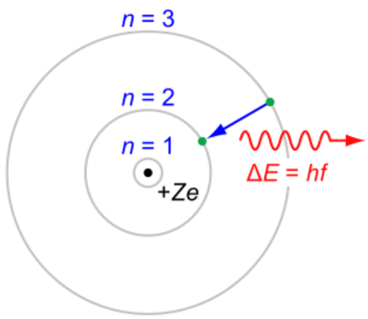
Bohrův model atomu vodíku – odvození základních vztahů

Zbyněk Fišer

- Bohrův model atomu vodíku je založen na dvou postulátech:
  1. **Elektron se může dlouhodobě nacházet jenom v určitých stavech s danou energií a na těchto stavech nevyzařuje (kvantování momentu hybnosti).**
  2. **Přeskok elektronu mezi těmito stavy je realizován pomocí emise/absorpce fotonu, jehož energie je rovna rozdílu energií hladin, mezi kterými došlo k přeskoku elektronu.**

- Existence diskrétních stavů, ve kterých se může elektron nacházet, souvisí s tzv. Bohrovou kvantovou podmínkou (kvantování momentu hybnosti)

$$l = n\hbar \tag{1}$$
$$mrv = n\hbar \tag{2}$$



(zdroj: en.wikipedia.org)

- Z Bohrovy kvantové podmínky lze vyjádřit rychlost a vidíme, že ta může nabývat pouze diskrétních hodnot v závislosti na n ($n = 1, 2, 3, 4, ...$)

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr} \tag{3}$$

- Základním bodem Bohrova modelu je to, že vychází z představy klasické fyziky – mezi elektronem a protonem působí elektrická síla, která je v pozici dostředivé síly

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \tag{4}$$

(m je hmotnost elektronu, v je rychlost, r je poloměr, e je elementární náboj)

- Z předchozího vztahu (4) vyjádříme r

$$r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m}\frac{1}{v^2} \tag{5}$$

- Nyní dosadíme do předchozího vztahu (5) za v ze vztahu pro v_n (3) (tedy vnutíme poloměru r kvantování přes rychlost) a vyjádříme následně r_n

$$r_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m}\left(\frac{1}{\frac{n\hbar}{mr_n}}\right)^2 \tag{6}$$

$$r_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2 m r_n^2}{n^2\hbar^2} \tag{7}$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m}n^2 \tag{8}$$

- Výsledný vztah udává kvantování povolených poloměrů kružnic, na nichž se elektron může dlouhodobě nacházet, pro $n = 1$ dostaneme hodnotu známou jako Bohrův poloměr a_0 a další poloměry jsou jeho násobky

$$r_n = a_0 n^2 \qquad\qquad a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m} = 0,53\ \text{Å} \tag{9}$$

- K určení energie elektronu v daném stavu vyjdeme ze vztahu pro celkovou energii, která je rovna součtu kinetické a potenciální energie (bereme se znaménkem mínus záměrně)

$$E = E_k + E_p \tag{10}$$
$$E = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n} \tag{11}$$

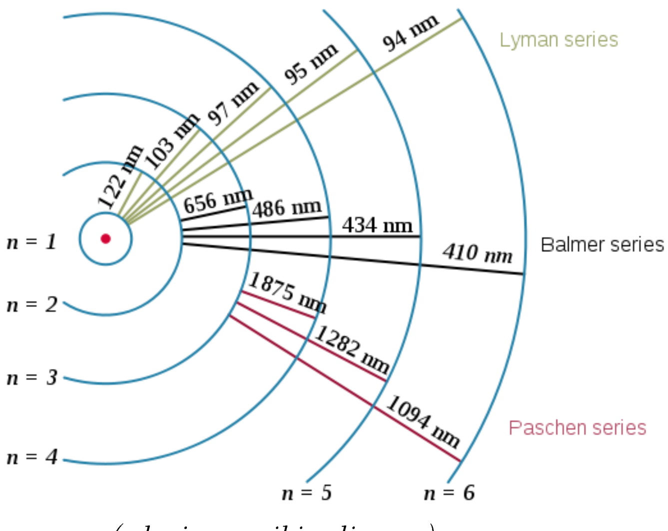
- Nyní dosadíme do energií vztahy pro r_n (8) a v_n (3) a upravíme

$$E_n = \frac{1}{2}m\left(\frac{n\hbar}{mr_n}\right)^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n} \tag{12}$$
$$E_n = \frac{1}{2}m\left(\frac{n\hbar}{m}\right)^2\frac{1}{r_n^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}e^2\frac{1}{r_n} \tag{13}$$
$$E_n = \frac{1}{2}\frac{n^2\hbar^2}{m}\left(\frac{e^2 m}{4\pi\epsilon_0\hbar^2 n^2}\right)^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}e^2\frac{e^2 m}{4\pi\epsilon_0\hbar^2 n^2} \tag{14}$$
$$E_n = \frac{1}{32}\frac{e^4 m}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2 n^2} - \frac{1}{16}\frac{e^4 m}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2 n^2} \tag{15}$$
$$E_n = -\frac{1}{32}\frac{e^4 m}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2} \tag{16}$$

- Výsledný vztah určuje energii, kterou má elektron na dané hladině s číslem n, energii můžeme vyjádřit v násobcích Rydbergovy konstanty Ry

$$E_n = -Ry\frac{1}{n^2} \qquad\qquad Ry = \frac{1}{32}\frac{e^4 m}{\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = 13,6\ \text{eV} \tag{17}$$

- Při přechodu elektronu z jedné hladiny na druhou musí dojít buď k emisi nebo absorpci fotonu o energii, která je rovna rozdílu energií těchto dvou hladin (2. Bohrův postulát)



(zdroj: en.wikipedia.org)

$$|E_n - E_m| = hf \tag{18}$$
$$\left|\left(-Ry\frac{1}{n^2}\right) - \left(-Ry\frac{1}{m^2}\right)\right| = hf \tag{19}$$
$$Ry\left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| = h\frac{c}{\lambda} \tag{20}$$