

MU-přednáška 15.4. 2019

Definice, věty a důkazy ve středoškolské praxi

RNDr. Petr Česnek

Gymnázium Jihlava



1919–2019



100 let

Obsah přednášky:

- matematika na G Ji
- význam definic, vět a důkazů ve středoškolské M
- užití vzorců
- zkušenosti, rady, doporučení (didaktika M.)
- doporučené postupy, ukázky (tematicky 1. – 4. ročník)
- ostatní, ...

Týdenní hodinová dotace M:

VG	M	Seminář M
1. ročník, kvinta	4	0
2. ročník, sexta	4	0
3. ročník, septima	4	2
4. ročník, oktáva	4	3 nebo 2

NG	M
prima	5
sekunda	4
tercie	4
kvarta	4

4,6 a 8 – leté studium

Současná témata k diskusi:

- Zredukovat „tematické plány“, ŠVP ?
- Přesunout diferenciální a integrální počet jen do semináře pro 4. ročník ?
- Srovnávací prověrky ?
- MO – jak získat a udržet zájemce ?



Matematická olympiáda

Problémy při výuce M.

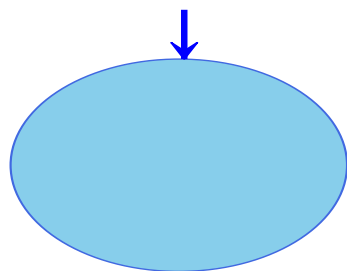
- porozumět látce
- pochopit zadání úlohy (zejména, pokud je formulována „jinak“)
- slovní úlohy
- vysvětlit daný pojem vlastními slovy (ústní zkoušení)
- různá úroveň žáků v M.
- zbytečné (nad)užívání vzorců

Výuka M.

"Vědecký přístup"
(budovat M. jako vědu)



(logické myšlení a hlavně ...
zvládnout TESTY!)



Jak udržet pozornost a zájem žáků ?

Kvalitní výukou !

- srozumitelnou
- blízkou a názornou
- náročnou
- **zajímavou**

Moje výuka:

Výklad

Procvičení ve škole

DÚ

Domácí příprava → je důležitou (klíčovou) součástí výuky
→ školní a domácí sešit
+ příklady (vytištěné, elektronicky)

Písemné a ústní zkoušení,
další hodnocení

známky
body



Můj styl výuky M.:

Matematiku společně objevujeme, tvoříme a využíváme.

starořecký vzor :

prvotní pojmy
axiomy

DEFINICE



VĚTA



(DŮKAZ)



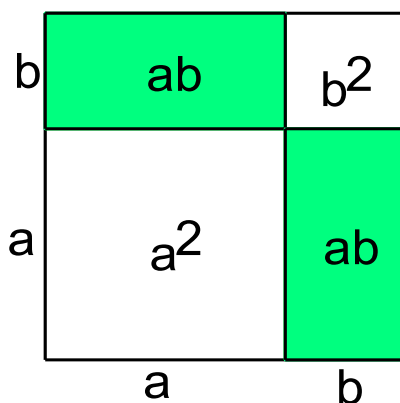
příklady
aplikace
důsledky

Jednoduchá ukázka

Def. $a^2 := a \cdot a$

Věta: $\forall a, b \in R \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Dk. $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + \underbrace{b \cdot a + a \cdot b}_{= a \cdot b} + b \cdot b =$



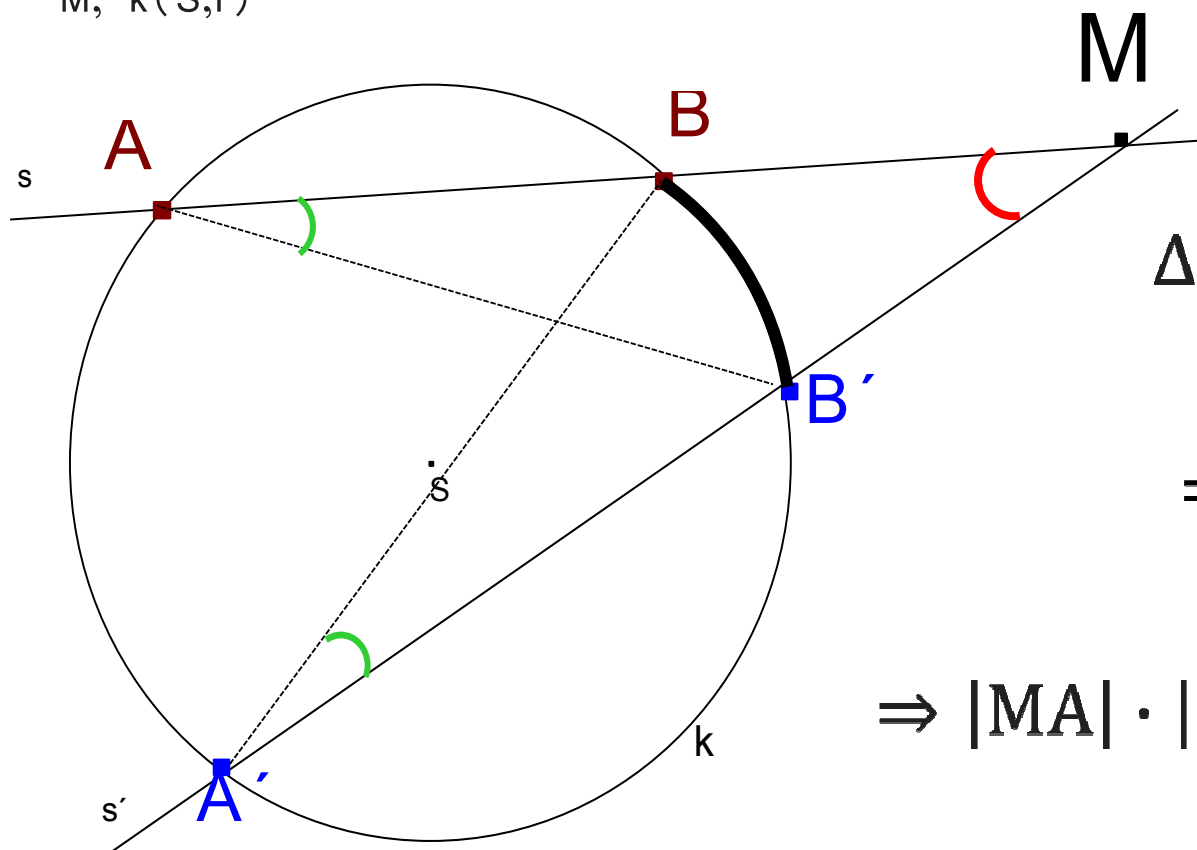
$= a \cdot b$
(axiom)

$= a^2 + 2ab + b^2$

cbd.

Mocnost bodu ke kružnici

$M, k(S,r)$



$$\Delta MBA' \sim \Delta MB'A \quad (uu)$$

$$\Rightarrow \frac{|MB|}{|MA'|} = \frac{|MB'|}{|MA|}$$

$$\Rightarrow |MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'| \equiv m$$

podobně pro bod M
uvnitř kružnice ...

Def.

Je dána kružnice $k(S,r)$ a bod M .

Mocností bodu M ke kružnici k rozumíme reálné *číslo*

m , pro které platí:

(1) $m = |MA| \cdot |MB|$, kde A, B jsou průsečíky libovolné sečny
kružnice k vedené bodem M

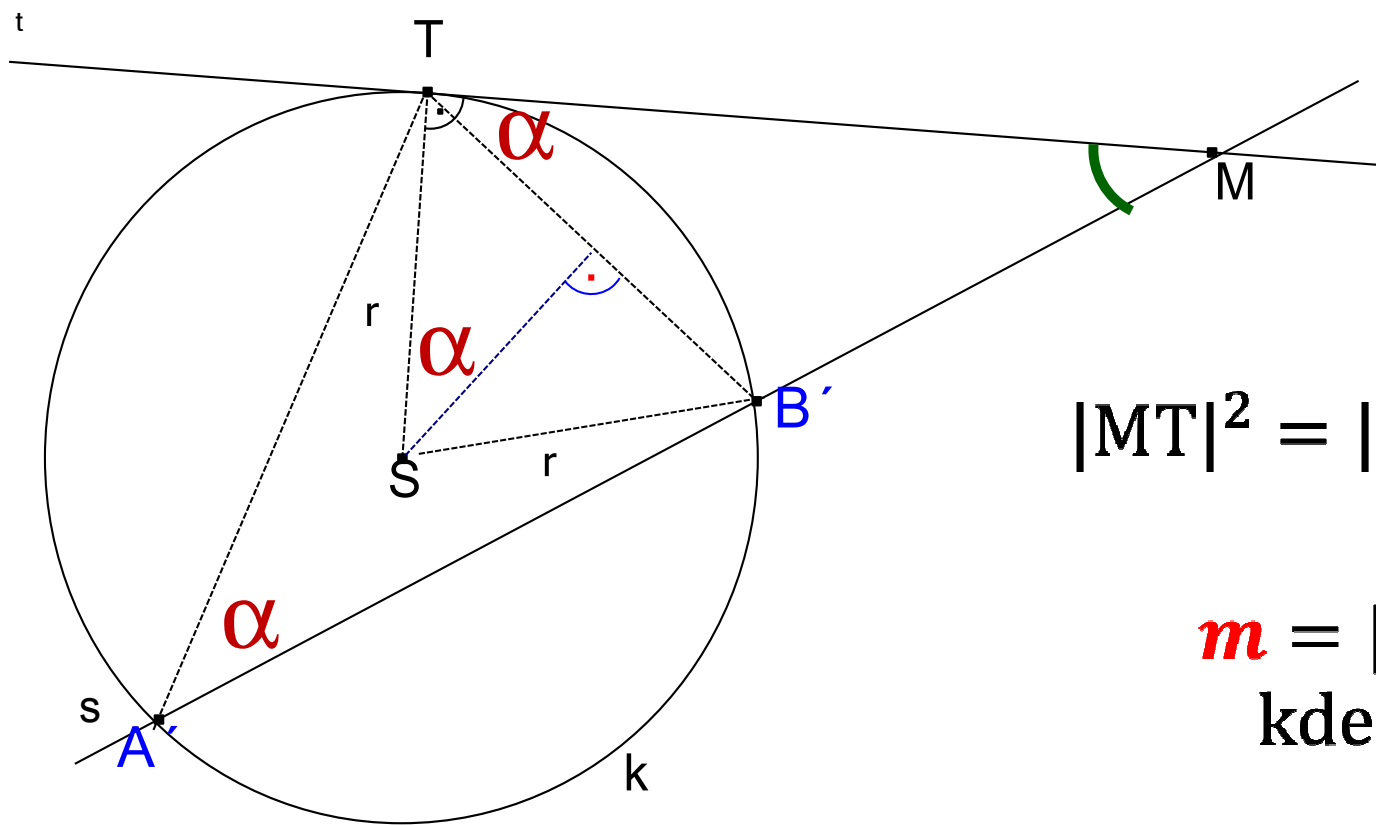
(2) $m > 0 \Leftrightarrow M$ leží vně k

$m < 0 \Leftrightarrow M$ leží uvnitř k

$m = 0 \Leftrightarrow M \in k$

$A=B \equiv T$

$\Delta MA'T \sim \Delta MTB'$



$$\frac{|MT|}{|MA'|} = \frac{|MB'|}{|MT|}$$

$$|MT|^2 = |MA'| \cdot |MB'| = m$$

$$m = |MT|^2 = q^2 - r^2,$$

kde $q = |MS|$

Věta: Pro mocnost bodu M ke kružnici k (S, r) platí:

$$m = q^2 - r^2, \text{ kde } q = |MS|$$

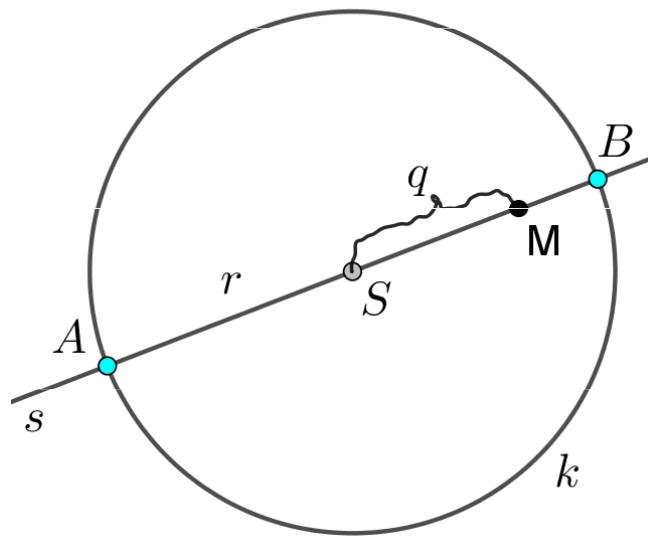
Dk.

1) M vně k



2) $M \in k \dots q = r \dots m = 0$

3) M uvnitř k



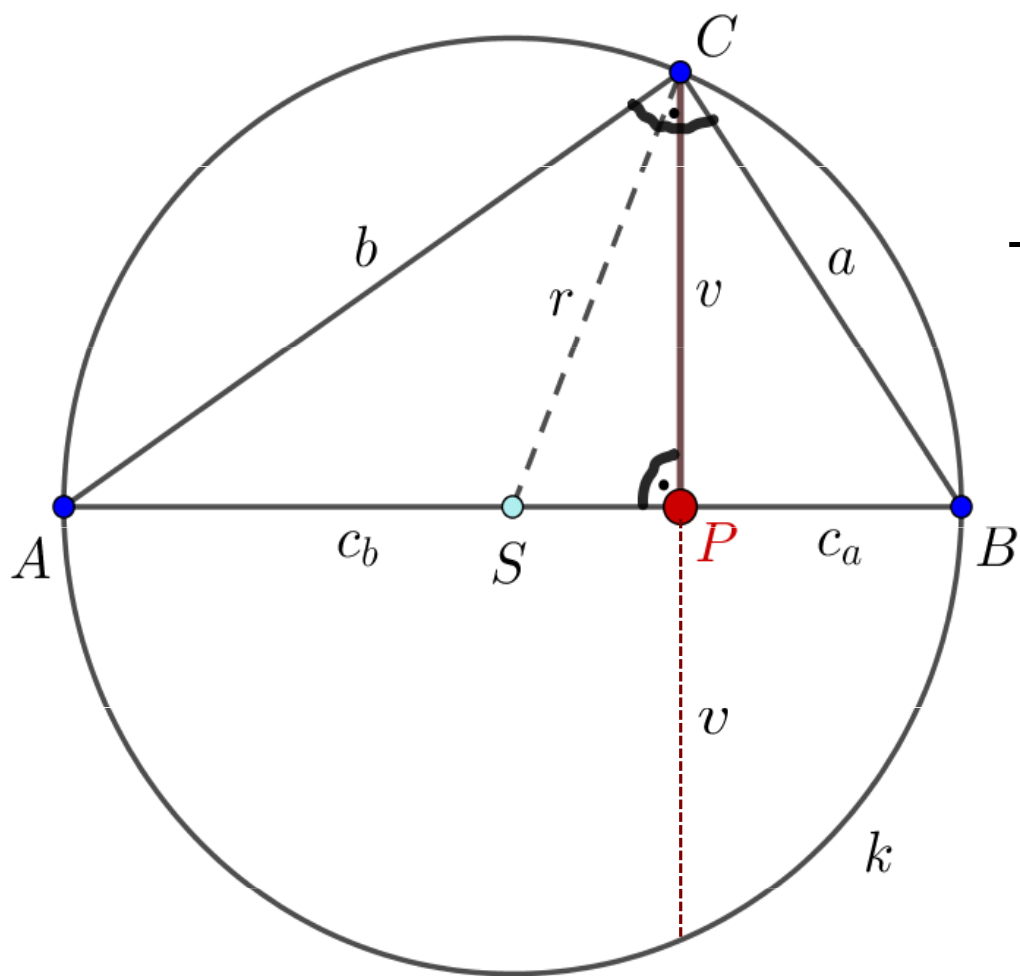
$$\begin{aligned} m &= -|MA| \cdot |MB| = \\ &= -(r + q)(r - q) = \\ &= q^2 - r^2 \end{aligned}$$

cbd.

Př.

Je dán čtverec KLMN o straně a . Urči mocnost bodu L ke kružnici a) opsané, b) vepsané.

Další souvislosti (např. odvození Euklidových vět, chordála):



m ... mocnost P ke k :

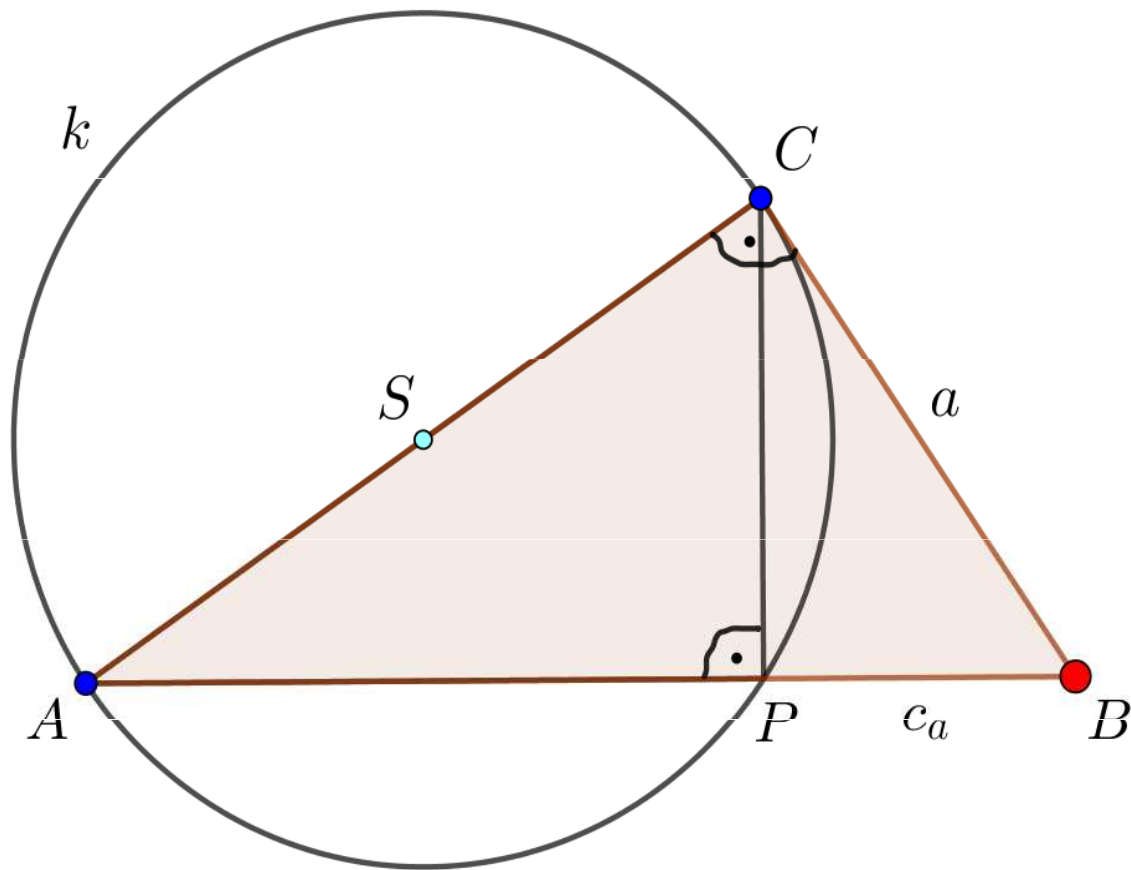
$$-c_a \cdot c_b = m = |PS|^2 - r^2 = -v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = c_a \cdot c_b$$

EV o výšce

nebo:

$$-m = v \cdot v = c_a \cdot c_b$$



B, k

$$a^2 = c \cdot c_a$$

EV o odvěsně

Definice

= zavedení nového pojmu

„Říkáme, že ...“

„ ... nazýváme ...“

- přesné („neprůstřelné“)
- definicí obvykle začínáme, ale někdy je vhodné ukázat k ní cestu, příp. ukázat její korektnost
- „nedůsledně“ (nedefinovat pojmy, které definici nepotřebují)

SYMBOLIKA:



DEFINICE

Kombinace

Kombinace s opakováním

K -členná kombinace ~~bez opakování~~ z n prvků je **neuspořádaná** k -tice, v níž ~~nezáleží na pořadí~~ prvků sestavená pouze z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

KOMBINATORIKA

Př.

A, B, E, F, L, N, O, T

Vyber z nich: a) samohlásky b) slovo

a) A, E, O neuspořádaná trojice
(nezáleží na pořadí)

b) FOTBAL uspořádaná šestice
(záleží na pořadí)

Definice faktoriálu:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n! := n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Dodefinujeme: $0! := 1$

Proč ?

Nekonečné řady

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = ?$$

$$= 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$= 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

$$= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots)$$

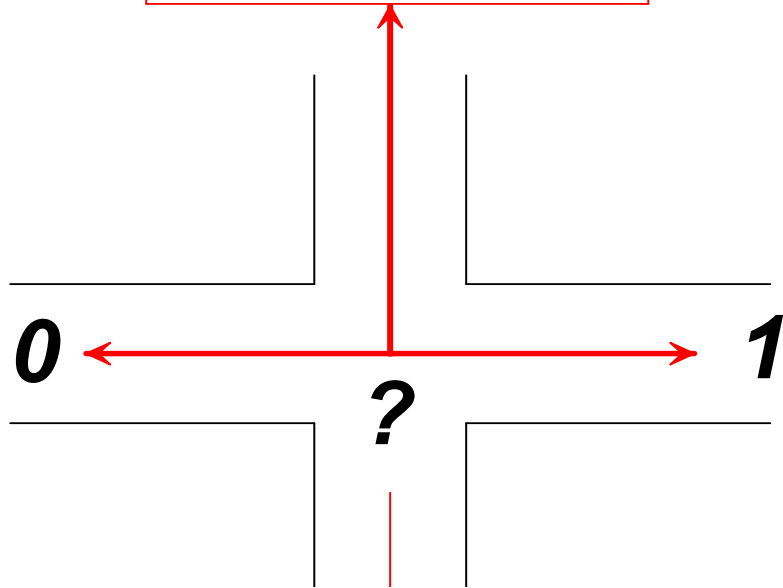
S



$$S = 1 - S$$

$$S = \frac{1}{2}$$

***precizace
pojmu***



intuitivní chápání řad



přesná definice pojmu
„součet nekonečné řady“
(limita částečných součtů)

Definice pravděpodobnosti

Předpoklady:

- (1) Náhodný pokus má n možných výsledků
 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$.
- (2) Všechny výsledky jsou „rovnocenné“.
- (3) Vždy nastane právě jeden výsledek.

$$A \subset \Omega$$

počet příznivých výsledků
(výsledků příznivých jevu A)

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

počet všech výsledků)

$P(A)$ **pravděpodobnost jevu A**

$$m \leq n$$

Nezávislé jevy

Def :

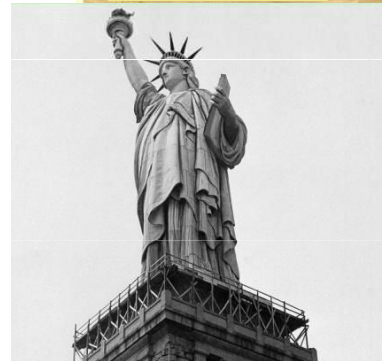
Říkáme, že jsou náhodné jevy A, B **nezávislé**, právě když platí:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Prohlášení nezávislosti



4. 7. 1776



Př. narození 3 dětí v rodině

$$\Omega = \{ \underbrace{[C, C, C]}_{\text{blue}}; \underbrace{[C, C, D]}_{\text{blue}}; \underbrace{[C, D, C]}_{\text{blue}}; \underbrace{[D, C, C]}_{\text{blue}}; \underbrace{[C, D, D]}_{\text{blue}}; \underbrace{[D, C, D]}_{\text{blue}}; \underbrace{[D, D, C]}_{\text{green}}; \underbrace{[D, D, D]}_{\text{green}} \}$$

A: „Nejstarší dítě je chlapec.“

$$P(A) = 1/2$$

B: „Prostřední dítě je dívka.“

$$P(B) = 1/2$$

A ∩ B:

„Nejstarší dítě je chlapec a prostřední je dívka“

$$P(A \cap B) = 1/4$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

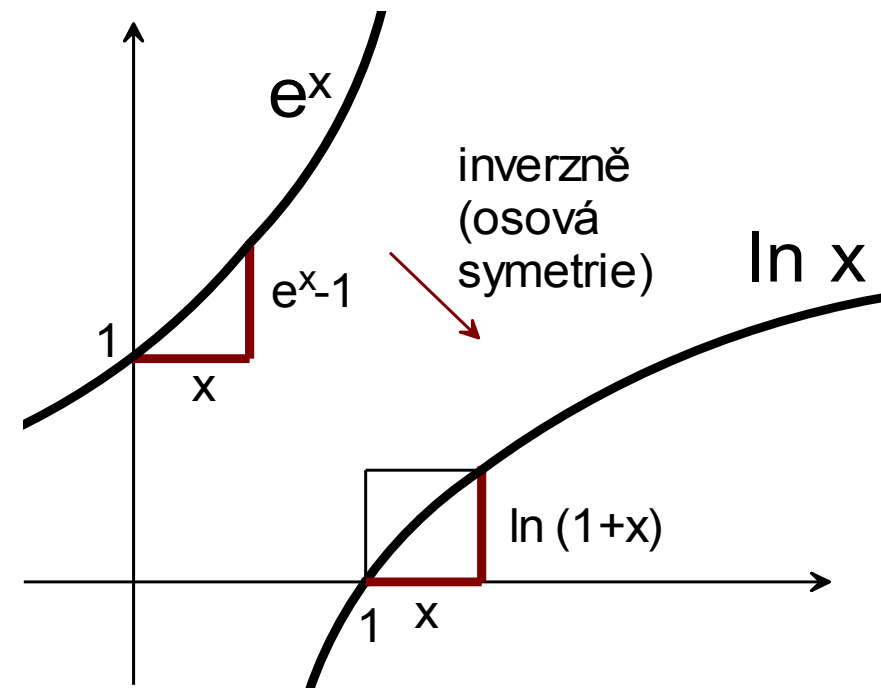
Eulerovo číslo

$$1) \quad e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow 0} \left(1 + n\right)^{\frac{1}{n}}$$

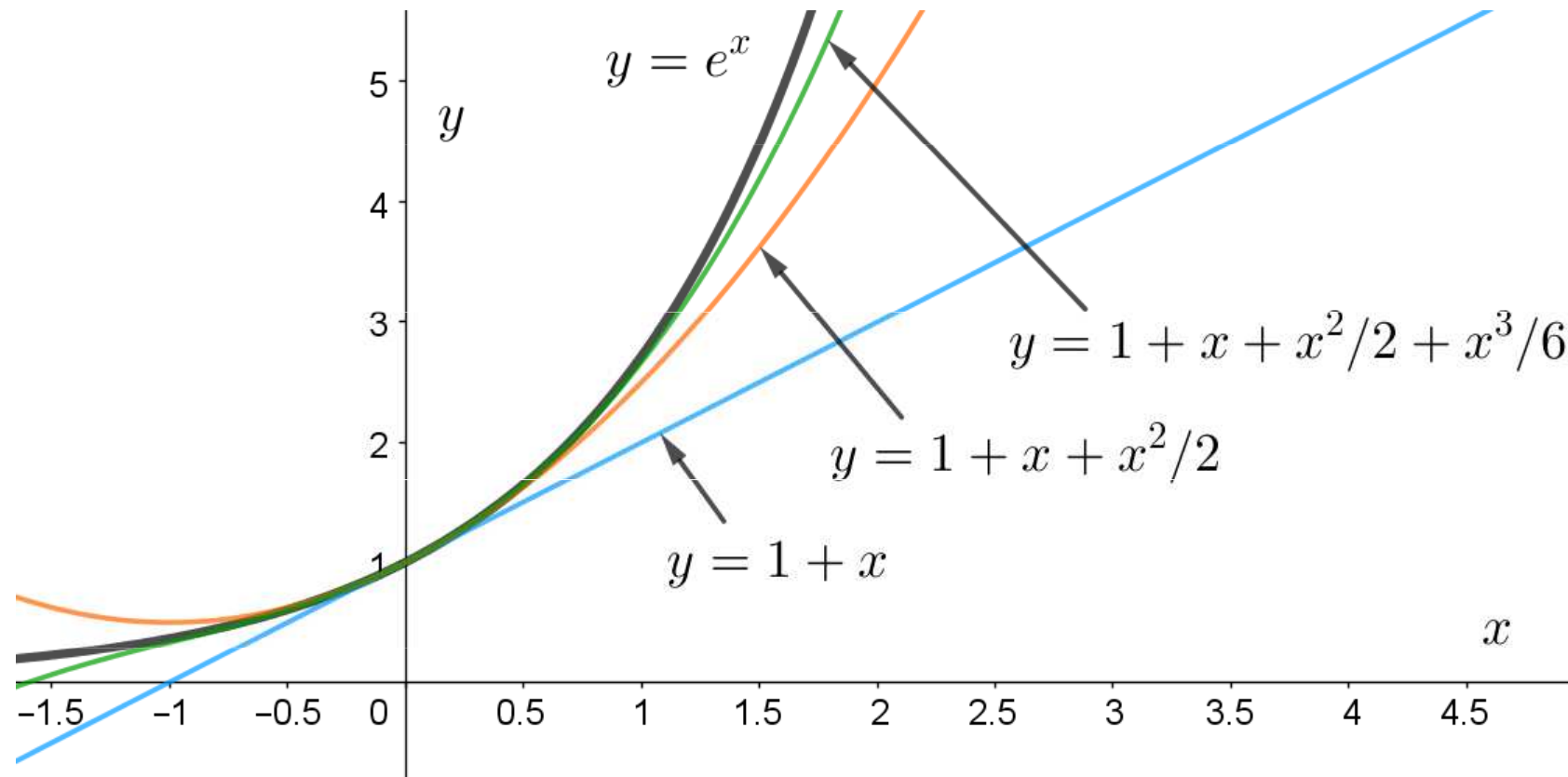
$$\lim_{n \rightarrow 0} \left(1 + n\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1+x) \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e$$

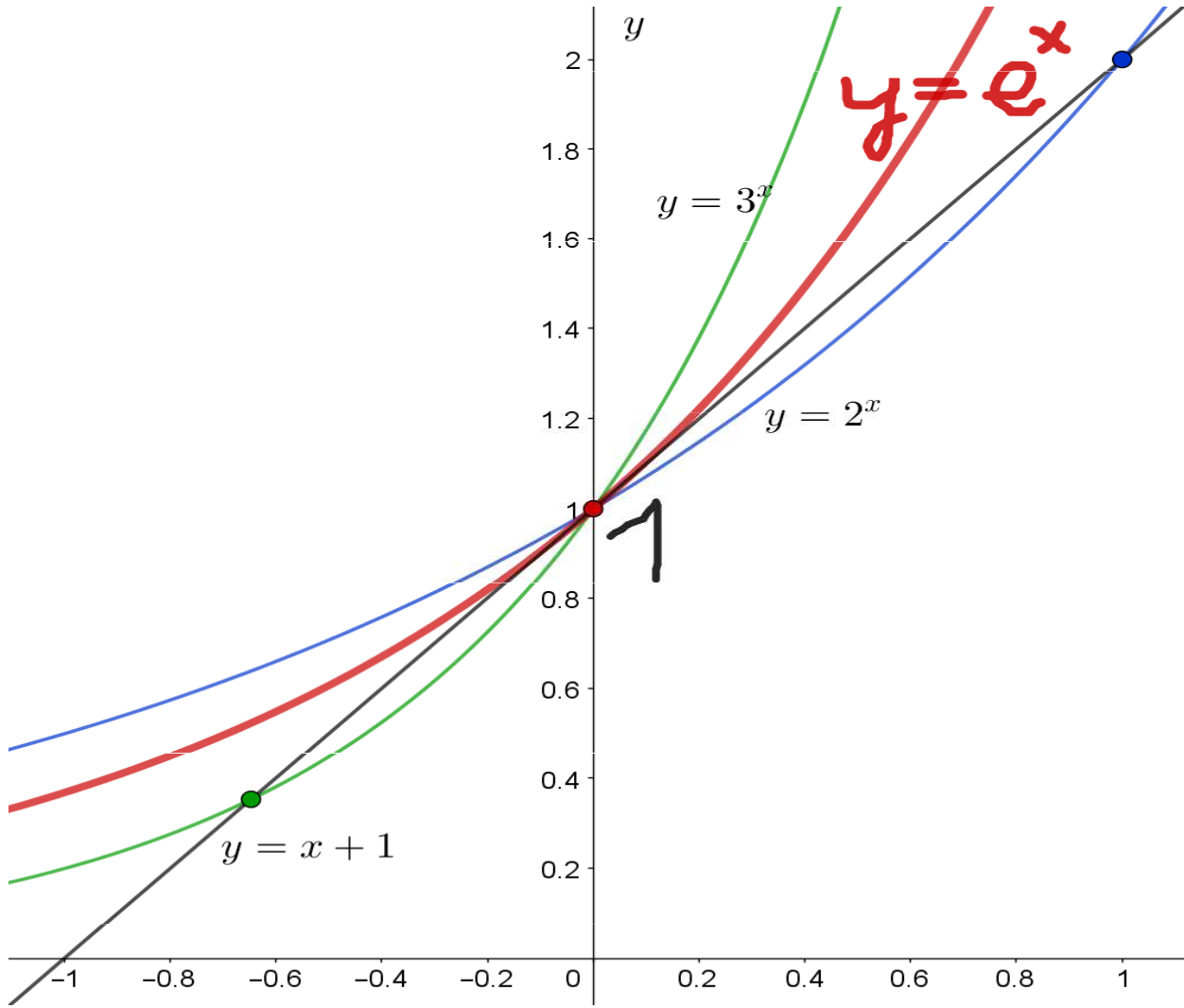
(Note: A blue circle highlights the fraction $\frac{\ln(1+x)}{x}$ in the previous equation, with a blue arrow pointing to a blue '1' above it.)



$$2) \quad e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$



SSS



V ě t

y:

- popisuje vlastnosti definovaného pojmu

Pro ... platí ...

- využívat kvantifikátory \forall, \exists
- často umožňuje snadnější výpočet než ze vztahu definičního
- důsledky ...

Základní věta algebry:

Obecná algebraická rovnice má v \mathbb{C} alespoň jeden kořen.



Obecná algebraická rovnice n -tého stupně má v \mathbb{C} právě n kořenů.



Důkazy:

- slouží i k hlubšímu pochopení dané látky
- podporují logické myšlení

$$A \Rightarrow B \quad (\rightarrow A \Leftrightarrow B)$$

1) přímý

2) nepřímý

3) sporem

matematická indukce – věty typu $\forall n \in \mathbb{N}$:

Příklad
(MO)

Existuje jediné prvočíslo p , pro které je p^2+2 též prvočíslem.

Důkazy vět tvaru ekvivalence

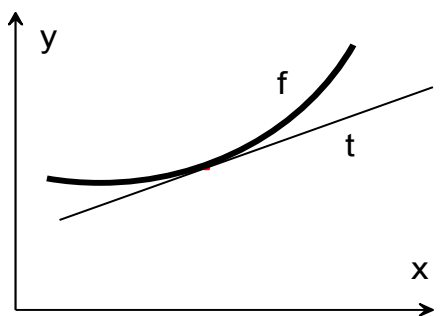
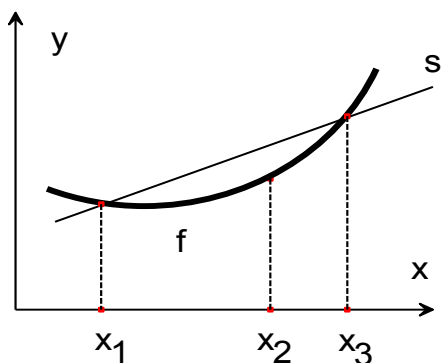
$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$$

příp.

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)]$$

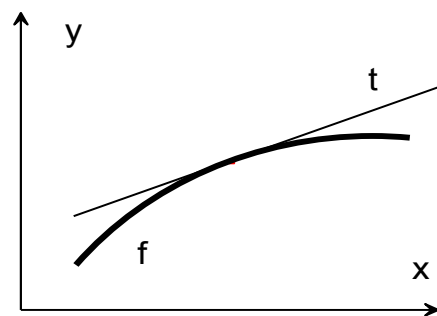
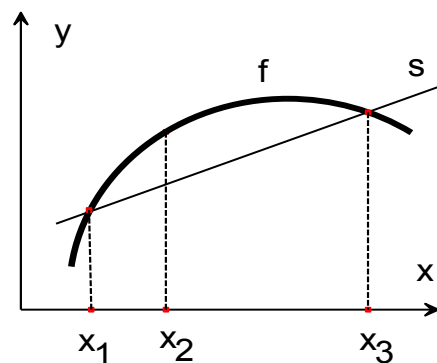
Definice „na základě obrázku“:

konvexní funkce



"graf fce nad tečnou"

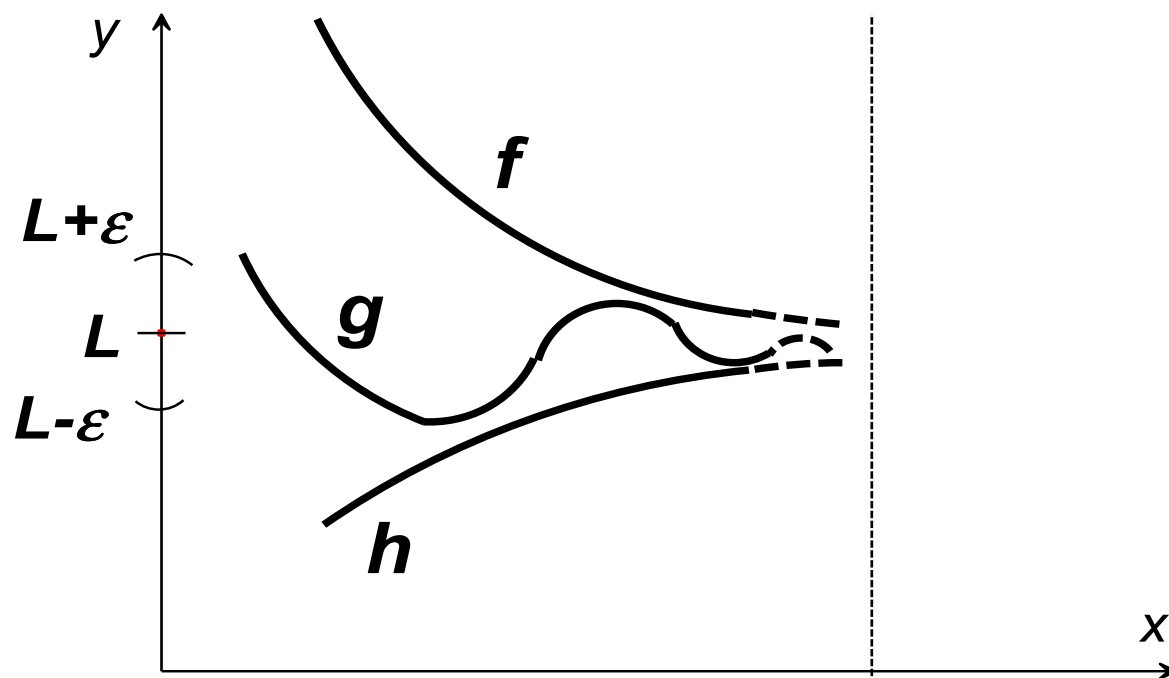
konkávní funkce

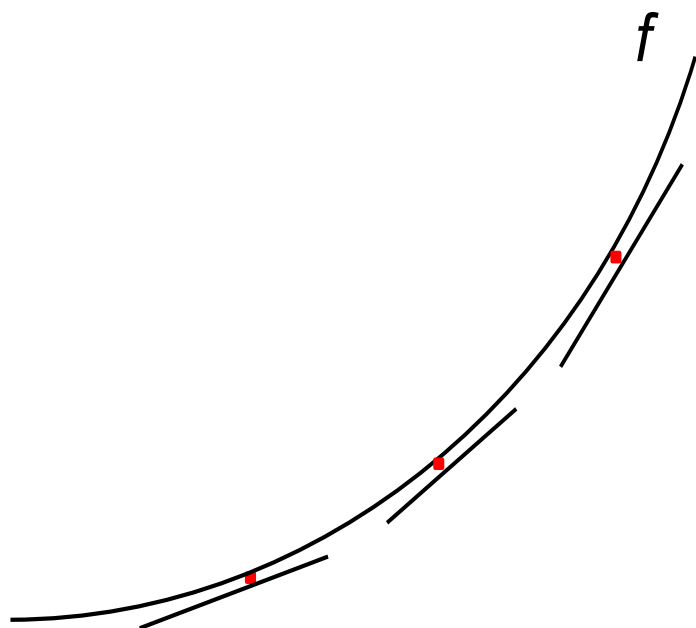


"graf fce pod tečnou"

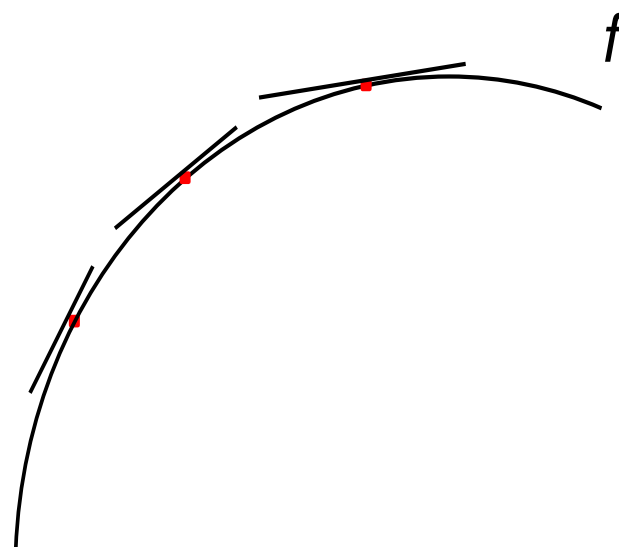
Důkazy „na základě obrázku“:

Věta o 2 policajtech





$f'' > 0$
 f je konvexní



$f'' < 0$
 f je konkávní

Užití vzorců



Pythagorova věta, diskriminant,
rozkladové vzorce: $a^2 - b^2 \dots$



variace, vzdálenost bodu od přímky, $(a \pm b)^2, \dots$



KP součinu

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

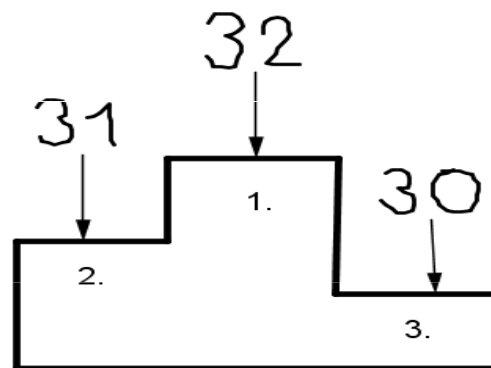


Př. počet medailových umístění na MS ve fotbale (32 týmů) ?

vzorec:

$$V(3, 32) = \frac{32!}{(32 - 3)!} = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$$

KP součinu



$M[m_1, m_2]$

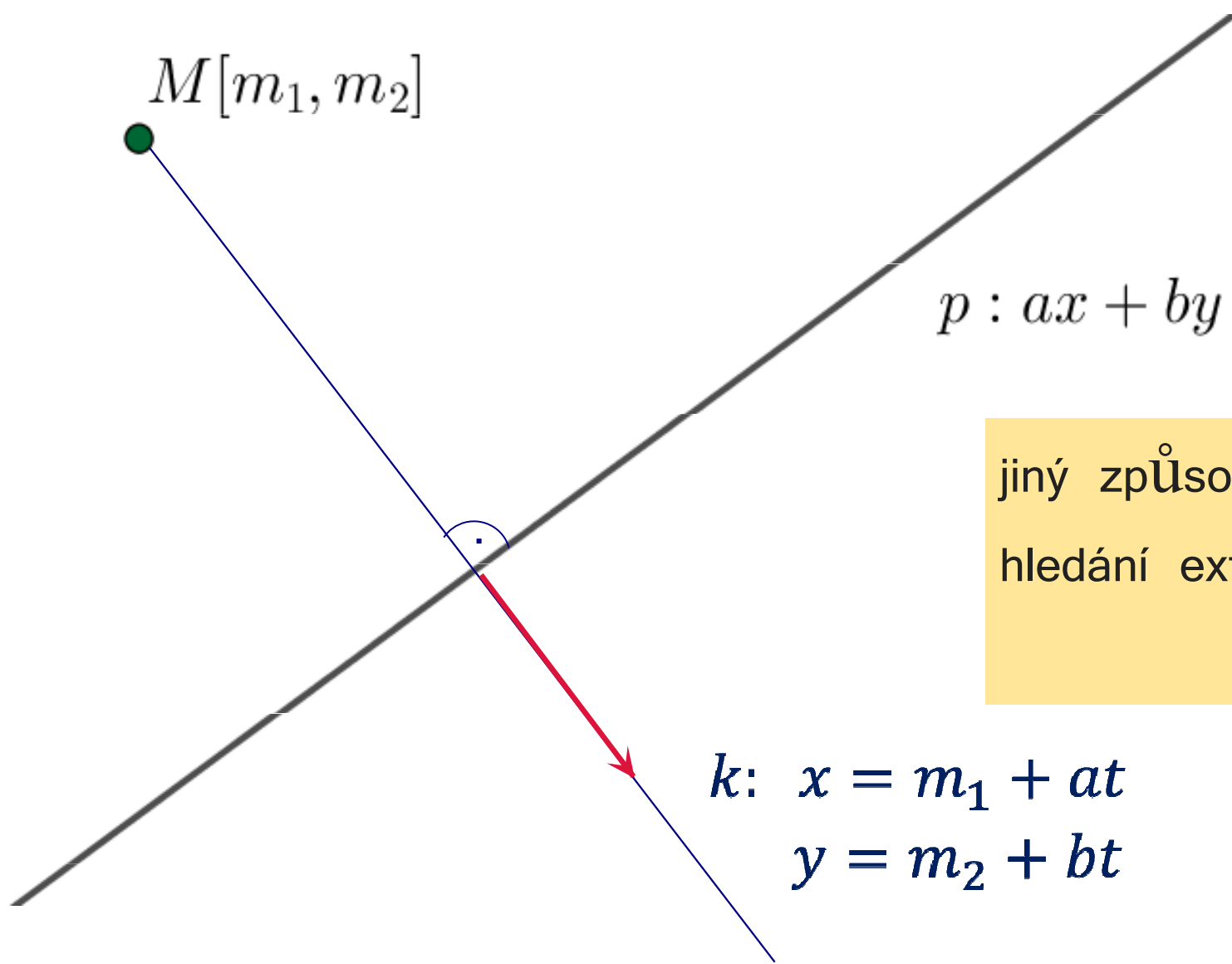
$p : ax + by + c = 0$

jiný způsob:

hledání extrému (minima)

$k: x = m_1 + at$

$y = m_2 + bt$



Součet nekonečné geometrické řady řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = ?$$

$$\frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^3 + \dots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{2}{7}} = \frac{2}{5}$$

nebo bez

vzorce:

$$\frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^3 + \dots = S \quad / \cdot \frac{2}{7} (q)$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^3 + \left(\frac{2}{7}\right)^4 + \dots = \frac{2}{7}S$$

$$S - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}S$$

$$\frac{5}{7}S = \frac{2}{7}$$

$$S = \frac{2}{5}$$

kořeny kvadratické rovnice:

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \quad /+1$$

$$x^2 - 2x + 1 + 5 = 1$$

$$(x - 1)^2 = -4$$

$$K = \emptyset$$

„objevení nového světa
– řešení komplexních čísel“
(4. ročník)

$$\rightarrow x^2 + 1 = 0$$

C

polož: $i^2 := -1$

$$(x - 1)^2 = 4i^2$$

$$x - 1 = \pm 2i$$

$$K = \{1 \pm 2i\}$$

hyperbola - asymptoty

$$y = \pm \frac{b}{a}(x - m) + n$$

$$H: \frac{(x - 5)^2}{7} - \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$$

↓

$$\left[\frac{x - 5}{\sqrt{7}} - \frac{y + 2}{3} \right] \cdot \left[\frac{x - 5}{\sqrt{7}} + \frac{y + 2}{3} \right] = 1$$

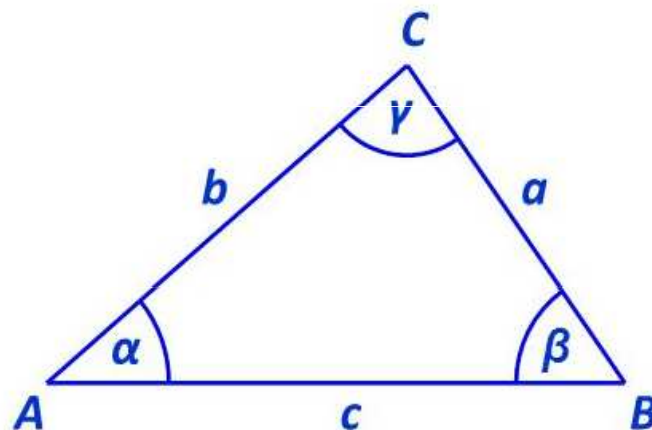
$$y + 2 = \pm \frac{3}{\sqrt{7}}(x - 5)$$

$$y = \pm \frac{3}{\sqrt{7}}(x - 5) - 2$$

Cardanovy vzorce:



Jak si pamatovat vzorce?



Věta kosinová: Pro každý trojúhelník ABC , jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikosti α, β, γ , platí

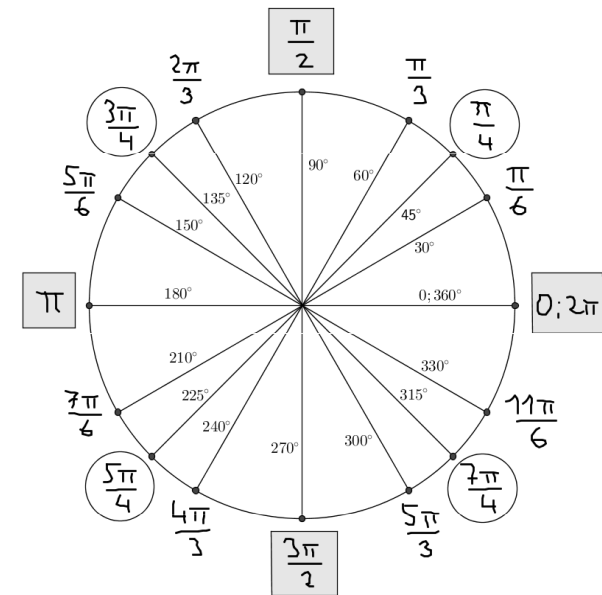
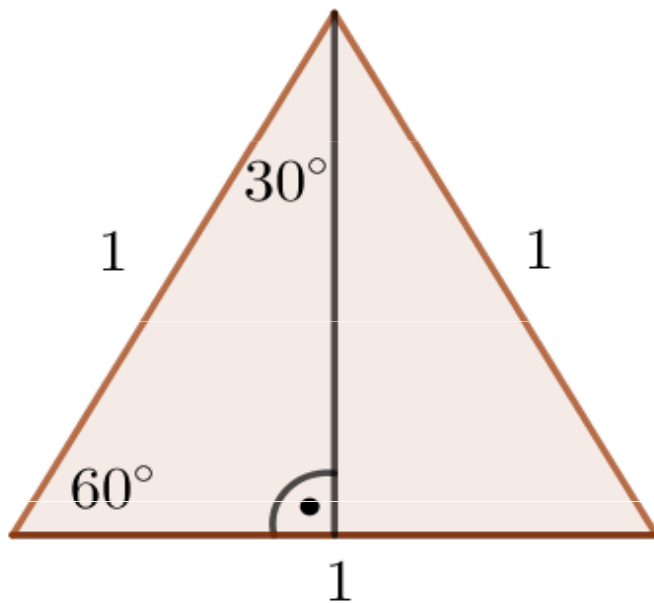
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

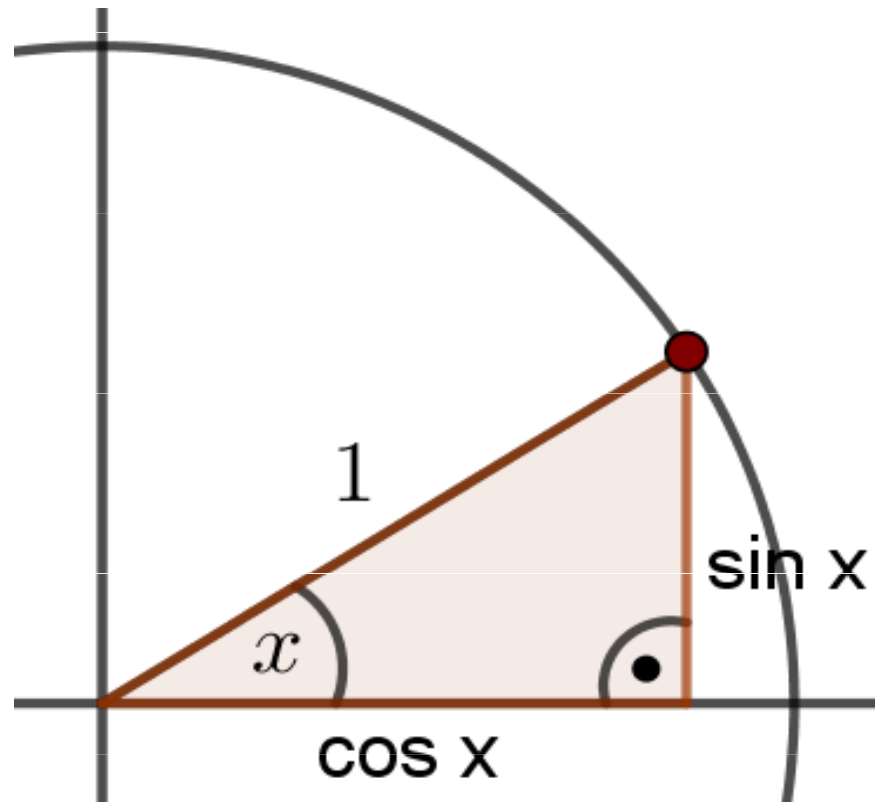
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Hodnoty gon. funkcí:

rovnostranný tr.

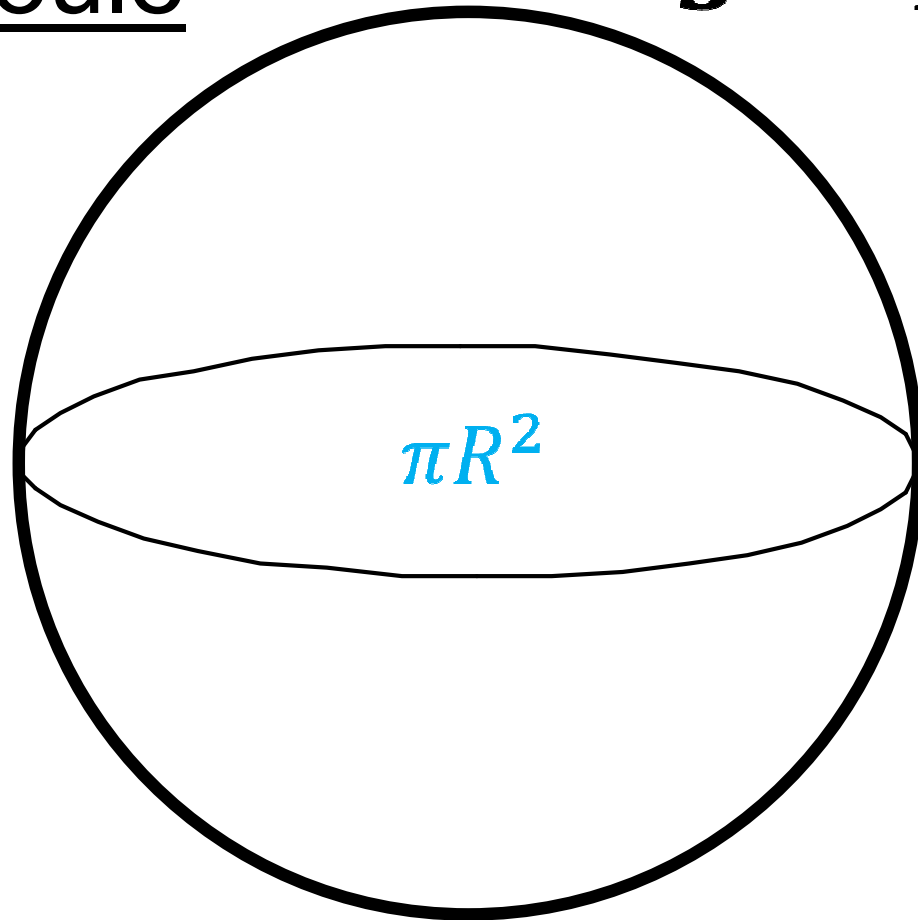


$$\forall x \in \mathbf{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$



Povrch
koule

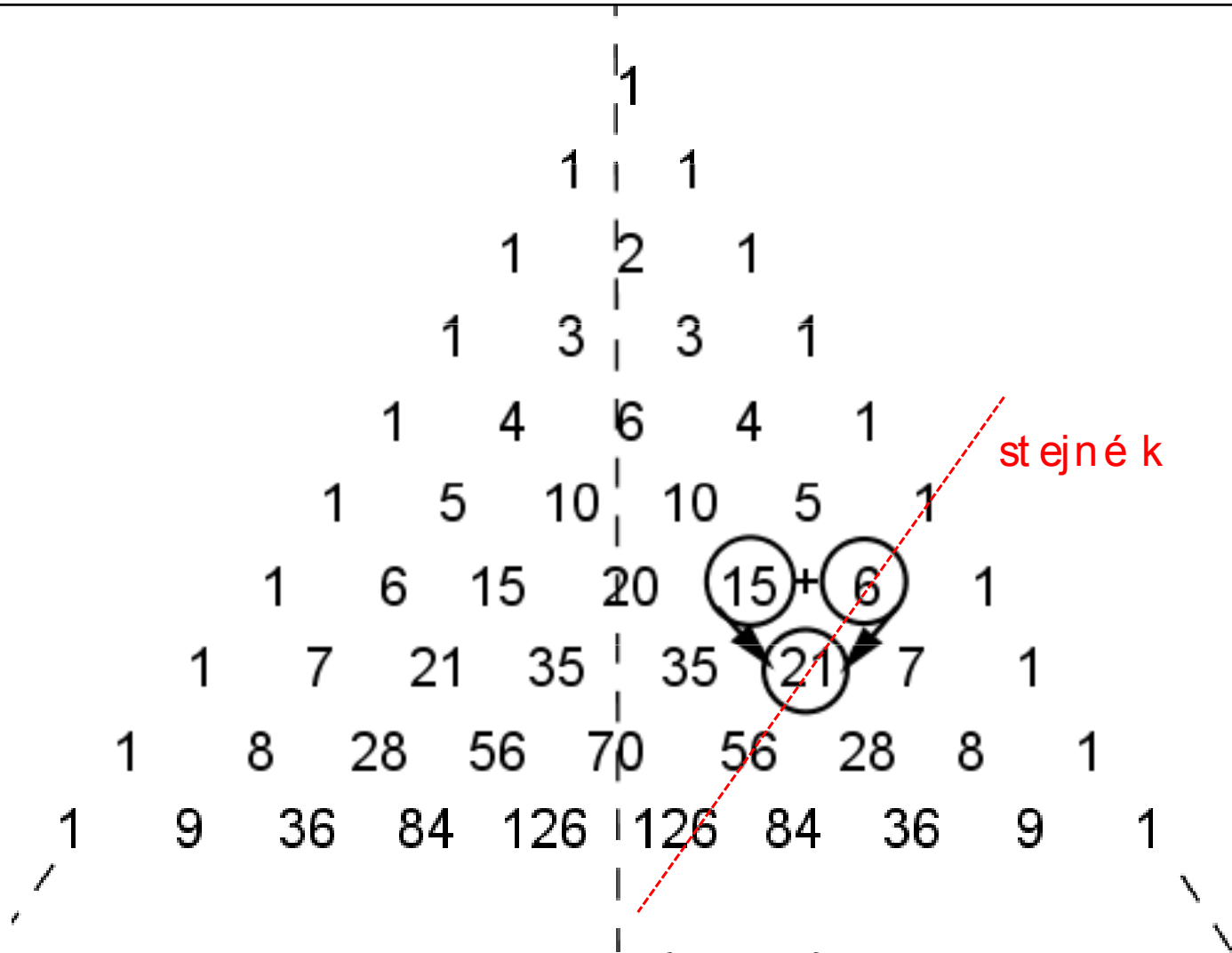
$$S = 4\pi R^2$$



Povrch koule je
čtyřnásobkem
obsahu jejího
největšího kruhu.
(Archimédes)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$k < n$$



$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

čistě kombinatorický důkaz:

$n + 1$ prvků:



$\binom{n+1}{k+1}$ $(k+1)$ -tic vybraných z $n+1$ prvků



n prvků

k pozic

je jich $\binom{n}{k}$



n prvků

$k+1$ pozic

je jich $\binom{n}{k+1}$

Součet n členů aritmetické posloupnosti:

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$



K.F. Gauss (1777 – 1855)

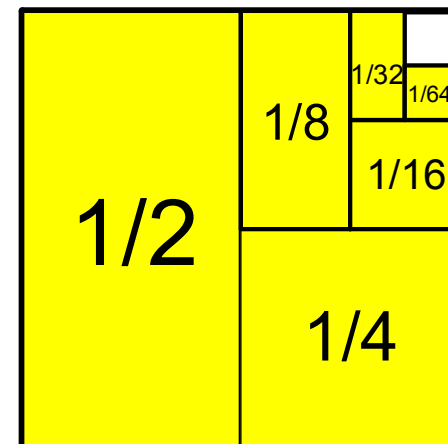
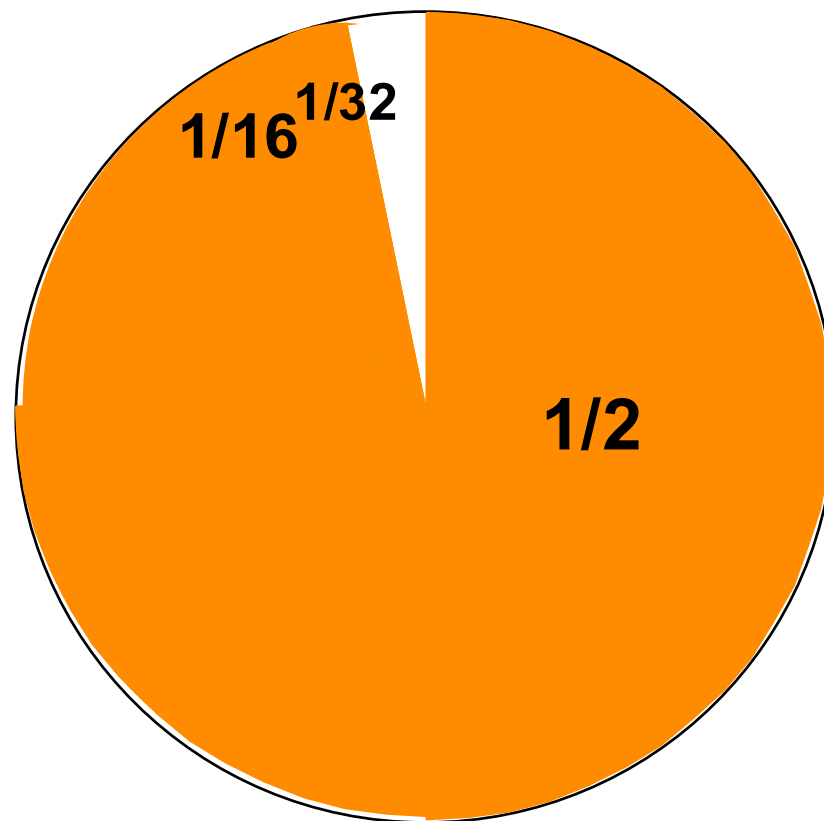
$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = \mathbf{5050}$$

součet 101

součet 101

50 dvojic

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1$$



SŠ matematika – témata:

Výroky, množiny

Mocniny, odmocniny, číselné výrazy



Úpravy výrazů, vyjádření neznámé ze vzorce

Rovnice a nerovnice

Kvadratické rovnice (→ zlatý řez)

Iracionální rovnice

Kvadratické nerovnice

Rovnice a s parametry



Planimetrie

$$2 - \frac{3}{11} = \frac{19}{11}$$

$$\sqrt{12} = \cancel{\sqrt{4 \cdot 3}} = 2\sqrt{3}$$

$$x^2 + 4x - 21 = (x - 3) \cdot (x + 7)$$

$$\frac{a^3 - 1}{a^2 - 3a - 10} \div \frac{a^2 - 1}{a + 2} = \frac{(a - 1)(a^2 + a + 1)}{(a - 5)(a + 2)} \cdot \frac{a + 2}{(a + 1)(a - 1)} = \dots$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x}} = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}}}{x} \right)^{\frac{1}{3}} = \dots = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$$

$$x^2 - 6x = \cancel{x^2 - 6x + 9 - 9} = (x - 3)^2 - 9$$

učebnice pro gymnázia 1. ročník:

Příklad 4

Řešte rovnici

$$|x - 2| + |2x - 8| = 5. \quad (1)$$

Řešení

Nulové body dvojčlenů uvnitř absolutních hodnot jsou 2 a 4. Těmito body rozdělíme množinu \mathbb{R} na tři intervaly $(-\infty, 2)$, $\langle 2, 4$ a $\langle 4, +\infty)$. Jak se v těchto intervalech „chovají“ dvojčleny uvnitř absolutních hodnot i absolutní hodnoty samé, přehledně zachytíme v tabulce:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$x - 2$	-	0	+	+	+
$2x - 8$	-	-	-	0	+
$ x - 2 $	$2 - x$	$x - 2$		$x - 2$	
$ 2x - 8 $	$8 - 2x$	$8 - 2x$		$2x - 8$	

Využijeme poslední dva řádky tabulky a rovnici (1) vyřešíme v každém intervalu zvlášť.

a) Pro $x \in (-\infty, 2)$:

$$\begin{aligned} 2 - x + 8 - 2x &= 5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Protože $\frac{5}{3} \in (-\infty, 2)$, je toto číslo jediným řešením rovnice (1) v intervalu $(-\infty, 2)$.

Kvadratické nerovnice ($D < 0$)



R

$$x^2 - 4x + 7 > 0$$

grafické řešení ...

$$(x - 2)^2 - 4 + 7 > 0$$

$$(x - 2)^2 > -3$$

$$K = R$$

Iracionální rovnice

- a) zužování def. oboru rovnice
- b) zkouška jako nutná součást řešení

R

$$x - 5 = \sqrt{x + 7}$$

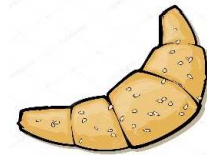
Substitute

$$\frac{7 - \sqrt{x + 11}}{\sqrt{x + 11} - 3} = 2$$

y

$$\log x^2 + \log x^3 + \log x^7 = 24$$

$$2 \log x + 3 \log x + 7 \log x = 12$$



$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$(x^2 - \quad)(x^2 - \quad) = 0$$

Funkce

Rovnice exponenciální, logaritmické,
goniometrické

Trigonometrie sinová a kosinová věta

Stereometrie

Kombinatorika

Komplexní čísla

Analytická geometrie

Posloupnosti a řady

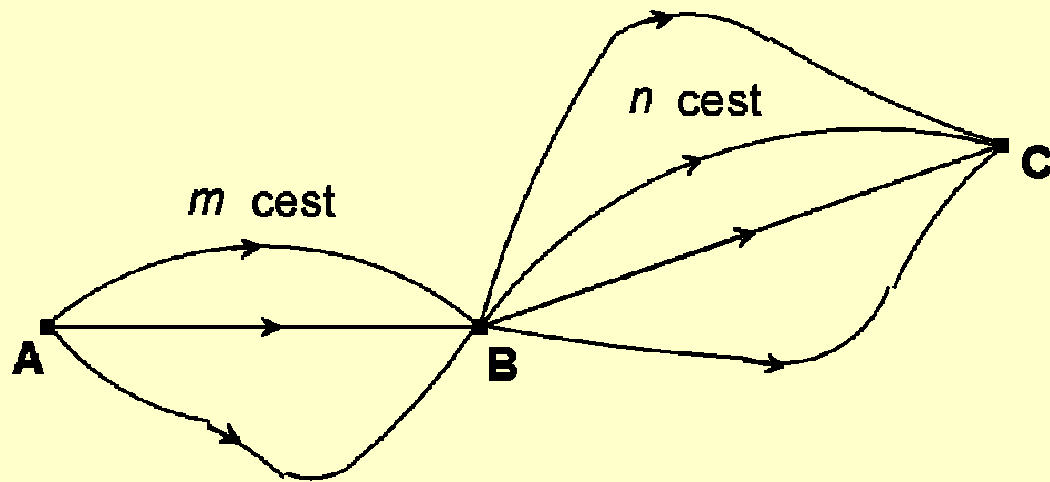
Diferenciální počet

Pravděpodobnost a statistika

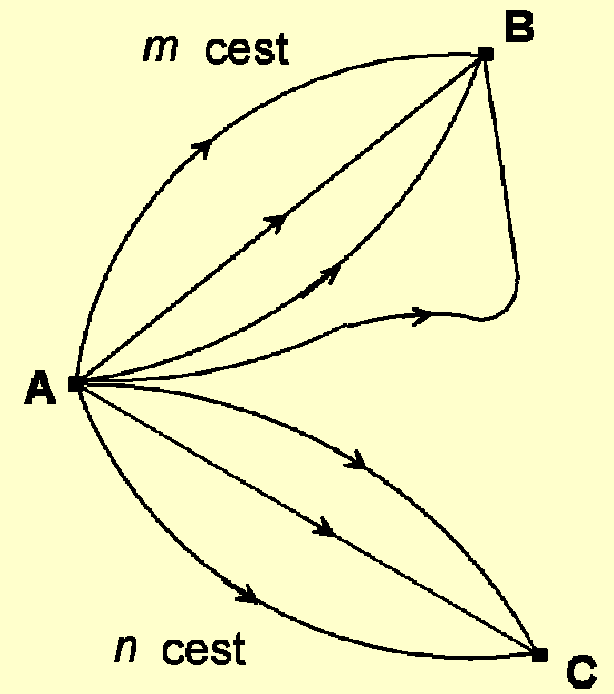
Integrální počet

KOMBINATORIKA

KP součinu



KP součtu



$m \cdot n$ cest $A \rightarrow C$
z A

$m + n$ cest

Terminologie

permutace ~~bez opakování~~ – permutace s opakováním

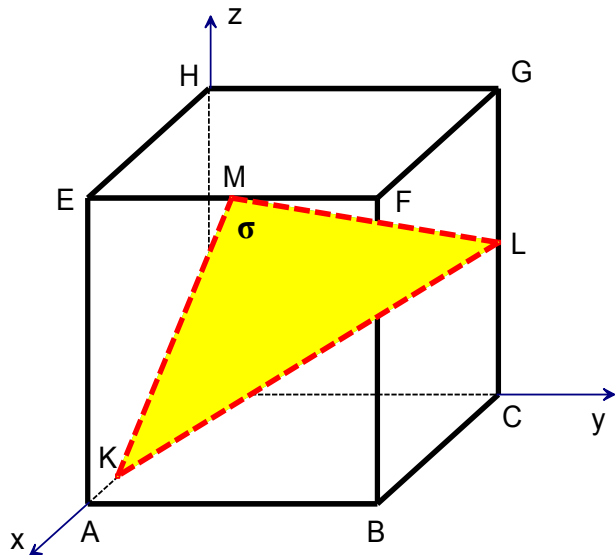
variace ~~bez opakování~~ – variace s opakováním

kombinace ~~bez opakování~~ – kombinace s opakováním

Domácí úkol 3. ročník

ANALYTICKÁ GEOMETRIE V KRYCHLI

V rohu KASS je krychle **ABCDEFGH** s vrcholy **A[4,0,0]**; **C[0,4,0]**; **D[0,0,0]**; **E[4,0,4]**. Na hranách krychle jsou dány body K, L, M. Bod L je středem hrany CG, bod M střed hrany EF a bod K leží na hraně AD blíže k vrcholu A a dělí hranu AD v poměru délek 1:3. Body K,L,M je veden řez krychlí (na obrázku není řez celou krychlí). Rovinu řezu označme σ .



- 1) Narýsuj krychli (podle obrázku v rozumném měřítku na osách) a rovinu řezu. Zapiš souřadnice všech bodů a také souřadnice geometrického středu S krychle.
- 2) Urči obecnou rovnici roviny řezu.
- 3) Prochází řez bodem S ? Dokaž analyticky.
- 4) Urči souřadnice průsečíku P tělesové úhlopříčky EC s rovinou řezu.
- 5) Vrchol E jest promítnut kolmo do roviny řezu. Urči souřadnice tohoto průmětu E' .
- 6) Rovina řezu protíná krychli ve spodní podstavě. Urči rovnici této úsečky.
- 7) Konstrukčně sestroj řez krychle rovinou σ .
- 8) Při konstrukci řezu je užitečné vědět, ve kterém bodě protne přímka ML rovinu xy (tímto průsečíkem bude procházet řez). Analyticky zjisti souřadnice tohoto průsečíku R.

Jméno:

Třída:

Body:

Známka:

Př. Klasifikuj křivky:

$$\Gamma_1 : xy = 0$$

$$\Gamma_2 : xy = 1$$

$$\Gamma_3 : x + y + xy = 0$$

$$\Gamma_4 : x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$$

$$\Gamma_5 : x^2 + 2y^2 - 2 = 0$$

$$\Gamma_6 : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$$

$$\Gamma_7 : x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$$

$$\Gamma_8 : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$$

$$\Gamma_9 : x^2 - y^2 + x - y = 0$$

$$\Gamma_{10} : x^2 - y^2 - x + y - 1 = 0$$

Test:

K daným rovnicím přiřaď příslušnou křivku:

- | | |
|-------------------------|------------------|
| (1) $x^2 + y = 0$ | (A) bod |
| (2) $x^2 + y^2 = 0$ | (B) přímka |
| (3) $x^2 + y^2 = 1$ | (C) 2 různoběžky |
| (4) $x^2 - y^2 = 0$ | (D) kružnice |
| (5) $x^2 + 2y^2 = 1$ | (E) parabola |
| (6) $x^2 - y^2 + 2 = 0$ | (F) elipsa |
| (7) $y^2 - 2y + 1 = 0$ | (G) hyperbola |

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

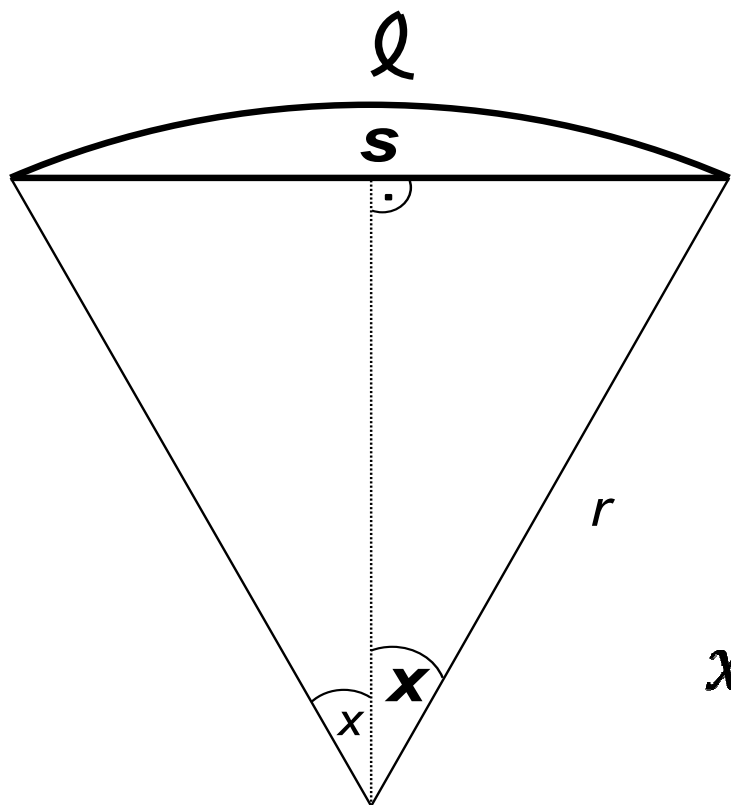
$$\sin x = \frac{s}{2r} \Rightarrow s = 2r \sin x$$

$$x = \frac{l}{2r} \Rightarrow l = 2rx$$

$$\frac{s}{l} = \frac{2r \sin x}{2rx} = \frac{\sin x}{x}$$

↓
1

↓
1



$x \rightarrow 0$

Př.

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f^{(2019)}(0) = ?$$

NEKONEČNÉ ŘADY

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = ?$$



Studenti mohou snadno podlehnout dojmu, že každou řadu lze sečíst „pomocí vzorce“.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

→ **posloupnost částečných součtů**

**definice součtu nekonečné řady,
konvergence a divergence nekonečné řady**

Nutná podmínka konvergence

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Věty
tvaru
implikace

Dk. Necht' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \mathbf{S}$

$$\begin{array}{ccc} a_n = s_n - s_{n-1} & & \\ n \rightarrow \infty & \downarrow & \downarrow \\ & \mathbf{S} & \mathbf{S} \end{array}$$

PRAVDĚPODOBNOST

- dělá studentům problémy
- volit různorodé a zajímavé příklady
- experimenty – náhodné pokusy (kostka, mince, papíry)



? MATURITA:

3 studenti jdou ke zkoušce za sebou a vytažená otázka se vyřazuje. Předpokládejme, že je mezi nimi jedna velmi těžká. První má pst $1/30$, že ji vytáhne.

Mají i druhý a třetí student stejnou pst, že ji vytáhnou ?

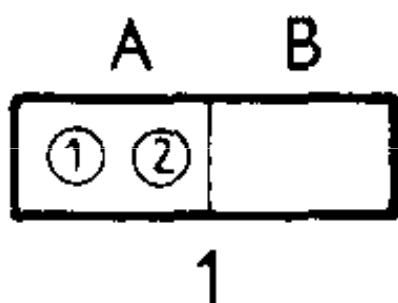
Mají všichni stejné podmínky ?



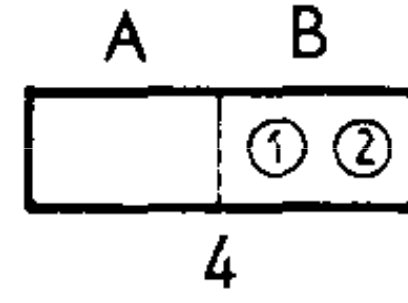
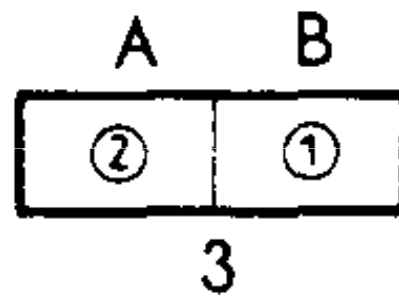
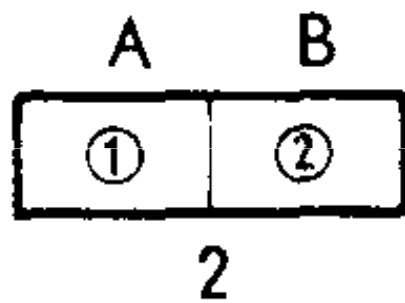
Pravděpodobnost a entropie

N částic plynu

$N = 2$



25 %



25 %

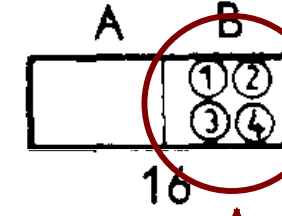
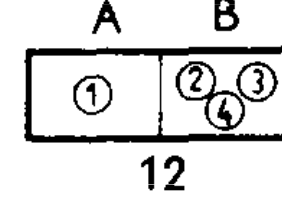
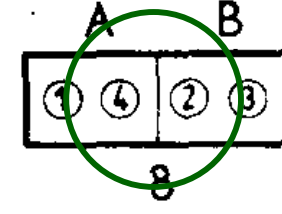
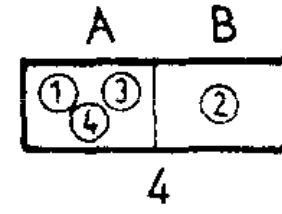
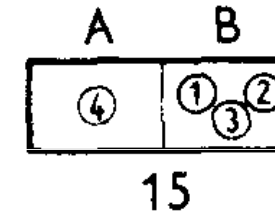
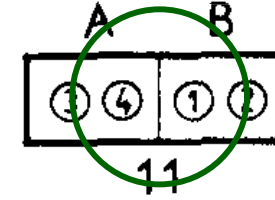
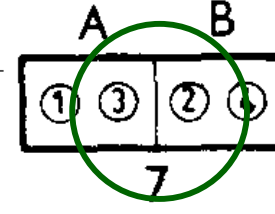
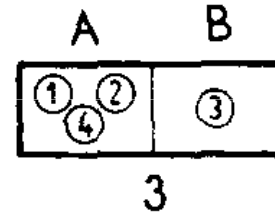
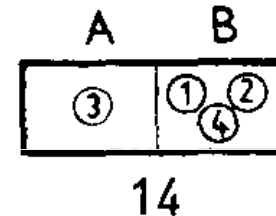
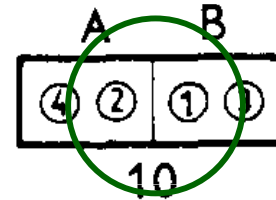
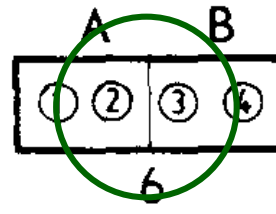
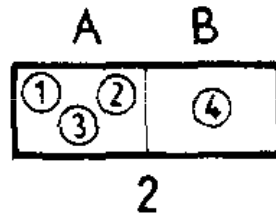
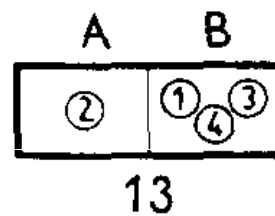
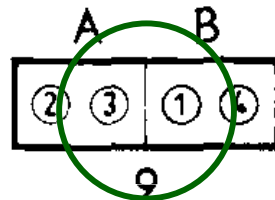
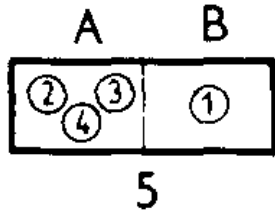
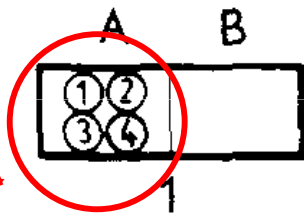
rovnovážný (makro) stav

50 %

$N = 4$

$1/16 \cong 0,06$
6 %

$6/16 \cong 0,38$
38 %



$1/16 \cong 0,06$
6 %

$$N = 100$$

$$\frac{1}{2^{100}}$$

Jednou za 2^{100} sekund $\cong 3 \cdot 10^{25}$ let $\cong 300$ bilionů \times stáří Země „dojde“ k samovolnému přechodu do nerovnovážného stavu.

Moje doporučení:

Nastavit jasná pravidla na začátku.

Žáci musí mít dobře vedený sešit.

Výuka nesmí být pouze frontální, je třeba zapojit žáky.

Nesnižovat své požadavky.

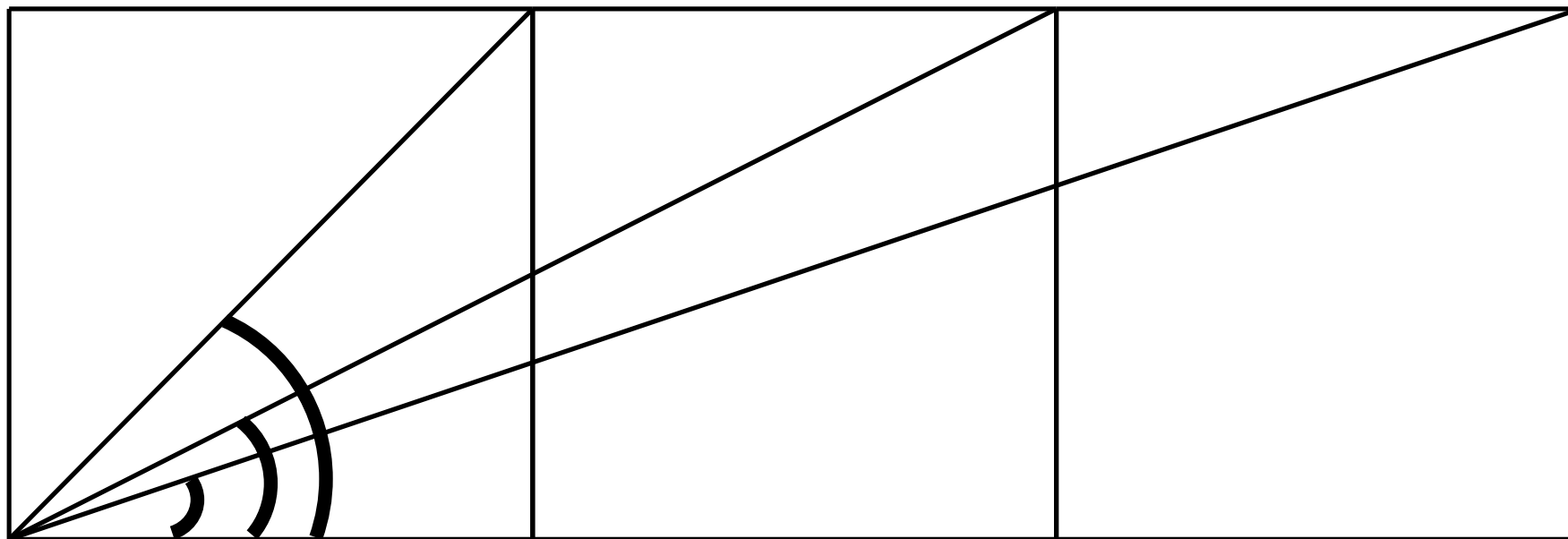
A dále ?



NAVÍ

C

Příklad

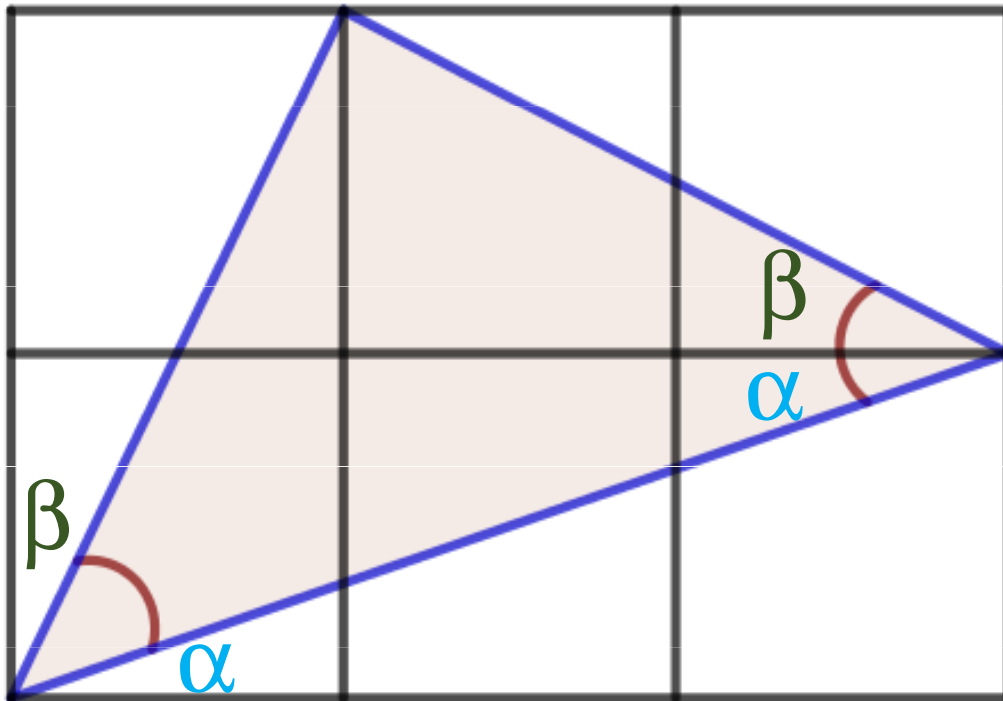


α β γ

$$\alpha + \beta + \gamma = ?$$

1) nižší gymnázium

→ čtvercová síť



rovnostranný Δ

$$90^\circ - (\alpha + \beta) = \alpha + \beta$$

$$\alpha + \beta = 45^\circ$$

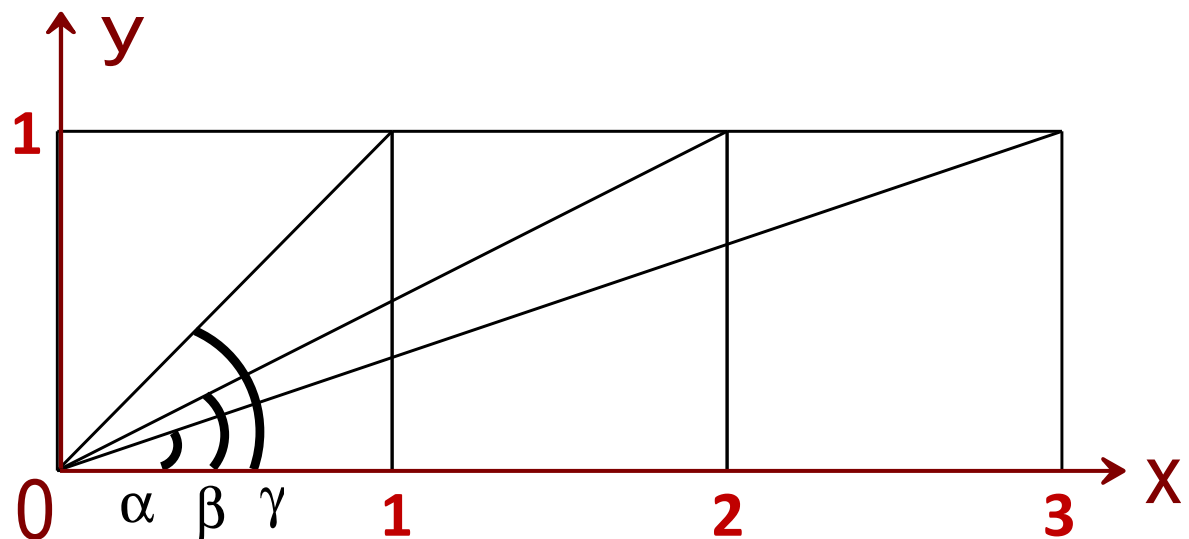
$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$$

2) 2. ročník

→ goniometrický

zřejmě $\gamma = 45^\circ$

$$\alpha + \beta = ?$$



nejprve dokážeme: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$

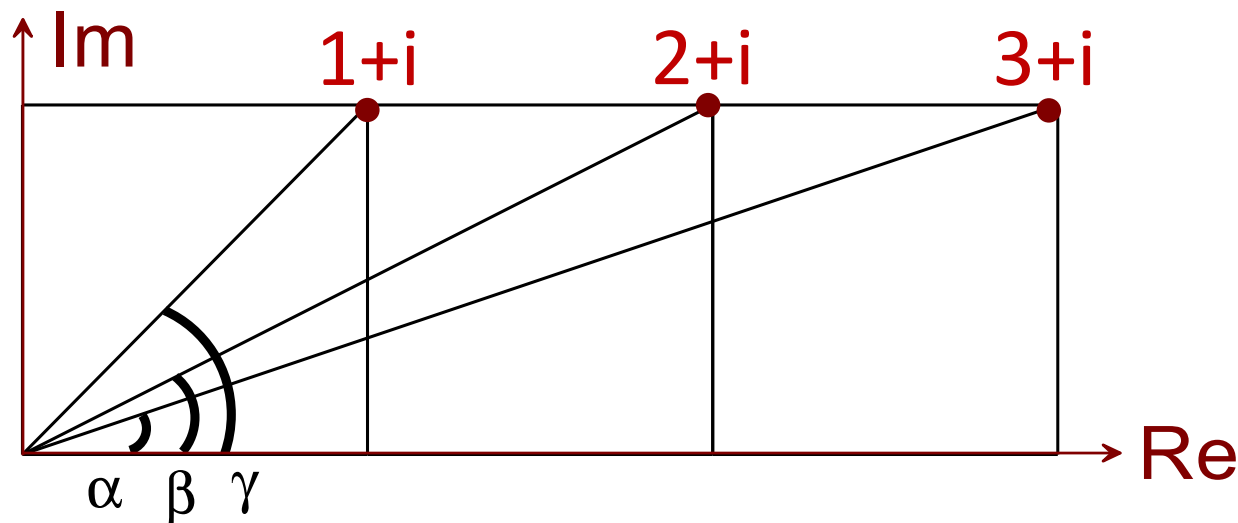
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 45^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$$

3) 4. ročník

→ komplexní čísla



$$z_1 = \sqrt{2} \cdot (\cos \gamma + i \cdot \sin \gamma)$$

$$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\cos \beta + i \cdot \sin \beta)$$

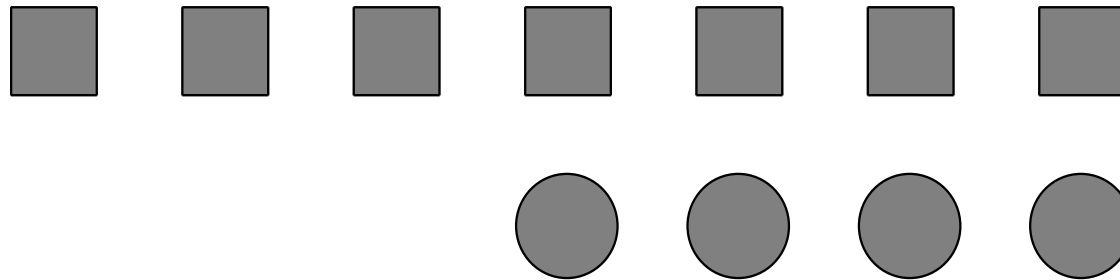
$$z_3 = \sqrt{10} \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 10 \cdot (\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma))$$

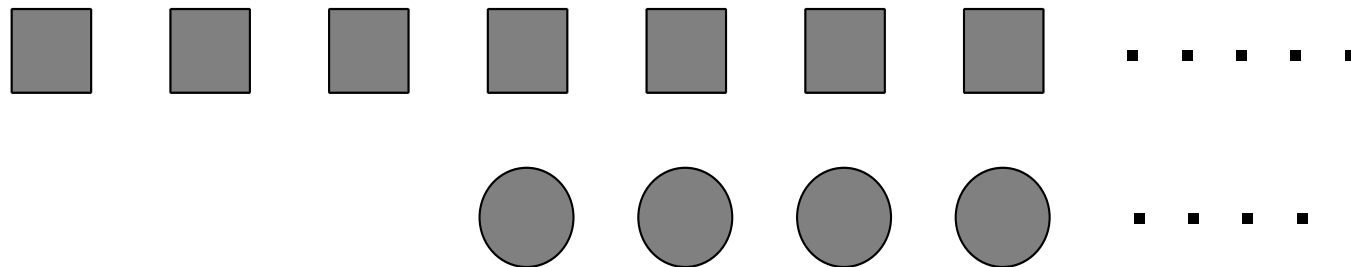
$$= (1 + i) \cdot (2 + i) \cdot (3 + i) = 10i$$

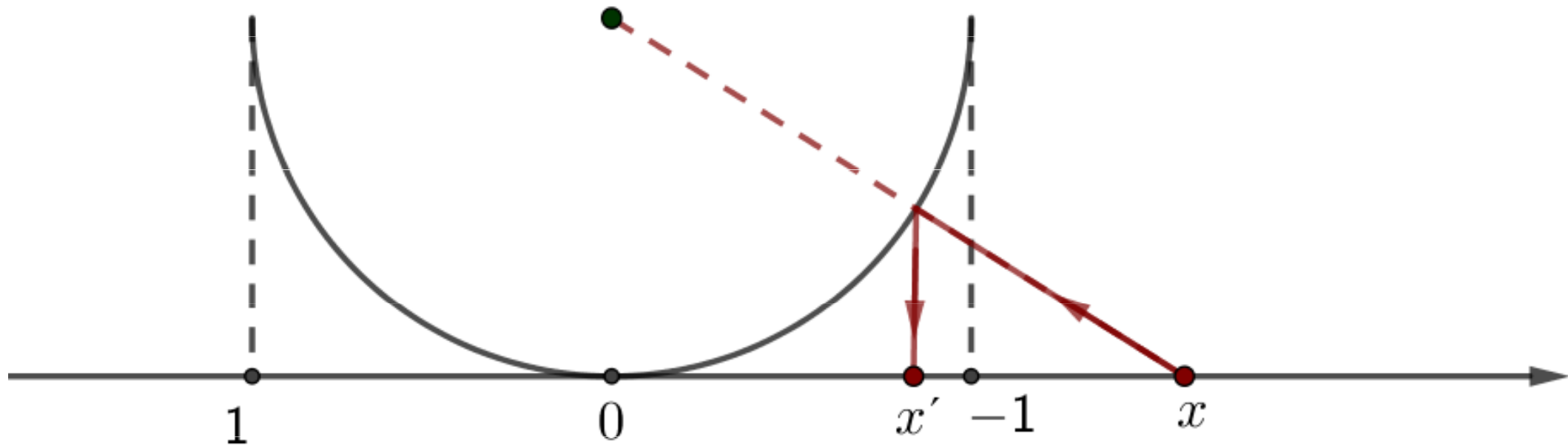
$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

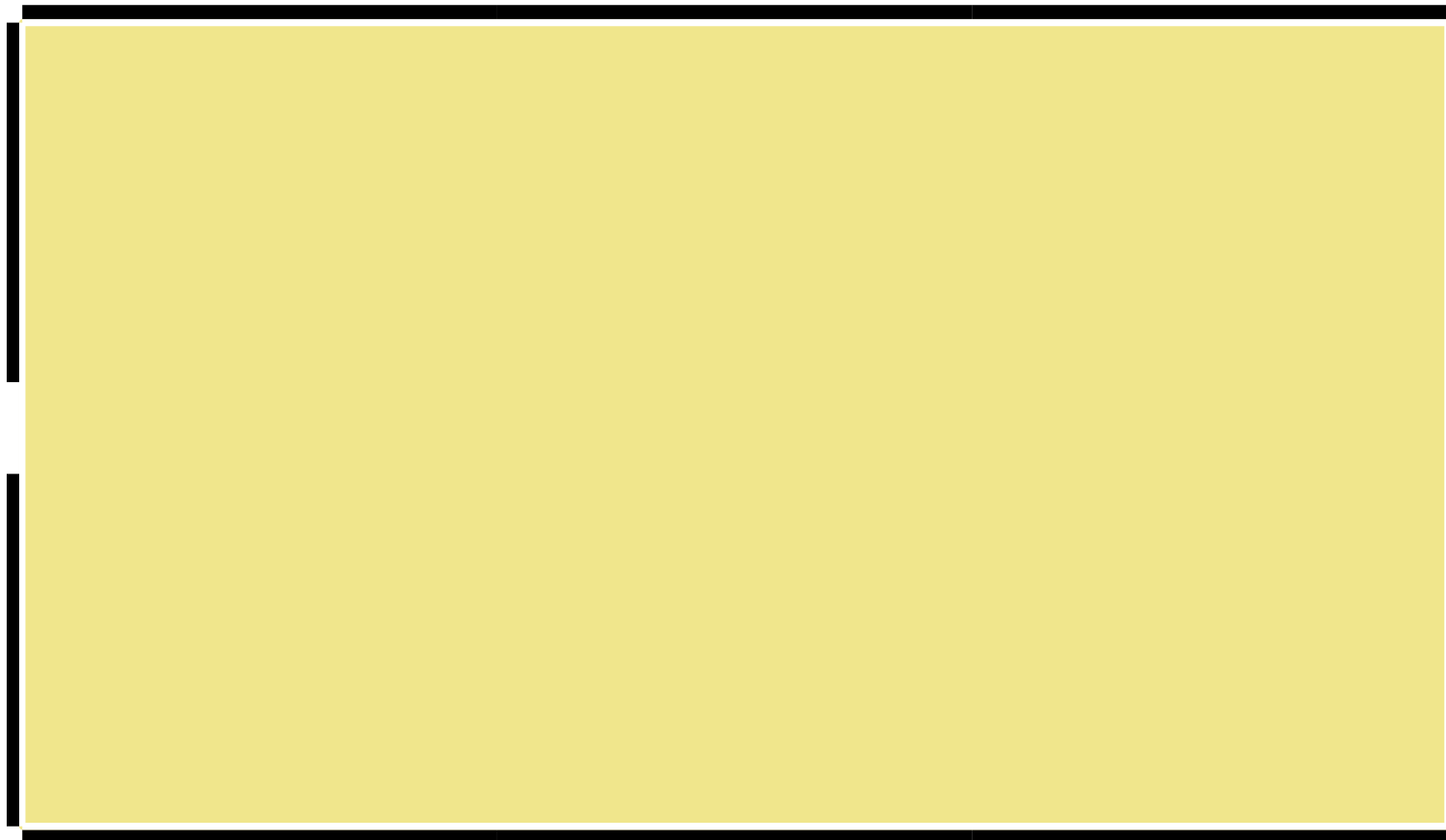
Je víc čtverců než kuleček ?



Je víc čtverců než kuleček ?







malíř
n barev

