Pokud je nerovnost ostrá pro všechny firmy, je chování dané 4.17 nekooperativní rovnováhou. Pokud je navíc $\pi(p^*)$ Pareto-optimální, firmy se nacházejí v nekooperativní rovnováze, která dopovídá kvalitnímu výsledku s předpokladem tajné dohody. Tato kombinace dovoluje tedy více cenových vektorů, které splňují podmínku p^* . Je požadováno pouze splnění předchozí nerovnosti pro všechny firmy. Mezi možnostmi, které jsou Pareto-optimální a které splňují

$$\frac{\pi_i' - \pi_i^*}{\pi_i' - \pi_i^c} = \frac{\pi_j' - \pi_j^*}{\pi_j' - \pi_j^c}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Mohou být specifika jako případy konkrétních zájmů. Podle předchozí rovnosti je poměr dočasného zisku dán jako součet dočasného zisku a ztráty za období. Tento poměr může být myšlen jako pokušení firmy ke změně. Tato rovnost popisuje *vlastnost vyváženého pokušení* a rovnováhy, ve které je rozhodování firmy dáno rovností 4.17. To můžeme označit jako uspokojení pokušení majetku. Pokud je daná existence mnoha cen, která hraje roli p^* , je snadno si představit tuto rovnováhu jako dohodu, která je vybrána jako běžný souhlas, ale nevyžaduje formální dohodu k dodržení tohoto efektu, protože se firmy dohodly na nekooperativní rovnováze. Jinými slovy se shodly na něčem, co je samo sebou vynucující. Pokud se jedna firma rozhodne odchýlit se od ceny p_i^* danou oznámeným chováním ostatních, vyjadřuje to zájem jedné firmy jít vpřed a dělat, co je očekávané (zvolit cenu p_j^c). Podmínky, kdy je vybrána cena p_j^c a závazek zvolit ji, je způsob vyhrožování. Minimálně upraví zastrašování k odchýlení se od ceny p^* .

3.4 Modely se strukturou závislou na čase

Závislost na čase je v struktuře modelu prezentovaná tím, že výnos obdrženy v období t závisí na krocích přijatých v čase t a na jednom či vícero minulých obdobích. Přirozeným způsobem jak můžeme této závislosti dosáhnout, je prostřednictvím zakomponování rozhodování firem o investicích do kapitálu.

Povězme, že výrobní náklady firmy v čase t jsou jako předtím funkcí jejího výstupu, ale i množství kapitálu naakumulovaného z předešlého období. Nechť je δ_i depreciační kapitálu a K_{it} množství kapitálu na konci období t , pak celkové náklady v průběhu období t jsou

$$C_t(q_{i,t}, K_{t,t-1}) + (K_{i,t} - (1 - \delta_i) K_{t,t-1}). \quad (3.7)$$

Je potom jednoduché si představit firemní poptávku závislou na současných i minulých cenách. To může pocházet z tužby spotřebitelů spekulovat o budoucích cenách. Druhá možnost je, že takovéto opožděné ceny jsou následkem prodaného množství v předešlém období.

Je totiž přirozené, že prodeje v jednom období ovlivní poptávku v období následujícím, obzvlášť v případě dlouhodobých statků, ale i statků ostatních. Modely s touto variací jsou prostřednictvím teorie her popsány

v knize Friedman (1977a, kapitoly 9 a 10) a v Sobel (1973). Aplikaci na oligopol můžeme najít ve Friedman (1977b). Ve všech těchto případech se uvažují rovnováhy, které nejsou výsledkem kooperativní hry.

4 Oligopoly a teorie her

Pre každého, kdo čte tuto kapitolu od začátku, je zřejmý těsný vztah mezi prezentovanými materiály a teorií her. Cournotova rovnováha pro model s jedním obdobím je prvním příkladem, alebo přínajmenším speciální příklad nekooperativní rovnováhy ve hře s n proměnnými.

Bezpochyby většina lidí pracujících na teorii oligopolu byla a je ovlivněna základy teorie her. Mimo to, ne všechny výzkumy směřovaly od teorie her k teorii oligopolu (anebo jiné části ekonomie), protože aktivními přispěvateli do teorie her jsou ekonomové, kteří pracují na oligopolech. Často je problém, se kterým se zabývají v rámci teorie her a způsob, jakým s ním pracují, ovlivněný jejich zájmem o oligopoly a přáním přetavit své výsledky do podoby aplikovatelné na oligopoly.

Blíže viz k danému tématu v kapitole o teorii her od Martina Shubika.

5 Vstup a výstup v modelech oligopolu

Ve většině literatury o oligopolech je počet firem na trhu konstantní. Firmy se nerozhodují, zda vstoupí nebo nevstoupí na trh.

Bez hlubšího zamýšlení se nad tímto mechanismem v praxi, sa často tvrdí pro dokonale konkurenční trhy v rovnováhe, že v dlouhém období platí pravidlo nulového zisku, protože během doby firmy opouští odvětví se záporným ziskem a naopak vstupují do odvětví se ziskem kladným.

Bez ohledu na to, jaká je podstata těchto argumentů pro dokonalou konkurenci, není však přijatelná pro oligopolní trhy. Vstup nebo výstup jedné firmy je pravděpodobně provázený velkými nespojitými změnami na trhu (např. ceny), které jsou sledované firmami, jež jsou aktivní jak před tak i po této změně.

I když se nezmění chování na trhu, význam každé firmy bude rozdílný po změně jejich počtu. Je totiž opodstatněně předpokládat pro konkurenční firmu, že ceny, výnosnost atd. daného trhu je nezávislá na tom, či dojde ke změně chování na tomto trhu.

Pro oligopolistu je ale jasné, že tyto proměnné veličiny musí z části záviset na tom, zda je nebo není aktivní.

Tyto závěry můžeme zesummarizovat s tím, že trh oligopolu je opravdová hra, ve které hráči sestávající z m aktivních firem, které jsou v daném okamžiku na trhu a z k potencionálních vstupujících, kteří by mohli vstoupit na daný trh, pokud by chtěli. Je obtížné pochopit, jak může být užitečná a zajímavá teoretická analýza vstupu a výstupu provedená vzhledem k všem $m + k$ agentům. Dané oblasti sa věnovali jak Bain (1949) tak i Shubik (1959).

Zesummarizovaní jednoduché verze ceny bránící vstupu (neboli limitované ceny) se jeví jako užitečné, protože se jí dostalu v průběhu let mnoho pozornosti. Mimoto můžeme pozorovat, jak cena bránící vstupu může zapadnout do modelování vstupu a výstupu firem.

Představme si odvětví, kde je jedna aktivní firma, a předpokládejme, že existuje jeden potencionální vstupující. Podle nejjednodušší teorie limitní ceny existuje takové p^* , že potencionální vstupující nevstoupí do odvětví, pokud pozoruje, že aktivní firma stanoví tuto cenu p^* nebo nižší. Naopak, pokud pozoruje, že je cena nad p^* , vstoupí do odvětví. Aktivní firma ví, jak se potencionální vstupující rozhoduje a chová sa podle toho, co pokládá pro sebe za najvýhodnější.

Problém tohoto scénáře je v tom, že je ad hoc. Pokud například oba agenti znají všechny tři ziskové funkce (funkci aktivní firmy před vstupem a funkce obou firem po vstupu), potom neexistuje důvod, proč by měla „předvstupová“ cena aktivní firmy mít nějaký vliv na rozhodnutí potencionálního vstupujícího. Podle všeho bude důsledkem nízké původní ceny pro potencionálního vstupujícího zastrášení, čímž ho přinutí přemýšlet o nízké ziskovosti odvětví. Tato idea by sa mohla naplnit, pokud by původní firma udržovala nízký zisk díky nízké ceně (Harrodův přístup), vyvolávající takovou domněnku u vstupujícího, že cena taková zůstane i po

jeho vstupu. Potom musí být cena nízko dostatečně dlouho, aby vstupující dospěl k tomuto závěru. Platí však, že je v dnešní době velkého množství dostupných informací těžké předpokládat takovéto fungování.

Akceptovatelnější přístup obhajující limitní cenu můžeme dosáhnout předpokládáním, že potenciaální vstupující neví, jaká bude jeho zisková funkce, pokud by vstoupil, a předpokládá, že cena stanovená původní firmou o ní poskytuje nějaké informace (Friedman 1977b). Zdá se, že cena bránící vstupu přežije v této situaci pouze pokud ziskové funkce, ve které vstupující věří, jsou jasné ve vztahu k ziskovosti. Tedy čím vyšší je cena stanovená aktivní firmou, tím větší je pravděpodobnost ziskovější funkce. Tyto podmínky se možná jeví poněkud přísné, nicméně jsou základním rysem předpokladů, pomocí kterých může být převedena limitovaná cena do modelů, ve kterých se aktivní a potenciaální agenti rozhodují racionálně.

Na téma vstupu a výstupu z nekooperativních trhů bylo napsaných velmi málo formálních teoretických prací. Kamien a Schwartz (1975) přišli s modelem oligopolu umožňujícím vstup. V této a předešlých pracích nejsou potenciaální vstupující explicitně modelováni, z tohoto důvodu nebyli optimalizováni v rámci modelu.

6 Bilaterální monopol

Bilaterální monopol je název pro trh, na kterém stojí proti sobě monopolistický prodávající a monopolistický kupující. Takovýto trh je nutně kooperativní hrou dvou hráčů.

Proč se jedná o hru dvou hráčů, je jasné. To, že sa jedná o kooperativní hru, pramení z nemožnosti fungování jedné firmy bez obchodování s druhou. Pro jedno období reprezentuje obchodování mezi dvěma subjekty Edgeworthův box diagram. Myšlenky některé předešlé literatury vyjadřovaly názor, že jedna firma stanoví cenu, ve které se uskuteční obchod spolu s tím, že druhá firma stanoví obchodované množství (Fellner 1949, kapitola 9), což je jasně nepřírozené, protože nic nebrání této dvojici v diskuzi a dohodě na libovolné kombinaci ceny a množství. Rovněž se jedná o případ jednoho období, ve kterém všechny firmy znají obě

ziskové funkce.

Podobně jako s oligopoly, tak i teorie bilaterálních monopolů se stala zajímavější a potencionálně aplikovatelná tehdy, když sa začal brát ohled na rozhodování vo vícero obdobíh. Tomuto sa věnoval ve své práci Cross (1969), který analyzoval proces vyjednávání. Rozpoznal, že jak se doba spojená s vyjednáváním dohody protahuje na obou stranách, tak je pravděpodobnější dosáhnoutí menšího výnosu než mohly obě strany dosáhnout dřívější dohodou.

Zřejmou ilustraci poskytují manažérská jednání. Nejen, že jsou v jednáníh vázané finanční prostředky obou stran, ale taktéž, čím déle trvá dosažení dohody, tím déle obě strany dosahují nižší příjmy, než by získaly v případě přijetí nějaké rozumné shody. Obrazně řečeno, jak běží čas, tak se celkový koláč k rozdělení zmenšuje.

7 Oligopol v modeleh všeobecné rovnováhy

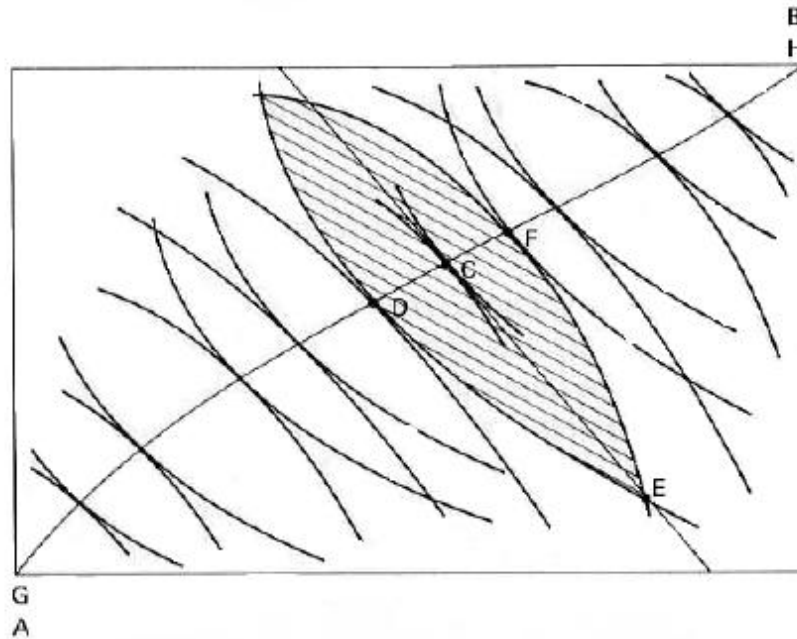
Na začátku kapitoly bylo poznamenané, že u oligopolu se většinou jedná o studium částečné rovnováhy. Vzhledem k tomu, že analytickým cílem ekonomické teorie je všeobecná rovnováha, je přirozené se pokusit zasadit oligopol do tohoto konceptu.

Mnoho prací sa soustředilo na tento cíl počínaje Negishi (1961) a nasledovně Farrell (1970), Jaskol-Gabszewicz a Vial (1972), Shitovitz (1973), Marshak a Selten (1974, 1977), Nikaido (1975), Laffont a Larogue (1976) a Roberts a Sonnenschein (1977). Výzkum můžeme rozdělit do dvou hlavních větví – kooperativní a nekooperativní. Ty jsou stručně popsane v následujících odstavcích.

7.1 Základy teoretického přístupu

Farrell (1970) a Shitowitz (1973) zasadili nekooperativní prvky do modelu všeobecné rovnováhy podle Edgewortha (1881). Farrellův model je odvozený od Debreua a Scarfa (1963), avšak sám sa omezuje na dva

statky a dva typy obchodníků. Následující graf zobrazuje Edgeworthův box diagram pro dva obchodníky A a B , jejichž počáteční situaci zachycuje bod E .



Obrázek 9.6: Edgeworthův box diagram

*Libovolný obchod, který je posune na křivku GH , je Pareto optimální, zatímco obchod, který je posune do šedé zóny, nenechá žádného obchodníka na tom hůře než byl v bodě E . Efektivní úvaha doporučí bod na křivce GH a individuální racionalita navrhuje bod v šedé oblasti. Tedy každý bod na křivce DF splňuje obě kritéria a tedy tento segment je základem (**core**, **jádro**) kooperativní hry dvou hráčů.*

Bod se nachází v tomto jádře tehdy, pokud neexistuje podmnožina hráčů, kteří mohou obchodovat mezi sebou způsobem, který dává každému přinejmenším takový užitek, jaký by dosáhl ve stanoveném bodě, přičemž jeden nebo více hráčů by dosáhlo vyššího užiteku.

Očividně o každém bodě mimo šedou zónu se rozhoduje A nebo B samostatně. Pro každého znamená tato volba spotřebu vlastního majetku (vstupu).

O každém bodě v šedé zóně, který ale není na DF , se rozhodují společně A i B , protože oba mohou dospět k obchodu na křivce DF , který přináší víc užitek oběma současně.

Závěry v Debreu a Scarf (1963) jsou takové, že pokud je ekonomika schopná růst reprodukcí, potom předešlý graf může stále reprezentovat hru tak, že jádro větších her bude stále obsažené v DF . Růst pomocí reprodukce znamená mít, řekněme k obchodníků identických k A jak majetkem tak i preferencemi a k identických k B . Diagram pro $2k$ obchodníků stále zobrazuje jen jednoho obchodníka z každého typu. Následně sa ukazuje, že jádro se zmenšuje s rostoucím k a v limitě pro $k \rightarrow \infty$ se zhoduje s rovnováhou v modelu dokonalé konkurence (například body jako je C , které jsou podporované cenovým mechanismem).

Farrellova metoda zahrnující do modelu nekooperativní hráče, předpokládá, že máme zafixovaný počet m hráčů A , zatímco množství hráčů B může růst. Následně dostaneme v limitě stejný výsledek jako Debreu a Scarf pro $m > 2$. V limitě, kdy se B blíží k nekonečnu, se jádro skládá jen z rovnováhy v dokonalé konkurenci. Shitovitz rovněž dospěl k závěru, že jádro a množina rovnováh dokonalé konkurence se shodují v případech, že se tam vyskytují dva nebo více větších hráčů.

Tyto výsledky, které v podstatě tvrdí, že na nekooperativních prvcích nezáleží, sa mohou zdát překvapující. Mohou vycházet z předpokladu nepřítomnosti organizačních nákladů na vytvoření koalice spolu se zájmem a schopností malých obchodníků slučovat se do jakkoli početných a velkých koalicí. Jedna věc je možná, buď je tradiční teorie oligopolu slepou uličkou, nebo se tyto modely nedostaly k jádru věci v případech oligopolů.

Kapitola 10

MODELY A METODY TEORIE HER V POLITICKÉ EKONOMII

V této kapitole je podán přehled různých modelů a postupů řešení v teorii her a nástin hlavních oblastí aplikace v politické ekonomii a vstupní pohled na jiné otevřené problémy.

1 Metody modelování

Snad nejdůležitějším aspektem teorie her aplikované do politické ekonomie je, že metodologie, která se stará o konstrukci matematických modelů pro studium konfliktních a kooperačních sil je jednoznačná, což v mnoha matematických zkoumáních politické ekonomie není pravda. Zvláště hra zadaná v *extenzivním tvaru* volá po úplném popisu procesu.

Úplně popsaná hra by se měla dát hrát bez problémů skupinou studentů. Pokud je hra dobře definovaná, ale složitá na hraní kvůli nerozumným požadavkům na čas a možnostem zpracování dat, pak to asi nebude příliš dobrý model ekonomického procesu.

Strategická hra má dva či více hráčů a každý z nich má částečnou kontrolu nad prostředím, kde výnos každého hráče nezáleží pouze na jeho jednání, ale také na jednání ostatních. Máme tři velmi různé tvary strategické hry, *extenzivní, normální a hru ve tvaru charakteristické funkce*. Každý tvar slouží k jiným účelům. Hra v extenzivním tvaru může být použita k určení hry v normálním tvaru a hra v normálním tvaru k definování hry ve tvaru charakteristické funkce, ale opačně to neplatí. Může existovat mnoho her v normálním tvaru, které vedou ke stejnému tvaru charakteristické funkce. Nejlepší bude uvažovat o těchto třech tvarech jako o třech nezávislých formulacích vytvořených pro různé účely, které však mohou být v případě potřeby navzájem spjaty.

Dříve než budeme mluvit o těchto tvarech musíme se zmínit o předpokladech jako jsou preference, užitek a výnos.

1.1 Preference, užitek a výnos

Von Neumann a Morgenstern (1944) předložili axiomy existence výherní funkce, definované jako lineární transformaci, založenou na posouzení rizika v množině výsledků, mezi kterými si jedinec může vybrat.

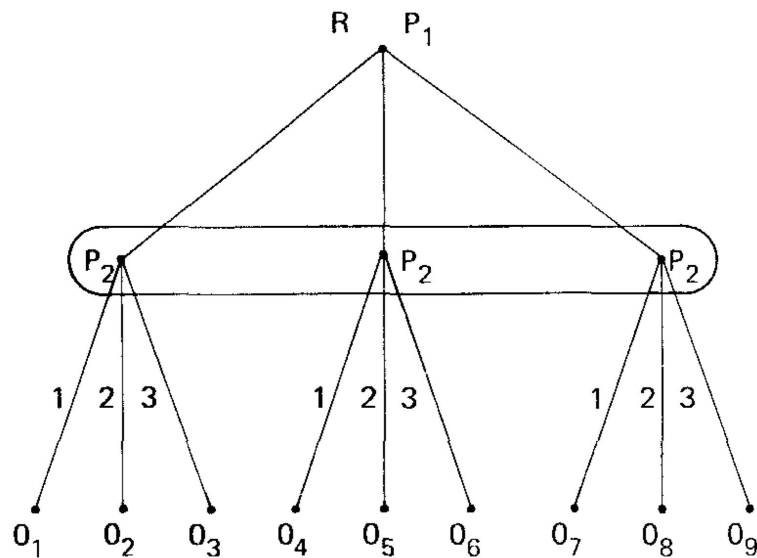
Toto měřítko užitku využili von Neumann a Morgenstern ve svém výpočtu použití smíšených strategií ve hrách v normálním tvaru. Naprosto nezávislý na této konstrukci a jejím použití byl předpoklad přenosného užitku, který umožnil zejména jednoduchý popis hry ve tvaru charakteristické funkce. V mnoha dřívějších kritikách aplikovatelnosti teorie her do ekonomie a dalších disciplín rostly pochybnosti týkající se přínosu teorie her do společenských věd z důvodu dvou předpokladů, které, jak se ukázalo, byly velmi nerealistické

1.2 Extenzivní forma

Literatura o oligopolech, aukcích, obchodování a mezinárodním obchodě, ať už verbální nebo matematická, je plná částečných nebo úplných popisů postupu. Nabídky, protinabídky, hrozby, sliby, požadavky atd., to jsou všechno rozhodující rysy v popisu procesů. Teorie her nabízí formální jazyk pro řešení popisu pravidel hry, který nám umožňuje s velkou přesností vymezit detaily procesu. Je to jazyk používaný k popisu hry v extenzivní formě.

První popisy her v extenzivní formě pocházely od von Neumanna a Morgensterna (1944) a pak Kuhna (1953). Oba pojednávají o konečných hrách, tzn. hrách, kde počet hráčů, tahů a možností volby je konečný. Jako příklad mohou sloužit šachy či poker. Mnoho situací, se kterými se setkáváme v ekonomice či politice lze jen zhruba modelovat jako konečné hry. Obyčejně mají spojitě strategické možnosti, spojitý čas a možnost nekonečného pokračování do budoucna.

Jednoduchý duopolní trh ilustruje Kuhnův herní strom jako konečnou aproximaci (produkce dává přednost diskretním před spojitými úrovněmi výstupu). Předpokládejme, že dvě firmy si musí každá vybrat mezi třemi úrovněmi výstupu. Jejich úrovně produkce určují tržní výsledek a payoffs obou firem. Obrázek 10.1 představuje popis extenzivní formy této hry.



Obrázek 10.1: Extenzivní tvar hry

Diagram ukazuje kořenový strom s počátečním uzlem R . Každý uzel reprezentuje stav, ve kterém by se firma mohla nacházet. Každý uzel resp. vrchol je označen P_i resp. O_j , podle toho, je-li to rozhodovací bod nebo výsledek hry. Každý uzel P_i je rozhodovacím místem hráče i . Ten si musí zvolit jednu z větví vedoucí z tohoto uzlu.

V tomto příkladě hráč jedna volí první a musí si vybrat jako svůj tah jednu ze tří větví vedoucí z uzlu P_1 . Po jeho tahu hra pokročí do jednoho ze tří uzlů P_2 . Druhý hráč provede svou volbu a hra dosáhne do jednoho z devíti konečných uzlů, označených O_j , které představují výsledky. Kterákoli cesta z počátečního do koncového uzlu stromu představuje možný průběh hry.

V mnoha situacích můžeme vyžadovat, aby hráči táhli současně. Obecně nás však nezajímá formalita, zda táhnou současně, ale zda táhnou bez informace o tom, co dělá ten druhý. Nezáleží na tom, kdo jde první, pokud ten druhý není informován. Tento nedostatek informace můžeme ilustrovat na stromě uzavřením uzlů, mezi kterými si hráč nemůže vybírat do uzavřeného obrysu, který říká, že tato místa volby náleží do stejné informační množiny. Na obrázku 10.1 jsou tři uzly druhého hráče uzavřeny v jedné množině, což znamená, že když je vyzván k tahu, neví, co udělal první hráč.

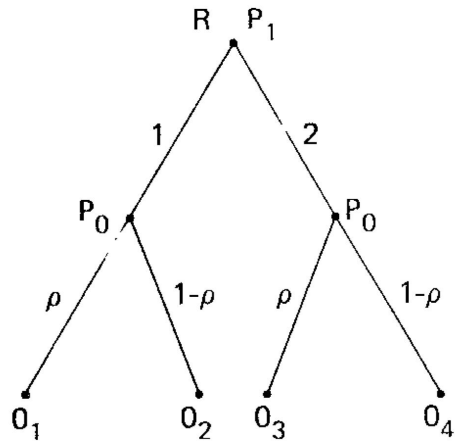
Náš popis můžeme rozšířit s ohledem na vnější nejistotu přidáním hráče *navíc* nazvaném *příroda*, označíme jej P_0 . Kdykoliv je tento hráč vyzván k tahu, vybírá si větev s danými pravděpodobnostmi. Na obrázku 1.2 je jednoduchý příklad. Jediný hráč P_1 si vybere a příroda pak rozhodne o výsledku.

Hře s jednobodovými informačními množinami se říká *hra s perfektní informací* (např. šachy). V kterémkoli bodě hry znají všichni hráči všechny detaily cesty do tohoto bodu. Neplatí to ale např. pro poker nebo obálkové aukce.

Strategie hráče je úplný plán akcí, který pro každou možnou eventualitu říká, co bude dělat. V termínech našeho popisu herního stromu to můžeme popsat takto:

Strategie je funkce, která přiřazuje informačním množinám každého hráče jednu z alternativ pocházejících z této množiny.

Zamyšlení nad velikostí herního stromu pro šachy a velikosti množiny strategií hráčů šachu rychle každého přesvědčí, že kromě her s několika málo tahy a možnostmi není herní strom v praxi příliš aplikovatelný.



Obrázek 10.2: Hra s přírodou

Teoretická definice strategie je zřetelně rozdílná od definice, kterou by použil stratég. Ačkoli není možné načrtnout herní strom komplexního tržního procesu, nabízená formální metoda by nás měla provázet při vyjádření podstaty zjednodušení a zkratk v našem popisu procesu.

1.3 Hry v normálním tvaru

Pokud je hra vyjádřena v normálním tvaru, detaily týkající se tahů a informace jsou potlačeny. Strategie jsou považovány za jednoduché prvky bez jakéhokoli pokusu vysvětlovat jejich vývoj. Normální forma hry n hráčů, jejíž extenzivní forma je konečný herní strom, je dána množinou n n -rozměrných matic. Příklad založený na hře z obrázku 10.1 nám umožní ilustrovat vztah těchto dvou forem.

V tabulce 10.1 znamenají čísla nalevo od matice strategie hráče 1 (které se shodují s jeho tahy, protože

nemá informace, kdy táhne). Čísla nad maticí jsou strategie hráče 2. Čísla v devíti buňkách jsou výplaty. Obecně můžeme O_j považovat za n -rozměrný vektor, vyjadřující výplaty každému hráči. Takže v tabulce 10.1 představuje $O_1 = (5, 4)$ výplatu 5 hráči 1 a výplatu 4 hráči 2, pokud oba zvolí strategii 1.

		Hráč 2		
		1	2	3
Hráč 1	1	O_1	O_2	O_3
	2	O_4	O_5	O_6
	3	O_7	O_8	O_9

Tabulka 10.1: Matice strategie

Předpokládejme, že informační množina hráče 2 na obrázku 10.1 se změnila na dvě informační množiny, tvrdící, že pokud hráč 1 zvolí strategii 1, hráč 2 o tom ví, ale pokud nezvolí tuto strategii, neví zda zvolil 2 nebo 3. Normální forma spojená s touto hrou je matice typu 3×9 . Tahy a výplaty jsou stejné jako předtím, ale strategie hráče 2 nyní závisí na jeho znalosti navíc. Ve skutečnosti má 9 strategií, které můžeme popsat následovně:

Pokud hráč 1 zvolí 1, pak hráč 2 zvolí i ,
 pokud hráč 1 zvolí 2 nebo 3, pak hráč 2 zvolí j .

Jakákoliv $i = 1, 2, 3$ a $j = 1, 2, 3$ mohou být vybrána k vytvoření strategie pro hráče 2 v této hře. Většina experimentů s hrami byla věnována hrám s maticí typu 2×2 . Obzvláště mnoho experimentů bylo provedeno s hrou **vězněovo dilema**, kde výplaty hráčů jsou znázorněny v tabulce 10.2 a kde $a_i > b_i > c_i > d_i$, $a_i + d_i < 2b_i$, pro $i = 1, 2$.

Rapoport a Guyer (1966) vypočítali, že eliminujeme-li symetrie, existuje 78 strategicky rozdílných reprezentací 2×2 maticových her. Všechny tyto hry byly použity k experimentálním účelům.

		Hráč 2	
		1	2
Hráč 1	1	b_1, b_2	d_1, a_2
	2	a_1, d_2	c_1, c_2

Tabulka 10.2: Obecná maticová hra typu 2×2

Jednoduché 2×2 nebo 3×3 maticové hry byly používány převážně k odhalovacím a průzkumným účelům, o čemž svědčí práce Luce a Raiffa (1957) a Schelinga (1960).

Většina duopolních a jiných ekonomických modelů směřuje k použití pevných strategických množin, kde se v nejjednodušších případech strategie a tahy shodují.

Vezměme jako příklad Cournotův duopolní model, kde každý hráč vybírá nezávisle na druhém úroveň své produkce, což může být jakékoli číslo v určitém intervalu. Takže pokud hráč 1 vybere množství x , kde $0 \leq x \leq A$, a hráč 2 vybere y , kde $0 \leq y \leq B$, pak výplaty hráčům 1 a 2 jsou dány dvěma funkcemi $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$.

1.4 Hry ve formě charakteristické funkce nebo v koaliční formě

Při prezentaci hry v normální formě je kladen důraz na sílu jedinců, tedy to, co mohou hráči získat, závisí na jejich strategiích a strategiích ostatních. Žádná zvláštní pozornost není věnována vysvětlení typu kooperace.

Když budeme studovat kartelové útvary, mezinárodní obchod burzu, nebo další skupiny sociologických jevů, můžeme zaměřit svou pozornost na možné zisky z koaličních seskupení, aniž bychom se zajímali o informační podmínky, detaily jako proč nebo jak jsou přístupné různé strategické možnosti, a detaily

nákladů koaliční formace (předpokládejme, že jsou zanedbatelné). Naše pozornost může být zaměřena na rozhodující otázky, kolik skupin musí profitovat ze spolupráce. Tato pozornost vede k formulaci hry ve formě charakteristické funkce nebo v koaliční formě.

Jako jednoduchou ukázkou můžeme použít hru v normální formě z tabulky 10.2. Dvě formy této hry v koaliční formě jsou tyto: první počítá s předpokladem porovnatelného užítku, zatímco ta druhá ne.

Nechť $v(S)$ je hodnota, kterou koalice hráčů S může získat dohromady, když budou hrát společně. *Charakteristickou funkci* označujeme v . Je to funkce zobrazující podmnožiny hráčů do množiny reálných čísel. Pro hru n hráčů tedy existuje $2^n - 1$ neprázdných koalicí.

Označení $v(\overline{ij})$ se používá k označení určité koalice sestávající z hráčů i a j . Charakteristická funkce vězňova dilematu z tabulky 10.2 je následující:

$$v(\emptyset) = 0, v(\overline{1}) = c_1, v(\overline{2}) = c_2, v(\overline{12}) = \max[(b_1 + b_2), (a_1 + d_2), (a_2 + d_1)].$$

Charakteristickou funkci můžeme považovat za *předběžné řešení* hry, jelikož způsob jejího nalezení nabízí dostatečné pochopení struktury hry. V tomto příkladě byly hodnoty vypočítány zjišťováním, kolik nejvíce může každá koalice získat za předpokladu, že ostatní hráči se snaží minimalizovat jejich zisk. Nejlepší věc, kterou může hráč 1 nebo 2 udělat sám, je volba strategie 2, a tím získat c_1 nebo c_2 . Kdežto dohromady mohou získat $b_1 + b_2$. V tomto případě je skutečně jednoduché sledovat opodstatněnost výpočtu $v(1)$ jako c_1 , protože hráč 2, když minimalizuje skóre hráče 1, zároveň maximalizuje své skóre. Toto však neplatí obecně, jak je vidět ve hře v tabulce 10.3.

Zde vypadá charakteristická funkce takto:

$$v(\emptyset) = 0, v(\overline{1}) = 0, v(\overline{2}) = 5, v(\overline{12}) = 15.$$

Toto vyjádření v nás vzbuzuje dojem, že hráč 2 je zvýhodněn. Paradox je v odvracení hrozeb. Výpočet charakteristické funkce pro hráče 1 nijak nezohledňuje, o kolik by hráč 2 přišel, kdyby zvolil strategii 2. Podrobnější diskusi problému hrozeb ve výpočtu charakteristické funkce se věnují Shapley a Shubik (1971-74).

		Hráč 2	
		1	2
Hráč 1	1	5, 5	0, -100
	2	10, 5	-1, -1000

Tabulka 10.3: Konkrétní maticová hra typu 2×2

Pokud neplatí předpoklad porovnatelného užitku a nejsou povoleny boční platby mění se možnost spolupráce, ale nezaniká. Můžeme definovat zobecněnou charakteristickou funkci neboli *charakterizující funkci* $V(S)$, která pro každou množinu hráčů S definuje množinu optimálních dosažitelných zisků (což kontrastuje s pouhým číslem $v(S)$).

Způsob definování zobecněné charakteristické funkce je naznačen na obrázku 10.3, který ukazuje příklad hry tří hráčů. Osy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ udávají zisky hráčů 1, 2, 3. Každé $V(S)$ považujeme za válec, který "odkopne" část Paretova optimálního povrchu hry n hráčů jako díru. Například koalice $\overline{12}$ může získat nejméně tolik, kolik je jim nabídnuto v každém bodě části Paretovy optimální množiny ABC vyznačené body EFC.

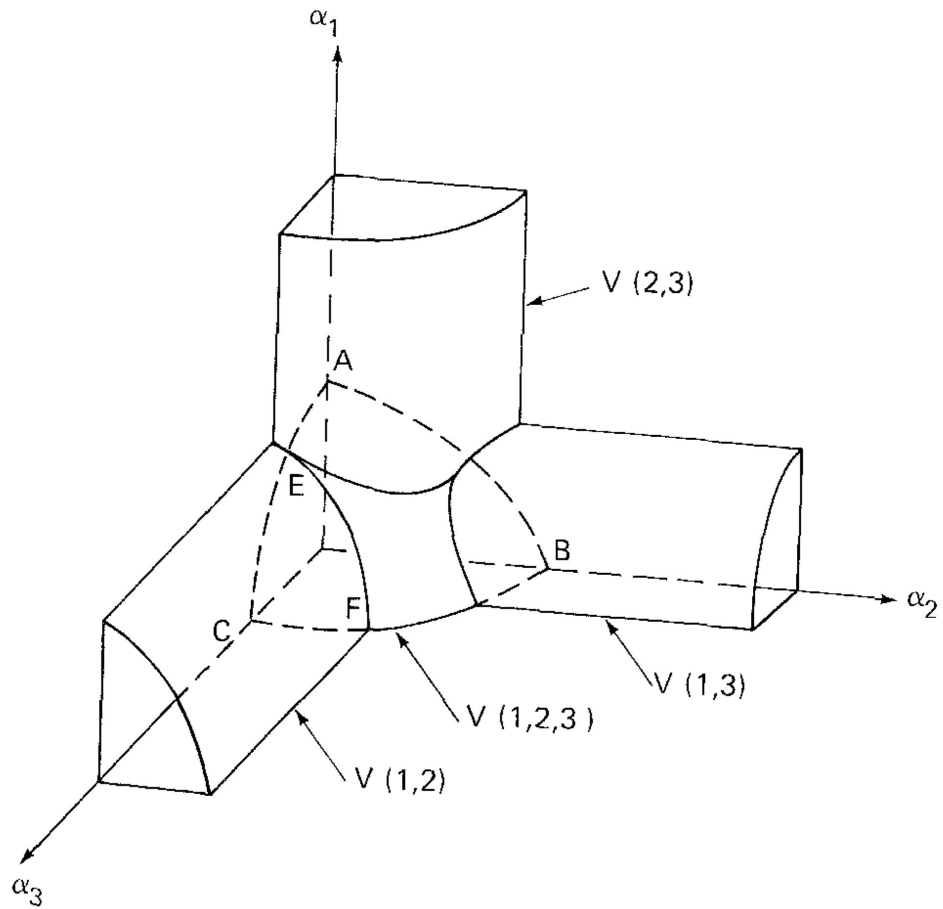
Začneme-li hrou v normální formě, jsou dva způsoby, jak definovat efektivitu koalice ve hře bez boční platby. Můžeme určit, buď kolik koalice může maximálně získat, anebo kolik musí nejméně získat. Jednoduchý příklad tohoto rozlišování, které zavedli Jentsch (1964) a Aumann a Peleg (1960), nabízí Shapley a Shubik (1971-74).

Docela přirozeným požadavkem na charakteristickou funkci s vedlejší platbou je superaditivita,

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T), \text{ kde } S \cap T = \emptyset,$$

a pro případ bez boční platby,

$$V(S \cup T) \supseteq V(S) \cap V(T).$$



Obrázek 10.3: Hra tří hráčů

Důvod k této podmínce je soustředěn v ekonomickém modelování a v modelování společenského chování. Předpokladem je, že obchod, směna a společenské ovlivňování se uskutečňují tehdy, když všechny strany mají užitek ze spolupráce, oproti volbě nespolupracovat.

Nemusí být vždycky tak přirozené, jak se to může zdát, pokud se jeden hráč pokusí získat více pomocí spolupráce, než má zajištěno z charakteristické funkce. Výdaje spojené s vytvářením koalic, skupin a institucí se zdají být někdy až kritické. Teorie her nám však neposkytuje techniky, jak uskutečnit takovéto dělení.

Navzdory k obtížím a omezením v definici charakteristické funkce, obsazení hry je přizpůsobeno odpovědím na několik otázek týkajících se síly jednotlivců, koalic, metod tržního dělení a typu sociální stability.

V posledních letech roste experimentování s koaličními hrami. Přehled můžeme najít v Shubikovi (1975).

1.5 Kontinua strategií, času, hráčů a zboží

První vývoj teorie her se soustředil na situace s pevným počtem hráčů, kteří mají možnost výběru z konečné množiny alternativ ve hrách s konečným ukončením. Hodně lidských událostí může být modelováno a aproximováno do těchto podmínek.

Především se ukázalo, že se vyžadují hry se spojitými strategiemi a se spojitým časem. Už Cournotův model duopolu nám poskytuje takovýto příklad. Za předpokladu spojitě a diferencovatelné produkční funkce, nám může být umožněno tvořit modely s větší matematickou stabilitou.

Souboje a problém obehřávání nám poskytují příklad her, kde je přirozené si myslet, že události se dějí ve spojitém čase. Sem patří např. také hry na čtverci. Aplikace těchto her do ekonomie je však relativně malá.

Možná nejdůležitější zjednodušení pro hry aplikované do ekonomie přichází v rozvoji her s kontinuem hráčů. Jeden z klíčových a důležitých předpokladů ve studii masových ekonomických trhů, politiky a společností je myšlenka, že ačkoliv má jednotlivec svobodu výběru, je jeho vliv na ekonomiku nebo společnost jako celek zanedbatelný.

Hodně paradoxních rysů v chápání vztahu mezi makro- a mikroekonomickým prostředím je v nesprávné skladbě, tím, že vyčleňujeme jednotlivce z masového chování.

První pokus k matematizaci vztahu mezi vlivem jednotlivce a počtem jednotlivců v obchodě byl vytvořen Cournotem (1838) a Edgeworthem (1881). Metoda replikace hráčů byla vyslovena právě jimi.

V souvislosti aplikování teorie her do ekonomie Shubik (1955,1959), Shapley (1954-60) a Debreu a Scarf (1963) formulovali a rozvinuli metodu replikace, Hildebrand (1974) a ostatní tento přístup zobecnili.

Aumann (1964) jako první pojmenoval množinu trhů v uzavřené ekonomice jako početnou množinu s jednotlivými trhy. Tímto poskytuje přímé matematické vyjádření vhodné ke studiu malých trhů v obchodním prostředí. Milnor a Shapley (1961) a Shapley (1962) předtím používali pojem početné množiny hráčů pro účely voleb.

Hodně aplikací teorie her, které jsou využívány v ekonomii popisují trh a výrobu s konečnou množinou komodit. Klasifikace a systematizace komodit je však libovolná. Pro některé účely mohou být považovány dvě komodity jako vzájemně dokonalé substituty, pro ostatní účely mohou být různé. Je jasné, že musíme předpokládat, že některé výsledky v ekonomické teorii budou závislé na relativním čísle zboží a trhů. Tento problém je důležitý především k pochopení monopolistické konkurence.

2 Řešení

2.1 Předběžná řešení

Matematická reprezentace hry je sama o sobě krokem k odpovězení na otázky, které jsou kladeny. Takovýto popis her v extenzivním, strategickém a kooperativním tvaru může být považováno za předběžné řešení. Například, charakteristická funkce nám určuje potencionální užitek ze spolupráce různých skupin. Tato informace sama o sobě může být důležitá pro pochopení, co je hranice jednání.

Přirozené předběžné řešení je *Pareto optimální povrch*. Uvažujme *výherní vektor* $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ pro hru n -hráčů. Pak \mathbf{x} je *přípustný*, pokud platí

$$\mathbf{x} \in V(N),$$

kde N je množina všech hráčů. Přípustný vektor \mathbf{x} je *Pareto optimální* za podmínky

$$\sum_{i \in S} x_i \notin D(S), \quad S \subseteq N,$$

kde $D(S)$ je vnitřek množiny $V(S)$.

Hospodárnost a společenská racionalita je obsažena v podmínce Paretovy optimality, avšak neobsahuje podmínky individuální racionality. Na Paretově optimálním povrchu mohou existovat body, kde jednotlivec získá méně, než kdyby jednal sám.

Jak mnoho vydrží jednotlivec sám bez spolupráce s ostatními, je věcí modelování politické, ekonomické a sociální reality. V ekonomických modelech obchodu je obvykle předpokládáno, že jednotlivec může provádět vlastnické právo nad svým počátečním vlastnictvím.

Jestliže přidáme podmínky individuální racionality k podmínkám Paretovy optimality, vymezíme tím sami *množinu rozdělení*, která je částí Paretovy optimální množiny. Přidaná podmínka je tvaru

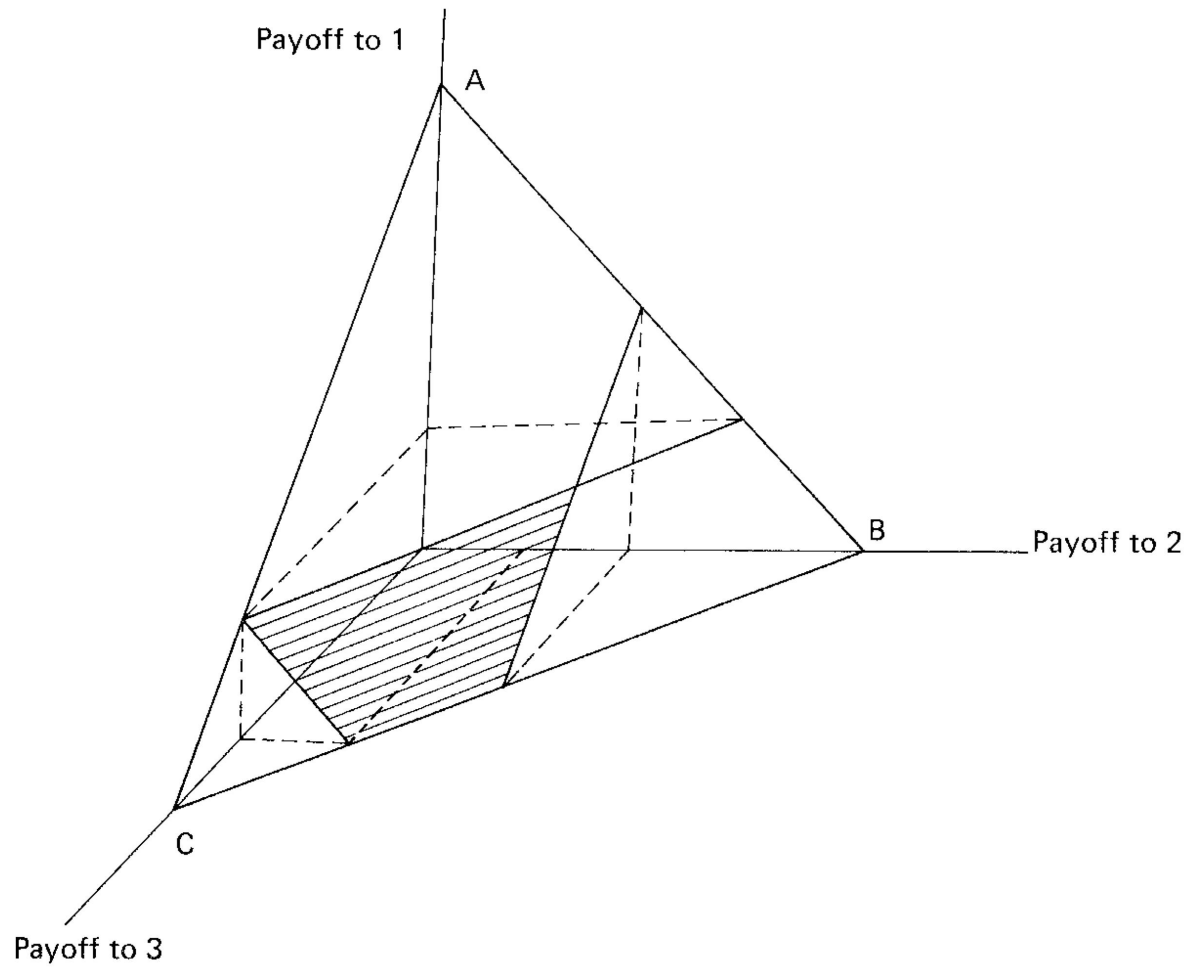
$$\mathbf{x} \notin D(\bar{i}) \quad \text{pro všechna } i \in N,$$

takže každý hráč si zajistí alespoň stejně, jako kdyby hrál sám.

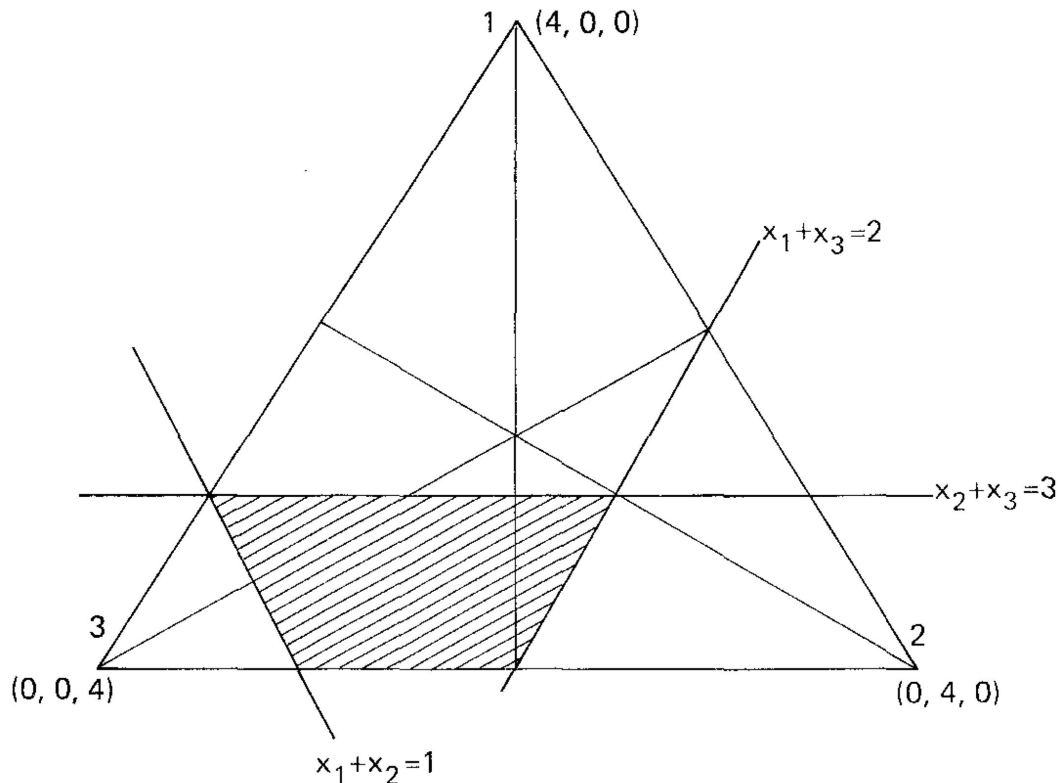
Můžeme definovat *vektor rozdělení* \mathbf{x} jako vektor n čísel (x_1, x_2, \dots, x_n) , kde každé x_i je výhra (výplata) hráče i . Přitom pro hry s postranní platbou platí $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$.

Pro hry s postranní platbou je množina rozdělení dána simplexem, který nám poskytuje vhodnou geometrickou reprezentaci. Obrázek 10.4 nám ukazuje graf podobně jako na obrázku 10.3 hru tří hráčů s postranní platbou danou charakteristickou funkcí:

$$v(\emptyset) = v(\bar{1}) = v(\bar{2}) = v(\bar{3}) = 0, v(\bar{12}) = 1, v(\bar{13}) = 2, v(\bar{23}) = 3, v(\bar{123}) = 4, .$$



Obrázek 10.4: Hra tří hráčů



Obrázek 10.5: Hra tří hráčů - průmět

ABC na obrázku 10.3 a 10.4 označuje příslušnou množinu rozdělení her pro tři osoby s a bez boční platby. Obrázek 10.5 ukazuje hru s boční platbou určenou simplexem, který je vyjmutý ze třídimenzionálního vyjádření z obrázku 10.4. Přímký $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_3 = 2$ a $x_2 + x_3 = 3$ jsou vyznačeny na simplexu. Takové

rozdělení (x_1, x_2, x_3) , které může být zablokováno koalicí \overline{ij} splňuje podmínky:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0,$$

a

$$x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 4.$$

Jeden druh předběžného řešení byl navrhován Milnorem (1952). Výherní vektor definujeme jako *přípustný*, jestliže splňuje

$$x_i \leq \max_{i \in S} [v(S) - v(S - \{i\})] \quad \text{pro všechna } i \in N.$$

Tato podmínka uvádí, že ne každý samostatný hráč by vždycky získal více tím, když se přidá do nějaké koalice. Většina představ o řešení zahrnuje takové množiny rozdělení, které tuto podmínku splňují.

Námítka

Myšlenka předběžného řešení je spojení mezi modelováním a analýzou; tzn. že určité podmínky jsou přenášeny na model ještě před samotnou analýzou. Konkrétně to může snižovat nebezpečí ve slepém přejímání charakteristické funkce a představy odvození. Shapley a Shubik (1971-1974) předpokládali, že výraz *c-hra* zůstane pro ty hry, jejichž charakteristická funkce dostatečně odráží strukturu chování v dané situaci.

2.2 Řešení při spolupráci

Základní dělení bylo vytvořeno při zkoumání představ o statickém řešení. Je to dělení mezi řešením při spolupráci a bez spolupráce. Pro řešení při spolupráci se předpokládá Paretova optimalita. To však neplatí pro řešení bez spolupráce.

Když budeme uvažovat dynamizaci řešení, toto jednoduché dělení nevyhovuje. K tomuto bodu se vrátíme v bodě 2.4. V teorii při řešení spolupráce pro hry s postranní platbou je hlavně použita základní charakteristická funkce, pro hry bez postranní platby je to rozšířená charakteristická funkce.

Další popis a definice se bude týkat především her s postranní platbou, ale budou zde taky popsány důležité rozdíly mezi řešeními obou typů her. Osm představ o řešení představují:

1. **jádro (core),**
2. **hodnota,**
3. **von Neumanova-Morgensternova rovnovážná množina,**
4. **obchodní množina,**
5. **kernel,**
6. **nucleolus,**
7. **e-jádro,**
8. **vnitřní jádro.**

Jádro

Původně bylo definováno Gilliesem (1959) a navrhováno jako nezávislé řešení Shapleyem (1953). V podstatě se skládá z množiny rozdělení, kdy hráč neopouští koalici, pokud zlepšuje výhru všem jejím členům. Formálně se *jádro* (core) skládá ze všech rozdělení \mathbf{x} takových, že

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad S \subseteq N.$$

Je jednoduché ukázat, že mnoho her nemá jádro. Na obrázcích 10.3 a 10.4 jsou jádra šedě vystínována ve vstupních množinách her 3 hráčů s a bez boční platby.

Určující vztah mezi teorií her a ekonomikou přichází v definici určité třídy her zvané *tržní hry* původně zkoumané Shapleym a Shubikem v roce 1953 a v připomenutí důležitých vztahů mezi cenovým systémem a existencí jader ve hře a ve všech jejích podhrách. Tržní hra n hráčů má tu vlastnost, že každá z jejích 2^n podher, které mohou být vytvořeny na všech podmnožinách hráčů, má jádro.

Třída her patřících spíše do analýzy volebních (hlasovacích) problémů známá jako *jednoduché hry* má vlastnost, že hodnoty charakteristické funkce jsou pouze 0 a 1 nebo *prohra* a *výhra*. Většina her této skupiny nemá jádro.

Jednoduché hry mohou být přímo definovány pomocí čtyř základních předpokladů:

1. Každá koalice buď vyhraje nebo prohraje.
2. Prázdná množina prohrává.
3. Množina všech hráčů vyhrává.
4. Žádná množina, která prohrává, neobsahuje podmnožinu, která vyhrává.

Další rozšiřující předpoklady mohou být:

5. Doplněk vyhrávající množiny prohrává.
6. Doplněk prohrávající množiny vyhrává.

Poslední dva předpoklady zaručují superaditivitu a to, že hra má konstantní součet. Hra mající všech šest výše uvedených vlastností se nazývá *rozhodující jednoduchá hra*.

Intuitivně se ukazuje, že když přecházíme od strukturovaných ekonomických trhů k trhům s externalitami a k politice distribuce zdrojů, šance na podmínky existence systému cen a jádra se snižují.

Vyvážené hry

Z vlastnosti superaditivity charakteristické funkce víme, že pro každý systém $\{S_j\}$ koalic, které tvoří rozklad S ,

$$v(S_1) + \cdots + v(S_m) \leq v(S).$$

V tržní hře uvažujme možnost, že S je rozdělena do skupin, které se mohou překrývat, ale pro které každá množina S_j používá část f_j zdrojů (nebo času) každé z jejích členů. Když je možné najít f_j takové, že každý hráč je použit a že jeho část vážených součtů je 1 a

$$f_1 v(S_1) + \cdots + f_m v(S_m) \leq v(S).$$

pak řekneme, že S_j je *vyvážený systém podmnožin*. Hra ve tvaru charakteristické funkce je *zcela vyvážená*, když pro každé S je nutné splnit podmínky vyváženosti. Uvažujme charakteristickou funkci hry 3 hráčů z 10.4 Koalice 2 hráčů vytváří vyvážený systém podmnožin, každá s vahou $\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2}v(\overline{12}) + \frac{1}{2}v(\overline{23}) + \frac{1}{2}v(\overline{13}) < v(\overline{123}).$$

Shapley a Shubik (1969b) ukázali, že každá tržní hra je zcela vyvážená, a pro hry s boční platbou, vice versa. Shapley (1973) a Billera a Bixby (1973)

Intuitivní pojetí jádra jako možného řešení problémů politické ekonomie je, že pokud existuje, pak existují způsoby přičítání bohatství, které nespĺňují pouze individuální a celkovou racionalitu, ale i racionalitu všech podskupin.

Hodnota

Jádro vyvolává požadavky na skupiny, ale nenabízí žádný pěkný způsob pro vyřešení těchto požadavků. Zcela odlišný přístup k řešení je přes hodnotu (*Shapleyho hodnotu*). Zde je přímo axiomatická charakteristika spravedlivého rozdělování. Paradoxně tyto metody neuspějí při výrobě některých tržních schémat, ale

také ukazují blízké vztahy mezi úvahami o spravedlivém rozdělování a mocí. Poprvé, kde jsou tyto úvahy pohromadě, je v definici bodu status quo, který je potřebný pro určení počátečních podmínek, za kterých funguje spravedlivé rozdělování.

Používáme čtyři axiomy:

1. účinnost (efficiency)
2. balvan (dummy player) – nic nedostává
3. symetrie
4. aditivita

Shapley (1953a) byl schopný určit jednu hodnotu hry s boční platbou. První čtyři axiomy jsou zřejmé, čtvrtý znamená, že když uvažujeme dvě strategicky nezávislé hry hrané stejnými hráči, hodnota daná součtem hodnot her každé zvlášť je stejná jako uvažováním hry jako jedné. Podle těchto axiomů je výplata i -tého hráče hodnotového řešení dána:

$$\phi_i = \sum_{i \in S \subseteq N} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} [v(S) - v(S - \{i\})].$$

Pro tuto hodnotu existuje jednoduchá ekonomická interpretace. Předpokládáme, že každý jednotlivec vstupuje do každé možné koalice každým způsobem náhodně, a pak je určen předpokládanou hodnotou zisku, který přinese všem.

Banzhaf (1965) navrhnul odlišné vážení koaliční formace, a Shapley (1977) a Dubey a Shapley (1978) rozvinuli a matematicky určili Banzhafovu hodnotu.

Nash (1953) rozvinul schéma obchodu dvou hráčů pro hry bez postranní platby použitím axiomu symetrie, Paretovy optimality, měřitelnost užitečnosti a konstrukci evaluate threats, která byla zobecněna na hry n hráčů, s nějakými zbývajícími obtížemi, podle Harsanyiho (1959). Shapley (1964) navrhnul hodnotové řešení hry n hráčů bez postranní platby, které se v něčem od Harsanyiho liší.

Základní obtíže, které bylo nutno překonat v rámci rozvoje pojmu hodnota, jsou postup, jak zacházet s proměnnými hrozbami k upevnění bodu status quo a jak vystačit s hrami bez boční platby.

Owen (1972) navrhnul přirozené rozšíření Shapleyho modelu, uvažuje s možností, že pravděpodobnost vstupu hráčů do koalic může být předpojatá. Auman a Shapley (1974) a Dubey (1975) uvažovali hodnotu a obecnou hodnotu her s kontinuem hráčů.

Stabilní množinové řešení

Von Neumann a Morgenstern (1944) nabídli poměrně sofistikovaný koncept řešení, které podle mého odhadu nepřináší tolik, jak se původně doufalo. Základní myšlenka pro řešení stabilních množin je, že soubor rozdělení obsahujících stabilní množinu musí mít *vlastnosti vnitřní a vnější stability*. Pro předvedení tohoto je nejprve nutné definovat *dominování* a *efektivní množinu*.

Strategie \mathbf{x} dominuje strategii \mathbf{y} právě tehdy, když existuje taková koalice S , že

$$x_i > y_i \text{ pro všechna } i \in S$$

a

$$\sum_{i \in S} x_i \leq v(S).$$

Tato poslední podmínka udává, že koalice S je efektivní množina pro strategii \mathbf{x} ; tj. může získat, co ostatní její členové získají v \mathbf{x} . Množina rozdělení (strategií) je (i) *vnitřně stabilní*, když žádný její prvek není dominován jiným prvkem množiny; (ii) *navenek stabilní*, když všechna rozdělení mimo množinu jsou vždy dominována nějakým prvkem množiny; a (iii) *stabilní množinové řešení*, když platí podmínky (i) i (ii).

Rozsáhlé prozkoumání stabilních množinových řešení ukázali Shapley a Shubik (1971-74). Původně se von Neumann domníval, že všechny hry bez boční platby mají stabilní množinové řešení. Lucas (1969) dokázal, že to neplatí, a ukázal protipříklad hry 10 hráčů. Shapley a Shubik (1969b) ukázali, že Lucasův protipříklad lze považovat za tržní hru, a tedy mohou existovat ekonomiky bez stabilního množinového řešení.

Obchodní množina

Pojem obchodní množiny je řešení konceptu původně podle Aumanna a Maschlera (1964). Obchodní množina byla definována několika nepatrně odlišnými způsoby, Peleg (1967). Její vznik byl inspirován pozorováním hráčů v pokusné obchodní hře.

Obchodní bodhry (N, v) má tu vlastnost, že pro každý pár $i, j \in N$ s každou obranou i proti j může přijít protiobrana j proti i .

Obrana se skládá z koalice S obsahující i , ale ne j dohromady s rozdělením, pro které je S efektivní množina, která je preferována daným rozdělením ze všech prvků S .

Protiobrana se skládá z jiné koalice T obsahující j a ne i dohromady s rozdělením, pro které je T efektivní množina, že je (lehce) preferována před původním rozdělením ze všech prvků $T - S$.

Je-li x původní rozdělení, (S, y) obrana a (T, z) protiobrana, pak

$$\sum_{k \in S} y_k \leq v(S) \text{ a } y_k > x_k \text{ pro všechna } k \in S,$$

a

$$\sum_{k \in T} z_k \leq v(T) \text{ a } z_k \geq y_k \text{ pro všechna } k \in (T \cap S) \text{ a } z_k \geq y_k \text{ pro všechna } k \in T - S.$$

Obchodní množina je množina všech obchodních bodů.

Ačkoli byla některá použití obchodní množiny vymyšlena v experimentálních studiích, menší aplikace obchodní množiny použijeme i v ekonomii. Výpočetní náročnost her větších než 3 nebo 4 hráči dělá toto použití poněkud neatraktivním.

Kernel

Davis a Maschler (1965) navrhli řešení, které je obsaženo v obchodní množině. Pro definici kernelu je vhodné nejprve definovat pojmy excés a surplus.

Excesem koalice S v rozdělení \mathbf{x} rozumíme:

$$e(S, \mathbf{x}) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i,$$

tj. je to množství, které může koalice získat navíc, než kdyby každý z jejích členů jednal sám za sebe tj. množství, o které hodnota koalice překračuje žádanou výplatu.

Surplus hráči i proti jinému hráči j s ohledem na dané rozdělení je největší exces od všech koalicí obsahujících i a neobsahujících j . Surplus hlavně měří potenciální obchodní nátlak i proti j .

Kernelové řešení se skládá ze všech rozdělení \mathbf{x} takových, že pro jakékoliv dva hráče i a j platí

$$\max\{e(S, x) : i \in S, j \notin S\} = \max\{e(T, x) : j \in T, i \notin T\}.$$

To vyvolává myšlenku symetrie nebo rovnosti obchodního nátlaku.

Nucleolus - jádérko

Jádérko je pojem řešení vytvořený Schmeidlerem (1969), a je to právě jediný výsledek v kernelu hry s boční platbou. Měli bychom poznamenat, že neexistuje úplně uspokojující definice jádérka pro hry bez boční platby.

Jádérko je rozdělení, pro které je maximální exces nejmenší. Intuitivně je to pak bod minimalizující neuspokojení. Vypadá to tak, že by měla existovat přirozená aplikace v určení zdanění a dotací, ačkoli existují aplikace jádérka v operačním výzkumu, nedostatek odpovídajících jáderek her bez boční platby má omezené aplikace. Použití obchodních množin, kernelu a jádérka v kontextu ekonomických modelů je relativně malé.

ε -jádro

Jádru hry může být *tlusté* nebo nemusí existovat. Můžeme pak uvažovat o způsobu, jak jednotně danit a dotovat hráče, tedy mohou být jádra zvětšována nebo zmenšována. Zde jsou navrženy dva způsoby. *Silné*

ε -jádrose skládá z množiny Pareto optimálních výsledků \mathbf{x} takových, že

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - \varepsilon \text{ pro všechna } S \subseteq N.$$

Slabé ε -jádrose skládá z množiny Pareto optimálních výsledků \mathbf{x} takových, že

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) - s\varepsilon \text{ pro všechna } S \subseteq N,$$

kde s je počet hráčů v koalici S . Můžeme pak ε považovat za celkové náklady nebo náklady na osobu při formulaci koalic.

Zvýšením velikosti ε můžeme případně vytvořit jádro pro hru s boční platbou bez jádra. Můžeme definovat *nejmenší jádro* neboli *blízké jádro* jako nejmenší silné ε -jádro. Je zřejmé, že je to podobné, ale ne stejné, jako myšlenka jádérka.

Vnitřní jádro

Ačkoli mnoho výsledků, které platí pro hry s boční platbou, má svou analogii u her bez boční platby, tento pojem takový není. Mezi důležitými problémy v teorii her a jejich aplikacích na politickou ekonomii je charakterizace rozdílů. Např. obrázky 10.3 a 10.4 by měly postačit k ukázce, ačkoli jádro hry s boční platbou vždy zůstane jednoduše propojeno, toto neplatí pro hru bez boční platby a protipříkladem může být hra se 3 hráči.

Rozdíl mezi hrami s a bez boční platby nás vede k definici *vnitřního jádra* hry. Uvažujme jádro hry bez boční platby z obrázku 10.3. Předpokládejme, že jsme v každém bodě jádra sestrojili tečnou nadrovinu a použili směrový kosinus této nadroviny k porovnání užítku hráčů v této hře s boční platbou.

Používáním teorie porovnání užitečnosti můžeme popsat proveditelnost všech koalic pomocí nadrovin. Přirozená otázka je, zda bod doteku, který je bodem jádra hry bez boční platby, je bodem jádra vytvořený u hry s boční platbou. Odpověď je - že to není to nutné.

Definujeme *vnitřní jádro hry bez boční platby*.

Konstrukce tohoto jádra je podstatná. Je zajímavé poznamenat, že vnitřní jádro obsahuje jádro hry bez boční platby, které je definováno ordinálně. V případě tržní hry vnitřní jádro není úplné; odtud je jádro a vnitřní jádro se blíže stejné limitě - konkurenční rovnováze.

2.3 Řešení hry s nekooperujícími hráči

Pro řešení hry s kooperujícími hráči je charakteristická funkční forma; pro řešení hry s nekooperujícími hráči je předepsána hře strategická forma. Mnoho základních zájmů v herních modelech v oligopolii a jiných aspektech ekonomie se soustřeďuje na hry, které jsou mnohokrát hrány. Řešení těchto her je diskutováno v části 2.4. To je přesně rozdíl mezi řešeními s kooperujícími a nekooperujícími hráči.

Hry dvou hráčů s konstantním součtem

Hry dvou hráčů s nulovým součtem a jejich strategicky ekvivalentní hry s konstantním součtem jsou hry *čisté opozice*. Cíle hráčů jsou diametrálně odlišné.

Obě hry dvou hráčů s nulovým součtem a věta o minimaxu (Von Neumann a Morgenstern (1944)) jsou dobře známy a nebudeme je zde znovu uvádět. Teorie hry dvou hráčů s konstantním součtem je velmi důležitá při studiu vojenských taktických problémů, ale má velmi omezenou hodnotu pro politickou ekonomii. V politické ekonomii se setkáváme s podmínkou čisté opozice.

Bod rovnováhy - nespolupracující hráči

Mějme hru n hráčů ve strategickém tvaru, kde každý hráč i má množinu strategií S_i , $i = 1, \dots, n$.

Nechť $P_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$ je výplatní funkce hráče i . Pak *rovnovážný bod* je vektor strategií $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ takový, že platí

$$P_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*) = \max\{P_i(s_1^*, s_2^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*) : s_i \in S_i\}.$$

Hlavní koncepci *bodu rovnováhy pro nekooperující hráče* a jeho existenci pro maticové hry popsal Nash (1944), ačkoliv základní myšlenku a užití v ekonomii už popsal Cournot (1838).

Je možné ukázat existenci bodu rovnováhy pro nespolutracující hráče s nekonečně mnoha hráči (Dubey, Shapley). To je důležité v souvislosti s koncepcí soutěžících trhů.

Při hledání řešení bodu rovnováhy pro nespolutracující hráče je zde problém v existenci mnohonásobnosti rovnováhy. Mimoto je relativně snadné vytvořit jednoduché modely, kde mnoho rovnovážných bodů není rozumných. Maticové hry typu 2×2 (Tulák a žebrák) jsou dány v tabulce 10.4.

	1	2
1	5,5	-1,10
2	10,-1	0,0

	1	2
1	10,1	-20,-20
2	-20,-20	1,10

	1	2
1	1,6	10,6
2	1,3	10,3

Tabulka 10.4: Matice strategie - hry dvou hráčů

V první hře existuje jediný bod rovnováhy a to $(0, 0)$. V druhé hře máme dva čisté body rovnováhy, jeden zvýhodňuje prvního, druhý druhého hráče. Máme špatný smíšený bod rovnováhy. Ve třetí hře jsou všechny její výsledky rovnovážné body.

Když pracujeme se hrou ve strategické formě, nedostatečné statické ovlivňování rovnovážného bodu se stane evidentním. Nepochybně je zde kruhová stabilita pro rovnováhu: *Jestliže A věděl, co B dělal, pak může dělat to a to a naopak!*

Bohužel, neexistuje návod na to, jak a proč hráči vytvářejí pravděpodobnosti (očekávání), aby dosáhli rovnováhy. Při hledání řešení bodu rovnováhy pro nespolutracující hráče se neukazuje komunikace na ovládnutí; bod rovnováhy není často jediný. Tento komentář neplatí pouze na hry n nespolutracujících hráčů, ale také na ekonomické trhy vedoucí na hry s nekooperujícími hráči.

2.4 Jiná řešení

Mnoho ekonomických analýz v jedné formě nebo jiné patrně závisí na koncepcích řešení, která se implicitně nebo explicitně rovnají rovnovážným stavům nespolupracujících hráčů, kdy hráči plně neznají všechny skutečnosti, které vedou k řešení.

Konkrétně, náš problém je více v modelování a porozumění chování v matematické části. Definice rovnovážného bodu v matematice je zcela neměnná. Nespokojenost s tímto donutila mnoho herních teoretiků, aby vzali v úvahu extenzivní formu hry jakožto klíč k pochopení procesů

Můžeme ukázat, že výsledek hry s neurčitou dobou trvání může být převeden na rovnováhu, když použijeme stejné strategie. Ukážeme to na tabulce 10.5. Výsledek (5,5) a (0,0) a (-11,-11) může být vynucen jako rovnováha, je těžké věřit, že vše je stejně možné.

	1	2	3
1	5,5	-1,8	-30,-12
2	8,-1	0,0	-30,-12
3	-12,-30	-12,-30	-11,-11

Tabulka 10.5: Matice strategie - hra tří hráčů

Selten (1965, 1975) zavedl a zdokonalil pojem úplně rovnovážného bodu pro hry v extenzivním tvaru. V původní definici *dokonale rovnovážný bod* znamená, že hráči dosáhnou rovnováhy v každé podhře. Příklad v tabulce nám pomůže ilustrovat dokonale rovnovážný bod a rovnovážný bod, který není dokonale rovnovážný. Dvojice strategií jsou pak: Začínám hrát 1, jestliže druhý hraje 1, pak hraji 2, jinak hraji 3. Hraji 2 v obou případech bez ohledu na to, co hraje druhý.

Obě strategie dávají rovnováhu; první není úplná, protože poslední tah je stejný, i když jiný hráč nemá na začátku úspěch s 1, není zde touha hrát 3. Naopak druhá rovnováha je úplná.

V původní definici podhry zbývají pro dokonale rovnovážný bod problémy s částí stromu hry, kde se nedosáhne rovnováhy. Například, při hře 3 osob ilustroval Selten toto: Každý hráč má dvě volby (L nebo R), tudíž čistá nebo smíšená strategie pro i může být charakterizována pravděpodobností p_i pro výběr R . Dva typy rovnováhy pak jsou:

$$\begin{aligned} \text{Typ 1: } & p_1 = 1, \quad p_2 = 1, \quad 0 \leq p_3 \leq \frac{1}{4}, \\ \text{Typ 2: } & p_1 = 0, \quad \frac{1}{3} \leq p_2 \leq 1, \quad p = 1. \end{aligned}$$

Rovnovážný bod typu 2 hráč 2 nedocílí, proto jeho očekávaná výplata je nezávislá na jeho volbě. Uvažujme rovnovážný bod $(0, 1, 1)$, který je typu 2. Jestliže náhodou hráč 2 dosáhl pro něj rozumnou hru, domnívá se, že hráč 3 bude hrát 1, protože mu dává 4, jestliže převede na 0? Čistý typ 2 je nerozumný; hráčův výběr může být podmíněn informacemi. Selten vyvinul model náhodné hry, kde je nějaká malá pravděpodobnost, že hráč udělá chybu.

Obr. 2.5

Harsanyi (1975) se podílel na možnosti výběru preferující rovnovážný bod nespolutracujících hráčů mimo myriád, které mohou existovat. Zajímal se hlavně o uplatnění v politické ekonomii s přesyceným bodem rovnováhy. Dubey a Shubik (1977) ukázali, že pro některé hry reprezentující strom konečné hry, ve které hráč využije informace, tak v nové hře ovládne čistou strategií rovnovážné body staré hry s větší pravděpodobností. To znamená, že když bod rovnováhy produkčního (obchodního) modelu není interpretován jako jednotlivý současně probíhající přesun hry, pak je to více bod rovnováhy nespolutracujících hráčů než spolutracujících hráčů.

Uvažujme 2 hry se stejným stromem, rozdíl je pouze ve struktuře informací. Jedna hra může být nazvána hra s větším množstvím informací než mají ostatní, jestliže se všechny informace kryjí s některými informacemi jiných hráčů nebo částí informací.

Výsledek především platí pro hry s náhodným pohybem, ale pouze když informace týkající se těchto pohybů, je stejná pro všechny hry. Mnoho ekonomických modelů může být interpretováno jako hry, které se více či méně opakují v čase nebo jsou neomezené v čase. Nejracionálnější přístup, kterým to může být charakterizováno zpětnou indukcí pro konečné hry s pružným úplným bodem rovnováhy, může být v kontrastu

s typem očekávaného plánu, který posune dopředu v čase makroekonomický pravděpodobnostní model. Sobel (1971, 1973) se věnoval spojení obou typů rovnovah.

Kdy bude pravděpodobnost krátkozrakého chování ekvivalentní jiným? Tomuto problému se věnoval Friedman (1977). Teorie her odpovídá na mnoho otázek týkajících se dynamiky, informací a komunikace, ale poskytuje málo cest k formulování mnoha kritických neřešitelných problémů.

Pod pojmem *jiná řešení* je skryto řešení spolupracujících a nespolečupracujících hráčů, které nerozdělujeme, hlavně protože jsme prostorově limitováni a že je nedostatek ekonomických aplikací. Tato řešení obsahují konkurenční rovnováhu hry (Baudier (1973)), Banzhaf (1965) a jiné hodnoty; a výplatní hra transformace, tak jako maximin rozdíl u hry 2 hráčů s nekonstantním součtem a je v rozporu s průměrem v zaručené hře n hráčů a ve společenských hrách (Shubik (1965, 1971)).

3 Aplikace

Tato zpráva nabízí něco jako krátký a možný kompaktní náhled a příručku v rozvoji aplikací teorie her v ekonomii. To neznamená, že je úplná nebo samostatná. Teorie oligopolů je popsána v kapitole 11 (Friedman).

3.1 Oligopolní trh

Hlavní aplikace v teorii her je ve studiu různých aspektů oligopolní soutěže a dohod a studium nepředvídatelnosti ceny v uzavřeném ekonomickém systému. Diskuze je v subkapitole 3.2.

Rozumná odvětví pro studium oligopolního trhu jsou:

1. duopoly,
2. nekooperující a quasi-kooperující oligopoly,
3. bilaterální monopoly a smlouvání,

4. experimentální hraní,
5. aukce a nabídky.

3.2 Duopoly

Modely duopolů jsou okouzující pro matematicky připravené ekonomy. Existuje mnoho literatury k samostatnému studiu. Výborná je od Chamberlina (1950). První, dobře známý je model, který může identifikovat matematický popis duopolní soutěže - tzv. Cournotův model (1938). Je to hra ve strategické formě, kde soutěžící prodávají stejný produkt. Nutný předpoklad: obě firmy považují při svém rozhodování o výši výstupu výstup druhé firmy za konstantní a rozhodují o výši svého výstupu současně. Řešení je pomocí rovnováhy nespolupracujících hráčů. Příklad ilustruje Cournotův problém. q_i je produkce i -té firmy $i = 1, 2$; $C_i(q_i)$ je celková cena produkce i . Mějme cenu danou vztahem $p = D(q_1 + q_2)$, kde každá firma maximalizuje $P_i = q_i D(q_1 + q_2) - C_i(q_i)$. Dvojice produkčních strategií nám určí nespolupracující rovnovážný bod nespolupracujících hráčů, jestliže pro dané \bar{q}_j ,

$$\max_{q_i} q_i D(q_i + \bar{q}_j) - C_i(q_i) \implies q_i = \bar{q}_i.$$

Bertrand (1883) kritizoval Cournota přímo kvůli předchozímu výběru produkce jakožto strategické proměnné. Naznačil, že cena je více variabilní. Edgeworthův model duopolů představil zvyšování cen a omezování kapacity; Hotelling (1929) pracoval s modelem nespolupracujících hráčů, představuje přenos cen jako formu diferencovaného produktu. Chamberlinův model (1950) představuje diferencovaný produkt v daleko větší obecnosti.

Mnoho autorů se zabývalo a později analyzovalo různé varianty duopolních modelů. Byli to např. Coase 1935, Harrold 1934, Kuhn 1937 atd. Tyto varianty a mnoho dalších verzí může být explicitně považováno za teoretické modely her, protože se autoři podrobně nezajímají o specifika strategií dvou firem. Ve skutečnosti však matematická verze duopolního modelu vyžaduje přesnost a podrobnost, tak jak je to ukázáno ve Waldově rovnovážné analýze.

Beckmann 1965, Levitan a Shubik 1971, Shapley a Shubik 1969, Shubik 1973 prezentovali sérii teoretických modelů her, ve kterých ukázali výsledky výzkumů zavádění cen, změny poptávky kapacitních možností a současných rozhodování podle cen a produkce. Ostatní modely porovnávaly nekooperativní řešení s ostatními typy řešení, za které mohou být považovány kapitálové podmínky a různorodé informace.

V této době vychází stále více literatury o dynamických duopolních modelech. Stále častěji se ve výuce Cournotova duopolního modelu objevuje dynamický proces nastiňující působení akce a reakce. V roce 1934 vydal von Stackelberg práci ve které navrhoval pseudodynamické systémy. Jeho následníkem byl Fellner, který pokračoval v diskusích o těchto modelech. Dalšími byli Smith a Savage 1940, Shubik a Thomson 1959, kteří poskytli mnoho matematických teoretických duopolních modelů.

3.3 Oligopoly

Standardní cesta vytváření oligopolních trhů je více méně konstruována jako model, který vycházel z duopolů a který může být srovnáván jednak s duopoly a jednak s konkurenčním prosperujícím trhem. Často předpoklad rovnovážnosti firem umožňuje porovnávat trhy různé velikosti, tedy např.: Cournot vycházel z analýzy dvou a více firem a Chamberlin bere v úvahu malé či větší konkurující si firmy.

Je důležité mít na mysli tři různé dovednosti pro výzkum oligopolních trhů. První z nich je ***dovednost ekonoma popsat ekonomické aktivity a instituce a také vybírat důležité proměnné a vztahy.*** Dalším je ***umění formulovat matematickou strukturu, která odráží aspekty týkající se ekonomiky jako celku.*** Posledním je ***dovednost analytika zdůvodnit vlastnost matematického systému, který byl formulován.*** Tedy např.: Chamberlinova práce může být považována za pokrokovější oproti Cournotově terminologii pro větší závažnost a objektivnost. To však neplatí pro veškeré výrazy rigorózní matematické formulace analýzy, která je srovnávána s Cournotem. Jak u Cournota, tak i u Chamberlina je rozsáhlá analyzující skupina založena na nekooperativních rovnovážných analýzách. Pokud je málo konkurentů, pak Chamberlin navrhuje, aby byly vzaty v potaz všechny příčiny způsobující tento problém. Jestliže je skupina konkurentů rozsáhlá, pak její analýza může být považována za kooperativní hru.

Žádná matematická formulace nemůže odstranit nedostatky v ekonomickém rozhledu a chápání tvorby

analyzujícího modelu. Jinými slovy adekvátní teorie závisí na doslovném popisu a dokonalé objektivnosti modelu, tak jak to bylo navrhováno von Stackelbergem 1934 a Fellnerem 1949. Speciální proměnné musí být brány v úvahu. V roce 1951 Brems představil technologickou proměnnou. V roce 1956 Bain uvážil vstupy a v roce 1964 Moris a Shubik zdůraznili manažerskou strukturu. V roce 1971 Levitan, Shubik, Kirmann a Sobe uvážili role investorů. Mimo těchto autorů existuje ještě mnoho dalších prací, pojednávajících o významných a speciálních proměnných, jako např.: doprava inzerce, produkční změna ceny, různé produkty, bankovníctví a mnoho dalších.

Kdy lze teorii her považovat za přínos a kdy se pouze jedná o překlad do důležitějšího symbolického jazyka? Za nejlepší odpověď lze považovat takovou, která chápe, že se teorie nazývá podle rozdílných specifíků ve strategických podmínkách individuálních činitelů, vedoucích k objevení rozporu v logice formálně definovaných modelů. Mnoho z těchto modelů jsou popisné pseudodynamické modely. Jinými slovy popisují různé druhy uspořádaných terminologických procesů, které obsahují nezbytné informace (především co, kde, kdy, a jak).

Obvykle v popisu akce a reakce nemá čas vůbec žádný význam a dokonce ani úroková míra, tak jak je to publikováno v práci Crosse 1969. Chamberlinova rozsáhlá analýza chování skupiny, Sweezyho článek z roku 1939 a také mnoho dalších autorů se zabývá zalomenou duopolní křivkou poskytující významné příklady kombinace síly a nebezpečí informačního mixu popisných a množinových diagramů. Toho lze snadno dosáhnout, když jeden zkouší formulovat tržní strukturu tak dobře, jak definuje model.

Zalomení oligopolní křivky ve skutečnosti neexistuje, což je dáno předpokladem velmi omezené reakce všech konkurentů. To lze získat pomocí implicitně předpokládané symetrie ve strategiích, ve struktuře a v informačních podmínkách pro všechny firmy (nebo když nelze rozeznat implicitní nebo explicitní předpoklady, které mohou závěr vysvětlit).

Mimo to argumenty popisující rovnováhu nebo tendence vedoucí k rovnováze užívají zalomené oligopolní křivky nebo Chamberlinovu analýzu skupiny závisící na lokálním soukromém majetku. Edgeworthova duopolní analýza 1925 vedla k tomu, že neexistuje potřeba rovnovážného stavu. Jeho výsledky byly získány považováním skutečné struktury oligopolní poptávky za všechny sféry definice. Jinými slovy analýza požaduje, abychom byli schopni uvést, jak dvě firmy budou stanovovat poptávku, při libovolné dvojici cen (p_1, p_2) .

V roce 1959 Shubik zavedl termín kontingentní poptávka, která popisuje, jak poptávka jednotlivé firmy reaguje na stálé impulsy od ostatních subjektů. To je však možné jen tehdy, jestliže lze ukázat, že struktura kontingentní poptávky závisí na marketingových detailech, ve kterých jsou individuální poptávky agregátní. V roce 1964 Levitan ukázal vztah mezi popisem oligopolní křivky a mezi teorií přidělovacího systému. Na základě studie tvaru kontingentní poptávkové křivky mohli Levitan a Shubik ukázat, že Chamberlinova teorie rovnováhy může být snadno napadnutelná pro mnoho stejných zdrojů, které jsou použity v Edgeworthově analýze.

Pro úplné pochopení oligopolních problémů je třeba pojmenovat jasné rozdíly, které vytvářejí rozdílné aspekty v tržní struktuře, v cílech firmy a chování firem. V terminologii teorie her tyto faktory vytvářejí jasné *rozdíly mezi pravidly her, mezi způsobem řešení a způsobem nalezení řešení*.

Mezi nejvýznamnější aspekty studující oligopol pomocí modelů teorie her patří popsání informačních podmínek a poskytnutí formálních dynamických modelů, které skutečně závisí na informačních podmínkách. Zde je rostoucí zájem ve stavové strategii modelů, což je model, ve kterém jsou dynamické systémy závislé pouze na stavu, ve kterém se nacházejí. Takovýto systém je zcela běžný.

V roce 1959 Shubik a Thomson, v roce 1962 Miysawa a mnoho dalších, pracovalo s logickými modely ekonomických procesů a uváděli mnoho příkladů. V roce 1973 Shubik pojednal o citlivosti oligopolních trhů na změnu informací. Pokud je informace relativně významná, tak není žádný důvod se obávat, že by pouze málo firem na oligopolním trhu používalo státní strategii. Místo toho můžeme očekávat, že se v budoucnu bude užívat historických strategií, kde předešlá historie zastrašování, zastrašovací strategie hraje významnou roli. V roce 1974 Marschak a Salten, v roce 1959 Shubik, považují toto za možné.

Mezi další publikace zabývající se teoretickým výzkumem oligopolů patří knihy: Friedman 1977, Jacot 1963, Shubik 1959 a Telser 1972.

3.4 Bilaterální monopol a vyjednávání

Poněvadž většina oligopolních modelů může buď nabídnout řešení založené na nekooperativní rovnováze nebo nabídnout pseudodynamické procesy, potom práce na bilaterálním monopolu má primárně vysokou

úroveň komunikace s kooperativním výsledkem, nebo s dynamickým procesem, který vede k optimálnímu výsledku. Oproti tomu málo modelů navrhuje možnost neoptimálních řešení, které lze realizovat po ignorování nebo zamítnutí hrozeb.

Mnoho modelů bilaterálního vyjednávání vychází z vysoce rozdílných institucionálních prostředí.

Nejvýznamnější jsou bilaterální obchody u individuálních obchodníků, tak jak je to charakterizováno v Böhm-Bawerkově modelu nebo v Bowlově modelu. Ve skutečnosti však model předkládá záruky v mezinárodním obchodě nebo v práci a podmínkách zaměstnavatelů.

Edgeworthův slavný model byl ve své terminologii později napadnut v díle Zeuthena. Edgeworthova práce je skutečně podobná řešení jádra v teorii her, tak jak je to nastíněno u Shubika 1959, Scarfa 1967, Debreua a Scarfa 1963. Böhm-Bawerkova analýza poukazuje jak spolu souvisí určitý příklad jádra (řešení teorie her) a tržní cesta - Shapley a Shubik 1972.

Zeuthenova analýza 1930 bilaterálního vyjednávání zcela poukazuje na různé koncepty ceny jako způsobu řešení. Toto je zahrnuto v práci : Nash 1953, Harsanyi 1959, Shapley 1953 a Selten 1964.

Ostatní významné oblasti aplikace, které jsou skutečně více závislejší na politice, než na ekonomice se nazývají mezinárodní strategie vyjednávání. Výsledky tohoto typu aplikace jsou shrnuty v díle : Shapley a Shubik 1971 - 1974.

Řešení ekonomického problému může nabídnout menší soubor výsledků než ve skutečnosti existuje. Nemožný výsledek je předpokladatelný. Řešení zúžuje soubor výsledků, ale skutečně nevypovídá o tom, co by se mohlo v budoucnu stát. Edgeworthova spotřební křivka a jádro (teorie her) jsou řešení ve stejném smyslu.

Ostatní řešení mohou být použita na pokus vybrat si konečný výsledek, který může nastat, nebo který může být. Na statistických verzích většiny variant cenových řešení a ostatních navrhovaných tržních řešení můžeme ukázat, jak jsou normativní ve svých návrzích a oddělit z nich určité institucionální prezentační prostředí.

Z této analýzy vycházejí díla : Nash 1953, Shapley 1953, Harsanyi 1956, Braitwait 1955, Kuhn 1966 a další. Styl ostatních řešení, které můžeme použít k výběru jednoduchého výsledku je popsán v terminologii dynamických vyjednávacích procesů. To je zahrnuto v dílech: Cross 1969, Harsanyi 1956, Pen 1952, Shubik

1952 a další.

3.5 Simulace hrou

U jednoho výsledku teorie her a vysoce výkonného počítače je rostoucí zájem používat formální, tržní matematický model na simulaci hrou, učení a experimentální cíle.

První publikovaný článek obsahující informace o ekonomickém experimentu hrou vydal Chamberlin. Toto se však v ostatních člancích moc neobjevovalo. První *obchodní hra*, která byla navrhována pro obchodní cíle, byla vytvořena Bellmannem v roce 1957. Na toto následoval rozvoj počítačových obchodních her. Použití těchto her bylo široce využito na obchodních školách a na některých obchodních fakultách. Údaje o simulaci hrou lze nalézt: Shubik 1955 a Shapley a Shubik 1971 - 1974.

Velmi významné je zdůrazňovat rozdíly mezi obchodní a experimentální hrou. Forma klade důraz na učení, později však na ratifikované teoretické hry a ekonomiku.

Mnoho z prvních experimentálních her nepoužívalo počítač. Hry byly skutečně prezentovány buď pomocí matic nebo pomocí diagramů. Siegal a Fouraker 1960-1963 a Shubik 1961 se zabývali bilaterálními monopoly při různých informačních podmínkách a také dále duopolem a triopolem. Stern 1966, Dolbear a mnoho dalších zkoumali účinek konkurence na trhu. Friedman 1967 považoval efekty symetrie a nedostatky symetrie v duopolu za další aspekty oligopolních trhů. V roce 1967 ukázal Smith efekty tržní organizace.

Experimentální hry užívající počítače se rozběhly v roce 1967 (Hoggatt) v roce 1973 (Hoggatt a Selten) a několik dalších. Tyto hry poskytují výhody v kontrole a snadnosti zpracování dat, tak že se hry mimo počítač přestaly zcela používat.

Několik z výše uvedených her může připomenout existenci řešení pro různé teoretické hry. To však znamená, že příklad duopolních her navrhované Friedmanem je možné počítat podle Paretovy optimální roviny a nerovnovážných bodů. Podobně v duopolním nebo oligopolním výzkumu podle Hoggatta, Sterna, Siegala, Shubika a dalších je skutečně možné počítat s lokálním optimem, nekooperativní rovnováhou a konkurenčním cenovým systémem.

Hra navrhovaná Levitanem a Shubikem 1961 byla speciálně navrhována tak, aby souhlasila s analýzou teo-

rie her. Skutečně: globální maximum, cenová nerovnováha, kvantitativní nerovnováha, rozsah Edgeworthova cyklu a ostatní řešení lze pokládat za způsob řešení této hry.

Další možností je zavádět kritický soubor implikací na všechny experimenty v oligopolní teorii, avšak hlavní smysl musí být zachován. Ostatní věci jsou stejné, roste počet konkurentů, kteří nabízejí nižší cenu a také roste křížová elasticita mezi produkty. Avšak: málo konkurentů, časové omezení, strukturální detaily a komunikační podmínky ukazují mnohem více kritiky, než by mohla ukázat oligopolní teorie.

Ve všech experimentech o hrách určených pro výuku na Harvardské obchodní škole má význam uvažovat vzácný model chování individuálních objevů, ve kterých se hráči pokoušejí nalézt cestu ideálního okolí. Toto pozorování nedává odpověď k pochopení pojetí teorie her. Je to pouze doplněk teorie her. Až doposud existuje neuspokojivé dynamické řešení, zajišťující buď standardní ekonomickou teorii nebo teorii her. To je způsobeno obtížným popisem informační a komunikační role.

Různé soubory her používají pro experiment jisté množství ekonomického obsahu, ale je to daleko méně podobné s ekonomickým trhem než s oligopolními hrami. Tento soubor obsahující jednoduchou nabídku byl užíván Nashem, Stonem, Shubikem a dalšími. Ve všech těchto příkladech je velká snaha porovnávat výsledky experimentů s tvrzeními o různých řešeních teorie her.

3.6 Aukce a nabídka

Počátek aukcí je datován na začátek období romantismu. V mnoha ekonomikách mají významnou roli jak finanční trhy, tak i obchodní trhy. Potvrzení nabídky se užívá v rozsáhlém systému a při prodeji vládního majetku. Její původ, jako ekonomického tržního mechanismu, je datován v díle: Cassady 1967. Avšak jak je aukce a nákupní proces obvykle přesně definován jako soubor formálních pravidel (společně příp. se zvyky nebo jinými neformálními pravidly), tak přirozeně poskytuje formální matematický model.

Matematické modely aukce a nabídky lze rozdělit do dvou hlavních skupin:

1. Model, ve kterém je role konkurenta modelována pomocí Bayesově mechanismu,
2. Model, který je řešen jako strategická hra používající k řešení pojem nekooperativní rovnováhy nebo nějaký jiný způsob řešení.

3.7 Řešení, tržní hry a cenový systém

Hry známé jako *tržní hry* umožňují simulaci uzavřeného ekonomického systému s existujícím cenovým systémem.

Studie tržních her s velkým počtem účastníků ukázala významný vztah mezi rozdělením dle cenového systému a metodami: jádro, hodnota, obchodní množina, *kernel* a *nucleolus* velkých tržních her. Každý koncept řešení modeluje nebo zachycuje rozdílné aspekty obchodování. *Cenový systém* může být považován za příčinu decentralizace, metoda jádro ukazuje vliv vyrovnávací sil, metoda hodnota nabízí kritérium spravedlnosti, metody obchodní množina a *kernel* doporučují jak vymezit řešení pomocí vyjednávání a metoda *nucleolus* umožňuje najít bod, ve kterém je minimalizována nespokojenost s relativním daňovým zatížením nebo s dotacemi.

Kdyby použití těchto různých metod vedlo ke stejnému rozdělení zdrojů, potom by vzniklo něco, co lze považovat za ekonomický sen 19. století *laissez faire*.

Naneštěstí, ve většině ekonomik, tak jak je známe, tyto euforické závěry neplatí ze dvou důvodů. Prvním je to, že jen zřídka (jestli vůbec) existuje dost jedinců všech typů, aby byly odstraněny oligopolistické prvky ze všech trhů. Druhým důvodem je, že ekonomiky často obsahují prvky, které mění nebo ničí podmínky pro existenci účinného cenového systému. Zejména se jedná o vnější úspory, záporné úspory, nerozdělitelnosti a veřejné statky.

3.8 Veřejné statky, externality, ekonomika blahobytu

Když studujeme problematiku veřejných statků, je obtížné stanovit jasný rozdíl mezi literaturou, která se zabývá ekonomickou analýzou a studiem politických věd. Základní vlastností takových problémů je, že jejich zkoumání vyžaduje přístup založený na studiu politické ekonomie.

Přesto, že je to spojeno s ekonomikou blahobytu, nediskutuje problematiku volebních systémů. Je dobře známo, že v případě, kdy se v ekonomice objevují externality, nemusí existovat účinný cenový systém. Přesto může být navržen daňový a dotační systém, který umožní účinné fungování cenového systému.

Shapley a Shubik (1969a) a Foley (1970) dokázali, že daňový systém doporučený Lindahlem je vhodný.

Avšak v dřívějších pracích je zmíněno, že takový systém nemusí být efektivní, jestliže se v něm vyskytují (vnější) záporné úspory???. Klevorck a Kramer (1973) pracovali na speciálním daňovém schématu pro řízení znečišťování ovzduší. Aumann a Kurz (1977) aplikovali smíšený model hrozeb, cen a the value solution na daňový systém.

Role hrozeb je velmi významná, když se zabýváme problémy, které způsobují externalitu a veřejné statky. Donucení jedince sdílet veřejné statky a zabránění mu užívat je bez zaplacení vede k mnoha typů veřejných statků.

Shubik (1966) doporučil daňový systém založený na těchto úvahách. Významné aplikace teorie her na daňové problémy a veřejné finance uvádí Schleicher (1971). Nedělitelnosti a jiné vlastnosti, které mohou způsobit nekonvexnosti ve spotřebě nebo produkci jedince studoval Shapley a Scarf, Shapley a Shubik, Shubik, a ostatní.

Shapley a Shubik (1967) a Shubik (1971) se zabývali externalitami způsobené rozdílným vlastnictvím stejně jako finální externality způsobené přítomností trhů. Buchanan a Tullock, Davis a Whinston, Zechhauser a další, jejichž práce se nevztahují přímo k teorii her jako takové, ale využívají ji pro řešení problémů veřejných statků a ekonomiky blahobytu.

Další aspekt ekonomiky blahobytu, pro který se dá teorie her přímo použít, zahrnuje studie celkových daní, dotací a kompenzačních schémat. To závisí na předpokladech zvažujících vhodnost sidepayment mechanismu a vztah mezi sociálními a ekonomickými očekáváním a strukturou individuálních preferencí.

3.9 Peníze a finanční instituce

V posledních letech se zájem přesunul na konstrukci mikroekonomické teorie peněz. Tato práce považuje za základ všeobecnou rovnováhu nestrategického modelu cenového systému.

Práce autorů: Foley (1970), Hahn (1971), Starr (1974) a jiných slouží jako příklady statických modelů, Crandmont (1977) pokrývá dynamické modely. V rozporu s nestrategickými přístupy, které představují: Dubey a Shubik (1977, 1978), Shapley (1976), Shapley a Shubik (1977), Shubik (1972, 1975) a další se zabývali *non-cooperative game* modely tržní ekonomiky užívací komodity nebo nekryté bankovky. Hlavní

přínos těchto děl spočívá v tom, že vyžadují od strategického modelování zavádění základních struktur a pravidel hry, které můžou být interpretovány v termínech trhů, finančních institucí a zákonů. Jestliže specifikujeme užití peněz, musíme brát v úvahu rozdíl mezi penězi a úvěry. Musíme specifikovat zákony týkající se bankrotů. Musí být uveden způsob, jakým do systému vstupují peníze a úvěry. Musí se rozhodnout, zda modelovat bankéře jako samostatné hráče v *money game*. [Shubik (1976)].

Jednoduchý případ *non-cooperative games* zabývající se trhem s komoditními penězi a nabídkami obchodníků je tento: Mějme n obchodníků a $m + 1$ komodit. Každý i -tý obchodník má užitkovou funkci a počáteční zdroje kde. Poslední $(m + 1)$ -ní komodita je charakterizována jako peníze ve smyslu, že všechny transakce prvních m komodit jsou placeny pro užití $(m + 1)$ -ní komodity. Strategie obchodníka i je vektor $2m$ čísel, kde je obchodníkem nabízené množství zboží j ; je nabídka sumy, kterou je ochoten obchodník i utratit za nákup zboží j ; a je peněžní omezení. Cena j -tého zboží, $j = 1, \dots, m$, je cena $(m + 1)$ -ního zboží je 1. Konečné zásoba zboží j držená hráčem i , pro $j = 1, \dots, m$, je Konečná zásoba zboží $m + 1$ držená hráčem i je

Takže hra vyzývá každého hráče i , aby si vybral strategii si, a tím maximalizoval. Některé výsledky byly obdrženy použitím teoretické analýzy kooperativní hry. Konkrétně bylo ukázáno, že pokud se obchod odehrává na trhu, pak jsou peněžní externality skutečné.

3.10 Další aplikace

Před pracemi Nyblena (1951) a Faxena (1957) neexistovalo mnoho aplikací teorie her do makroekonomie. Tento vývoj je nicméně podnětný v možnosti považovat souhrnné agregáty za hráče strategické hry. Kromě použití, které jsme uvedli, existuje spousta materiálů k ekonomii a předmětům blízkým v podobě prací Sleichera (1971) o veřejných financích, Shaleyho (1962) o byrokracii a organizačním plánování, Shubika (1962) o návrzích stimulačních systémů, Littlechilda (1974) o problémech kartelů. Existuje také mnoho literatury o použití v politických vědách, což souvisí s ekonomickými pracemi, ale není předmětem této studie.

Literatura

- [1] R.G.D. Allen : *Mathematical economics*. Macmillan, London 1963.
- [2] K.J. Arrow: *Social choice and individual values*. Wiley, New York 1951, 2nd edition 1963.
- [3] K.J. Arrow, M.D. Intriligator: *Handbook of mathematical economics*. Elsevier Science, Amsterdam 1994.
- [4] C. Berge: *Topological spaces*, Macmillan, New York 1963.
- [5] L. Bican : *Lineární algebra*. SNTL, Praha 1979.
- [6] A. Cellina: *A Theorem on the Approximation of Compact Multi-valued Mappings*. Rendiconti Accademia Nazionale Lincei, (8) 47 (1969), 429–433
- [7] G. Debreu: *Theory of value, An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1959.
- [8] G. Debreu: *Smooth preferences*, *Econometrica*, 38:387-616, 1972.
- [9] Debreu, G.: *Ekonomická teorie v matematické formulaci* (přednáška při příležitosti udělení Nobelovy ceny), Nobelova cena za ekonomii, Academia, Praha, 1993

- [10] G. Debreu: *Existence of Competitive Equilibrium*, Handbook of Mathematical Economics. 15.kap. Elsevier Science, Amsterdam, 1994, 697–743.
- [11] W.E. Diewert: *Duality theory in economics*, North Holland, Amsterdam 1982.
- [12] J. Dupačová, J. Plesník, M Vlach: *Lineárne programovanie*. ALFA, Bratislava 1990.
- [13] W. Fenchel: *Convex cones, sets and functions*, Lecture Notes, Department of mathematics, Princeton University, Princeton 1953.
- [14] J. Green, W.P. Heller: *Mathematical analysis and convexity with application to economics* in Handbook of mathematical economics, editors K.J. Arrow, M.D. Intriligator, Elsevier Science, Amsterdam 1994, p. 15-53.
- [15] J.R. Hicks: *Value and capital*, Oxford University Press, New York 1946.
- [16] H. Hotelling: *Demand functions with limited budgets*, *Econometrica*, 3, 1925, p. 66-78.
- [17] S. Karlin: *Mathematical methods and theory in games, programming and economics, vol. I*, Addison-Wesley, Palo Alto, California 1959.
- [18] I. Kolář: *Úvod do Thomovy teorie katastrof*, Academia, Praha 1988.
- [19] H. Minkowski: *Theorie der konvexen Körper*, Gesammelte Abhandlungen II, B.G. Teubner, Leipzig und Berlin 1911.
- [20] H. Nikaido: *Convex structures and economic theory*, Academic Press, New York 1968.
- [21] J. Novotný: *Existence rovnovážného stavu v ekonomice s produkcí*, Brno, 2002.
- [22] A. Pultr: *Podprostory euklidovských prostorů*, SNTL, Praha 1986.

- [23] R.T. Rockafellar: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1970.
- [24] P.A. Samuelson: *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge 1963.
- [25] R.W. Shephard: *Cost and production functions*, Princeton University Press, Princeton 1953.
- [26] R.W. Shephard: *Theory of cost and production functions*, Princeton University Press, Princeton 1970.
- [27] R. Sikorski: *Diferenciální a integrální počet funkce více proměnných*, Academia, Praha 1973.
- [28] S. Smale: *Global Analysis and Economics*, Handbook of Mathematical Economics. 8.kap. Elsevier Science, Amsterdam, 1994, 331–369.
- [29] J. Soukupová a kol.: *Mikroekonomie*. 2.vyd. Management Press, Praha, 1999.
- [30] H. R. Varian: *Dynamical Systems with Applications to Economics*, Handbook of Mathematical Economics. 3.kap. Elsevier Science, Amsterdam, 1994, 93–110.
- [31] J. von Neumann: *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes*, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, 8:73-83, 1937.
- [32] M.S. Vošvrda: *Teoretická ekonomie*, Univerzita Karlova, Praha 1994.
- [33] J. Žalská: *Teorie všeobecné rovnováhy*, vybrané problémy, Brno, 2000.

Rejstřík

A

aditivita výrobních plánů 97
Allenova Parciální Elasticita Substitute 289
alokace 148
Arrowova-Debreuova věta 103

B

bod nasycenosti 66
bod rovnováhy pro nekooperující hráče 394
bohatství i -tého spotřebitele 175

C

cena komodity 127
cenový systém 145
cenový vektor Cournotovy rovnováhy 339
Cournot–Nashova rovnováha 170
Cournotova podmínka agregace 48
Cournotův model 323

Č

čistá hodnota spotřeby i -tého spotřebitele 174
čistá opozice 393

čisté výnosy 280
čisté výstupy 280

D

difeomorfismus 205
dominování 389
dosažitelná spotřeba 176
dosažitelná spotřební množina 176
dosažitelný stav ekonomiky 176
dynamický systém 205

E

efektivní množina 389
ekonomika \mathcal{E} 175
ekonomika úplné směny 147
elasticita průměrného produktu 287
elasticita substitute 288
elasticita výstupu 286
Engelova podmínka agregace 48
exces koalice 391
extenzivní hra 370

- F**
falešná nabídka firmy 109
falešná poptávka 110
falešný příjem spotřebitele i 110
funkce falešné poptávky 149
funkce kolmá k prostoru 129
funkce nabídky 128
funkce nejlepší odpovědi firmy 341
funkce odpovědi 356
funkce ostře kvazikonkávní 77
funkce poptávky 128, 145
funkce splňující podmínku ostré konvexity 103
funkce užitečnosti 145
funkce vzdálenosti 296
funkční koeficient 286
- G**
globální maximum 19
gradient 216
graf korespondence 169
- H**
hamiltonovská funkce 219
hamiltonovský systém 219
hladká m -varieta 205
hodnota komoditního svazku 58
homogenní produkční funkce 292
homotetická produkční funkce 292
Hotellingovo lemma 300
- hra s perfektní informací 372
hra ve tvaru charakteristické funkce 370
hra zadaná v extenzivním tvaru 369
- Ch**
Chamberlinův model 336
- I**
index $I(x^*)$ stavu x^* 210
inverzní funkce poptávky 324
izolovaná komunita 164
- J**
jádro 385
jednoduchá hra 386
- K**
kernelové řešení 391
koeficient účelové funkce 37
komoditní prostor 127
komoditní svazek 58, 127
konkurenční rovnovážný stav 148
konstantní výnosy z rozsahu 97
konvexní korespondence 169
konvoluce 357
korespondence 169
kritický bod zobrazení 131
křivka rozvoje příjmů 147
Kuhn-Tuckerovy podmínky 31
kvadratická účelové funkce 23

kvadraticko-lineární úloha 29
kvazikonkávní funkce 21

L

Lagrangeova funkce 25
 ω -limitní bod pro x 215
 ω -limitní množina pro x 215
lineární programování 36
lokálně asymptoticky stabilní rovnováha 213
lokální Pareto optimum 151
lokální silné Pareto optimum 151
Lyapunovova funkce 213

M

marginální produkt 286
maximální prvku relace 175
mezní míra substituce 294
mezní produkce 50
množina produkčních možností 278
množina příležitostí 19
množina rozdělení 381
možnost žádné produkce 96

N

nadbytek poptávky 128
nákladová funkce 296
nákladová funkci 325
nemožnost volné produkce 97
nenasycenost 177

neoklasická teorie domácnosti 43
neoklasická teorie firmy 49
neuspokojená spotřeba 177
normalizované omezené ziskové funkce 301
normální hra 370

O

obecná množina výrobních možností 295
obchodní bod 390
obchodní množina 390
obrana 390
obraz 19
omezená ziskové funkce 301
 téměř homogenní 301
omezující funkce 30
operátor toku 205
ostré globální maximum 19
ostře kvazikonkávní funkce 21

P

Pareto optimální povrch 380
Pareto optimální vektor 381
Pareto optimum 151
pevný bod korespondence 169
plná míra množiny 132
počáteční obdaření agenta 110
počáteční obdaření komoditami 175
podíly ze zisku výrobců 175
podmínka homogenity 48

podmínka nedegenerovanosti 157
podmínka nenasyčenosti 150
podmínka slabé regularity 278
podmínka volného použití 96
Poincaré-Bendixsonova věta 215
Poincarého index vektorového pole 210
poptávka 145
poptávka i -tého spotřebitele 110
potenciálová funkce systému 216
preference i -tého spotřebitele 174
preferenční uspořádání 60
primární úloha 37
produkce j -tého výrobce 175
produkční funkce
 slabě separabilní 294
produkční hranice
 skupinově aditivní 293
produkční technologie 278
prostor cenových systémů 127
protiobrana 390
průměrný produkt faktoru 286
převís poptávky nad nabídkou 181
Přímá Elasticita Substitute 289
přípustná alokace 148
přípustný vektor 19, 380

R

reakce

 paraperfektní 359
reflexivní preferenční relace 174
regulární hodnota 131
relace indiference 60
relace ostré preference 60, 174
relace preference 59
 monotonní 66
returns on scale 287
returns to j^{th} input 286
rovnováha dynamického systému 209
rovnováha ekonomiky 102
rovnováha k volnému použití 138
rovnováha sociálního systému 189
rovnovážný bod 393
rovnovážný bod společenského systému 173
rovnovážný stav 128
rovnovážný stav ekonomiky blahobytu 159, 163
rovnovážný stav ekonomiky \mathcal{E} 175
rozhodující jednoduchá hra 386
rozpočtová množina 59, 145
rozpočtová množina i -tého spotřebitele 179
rozšířenou funkci odpovědi 356

S

shora polospojité korespondence 169
silná separabilita 294
silné ε -jádro 391
silné Paretoovo optimum 151

singulární bod zobrazení 77, 131
singulární hodnota 131
slabá doplňující věta 38
slabé doplňující podmínky nelineárního programování
33
slabé ε -jádro 392
Slutského věta 47
směrová derivace 216
spojitá korespondence 172
společenský systém 173
spotřeba i -tého spotřebitele 174
spotřební množina 58
stacionární bod 21
stav ekonomiky 148
stav ekonomiky \mathcal{E} 175
stav systému 203
stav y dominuje stav x 151
stavová přechodová funkce 204
stavový prostor systému 203
stínová cena 26, 55
strategická hra 370
strategie hráče 372
strategie hry 169
striktně konvexní množina 103
strukturálně stabilní systém 220
substituční možnosti 288
surplus hráče 391

systém gradientů 216

Š

škálovací funkce 286

T

tečný prostor variety 205

technologické znalosti 175

Teorie oligopolu 323

teorie srovnávací stability firmy 52

tranzitivní preferenční relace 174

tržní hra 386

U

účelová funkce 19, 30

úloha klasického programování 24

úloha matematického programování 18

úloha maximalizace bez omezení 21

úloha nelineárního programování 30

úloha sedlového bodu pro duální úlohu 37

úlohu konkávního programování 34

úplné předuspořádání 60

uzavřená orbita 215

uzavřený poloprostor 205

V

varieta 205

varieta s hranicí 205

vektor gradientů 22

vektor nástrojů 19, 30

vektor omezení 30
vektor rozdělení 381
vektorové pole na varietě 207
věta Kuhn-Tuckera o sedlovém bodě 34
věta o dualitě 38
věta o existenci 38
Věta o Lagrangeových multiplifikátorech 25
věta o nabídce 51
věta o ohraničené Hessově matici 27
věta o poptávce 45
věta o postačujících podmínkách pro klasické programování 28
věta srovnávací stability 40
vlastnost vyváženého pokušení 362
vnější stabilita 389
vnitřní jádro hry 392
vnitřní jádro hry bez boční platby 393
vnitřní stabilita 389
vstupně pravidelná množina výrobních možností 295
výherní vektor 380
výrobní faktory 278
výstupní nabídková funkce 51
vyvážený systém podmnožin 387

W

Walrasovův rovnovážný stav 148
Walrasův zákon 129

Z

základní maticová rovnice teorie domácnosti 47
základní maticová rovnice teorie firmy 52
zdola polospojité korespondence 172
zisková funkce 326
zobecněná matice substitučního efektu 42