

**Bi7491 Regresní modelování**

---

**Dodatky ke zobecněným  
lineárním modelům**

# Co byste měli vědět a umět po dnešní hodině ?

- ➔ Chápat princip analýzy deviance
- ➔ Umět nadefinovat Poissonův model a popsat jeho užití
- ➔ Umět vysvětlit pojem overdispersion – čím je způsobena a jak ji poznat a řešit
- ➔ Znat základní možnosti modelování ordinálních výsledků

**Dodatky ke zobecněným lineárním modelům**

---

**Analýza deviance  
ve zobecněných lineárních modelech**

# Modely a submodely

- Modelování -  $\mathbf{y}$  nahrazujeme  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  prostřednictvím odhadu  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$
- Jak moc se vzájemně liší?
- Model s  $n$  parametry  
**MAXIMÁLNÍ MODEL (plný, saturovaný)**  
→ veškerá variabilita do systematické složky
- Model s  $k$  parametry  
**ZKOUMANÝ MODEL**
- když vyloučíme některý prediktor ( $m < k$  parametrů)  
**SUBMODEL**
- Model s 1 parametrem (konstantou – průměrem)  
**NULOVÝ MODEL** → veškerá variabilita do náhodné složky

vždy stejný typ rozdělení, stejná linkovací funkce

# Deviance

→ představuje odchylku zkoumaného modelu od „dokonalého“ maximálního modelu

$$D = 2[l(\mathbf{y}; \mathbf{y}) - l(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{y})]$$

log-věrohodnost    log-věrohodnost  
maximálního    zkoumaného  
modelu            modelu

→ analogie s analýzou rozptylu – zde formulovaná pomocí změny ve věrohodnosti

→ umožňuje test odchylky od maximálního modelu

# Testování submodelů

$$\Delta D = 2[l(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{y}) - l(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{SUB}; \mathbf{y})]$$

rozdíln deviancí      log-věrohodnost      log-věrohodnost  
zkoumaného      submodelu  
modelu

- Deviance je velmi užitečná při srovnání dvou modelů z nichž jeden je podmodelem (submodelen) druhého
- Je-li  $\Delta D > \chi^2_{1-\alpha}(k-m)$ , kde  $m$  ( $k$ ) je počet odhadovaných parametrů submodelu (zkoumaného modelu), pak je submodel nevhodný – přehnaně zjednodušující

# Test významnosti celého modelu vs. maximální model

- srovnání maximálního (plného) modelu se **zkoumaným modelem – REZIDUÁLNÍ DEVIANCE** (odpovídá reziduálnímu součtu čtverců)
- *Nechybí nám nějaký významný efekt?*

$$D > \chi^2_{1-\alpha}(\text{počet pozorování} - \text{počet parametrů})$$



**NĚCO V MODELU CHYBÍ...**

**Software uvádí příslušnou statistiku  
Je ale asymptotická – slouží spíš pro orientační kontrolu**

# Test významnosti celého modelu vs. nulový model

- srovnání zkoumaného modelu s nulovým modelem  
**NULOVÁ DEVIANCE – REZIDUÁLNÍ DEVIANCE**
- *Vysvětluje vůbec zkoumaný model nějakou informací?*

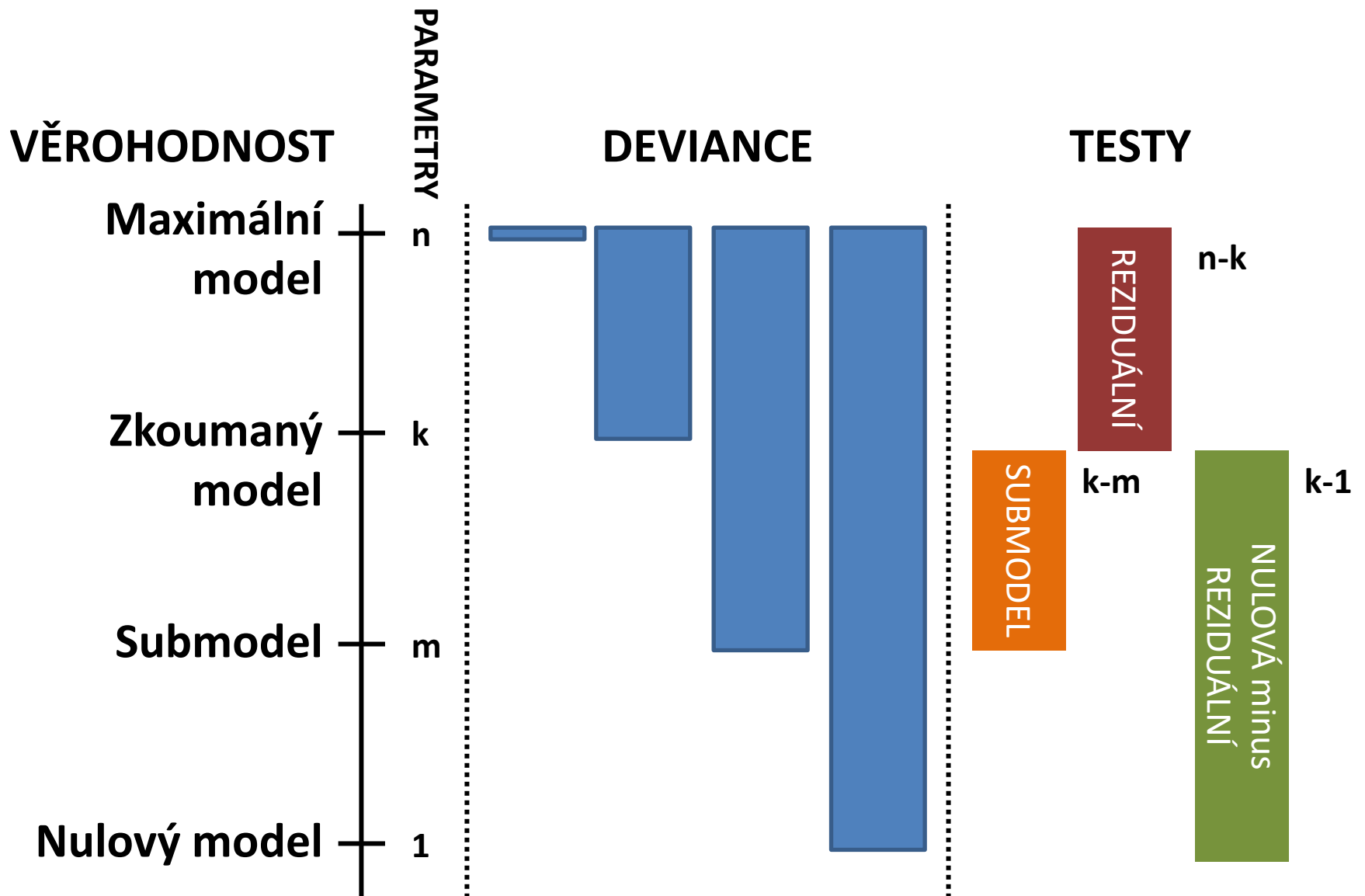
$$\Delta D > \chi^2_{1-\alpha} (\text{počet parametrů} - 1)$$



**MODEL NĚCO VYSVĚTLUJE**

**Software uvádí příslušnou statistiku  
Je ale asymptotická – slouží spíš pro orientační kontrolu**





# Akaikeovo informační kritérium

(Akaike information criterion, AIC)

$$AIC = -2l(\hat{\boldsymbol{\mu}}; \mathbf{y}) + 2k$$

AIC = - 2 maximum logaritmované věrohodnosti + 2 počet parametrů modelu

- Čím je hodnota AIC **menší**, tím je model lepší.
- AIC **penalizuje modely s velkým počtem parametrů**
- užití brání „přeučení“ modelu (takový model by dobře neodpovídal novému vzorku)

716

IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. AC-19, NO. 6, DECEMBER 1974

## A New Look at the Statistical Model Identification

HIROTUGU AKAIKE, MEMBER, IEEE

## **Dodatky ke zobecněným lineárním modelům**

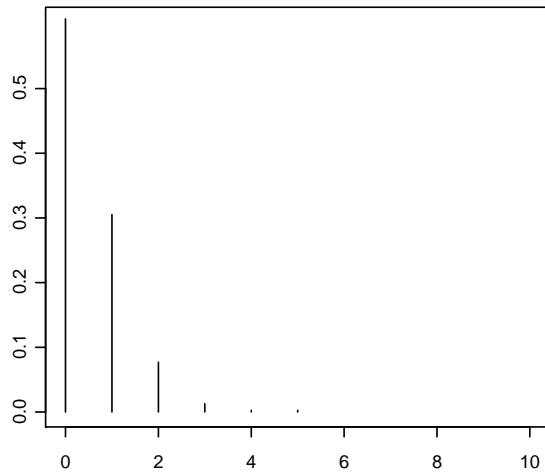
---

### **Poissonova regrese**

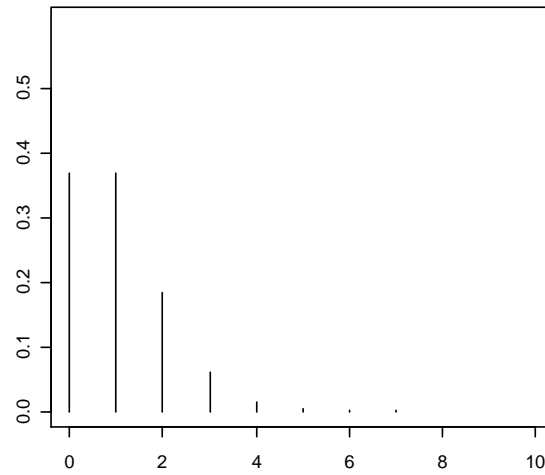
# Poissonovo rozdělení

- Diskrétní rozdělení, které **popisuje počet výskytů sledované události na danou jednotku** (času, plochy, objemu), když se tyto události vyskytují vzájemně **nezávisle** s konstantní intenzitou (**jediný** parametr  $\lambda$ ).
- Jedná se o zobecnění binomického rozdělení pro  $n \rightarrow \infty$  a  $p \rightarrow 0$ .
- Pravděpodobnostní funkce:  $P(X = x) = p_X(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x \geq 0$
- Střední hodnota, rozptyl:  $EX = \lambda, DX = \lambda$
- **Příklady:** průměrný výskyt mutací bakterií na 1 Petriho miskou, počet krvinek v poli mikroskopu, počet žížal vyskytujících se na 1 m<sup>2</sup>, počet pooperačních komplikací během určitého časového intervalu po výkonu.

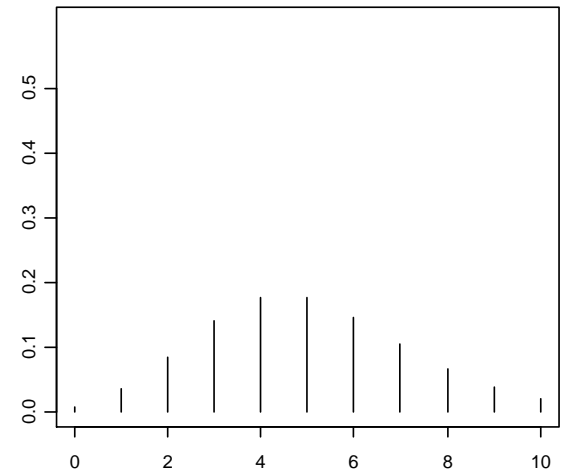
lambda = 0.5



lambda = 1



lambda = 5



# Formulace Poissonova modelu

- Uvažujeme výsledek vyjádřený počtem (událostí, objektů), který chceme vztáhnout ke známým vysvětlujícím proměnným – modelujeme pomocí Poissonova rozdělení

$$Y_i \sim Po(\lambda_i)$$

$$i = 1, \dots, n$$

# Formulace Poissonova modelu

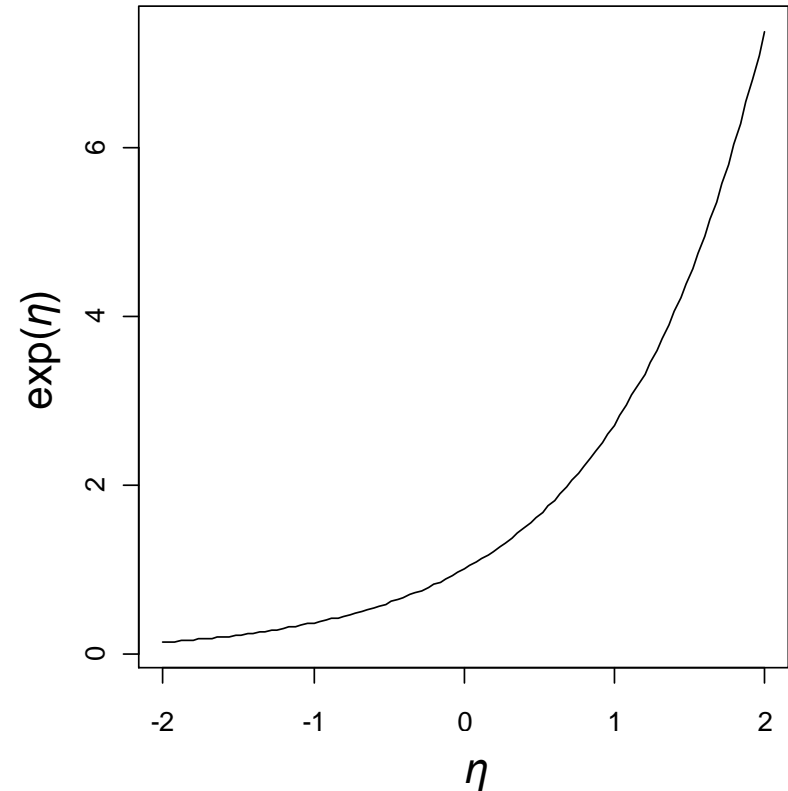
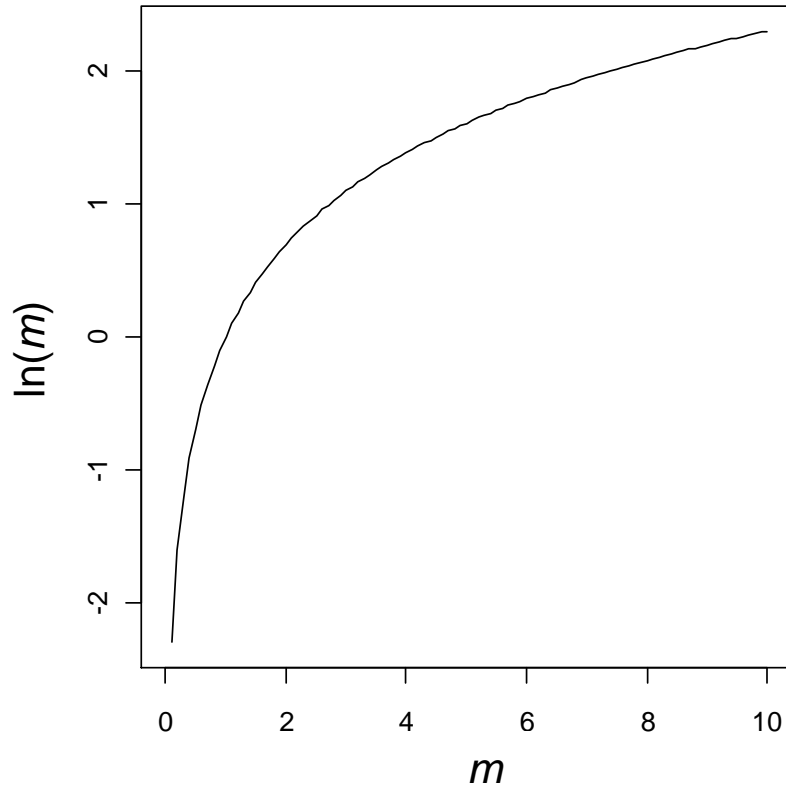
Normální lineární regresní model:

$$EY_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip}$$
$$i = 1, \dots, n$$

Poissonův regresní model – modelujeme **očekávaný počet událostí**:

$$\ln(m_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip}$$
$$i = 1, \dots, n$$

# Linkovací funkce





# Interpretace koeficientů - příklad

Subjekt 1:

$$\ln(m_1) = \beta_0$$

$$m_1 = \exp(\beta_0)$$

Subjekt 2:

$$\ln(m_2) = \beta_0 + \beta_1$$

$$m_2 = \exp(\beta_0 + \beta_1)$$

**Parametr  
asociovaný  
s nějakým  
binárním  
prediktorem**

**Risk ratio (relativní riziko) nějaké události:**

$$RR(2,1) = \frac{m_2}{m_1} = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1)}{\exp(\beta_0)} = \frac{\exp(\beta_0) \exp(\beta_1)}{\exp(\beta_0)} = \exp(\beta_1)$$

**Exp(odhad parametru) PŘEDSTAVUJE RELATIVNÍ RIZIKO SPOJENÉ S DANÝM PREDIKTOREM**

# Model incidence (míry)

$$\text{Incidence} = \frac{\text{počet nových případů}}{\text{součet „osoboroků“ v riziku}}$$

- Popsaný model lze využít pro modelování incidence onemocnění (výskytu událostí apod.)
- Nezbytné, pokud se pro jednotlivá pozorování liší např. doba sledování
- Do modelu je nezbytné uvést jmenovatele – součet osoboroků v riziku (person-years at risk), označ.  $d_i$
- V rámci softwarových nástrojů se specifikuje jako tzv. offset:

$$\ln\left(\frac{m_i}{d_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip}, i = 1, \dots, n$$

$$\ln(m_i) - \ln(d_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip}, i = 1, \dots, n$$

$$\ln(m_i) = \ln(d_i) + \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip}, i = 1, \dots, n$$

# Model incidence (míry)

$$\text{Incidence} = \frac{\text{počet nových případů}}{\text{součet „osoboroků“ v riziku}}$$

- ➔ Popsaný model lze využít pro modelování incidence onemocnění (výskytu událostí apod.)
- ➔ Nezbytné, pokud se pro jednotlivá pozorování liší např. doba sledování
- ➔ Do modelu je nezbytné uvést jmenovatele – součet osoboroků v riziku (person-years at risk), označ.  $d_i$
- ➔ V rámci softwarových nástrojů se specifikuje jako tzv. offset
- ➔ **Interpretace  $\exp(\beta)$  – poměr incidencí**

# Ověření splnění předpokladů

1. **Linkovací funkce** –  $\ln(\cdot)$
2. **Správnost lineárního prediktoru** – netřeba přidávat další proměnné, transformovat proměnné, nebo přidat interakce mezi proměnnými
3. **Správnost předpokládaného rozptylu výsledků** – dáno vzorcem pro Poissonovo rozdělení

## Obdobně jako u logistické regrese

- analýza reziduí a vlivu
- analýza deviance

## **Dodatky ke zobecněným lineárním modelům**

---

**„Nadměrný rozptyl“ - *overdispersion***

# Probíraná rozdělení v GLM

→ prozatím jsme se věnovali logistické a poissonově regresi...

# Binomické rozdělení

→ Diskrétní rozdělení, které **popisuje počet výskytů sledované události** (ve formě nastala/nenastala) **v sérii  $n$  nezávislých experimentů**, kdy v každém experimentu **je stejná pravděpodobnost výskytu události** a je  $p = \theta$ .

→ Pravděpodobnostní funkce:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

→ Střední hodnota

$$E(X) = n\theta$$

→ Rozptyl

$$D(X) = n\theta(1 - \theta)$$

# Poissonovo rozdělení

- Diskrétní rozdělení, které **popisuje počet výskytů sledované události na danou jednotku** (času, plochy, objemu), když se tyto události vyskytují vzájemně **nezávisle** s konstantní intenzitou (**jediný** parametr  $\lambda$ ).
- Jedná se o zobecnění binomického rozdělení pro  $n \rightarrow \infty$  a  $p \rightarrow 0$ .
- Pravděpodobnostní funkce:  $P(X = x) = p_X(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x \geq 0$
- Střední hodnota, rozptyl:  $EX = \lambda, DX = \lambda$
- **Příklady:** průměrný výskyt mutací bakterií na 1 Petriho misku, počet krvinek v poli mikroskopu, počet žížal vyskytujících se na 1 m<sup>2</sup>, počet pooperačních komplikací během určitého časového intervalu po výkonu.



# Střední hodnota a rozptyl

- prozatím jsme se věnovali logistické a poissonově regresi...
- v těchto rozděleních jsou spjaté střední hodnota a rozptyl:
  - v Poissonově rozdělení platí
    - je-li střední hodnota 1,5, je rozptyl rovněž 1,5
    - (návštěv na urgentním příjmu za hodinu, moučných červů v dl mouky,...)
  - v Binomickém rozdělení platí
    - je-li střední hodnota 1,5, je rozptyl 0,75
    - (v situaci, kdy např. odhadujeme počet chlapců mezi třemi potomky)

# Overdispersion v praxi

→ v praxi rozdělení výsledků nemusí přesně odpovídat předpokladům

## → DŮVOD

→ výsledky nejsou vzájemně zcela nezávislé

(více měření u jednoho pacienta/lékaře/laboratoře, autokorelace  
v časových řadách, ...)

→ naše naměřené a zkoumané prediktory kompletně nespecifikují výsledek

## → INDIKACE

→ velmi vysoká reziduální variabilita (vysoká významnost testu)

## → ŘEŠENÍ

→ přidat více prediktorů (pokud ale ten důležitý byl změřen)

→ odhadnout a využít zvlášť disperzní parametr

`family=quasibinomial / quasipoisson`

## **Dodatky ke zobecněným lineárním modelům**

---

### **Multinomiální modely**

# Ordinální výsledek

→ kategorie lze seřadit, ale jen obtížně k nim lze přiřadit číselnou hodnotu (např. stádium choroby)

---

→ opět vycházíme z lineárního prediktoru

$$\eta_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{ij}$$

→ modelovat binomicky? modelovat nějaké skóre?  
ani jedno nemusí být vhodné

# Ordinální výsledek

- Příklad: modelujeme stadium fibrózy jater ( $Y_i = 0, 1, 2, 3$ ) pomocí tří krevních markerů
- kumulativní pravděpodobnosti (odshora) jednotlivých stadií:

$q_{i,3} = p_{i,3}$	pravděpodobnost kategorie 3	cut-off mezi 2 a 3
$q_{i,2} = p_{i,2} + p_{i,3}$	pravděpodobnost kategorie 2 a více	cut-off mezi 1 a 2
$q_{i,1} = p_{i,1} + p_{i,2} + p_{i,3}$	pravděpodobnost kategorie 1 a více	cut-off mezi 0 a 1

- kdybychom použili logistickou regresi pro spojené kategorie 2 a více

$$\eta_i = \text{logit}(q_{i,2}) = \ln\left(\frac{q_{i,2}}{1 - q_{i,2}}\right) = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3}$$

# Model proporcionálních šancí

**Předpoklad: Vliv proměnné nezávisí na volbě cut-off (!)**

→ Model proporcionálních šancí pro kumulativní logit

$j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}\eta_{i,j} = \text{logit}(q_{i,j}) &= \ln\left(\frac{q_{i,j}}{1 - q_{i,j}}\right) = \ln\left(\frac{P(Y_i \geq j)}{1 - P(Y_i \geq j)}\right) \\ &= \alpha_j + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3}\end{aligned}$$

→ v měřítku **pravděpodobností**

$$q_{i,j} = q_j(x_i) = \frac{\exp(\alpha_j + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3})}{1 + \exp(\alpha_j + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3})}$$

# Proporcionalita

→ Model proporcionálních šancí pro kumulativní logit

$j = 1, 2, 3$

$$\eta_{i,j} = \text{logit}(q_{i,j}) = \ln\left(\frac{q_{i,j}}{1-q_{i,j}}\right) = \ln\left(\frac{P(Y_i \geq j)}{1-P(Y_i \geq j)}\right)$$

$$= \alpha_j + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3}$$

intercept pro každý cut-off zvlášť

poměry šancí společné

# Proporcionalita

→ Model proporcionálních šancí pro kumulativní logit

$j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}\eta_{i,j} = \text{logit}(q_{i,j}) &= \ln\left(\frac{q_{i,j}}{1-q_{i,j}}\right) = \ln\left(\frac{P(Y_i \geq j)}{1-P(Y_i \geq j)}\right) \\ &= \alpha_j + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3}\end{aligned}$$

→ odhadnuté pravděpodobnosti

$$p_{i,3} = q_{i,3}$$

$$p_{i,2} = q_{i,2} - q_{i,3}$$

$$p_{i,1} = q_{i,1} - q_{i,2}$$

$$p_{i,0} = 1 - q_{i,1}$$



# Interpretace

Výsledek modelování: závislost stadia fibrózy na krevních markerech  
Byla provedena log2 transformace markerů – odhadujeme účinek zdvojnásobení jejich hodnot

Marker	Effect of Doubling	Effect of 1 SD on log-scale	<i>P</i> -Value
ha	1.48 (1.07, 2.04)	1.52	0.019
p3np	2.28 (1.37, 3.79)	1.69	0.0016
ykl40	1.72 (1.24, 2.39)	1.46	0.0011

- všechny markery jsou spojeny se stadiem choroby
- zdvojnásobení hodnoty markeru ykl40 dává o 72% vyšší šanci fibrózy vyššího stadia

Andersen & Skovgaard, 2010

# Logistický a Poissonův model

---

**Závěr**

# Co byste měli vědět a umět po dnešní hodině ?

- Chápat princip analýzy deviance
- Umět nadefinovat Poissonův model a popsat jeho užití
- Znat interpretaci probíraných modelů a jejich koeficientů
- Umět vysvětlit pojem overdispersion – čím je způsobena a jak ji poznat a řešit
- Znat základní možnosti modelování ordinálních výsledků

# **Dodatky ke zobecněným lineárním modelům**

---

## **Cvičení**

## ➔ V adresáři naleznete článek:

Lee a kol.: Predicting Mortality Among Patients Hospitalised for Heart Failure

## ➔ Úkoly:

1. Co představuje závisle proměnnou (výsledek)?
2. Jaký model byl využit pro modelování vztahu mezi prediktory a výsledkem?
3. Jaká byla modelovací strategie pro výběr prediktorů?
4. Byla ověřena celková shoda mezi pozorovanými a predikovanými odhady rizika (kalibrace)? Jak?
5. Najděte některé odlišnosti ve výsledcích univariátní a multivariátní analýzy?
6. Jak interpretujete výsledky multivariátního modelu (tabulka 3)?