

Příklady cvičení plus

- Uvažujte homogenně nabitou kouli ležící v počátku souřadnicové soustavy o hustotě náboje ρ a poloměru R , rotující úhlovou frekvencí ω okolo osy z . Vypočtěte magnetickou indukci na ose rotace. $\left[B_z = \frac{\mu_0 \omega R^2 Q}{10\pi z^3} \right]$
- Uvažujte nabitou kouli o poloměru R s hustotou náboje závisící pouze na radiální vzdálenosti $\rho(r)$. Určete tuto závislost tak, aby byla elektrostatická energie nejmenší. $[\rho(r) \sim \delta(R)]$
- Dokažte rovnost $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(B^2 + \frac{1}{c^2} E^2 \right) - \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E}$.
- Potenciální energie bodového tělesa o hmotnosti m_0 v gravitačním poli je v Newtonovské fyzice dána Poissonovou rovnicí $\Delta E_p(\vec{r}) = 4\pi m_0 \kappa \rho(\vec{r})$. Napište obecný vztah pro gravitační sílu působící na těleso o hmotnosti m_0 v gravitačním poli, které je buzené hustotou $\rho(\vec{r}')$. $\left[\vec{F} = -m_0 \kappa \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV \right]$
- Uvažujte púlsférovou slupku o poloměru R se středem v počátku určené podmínkou $z > 0$ (t.j. tvořenou body splňujícími $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \wedge z > 0$). Púlsférová slupka je nabitá plošnou hustotou náboje $\sigma(x, y, z) = \sigma_0 z$. Určete elektrickou intenzitu v počátku. $\left[E_z = -\frac{\sigma_0 R}{6\epsilon_0} \right]$
- Uvažujte dvě rovnoběžné nekonečně dlouhé přímky vzdálené od sebe l . Jedna z přímek je nabitá délkovou hustotou náboje $\tau_1 = D/l$, kde D je konstanta, a druhá hustotou náboje $\tau_2 = -D/l$. Určete rozložení elektrického potenciálu v tomto systému. Určete rozložení potenciálu v limitě kdy vzdálenost přímek je nulová. Při výpočtu nezapomeňte na to, že když budeme přímky přibližovat tak jejich délková hustota poroste nepřímo úměrně vzdálenosti mezi přímkami. Vypočtěte elektrickou intenzitu odpovídající tomuto limitnímu případu.
- Uvažujte nekonečně velkou vodivou desku v rovině $x - y$ a bodový náboj velikosti Q umístěný na kladné části osy z ve vzdálenosti d od této desky. Určete rozložení elektrické intenzity a potenciálu v tomto systému. Elektrickou intenzitu v polorovině $z > 0$ můžete najít tak, že kromě náboje Q ležícího v kladné polorovině si také představíte bodový náboj $-Q$ ležící na záporné části osy z vzdálený d od počátku. Určete rozložení plošného náboje $\sigma(x, y)$ podél vodivé desky. Ze získané plošné hustoty náboje určete celkový náboj vodivé desky. $[Q_d = -Q]$
- Uvažujte dvě bodové nabitě částice s opačným znaménkem pro jejichž hmotnosti platí $M \gg m$. Uvažujte možnost pouze radiálního pohybu. Vypočtěte závislost času na radiální poloze

a) pokud jsou částice volné (částice přiletěla, nebo odletí do nekonečna)

b) pokud jsou částice vázané.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } t + c = \frac{b}{a^{3/2}} \left[\sqrt{\frac{a}{b}} r \sqrt{1 + \frac{a}{b}} + \ln \left(\sqrt{1 + \frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}} r \right) \right], \\ \text{b) } t + c = -\frac{b}{\tilde{a}^{3/2}} \left[\sqrt{\frac{\tilde{a}}{b}} r \sqrt{1 - \frac{\tilde{a}}{b}} + \arccos \left(\sqrt{\frac{\tilde{a}}{b}} r \right) \right], \text{ kde } b = \frac{2Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m}, \\ -\tilde{a} = a = \frac{2E_c}{m}, \text{ kde } E_c \text{ je celková energie částice.} \end{array} \right]$$

- Uvažujte N dimenzionální krychli. Na každé hraně krychle se nachází rezistor o odporu R . Protilehlé rohy této krychle jsou zapojeny ke zdroji napětí. Určete odpor této krychle. $\left[R_c = N \sum_{k=0}^N \frac{R}{\binom{N}{k}} \right]$

- Uvažujte cívku (solenoid) o délce L tvořenou tenkým drátem stočeným do šroubovice o poloměru R , kterým protéká proud I . Sestavte Biot-Savartův integrál pro složku vektoru magnetické indukce rovnoběžnou s osou šroubovice. Tuto složku vypočtete uprostřed šroubovice. Dokažte, že v případě $L \rightarrow \infty$ je integrál roven výsledku z Ampérova zákona.

- Uvažujte homogenně nabitý válec o délce L a poloměru R . Vypočtete elektrickou intenzitu a potenciál na ose válce.

$$\left[\begin{array}{l} E_z = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\left(R^2 + \left(z - \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(R^2 + \left(z + \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + L \right), \\ \varphi = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{4} \ln \frac{\left(R^2 + \left(z - \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(z - \frac{L}{2} \right)}{\left(R^2 + \left(z - \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(z - \frac{L}{2} \right)} - \frac{R^2}{4} \ln \frac{\left(R^2 + \left(z + \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(z + \frac{L}{2} \right)}{\left(R^2 + \left(z + \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(z + \frac{L}{2} \right)} + Lz + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left(\left(z - \frac{L}{2} \right) \left(R^2 + \left(z - \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(z + \frac{L}{2} \right) \left(R^2 + \left(z + \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) = \\ -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{2} \ln \frac{\left(R^2 + \left(z - \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(z - \frac{L}{2} \right)}{\left(R^2 + \left(z + \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(z + \frac{L}{2} \right)} + Lz + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\left(z - \frac{L}{2} \right) \left(R^2 + \left(z - \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(z + \frac{L}{2} \right) \left(R^2 + \left(z + \frac{L}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \right] \end{array} \right]$$

- Uvažujte homogenně nabitý okolo osy symetrie rotující válec o délce L a poloměru R . Vypočtete magnetickou indukci na ose válce.

- Uvažujte paralelně zapojenou cívku, rezistor a kondenzátor, které nejsou dále k ničemu připojeny. Cívkou a rezistorem na počátku neprotéká žádný proud. Kondenzátor je nabitý nábojem Q_0 . Určete časový vývoj náboje na kondenzátoru a proudu v cívce a rezistoru.

- Uvažujte kruhovou proudovou smyčku o poloměru R s proudem I nacházející se v nehomogenním magnetickém poli \vec{B} . Smyčka leží v rovině xy . Vypočtete vektor síly působící na tuto smyčku. Při výpočtu použijte Taylorův rozvoj magnetické indukce do prvního (nekonstantního) řádu.
- Uvažujte lineární koaxiální kabel o délce L , kterým protéká proud I . Vnitřní vodič má poloměr R_1 a vnější tenká vodivá slupka má poloměr R_2 . Vypočtete energii magnetického pole v kabelu. Nezanedbejte poloměr vnitřního vodiče. $\left[E = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \right]$