MU-přednáška 15.4. 2019

Definice, věty a důkazy ve středoškolské praxi

RNDr. Petr Česnek

Gymnázium Jihlava

JIHLAVA

1919–2019

100 let

Obsah přednášky:

- matematika na G Ji
- význam definic, vět a důkazů ve středoškolské M
- užití vzorců
- zkušenosti, rady, doporučení (didaktika M.)
- doporučené postupy, ukázky (tematicky 1. – 4. ročník)
- ostatní, ...

Týdenní hodinová dotace M:

VG	M	Seminář M
1. ročník, kvinta	4	0
2. ročník, sexta	4	0
3. ročník, septima	4	2
4. ročník, oktáva	4	3 nebo 2

NG	M
prima	5
sekunda	4
tercie	4
kvarta	4

4,6 a 8 – leté studium

Současná témata k diskusi:

- Zredukovat „tematické plány“, ŠVP ?
- Přesunout diferenciální a integrální počet jen do semináře pro 4. ročník ?
- Srovnávací prověrky ?
- MO – jak získat a udržet zájemce ?

Matematická olympiáda

Problémy při výuce M.

- porozumět látce
- pochopit zadání úlohy (zejména, pokud je formulována „jinak“)
- slovní úlohy
- vysvětlit daný pojem vlastními slovy (ústní zkoušení)
- různá úroveň žáků v M.
- zbytečné (nad)užívání vzorců

Výuka M.

"Vědecký přístup"
(budovat M. jako vědu)

(logické myšlení a hlavně ... zvládnout TESTY!)

UČITEL

Jak udržet pozornost a zájem žáků ?

Kvalitní výukou !

- srozumitelnou
- blízkou a názornou
- náročnou
- **zajímavou**

Moje výuka:

Výklad

Procvičení ve škole

DÚ

Domácí příprava → je důležitou (klíčovou) součástí výuky

→ školní a domácí sešit

+ příklady (vytištěné, elektronicky)

Písemné a ústní zkoušení, další hodnocení

známky

body

Můj styl výuky M.:

Matematiku společně objevujeme, tvoříme a využíváme.

starořecký vzor :

prvotní pojmy
axiomy

D E F I N I C E

↓

V Ě T A → příklady
aplikace
důsledky

↓

(DŮKAZ)

Jednoduchá ukázka

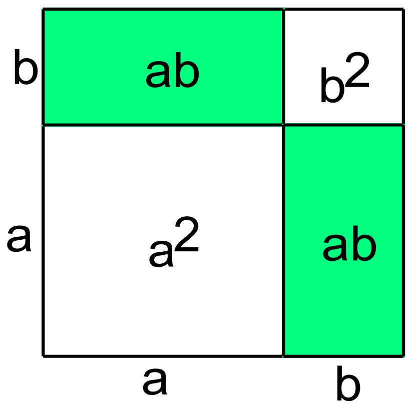
Def. $a^2 := a \cdot a$

Věta: $\forall a, b \in R \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Dk. $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + \underbrace{b\cdot a}_{= a\cdot b} + a\cdot b + b\cdot b =$

(axiom)

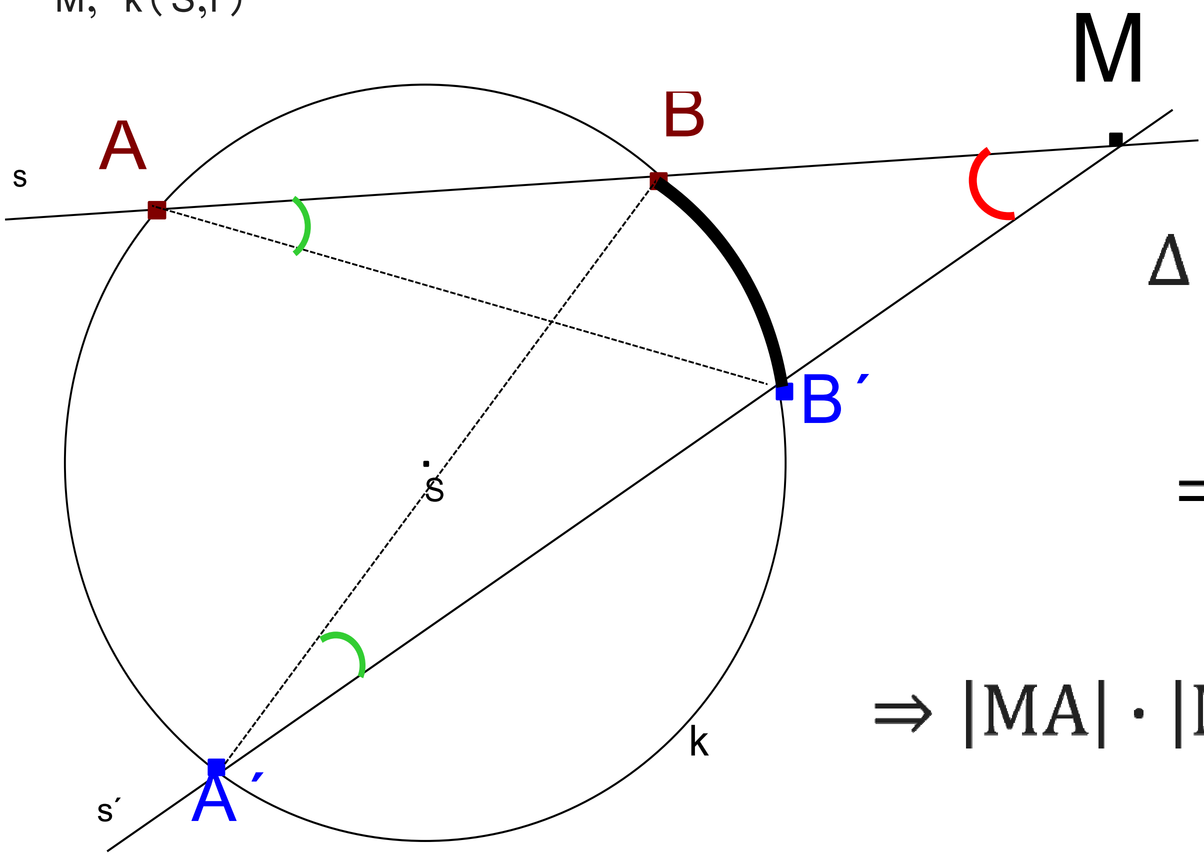
$= a^2 + 2ab + b^2$



cbd.

Mocnost bodu ke kružnici

M, k(S,r)



$$\Delta\, MBA' \sim \Delta\, MB'A \quad \text{(uu)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|MB|}{|MA'|} = \frac{|MB'|}{|MA|}$$

$$\Rightarrow |MA| \cdot |MB| = |MA'| \cdot |MB'| \equiv \boldsymbol{m}$$

podobně pro bod M

uvnitř kružnice …

Def.

Je dána kružnice k (S,r) a bod M.

Mocností bodu M ke kružnici k rozumíme reálné *číslo* m, pro které platí:

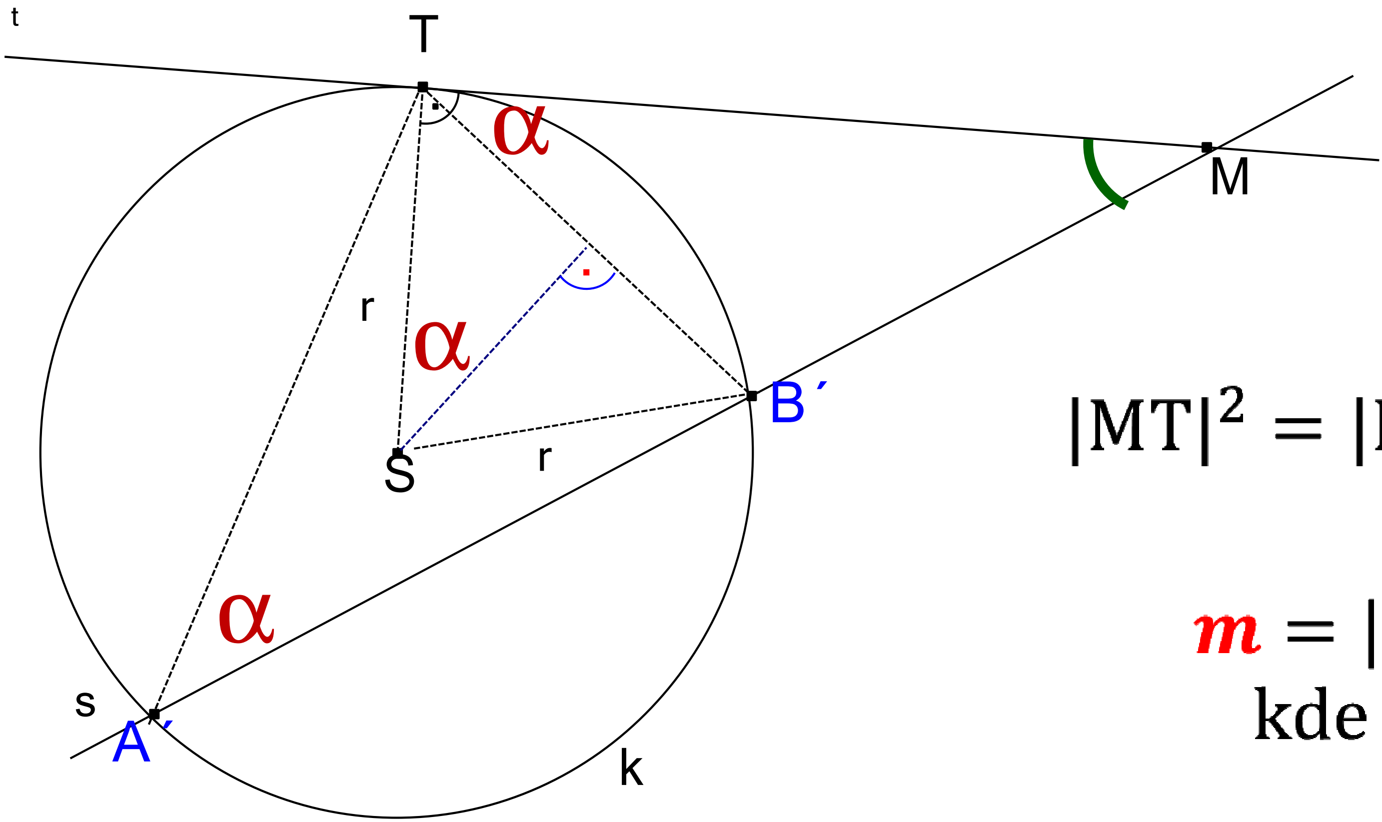
(1) m = |MA|.|MB|, kde A,B jsou průsečíky libovolné sečny kružnice k vedené bodem M

(2) m > 0 <=> M leží vně k

m < 0 <=> M leží uvnitř k

m = 0 <=> M ∈ k

$A = B \equiv T$



$$\Delta MA'T \sim \Delta MTB'$$

$$\frac{|MT|}{|MA'|} = \frac{|MB'|}{|MT|}$$

$$|MT|^2 = |MA'| \cdot |MB'| = m$$

$$\boldsymbol{m} = |MT|^2 = \boldsymbol{q^2 - r^2},$$

$$\text{kde } \ q = |MS|$$

Věta: Pro mocnost bodu M ke kružnici k (S,r) platí:

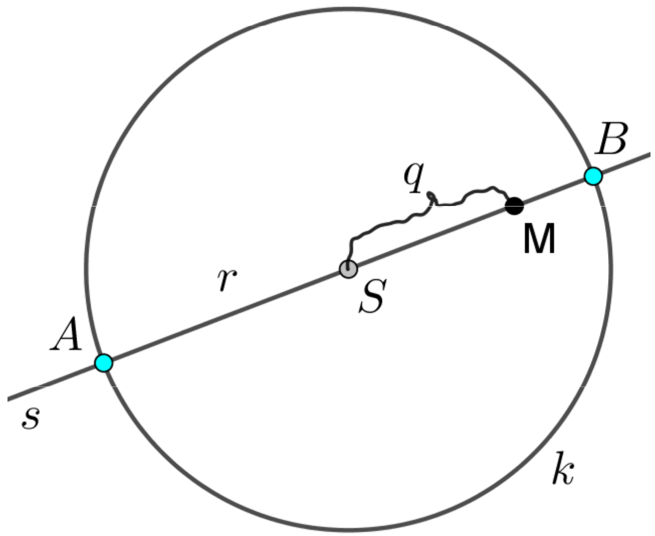
$$\boldsymbol{m = q^2 - r^2} \text{ , kde } q = |\mathrm{MS}|$$

Dk.

1) M vně k

2) M $\in k$ ... $q = r$ ... $m = 0$

3) M uvnitř k



$$m = -|\mathrm{MA}| \cdot |\mathrm{MB}| =$$

$$= -(r+q)(r-q) =$$

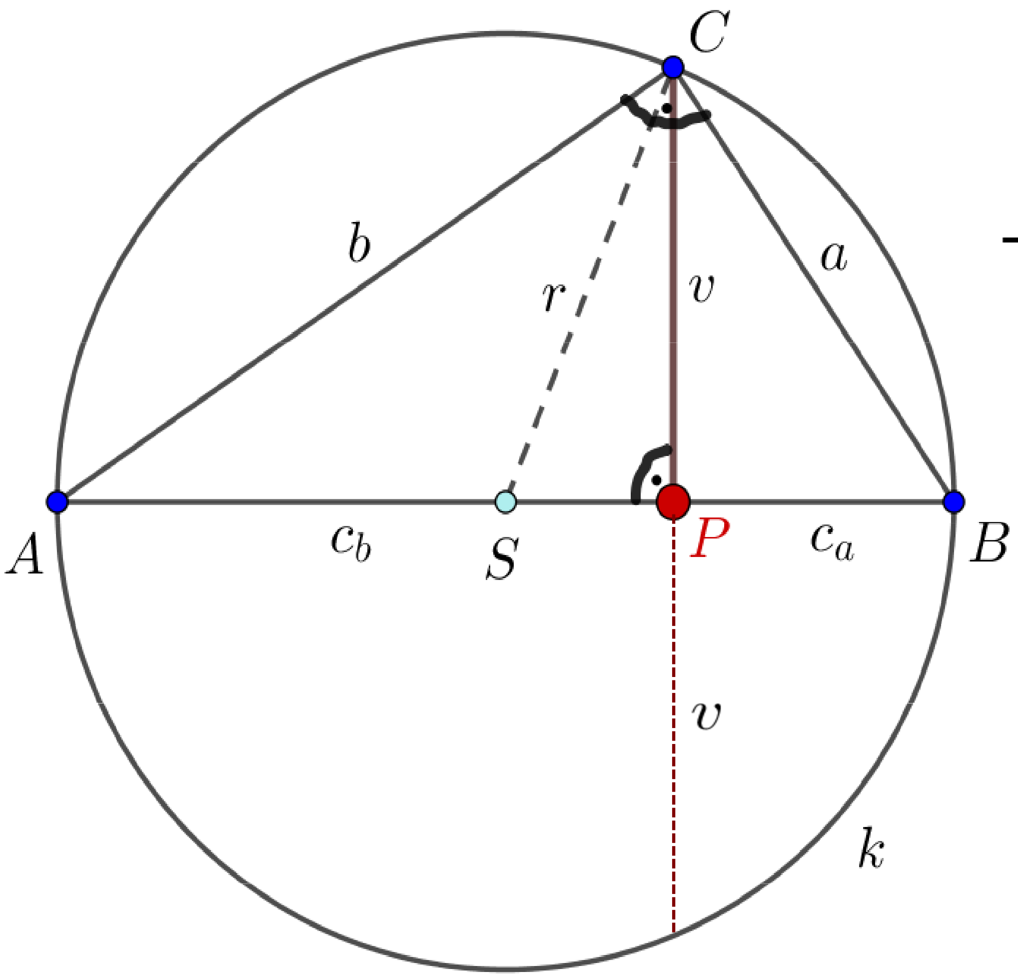
$$= q^2 - r^2$$

cbd.

Př.

Je dán čtverec KLMN o straně a. Urči mocnost bodu L ke kružnici a) opsané, b) vepsané.

Další souvislosti (např. odvození Euklidových vět, chordála):



m … mocnost P ke k :

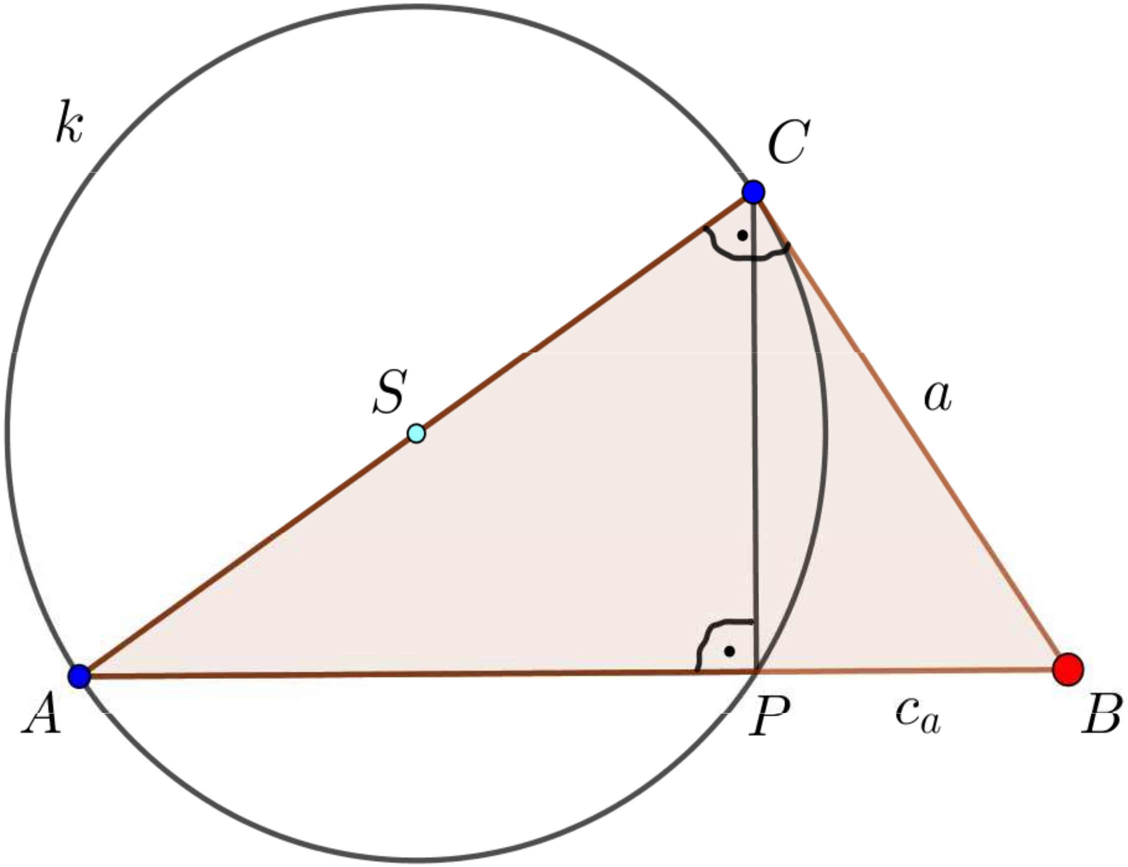
$$-c_a \cdot c_b = m = |PS|^2 - r^2 = -v^2$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{v^2 = c_a \cdot c_b}$$

EV o výšce

nebo:

$$-m = v \cdot v = c_a \cdot c_b$$



B, k

$$a^2 = c \cdot c_a$$

EV o odvěsně

Definice

SYMBOLIKA:

$:=$ $\quad$ $=$ $\quad$ $\equiv$

= zavedení nového pojmu

„Říkáme, že …“

„ … nazýváme …“

- přesné („neprůstřelné“)
- definicí obvykle začínáme, ale někdy je vhodné ukázat k ní cestu, příp. ukázat její korektnost
- „nedůsledně“ (nedefinovat pojmy, které definici nepotřebují)

Kombinace

Kombinace s opakováním

DEFINICE

K-členná kombinace ~~bez opakování~~ z *n* prvků je neuspořádaná *k*-tice, v níž ~~nezáleží na pořadí~~ prvků sestavená pouze z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

KOMBINATORIKA

Př. A, B, E, F, L, N, O, T

Vyber z nich: a) samohlásky b) slovo

a) A, E, O ..... **neuspořádaná trojice**

(nezáleží na pořadí)

b) FOTBAL ..... **uspořádaná šestice**

(záleží na pořadí)

Definice faktoriálu:

$$\forall n \in \mathrm{N} \qquad n\,! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Dodefinujeme: $0! := 1$

Proč ?

Nekonečné řady

$$\overbrace{\mathbf{1-1+1-1+1-1+\cdots}}^{S} = ?$$

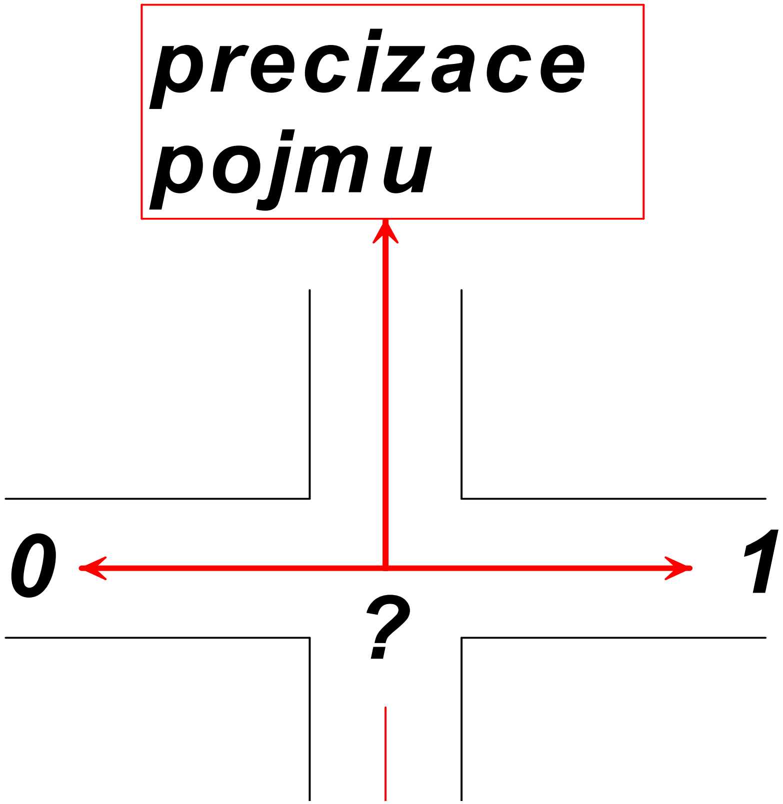
$$= 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

$$= 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

$$= 1 - \underbrace{(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots)}_{S}$$

$$S = 1 - S$$

$$S = \frac{1}{2}$$



intuitivní chápání řad

↓

přesná definice pojmu
„součet nekonečné řady“
(limita částečných součtů)

Definice pravděpodobnosti

Předpoklady:

(1) Náhodný pokus má *n* možných výsledků $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots.., \omega_n$.

(2) Všechny výsledky jsou „rovnocenné“.

(3) Vždy nastane právě jeden výsledek.

$A \subset \Omega$

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

počet příznivých výsledků
(výsledků příznivých jevu A)

počet všech výsledků)

P(A) ….. **pravděpodobnost jevu A** $m \leq n$

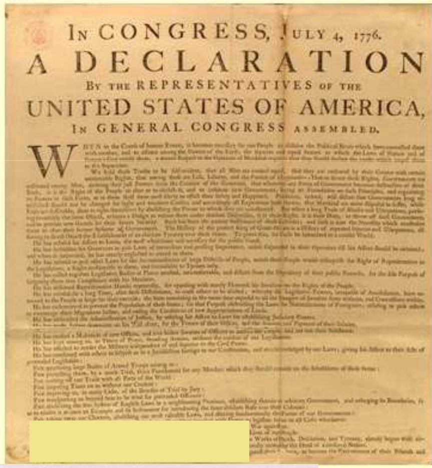
Nezávislé jevy

Def :

Říkáme, že jsou náhodné jevy A, B **nezávislé**, právě když platí:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Prohlášení nezávislosti


In CONGRESS, July 4, 1776.
A DECLARATION
By the REPRESENTATIVES of the
UNITED STATES OF AMERICA,
In GENERAL CONGRESS assembled.

4. 7. 1776

Př. narození 3 dětí v rodině

$$\Omega = \{[C, C, C]; [C, C, D]; [C, D, C]; [D, C, C]; [C, D, D]; [D, C, D]; [D, D, C]; [D, D, D]\}$$

A: „Nejstarší dítě je chlapec.“ $P(A) = 1/2$

B: „Prostřední dítě je dívka.“ $P(B) = 1/2$

$A \cap B$:

„Nejstarší dítě je chlapec a prostřední je dívka“ $P(A \cap B) = 1/4$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

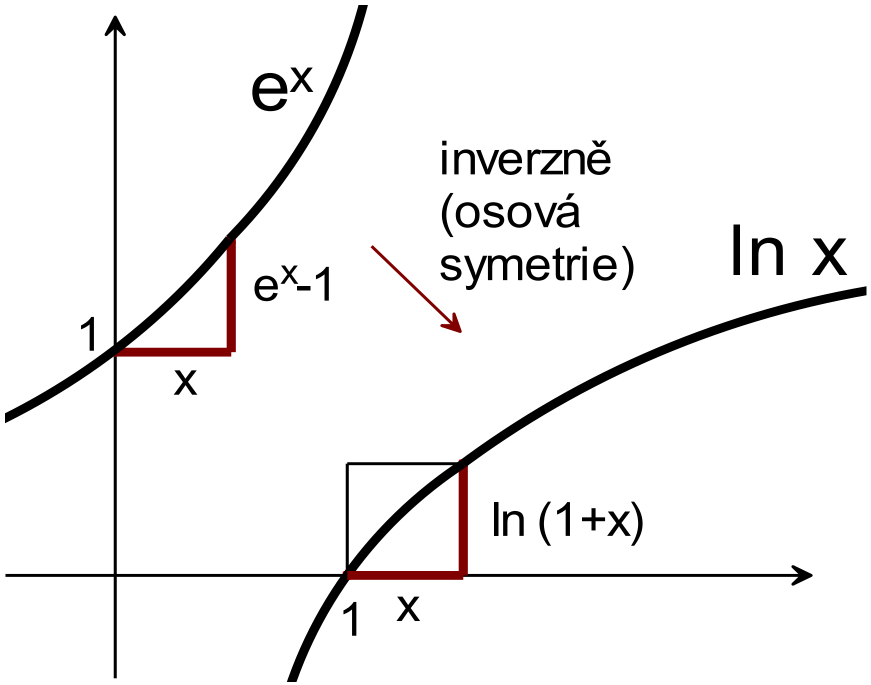
Eulerovo číslo

1) $$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}}$$

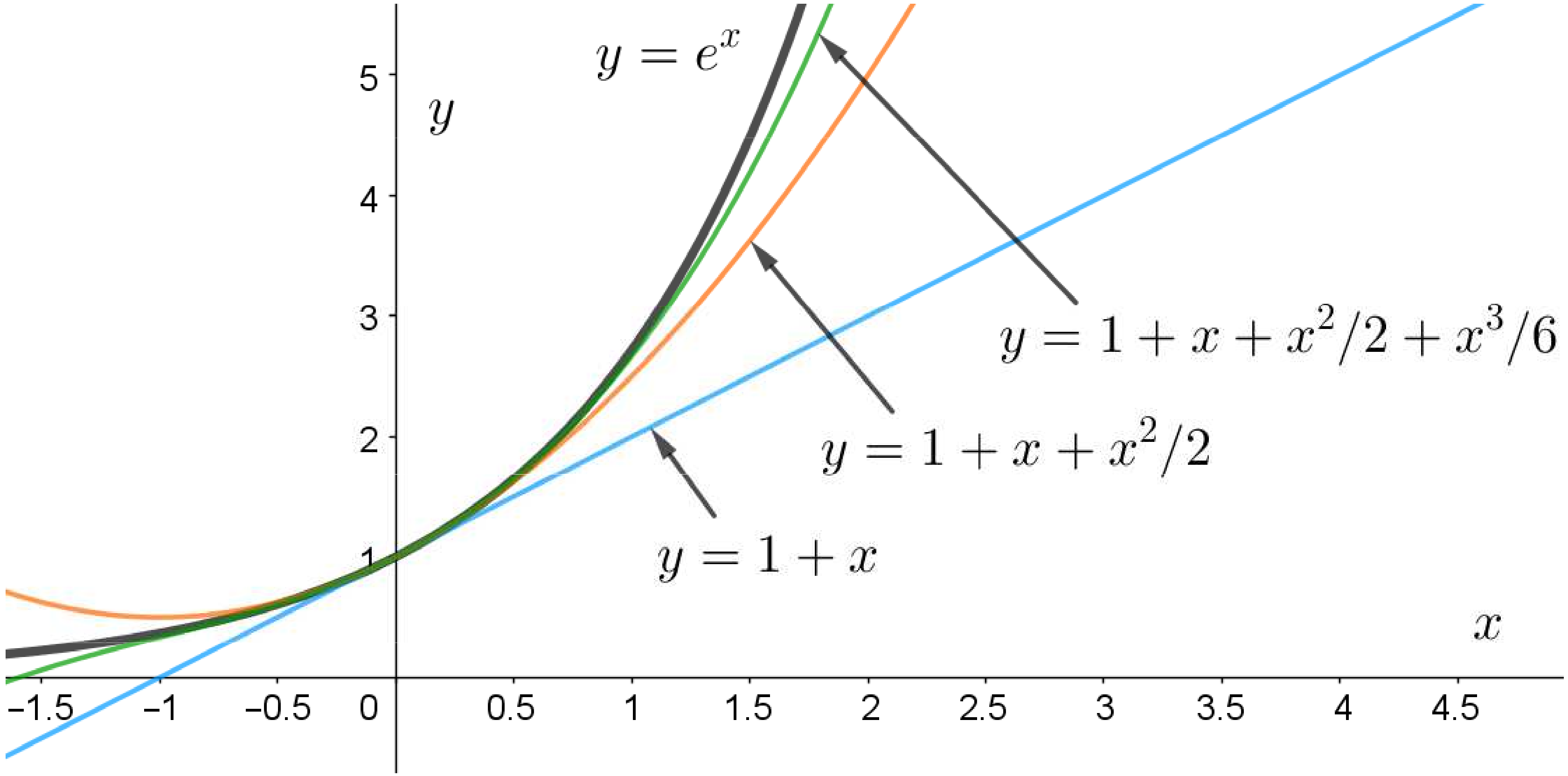
$$\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$$

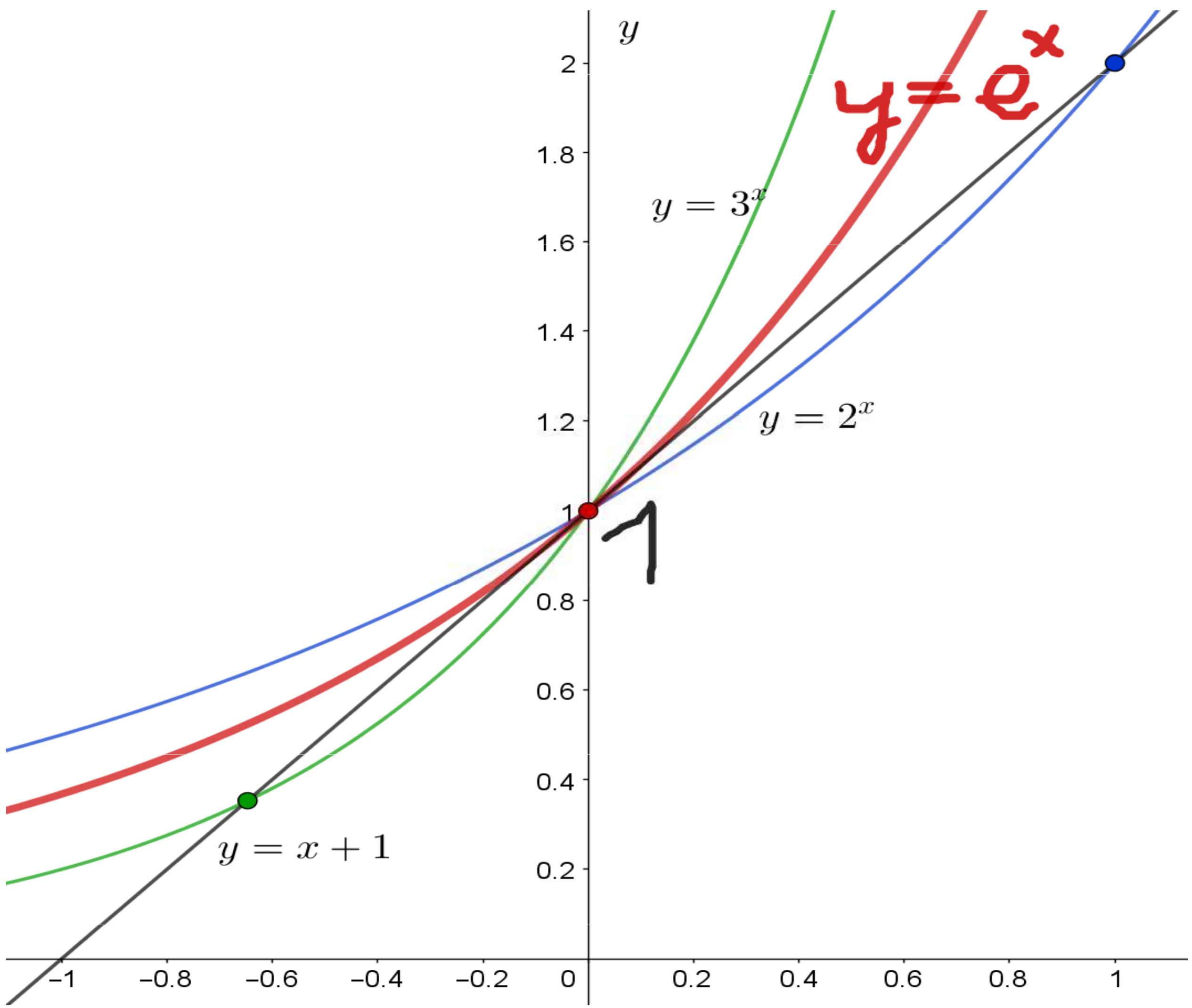


2) $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$



S

Š



y
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$y = 3^x$
$y = e^x$
$y = 2^x$
$y = x + 1$
1

Věty:

- popisuje vlastnosti definovaného pojmu

  Pro … platí …

- využívat kvantifikátory $\forall, \exists$
- často umožňuje snadnější výpočet než ze vztahu definičního
- důsledky …

Základní věta algebry:

Obecná algebraická rovnice má v C alespoň jeden kořen.

↓

Obecná algebraická rovnice n-tého stupně má v C právě n kořenů.

Důkazy:

- slouží i k hlubšímu pochopení dané látky
- podporují logické myšlení

$A \Rightarrow B \quad (\rightarrow \ A \Leftrightarrow B)$

1) přímý
2) nepřímý
3) sporem

matematická indukce – věty typu $\forall n \in \mathrm{N}$:

Příklad (MO)

Existuje jediné prvočíslo p , pro které je p^2+2 též prvočíslem.

Důkazy vět tvaru ekvivalence

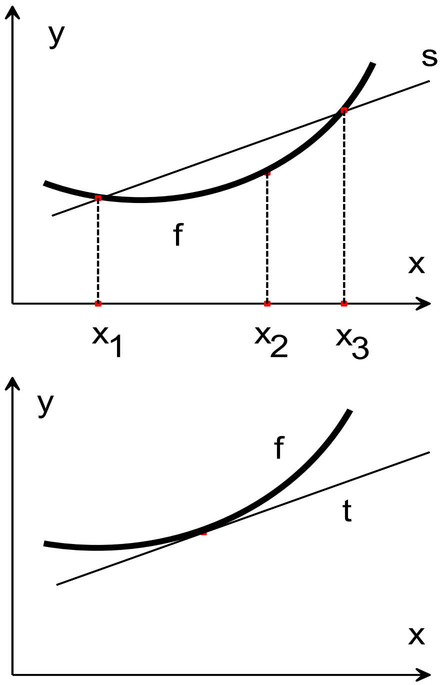
$$(\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}) \quad \Leftrightarrow \quad [(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A})]$$

příp.

$$(\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}) \quad \Leftrightarrow \quad [(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\neg\mathbf{A} \Rightarrow \neg\mathbf{B})]$$

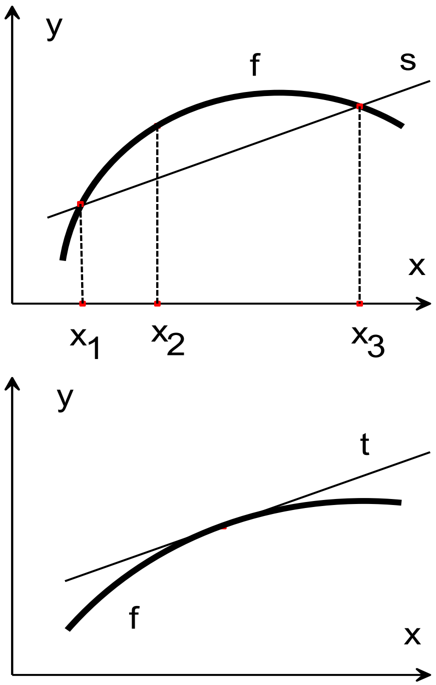
Definice„na základě obrázku“:

konvexní funkce



"graf fce nad tečnou"

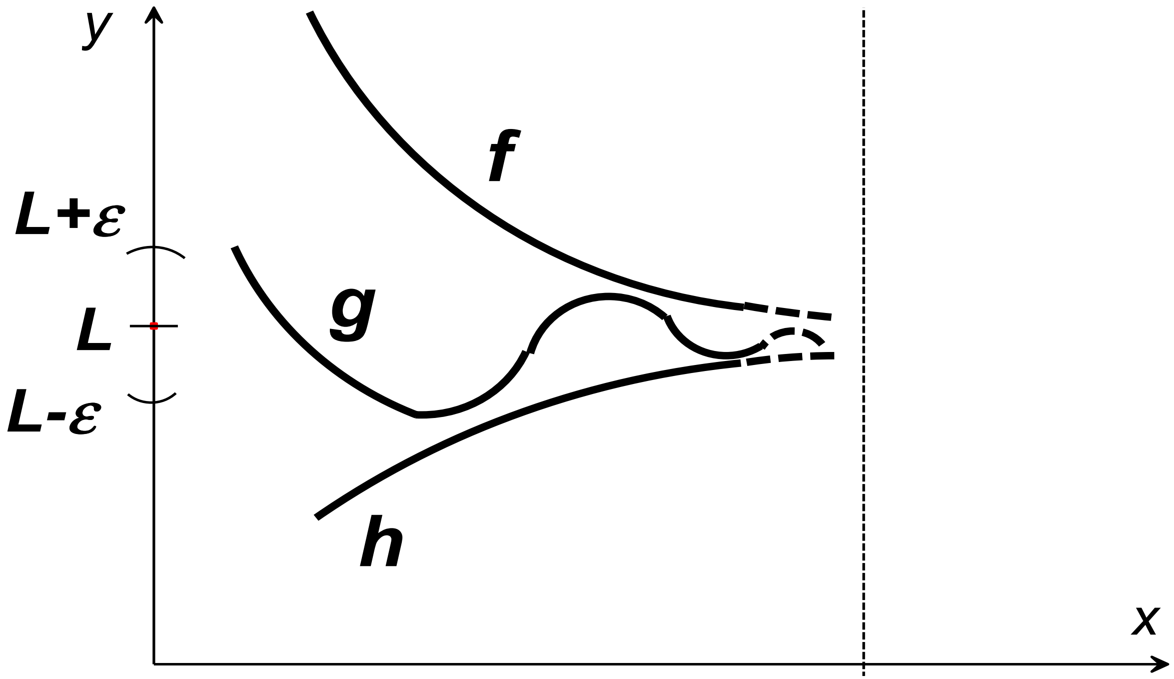
konkávní funkce

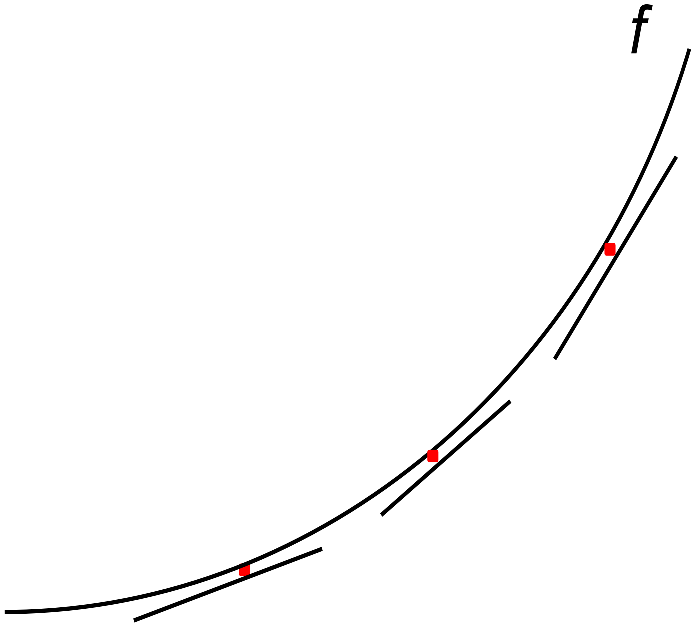


"graf fce pod tečnou"

Důkazy „na základě obrázku“:

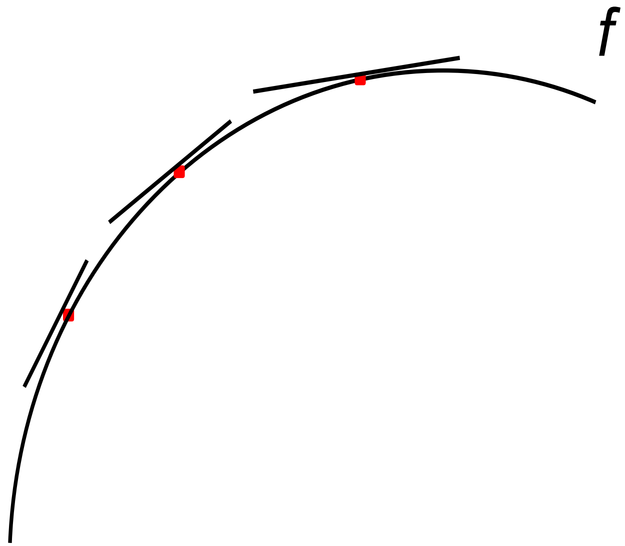
Věta o 2 policajtech





$f'' > 0$

f je konvexní



$f'' < 0$

f je konkávní

Užití vzorců

Pythagorova věta, diskriminant, rozkladové vzorce: $a^2 - b^2$...

variace, vzdálenost bodu od přímky, $(a \pm b)^2$, ...

$\downarrow$

KP součinu

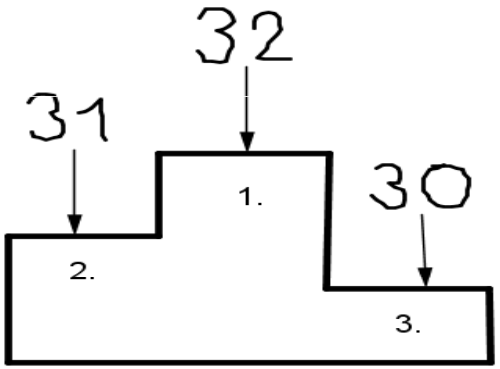
$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

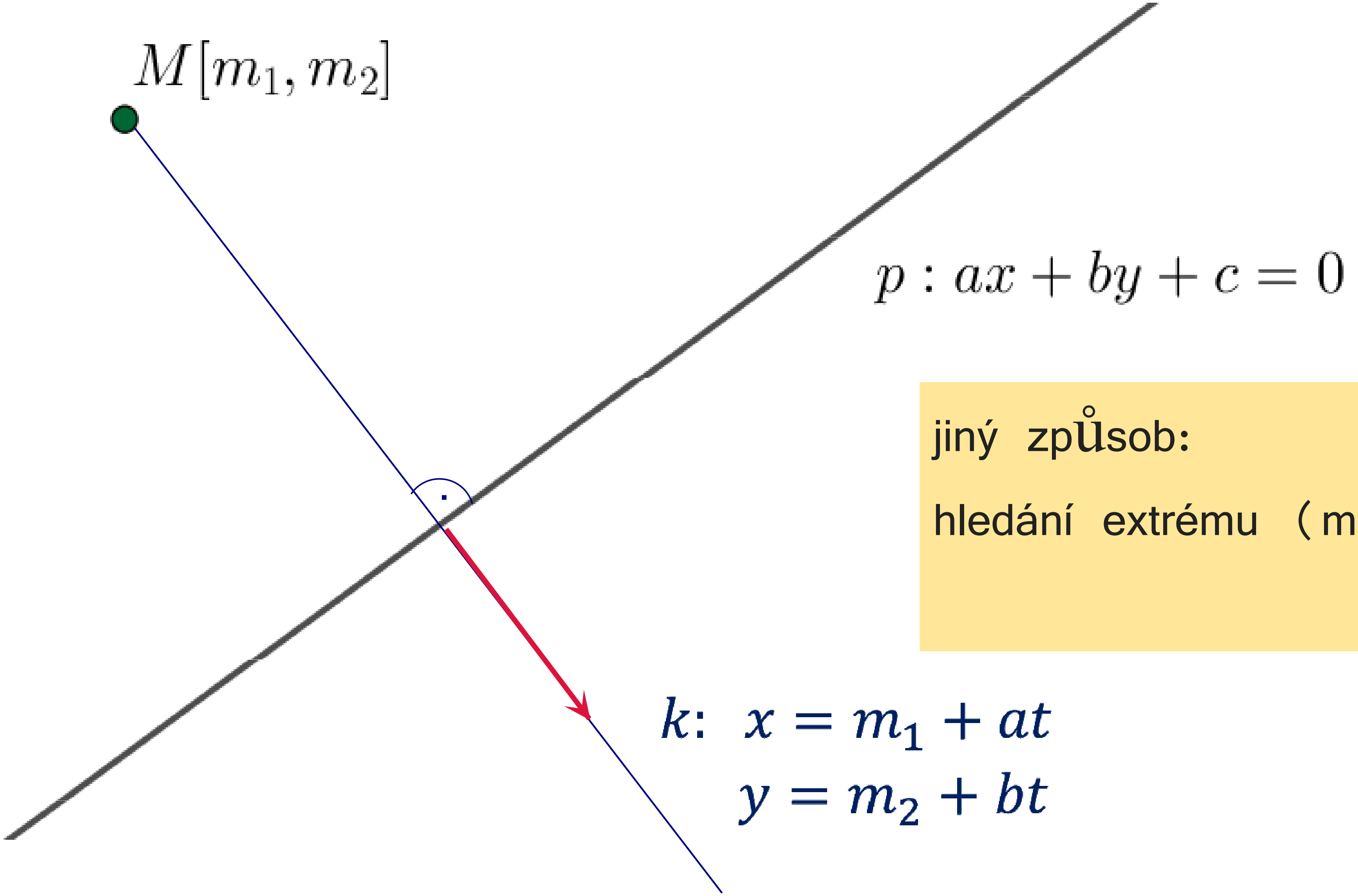
Př. počet medailových umístění na MS ve fotbale (32 týmů) ?

vzorec:

$$V(3,32) = \frac{32!}{(32-3)!} = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$$

KP součinu





jiný způsob:

hledání extrému (minima)

Součet nekonečné geometrické řady řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{n} = ?$$

$$\frac{2}{7}+\left(\frac{2}{7}\right)^{2}+\left(\frac{2}{7}\right)^{3}+\cdots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{2}{7}} = \frac{2}{5}$$

nebo bez vzorce:

$$\frac{2}{7}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{2}{7}\right)^3+\cdots=S \qquad /\cdot\frac{2}{7}\ (q)$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{2}{7}\right)^3+\left(\frac{2}{7}\right)^4+\cdots=\frac{2}{7}S$$

$$S-\frac{2}{7}=\frac{2}{7}S$$

$$\frac{5}{7}S=\frac{2}{7}$$

$$S=\frac{2}{5}$$

kořeny kvadratické rovnice:

$$\boldsymbol{x^2 - 2x + 5 = 0} \quad /+1$$

$$x^2 - 2x + 1 + 5 = 1$$

$$(x-1)^2 \neq -4$$

$$\mathrm{K} = \Phi$$

„objevení nového světa – říše komplexních čísel“ (4. ročník)

$\rightarrow \; x^2 + 1 = 0$

C

polož: $\mathbf{i}^2 := -1$

$$(x-1)^2 = 4\,\mathrm{i}^2$$

$$x - 1 = \pm 2\,\mathrm{i}$$

$$\mathrm{K} = \{1 \pm 2\,\mathrm{i}\}$$

hyperbola - asymptoty

$$y = \pm \frac{b}{a}(x - m) + n$$

$$H: \frac{(x-5)^2}{7} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

$$\downarrow$$

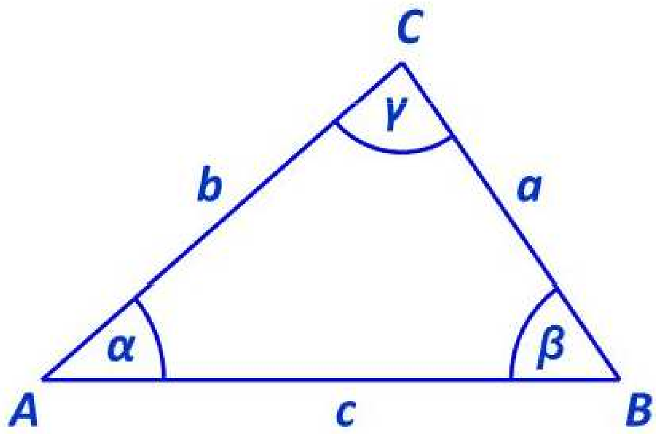
$$\left[\frac{x-5}{\sqrt{7}} - \frac{y+2}{3}\right] \cdot \left[\frac{x-5}{\sqrt{7}} + \frac{y+2}{3}\right] = 1$$

$$y + 2 = \pm \frac{3}{\sqrt{7}}(x - 5)$$

$$y = \pm \frac{3}{\sqrt{7}}(x - 5) - 2$$

Cardanovy vzorce:

Jak si pamatovat vzorce?

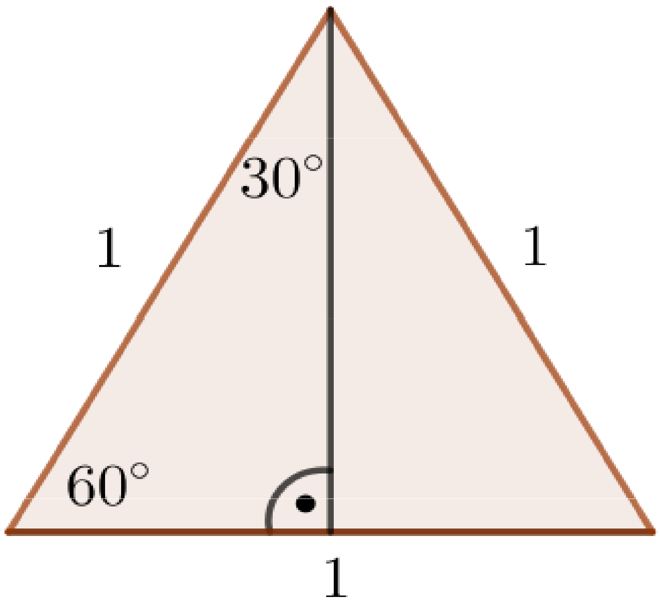


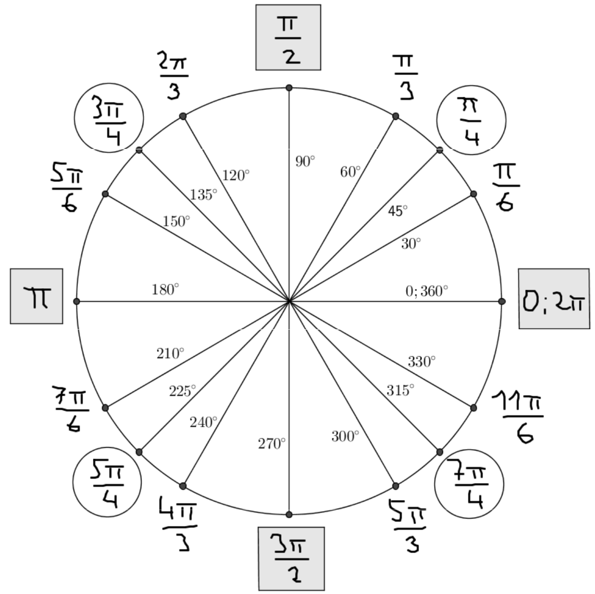
Věta kosinová: Pro každý trojúhelník *ABC*, jehož strany mají délky *a*, *b*, *c* a vnitřní úhly velikosti *α*, *β*, *γ*, platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

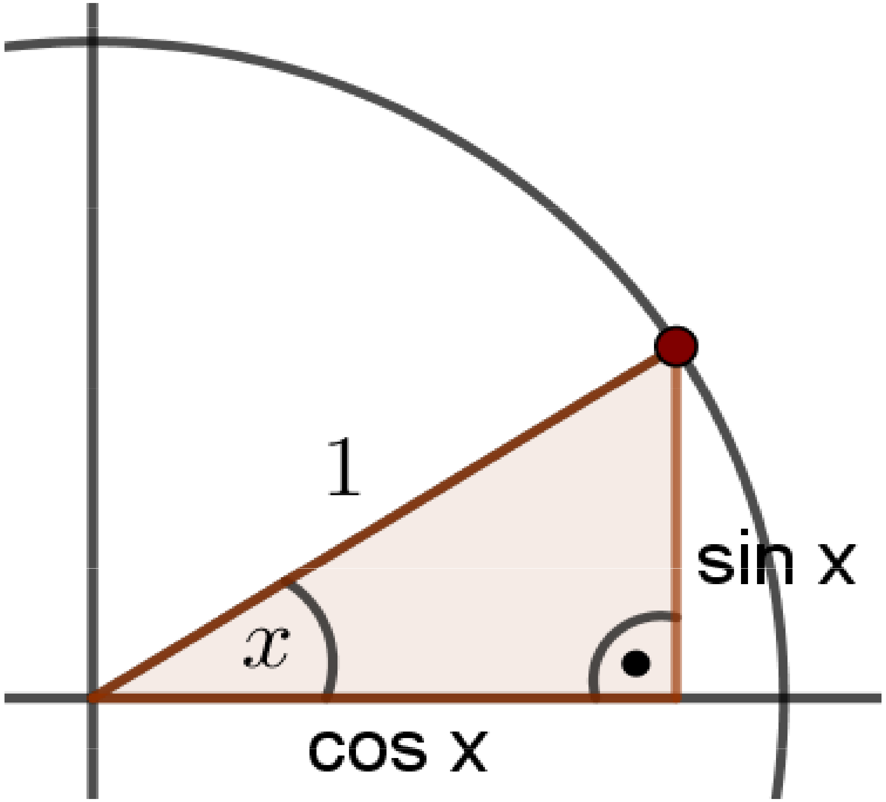
Hodnoty gon. funkcí:

rovnostranný tr.



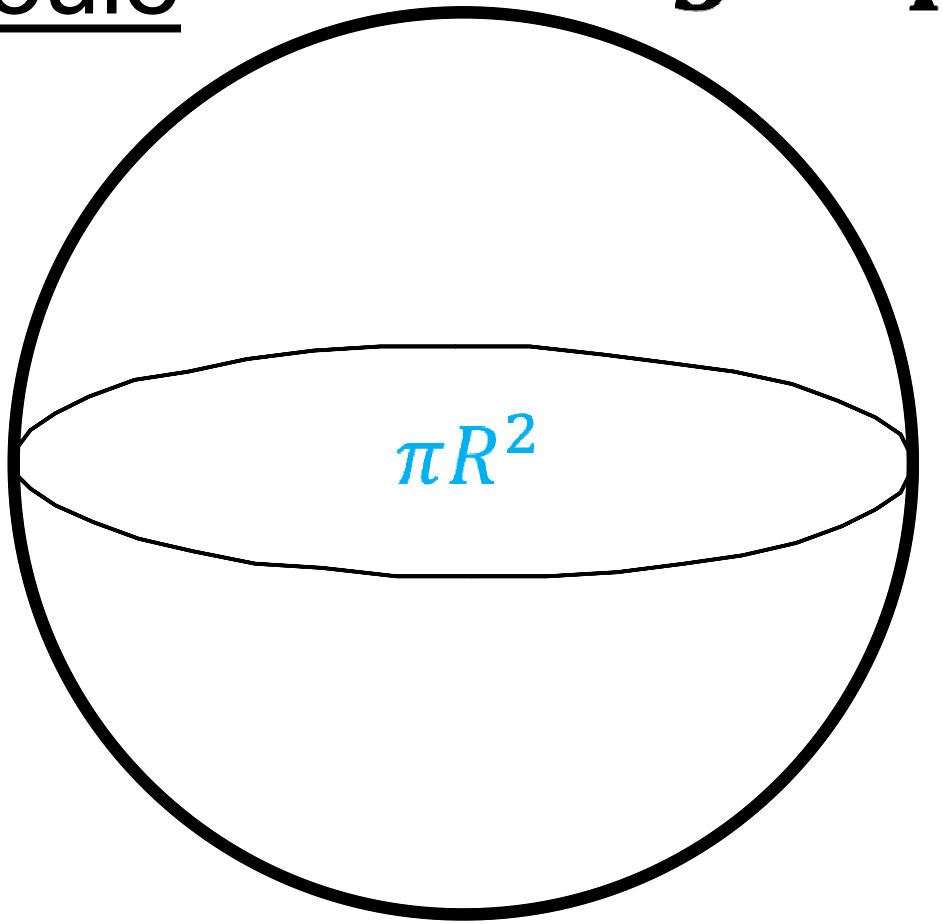


$$\forall x \in \mathbf{R}: \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$



Povrch koule

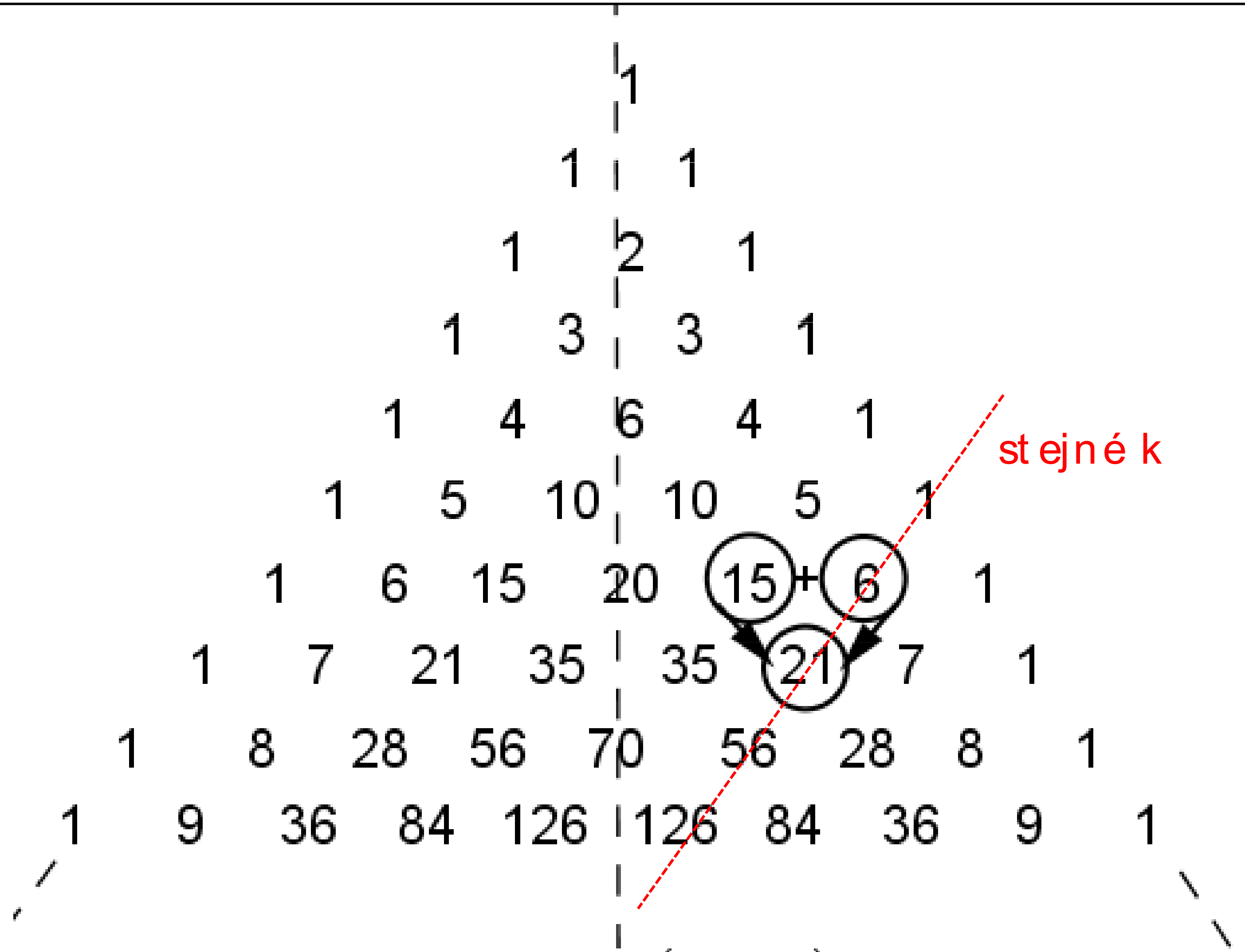
$$S = 4\pi R^2$$



Povrch koule je čtyřnásobkem obsahu jejího největšího kruhu.
(Archimédes)

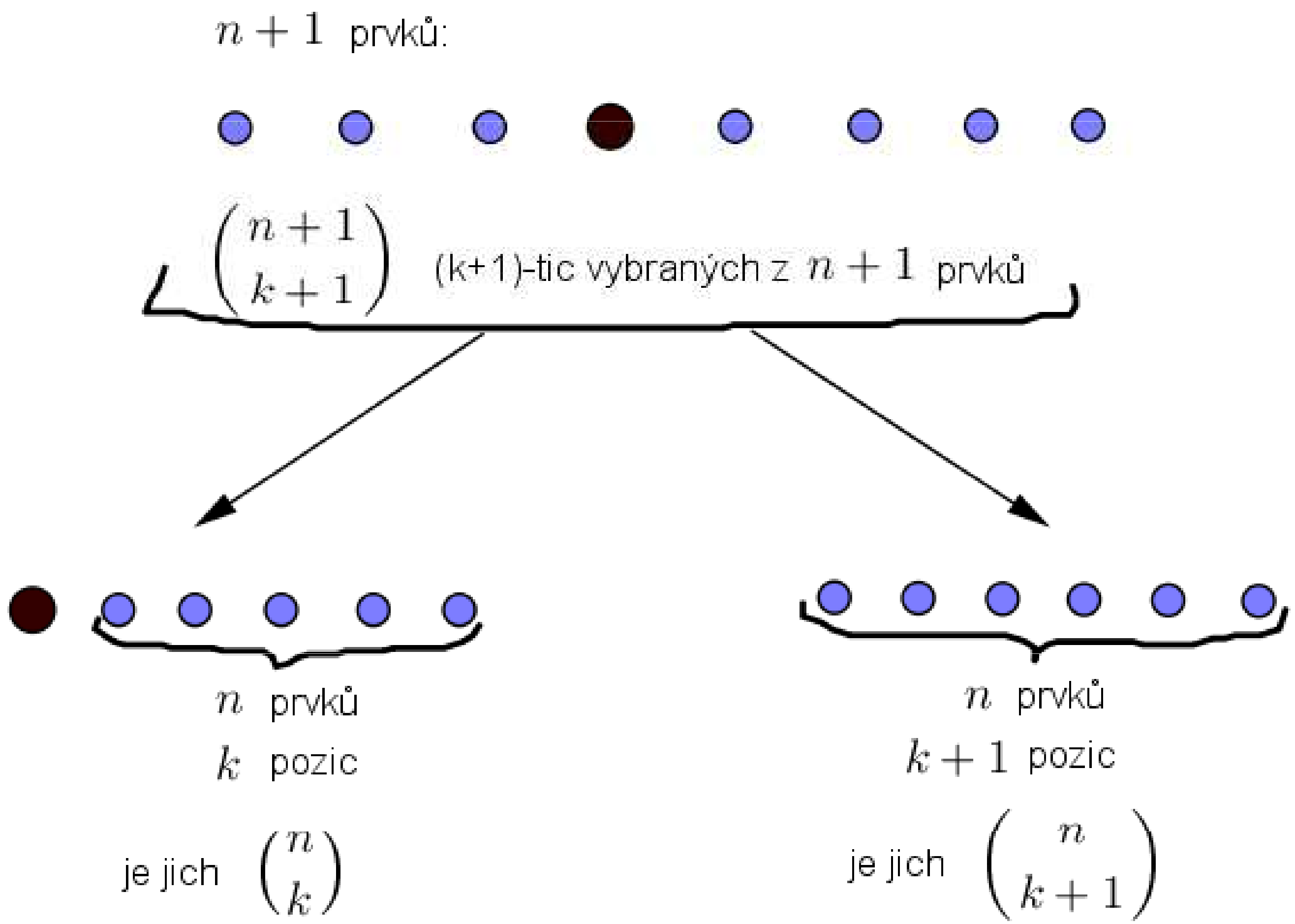
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$k < n$$



$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

čistě kombinatorický důkaz:



Součet n členů aritmetické posloupnosti:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

K.F. Gauss (1777 – 1855)

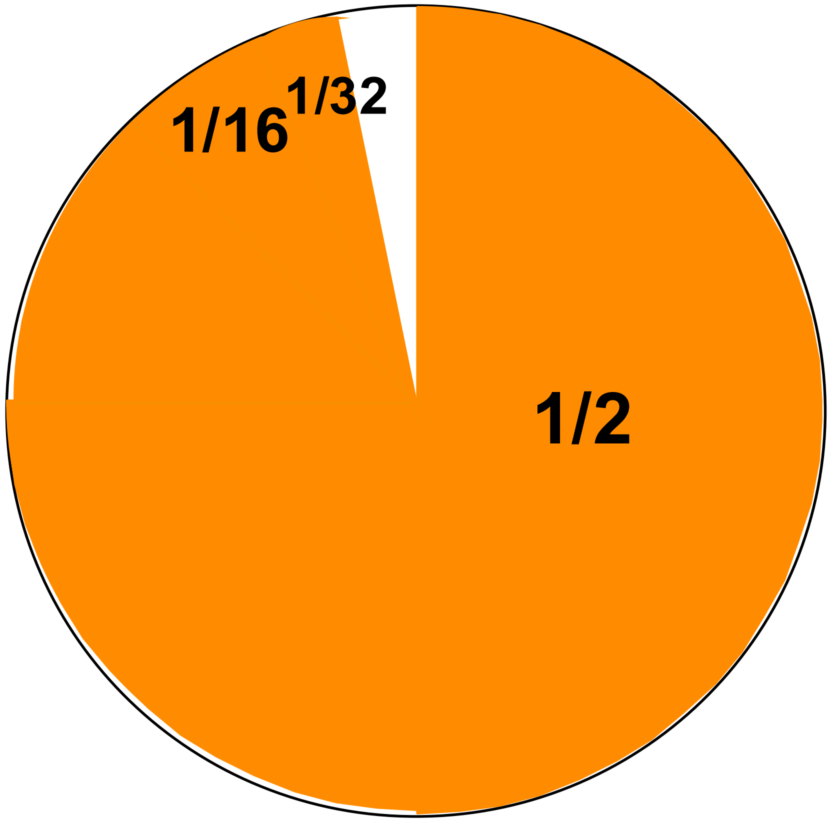
$$\mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 99 + 100} = 50 \cdot 101 = \mathbf{5050}$$

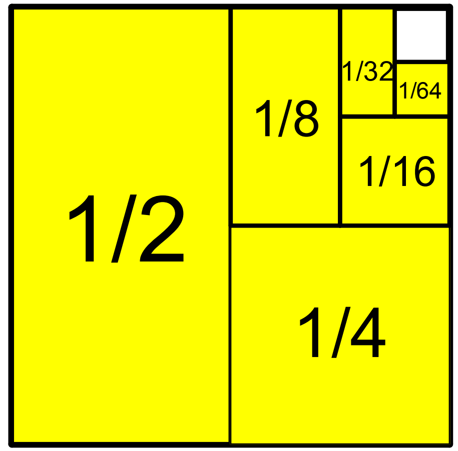
součet 101

součet 101

50 dvojic

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=1$$





SŠ matematika – témata:

Výroky, množiny

Mocniny, odmocniny, číselné výrazy

Úpravy výrazů, vyjádření neznámé ze vzorce

Rovnice a nerovnice

Kvadratické rovnice (⟶ zlatý řez)

Iracionální rovnice

Kvadratické nerovnice

Rovnice a s parametry

Planimetrie

$$2 - \frac{3}{11} = \frac{19}{11}$$

$$\sqrt{12} = \cancel{\sqrt{4 \cdot 3}} = 2\sqrt{3}$$

$$x^2 + 4x - 21 = (x - 3) \cdot (x + 7)$$

$$\frac{a^3-1}{a^2-3a-10}:\frac{a^2-1}{a+2}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-5)(a+2)}\cdot\frac{a+2}{(a+1)(a-1)}=\cdots$$

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^3}}{x}}=\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{3}{4}}}{x}\right)^{\frac{1}{3}}=\cdots\quad=x^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{x}$$

$$\boldsymbol{x^2-6x=}\cancel{x^2-6x+9-9}\boldsymbol{=(x-3)^2-9}$$

učebnice
pro gymnázia
1. ročník:

Příklad 4

Řešte rovnici

$$|x-2|+|2x-8|=5. \qquad (1)$$

Řešení

Nulové body dvojčlenů uvnitř absolutních hodnot jsou 2 a 4. Těmito body rozdělíme množinu R na tři intervaly $(-\infty, 2)$, $\langle 2, 4)$ a $\langle 4, +\infty)$. Jak se v těchto intervalech „chovají" dvojčleny uvnitř absolutních hodnot i absolutní hodnoty samé, přehledně zachytíme v tabulce:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-8$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\|x-2\|$	$2-x$	$x-2$		$x-2$	
$\|2x-8\|$	$8-2x$	$8-2x$		$2x-8$	

Využijeme poslední dva řádky tabulky a rovnici (1) vyřešíme v každém intervalu zvlášť.

a) Pro $x \in (-\infty, 2)$:

$$2-x+8-2x=5$$
$$x=\tfrac{5}{3}$$

Protože $\frac{5}{3} \in (-\infty, 2)$, je toto číslo jediným řešením rovnice (1) v intervalu $(-\infty, 2)$.

Kvadratické nerovnice (D<0)

R

$$x^2 - 4x + 7 > 0$$

grafické řešení …

$$(x-2)^2 - 4 + 7 > 0$$

$$(x-2)^2 > -3$$

K = R

Iracionální rovnice

a) zužování def. oboru rovnice

b) zkouška jako nutná součást řešení

R

$$x - 5 = \sqrt{x + 7}$$

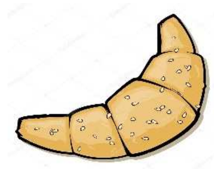
Substituce

$$\frac{7-\sqrt{x+11}}{\sqrt{x+11}-3}=2$$

y

$$\log x^2+\log x^3+\log x^7=24$$

$$2\log x+3\log x+7\log x=12$$



$$x^4-5x^2+6=0$$

$$(x^2-\quad)(x^2-\quad)=0$$

Funkce

Rovnice exponenciální, logaritmické, goniometrické

Trigonometrie sinová a kosinová věta

Stereometrie

Kombinatorika

Analytická geometrie

Diferenciální počet

Integrální počet

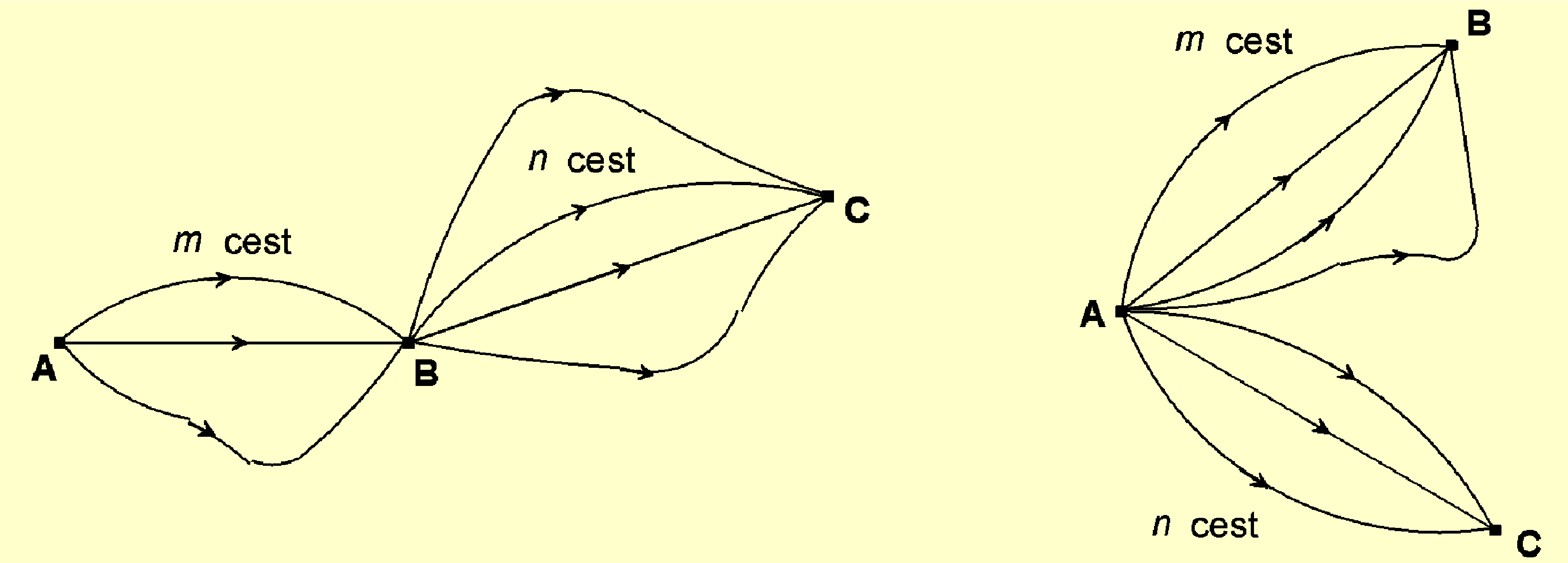
Komplexní čísla

Posloupnosti a řady

Pravděpodobnost a statistika

KOMBINATORIKA

KP součinu KP součtu



$m \cdot n$ cest A $\longrightarrow$ C z A

$m + n$ cest

Terminologie

permutace ~~bez opakování~~ – permutace s opakováním

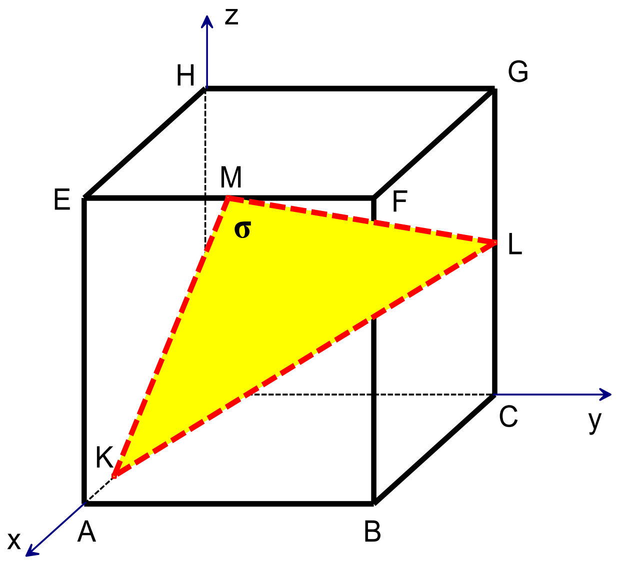
variace ~~bez opakování~~ – variace s opakováním

kombinace ~~bez opakování~~ – kombinace s opakováním

Domácí úkol 3. ročník

ANALYTICKÁ GEOMETRIE V KRYCHLI

V rohu KASS je krychle **ABCDEFGH** s vrcholy **A[4,0,0]**; **C[0,4,0]**; **D[0,0,0]**; **E[4,0,4].** Na hranách krychle jsou dány body K, L, M. Bod L je středem hrany CG, bod M střed hrany EF a bod K leží na hraně AD blíže k vrcholu A a dělí hranu AD v poměru délek 1:3. Body K,L,M je veden řez krychlí (na obrázku není řez celou krychlí). Rovinu řezu označme σ.



1) Narýsuj krychli (podle obrázku v rozumném měřítku na osách) a rovinu řezu. Zapiš souřadnice všech bodů a také souřadnice geometrického středu S krychle.
2) Urči obecnou rovnici roviny řezu.
3) Prochází řez bodem S ? Dokaž analyticky.
4) Urči souřadnice průsečíku P tělesové úhlopříčky EC s rovinou řezu.
5) Vrchol E jest promítnut kolmo do roviny řezu. Urči souřadnice tohoto průmětu E´.
6) Rovina řezu protíná krychli ve spodní podstavě. Urči rovnici této úsečky.
7) Konstrukčně sestroj řez krychle rovinou σ.
8) Při konstrukci řezu je užitečné vědět, ve kterém bodě protne přímka ML rovinu xy (tímto průsečíkem bude procházet řez). Analyticky zjisti souřadnice tohoto průsečíku R.

Jméno: ***Třída:*** ***Body:*** ***Známka:***

Př. Klasifikuj křivky:

$\Gamma_1: \quad xy = 0$

$\Gamma_2: \quad xy = 1$

$\Gamma_3: \quad x + y + xy = 0$

$\Gamma_4: \quad x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$

$\Gamma_5: \quad x^2 + 2y^2 - 2 = 0$

$\Gamma_6: \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$

$\Gamma_7: \quad x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$

$\Gamma_8: \quad x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

$\Gamma_9: \quad x^2 - y^2 + x - y = 0$

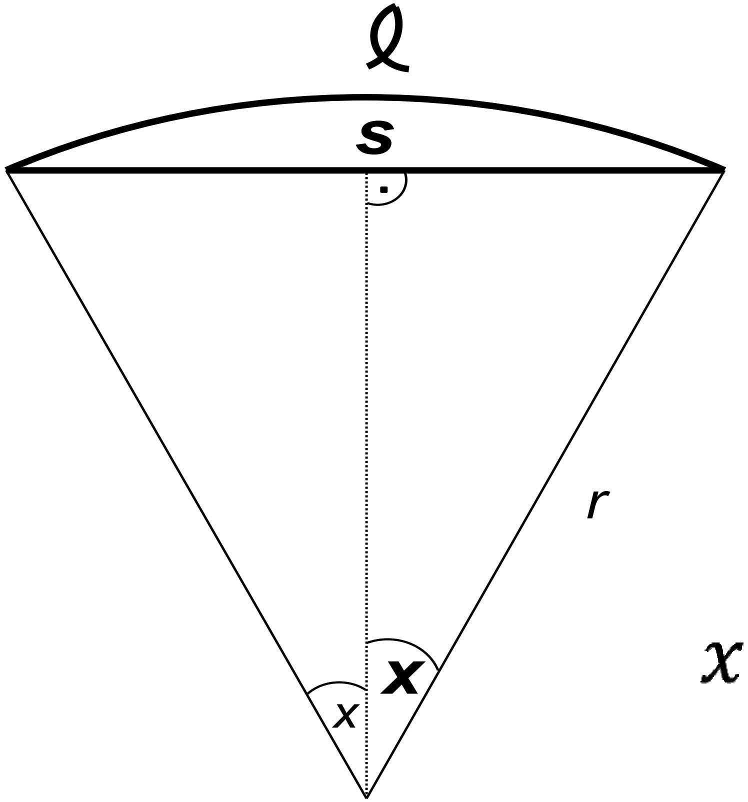
$\Gamma_{10}: \quad x^2 - y^2 - x + y - 1 = 0$

Test:

K daným rovnicím přiřaď příslušnou křivku:

(1) $x^2 + y = 0$	(A) **bod**
(2) $x^2 + y^2 = 0$	(B) **přímka**
(3) $x^2 + y^2 = 1$	(C) **2 různoběžky**
(4) $x^2 - y^2 = 0$	(D) **kružnice**
(5) $x^2 + 2y^2 = 1$	(E) **parabola**
(6) $x^2 - y^2 + 2 = 0$	(F) **elipsa**
(7) $y^2 - 2y + 1 = 0$	(G) **hyperbola**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\ x}{x} = 1$$



$$\sin x = \frac{\frac{s}{2}}{r} \quad \Rightarrow \quad s = 2r \sin x$$

$$x = \frac{\frac{l}{2}}{r} \quad \Rightarrow \quad l = 2rx$$

$$x \to 0$$

$$\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{l}}} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{r}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}\boldsymbol{rx}} = \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\frac{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}}}$$

Př.

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f^{(2019)}(0) = ?$$

NEKONEČNÉ ŘADY

$$\mathbf{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = ?}$$

Studenti mohou snadno podlehnout dojmu, že každou řadu lze sečíst „pomocí vzorce“.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$\longrightarrow$ **posloupnost částečných součtů**

definice součtu nekonečné řady,
konvergence a divergence nekonečné řady

Nutná podmínka konvergence

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Věty tvaru implikace

Dk. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

$$n \to \infty \quad \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ s & s \end{array}$$

PRAVDĚPODOBNOST

- dělá studentům problémy
- volit různorodé a zajímavé příklady
- experimenty – náhodné pokusy (kostka, mince, papíry)

? **MATURITA:**

3 studenti jdou ke zkoušce za sebou a vytažená otázka se vyřazuje. Předpokládejme, že je mezi nimi jedna velmi těžká. První má pst 1/30, že ji vytáhne.
Mají i druhý a třetí student stejnou pst, že ji vytáhnou ?
Mají všichni stejné podmínky ?

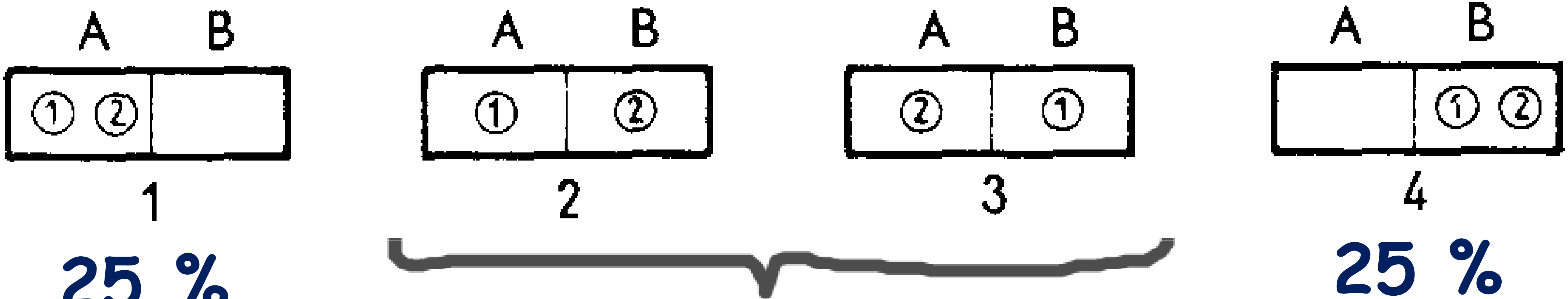
Exp. ověření ZVČ

Třída	Datum	Počty výher (1. hráč : 2. hráč)	Poměr
4B4	16.4. 2018	543 : 284	1,91 : 1

Pravděpodobnost a entropie

N částic plynu

N = 2



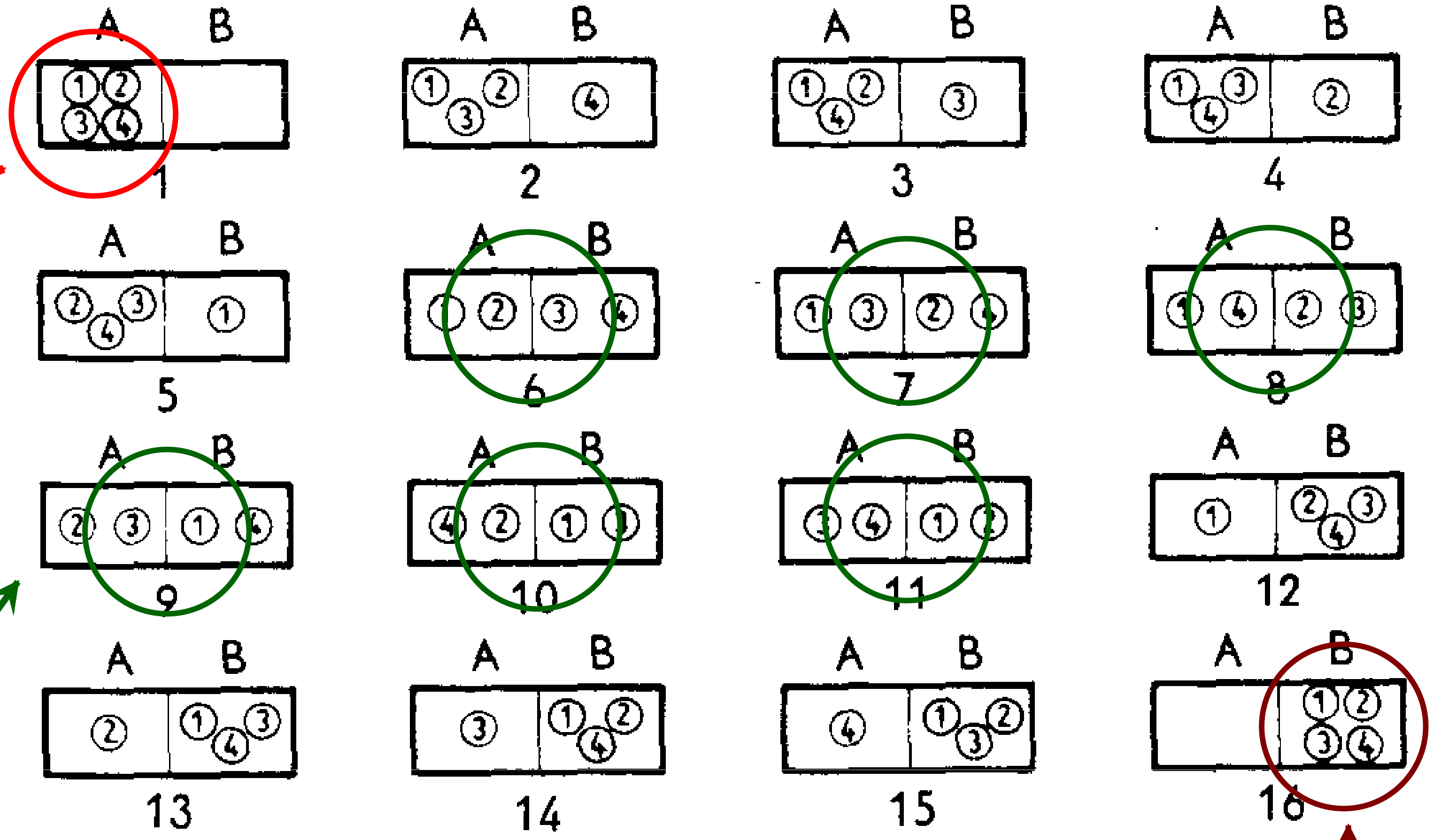
25 %

rovnovážný (makro) stav

50 %

25 %

N = 4



1/16 ≅ 0,06

6 %

6/16 ≅ 0,38

38 %

1/16 ≅ 0,06

6 %

N = 100

$$\frac{1}{2^{100}}$$

Jednou za 2^{100} sekund $\cong 3.10^{25}$ let $\cong$ 300 bilionů $\times$ stáří Země„dojde“ k samovolnému přechodu do nerovnovážného stavu.

Moje doporučení:

Nastavit jasná pravidla na začátku.

Žáci musí mít dobře vedený sešit.

Výuka nesmí být pouze frontální, je třeba zapojit žáky.

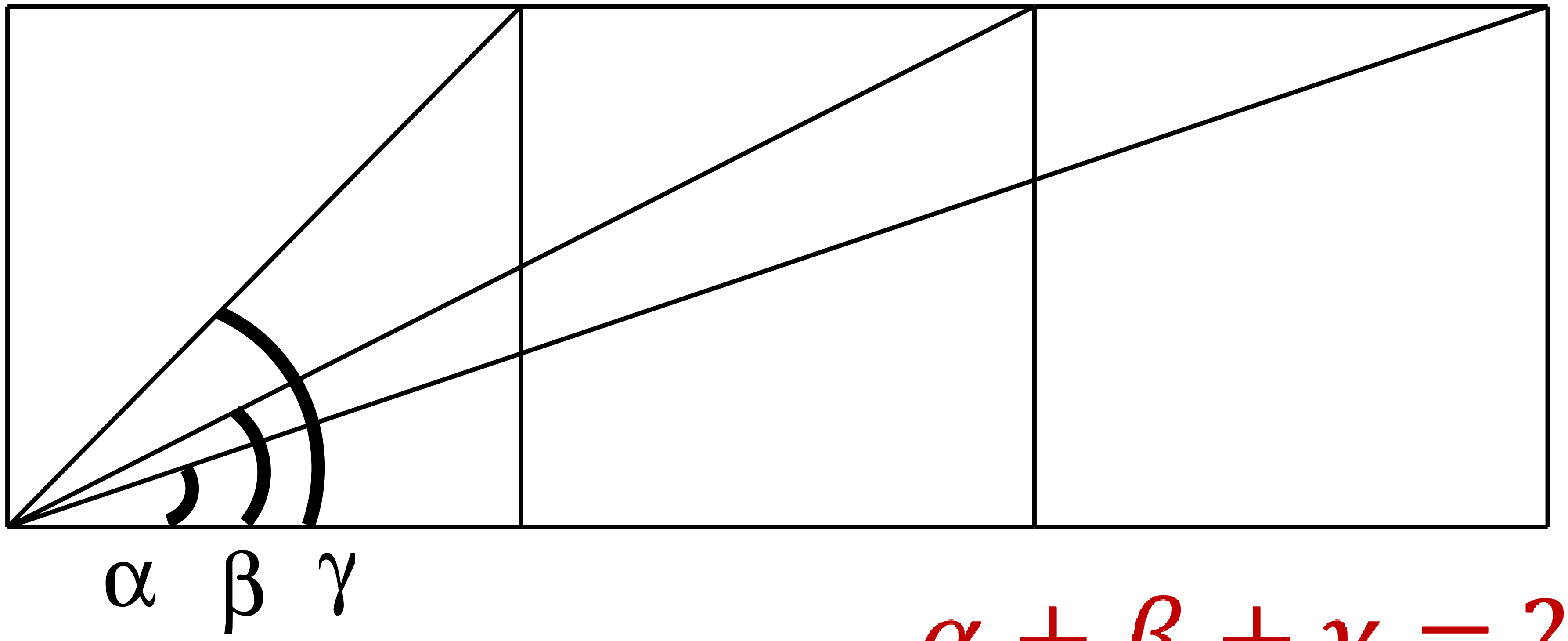
Nesnižovat své požadavky.

A dále ?

N A V Í

C

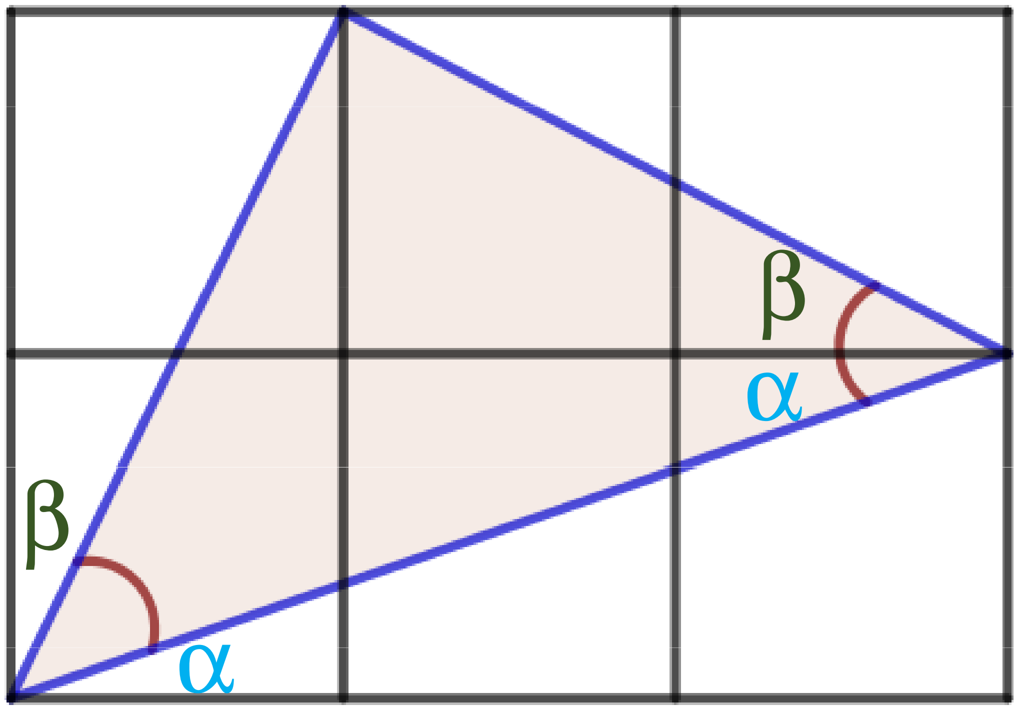
Příklad



$$\alpha + \beta + \gamma = ?$$

1) <u>nižší gymnázium</u>

$\longrightarrow$ čtvercová síť



rovnostranný Δ

$$90° - (\alpha + \beta) = \alpha + \beta$$

$$\alpha + \beta = 45°$$

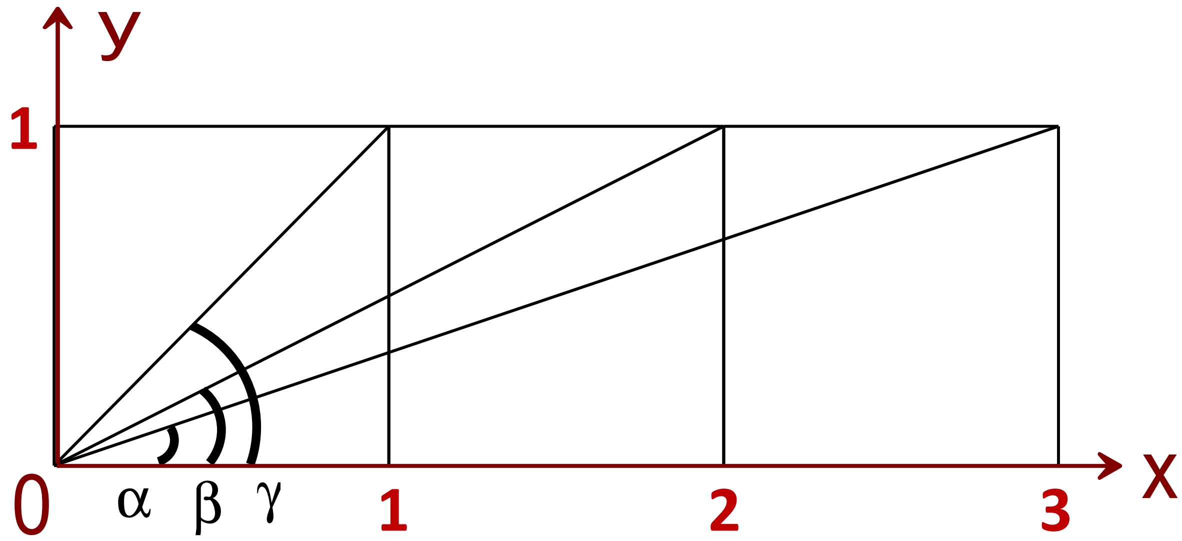
$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 90°}$$

2) 2. ročník

$\longrightarrow$ goniometrický

zřejmě $\gamma = 45°$

$\alpha + \beta = ?$



nejprve dokážeme: $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$

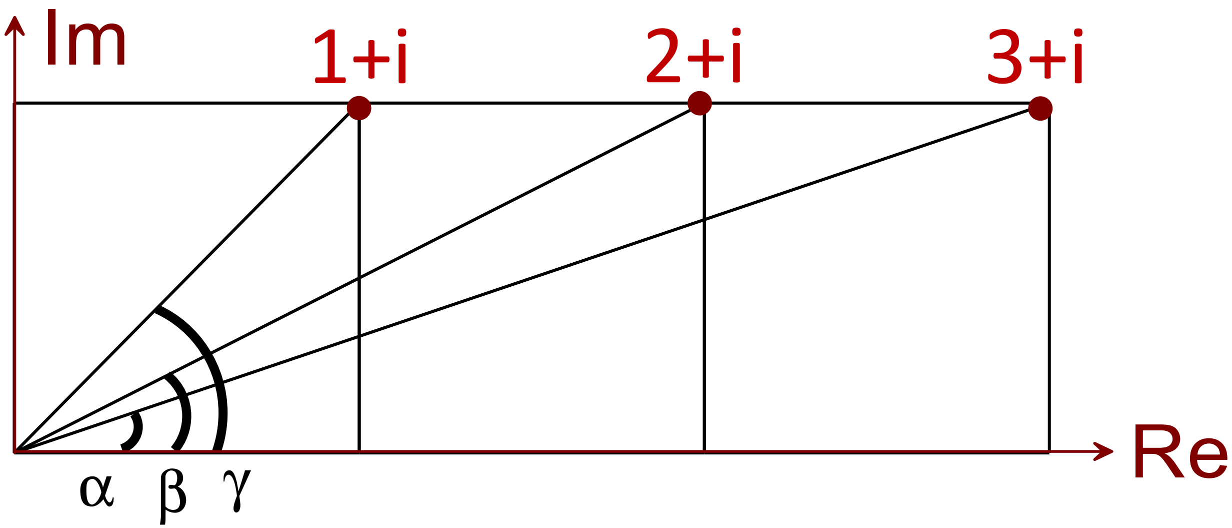
$$\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1$$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 45°$

$\alpha + \beta + \gamma = 90°$

3) 4. ročník

→ komplexní čísla



$$z_1 = \sqrt{2} \cdot (\cos\gamma + \mathrm{i} \cdot \sin\gamma)$$

$$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\cos\beta + \mathrm{i} \cdot \sin\beta)$$

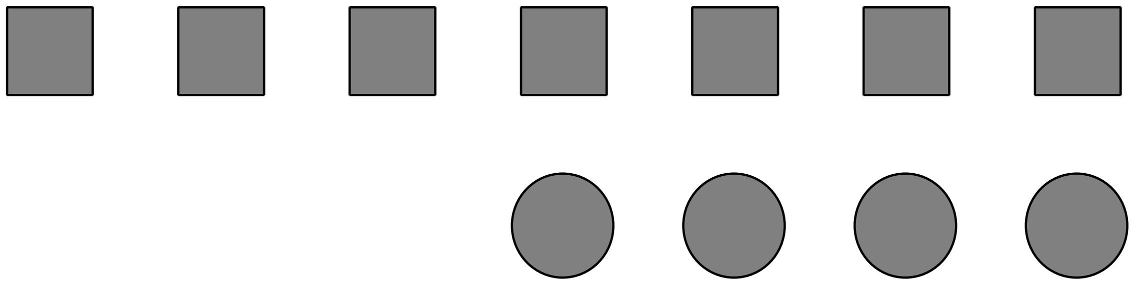
$$z_3 = \sqrt{10} \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha)$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 10 \cdot (\cos(\alpha + \beta + \gamma) + \mathrm{i} \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma))$$

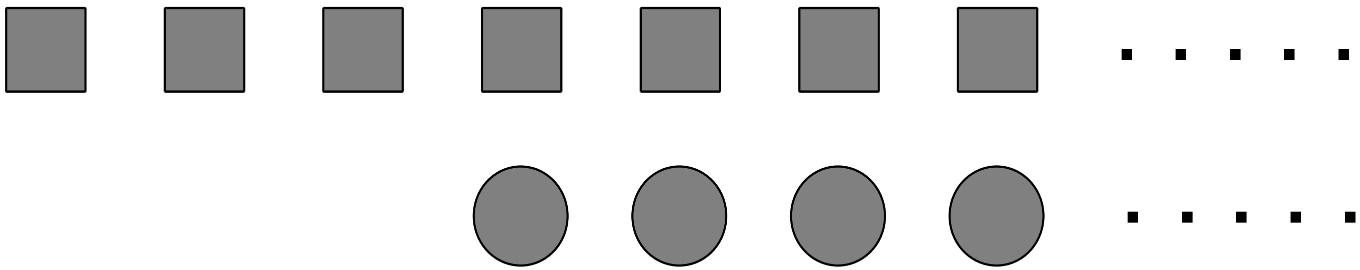
$$= (1 + \mathrm{i}) \cdot (2 + \mathrm{i}) \cdot (3 + \mathrm{i}) = 10\,\mathrm{i}$$

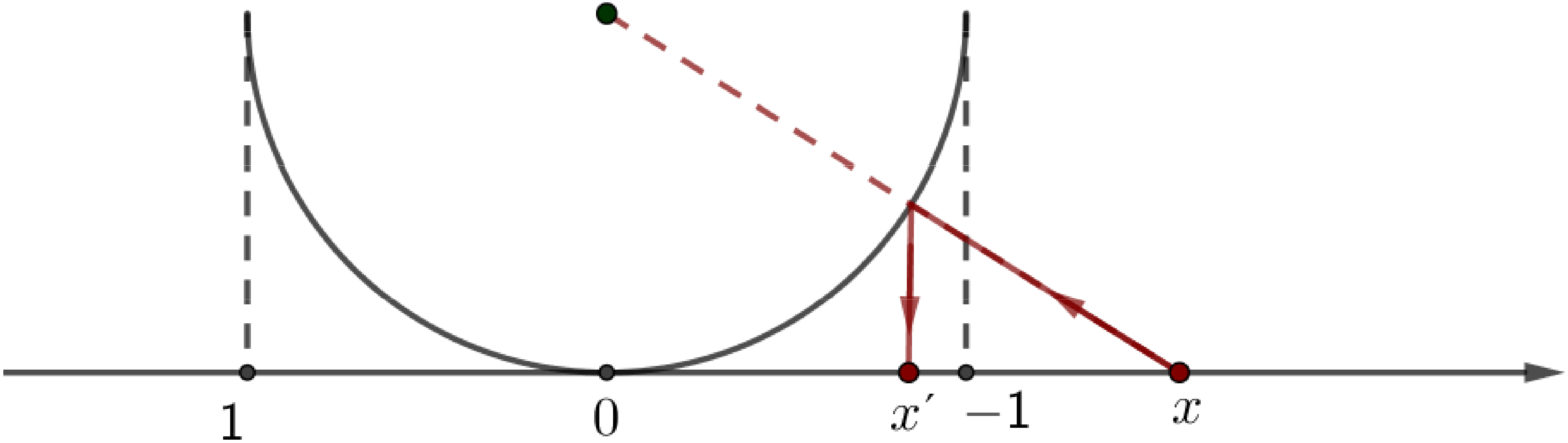
$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

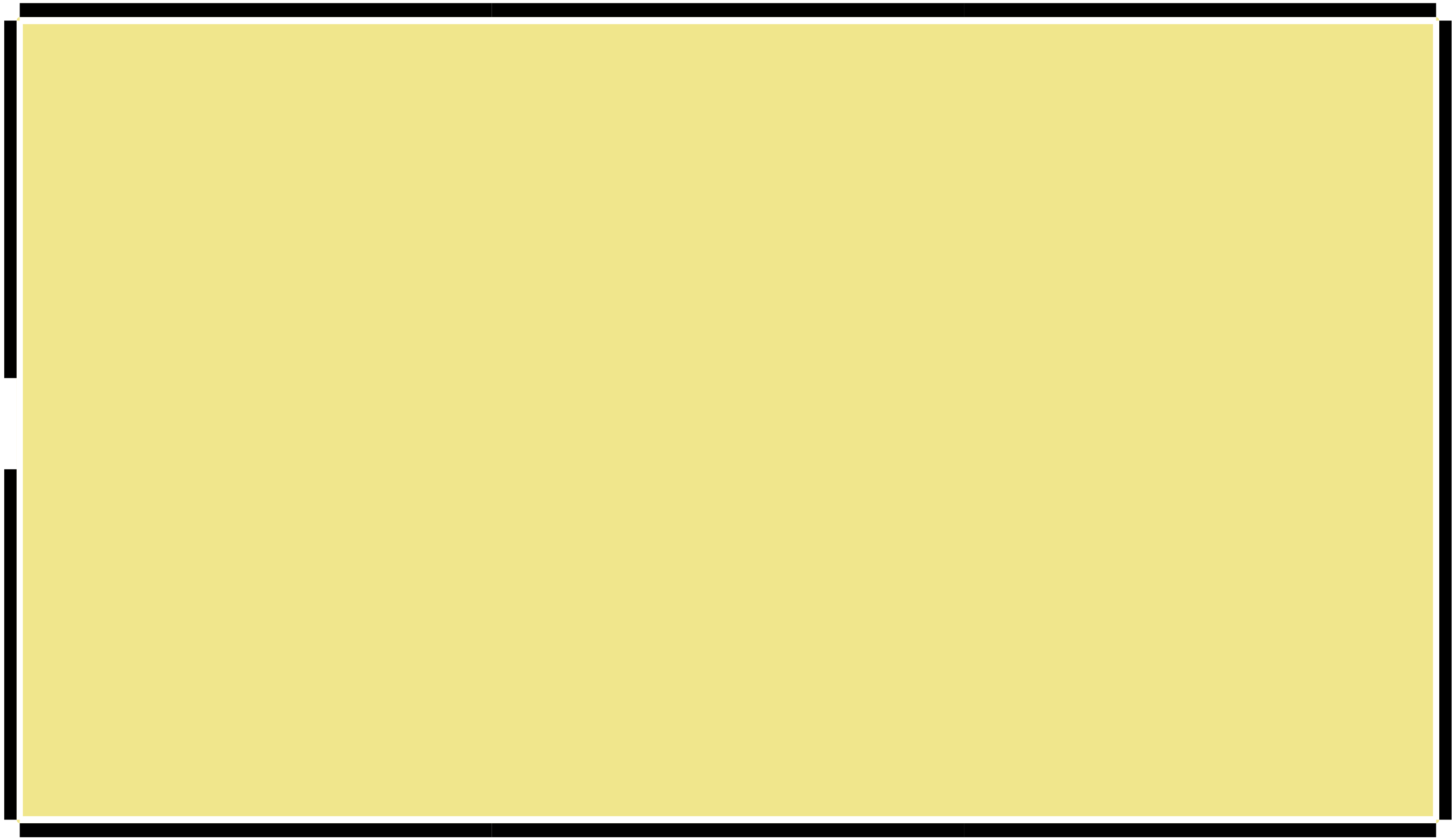
Je víc čtverečků než koleček ?



Je víc čtverečků než koleček ?

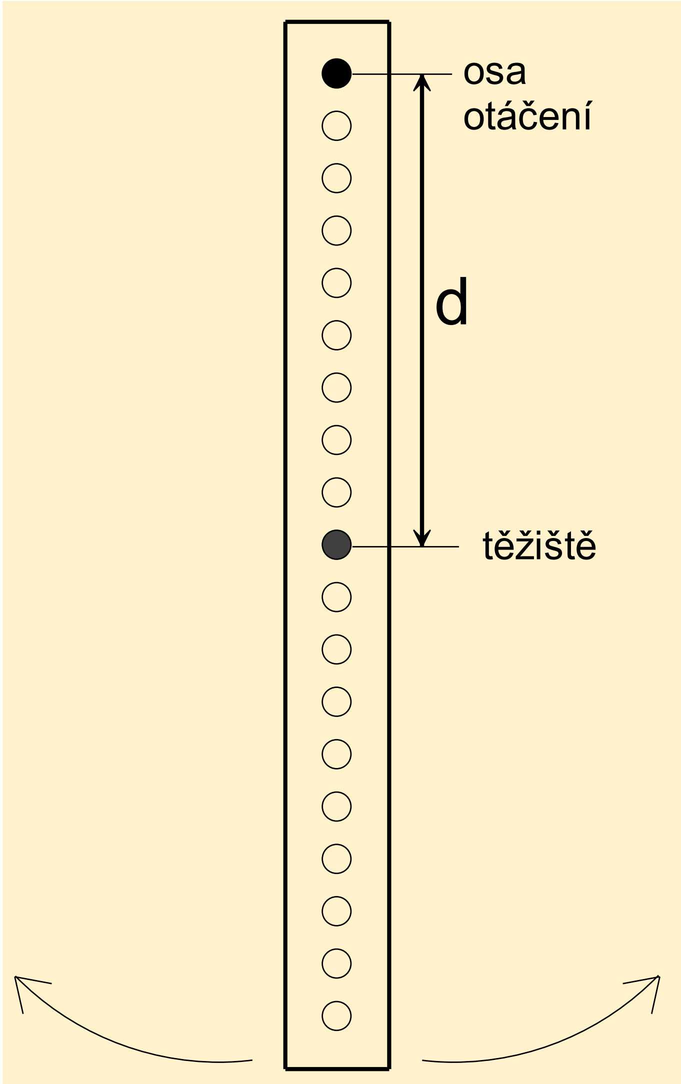



1
0
x′
−1
x



malíř

n barev


osa
otáčení
d
těžiště