

## DIFRAKCE

si rozebereme později. Předpokládejme však, že víme, že část světla se odrazí jak při vstupu tak i výstupu z odrazivého prostředí. Podíváme-li se na odraz světla na tenké vrstvě, vidíme součet dvou vln. Je-li tloušťka vrstvy dostatečně malá, dojde k interferenci těchto dvou vln, konstruktivní nebo destruktivní, v závislosti na znaménkách fází. Může se například stát, že pro červenou barvu dostaneme zesílený odraz, ale pro modrou, jež má jinou vlnovou délku, dostaneme zeslabený odraz v důsledku destruktivní interference, takže vidíme jasný červený odraz. Změníme-li tloušťku, tj. podíváme-li se na jiné místo, kde je vrstva tlustší, může to být naopak – červená se zeslabí, ale ne modrá, takže obraz zdroje je jasně modrý nebo zelený nebo žlutý nebo jiný. Proto při pohledu na tenké vrstvy vidíme *barvy* a ty se mění, díváme-li se z různých úhlů, neboť již víme, že fázové rozdíly jsou různé pro různé úhly. Tak umíme pochopit mnoho dalších případů, když při různých úhlech vidíme barvy na olejových vrstvách, mýdlových bublinách apod. Princip je však vždy stejný – sčítají se vlny s rozdílnými fázemi.

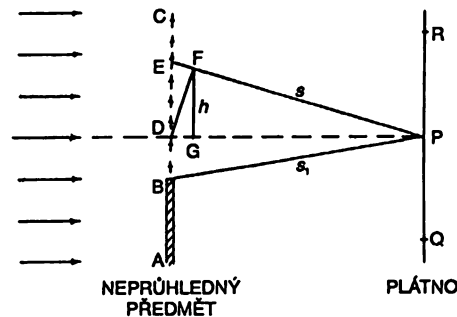
Vzpomeneme i další důležitou aplikaci difrakce. U mřížky jsme viděli na plátně difrakční obrazec. Kdybychom použili monochromatické světlo, nacházelo by se maximum na určitém místě. Byla by tam i další maxima vyšších řádů. Z polohy difrakčních obrazců bychom mohli určit vzdálenost rýh na mřížce, kdybychom znali vlnovou délku světla. Z rozdílu v intenzitě mezi jednotlivými obrazci bychom mohli zjistit profil rýh tvořících mřížku – ať jsou to drátky, pilovité rýhy nebo něco jiného, a to *aniž bychom mřížku viděli*. Stejný princip se používá při identifikaci polohy *atomů v krystalech*. Jedinou těžkostí je, že krystal je trojrozměrný útvar – opakující se trojrozměrné uspořádání atomů. K tomu nemůžeme použít obyčejné světlo, ale něco, co má vlnovou délku menší než je vzdálenost mezi atomy, neboť jinak nedostaneme interferenci. Musíme proto použít záření s velmi krátkou vlnovou délkou, tj. rentgenové záření. Osvětlíme-li krystal rentgenovým zářením a všimneme si intenzity odrazu v různých řádech, můžeme určit, jak jsou uspořádány atomy v krystalu, aniž bychom je viděli okem. Tak poznáme uspořádání atomů v různých látkách a to nám umožnilo nakreslit v 1. kapitole rozložení atomů v krystalu kuchyňské soli apod. Později se k tomu ještě vrátíme, abychom si toto velmi zajímavé téma probrali mnohem podrobněji; zatím se spokojíme s tímto stručným výkladem.

### 30.6 DIFRAKCE NA NEPROPUSTNÉ CLONĚ

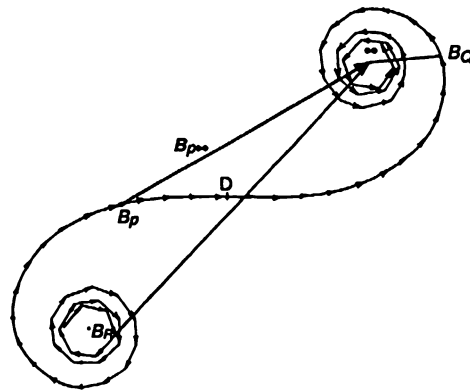
Nyní se dostáváme k velmi pozoruhodné situaci. Předpokládejme, že na jedné straně máme nepropustnou desku s otvory a vedle ní zdroj světla. Chceme zjistit, jaká je intenzita světla na druhé straně. Většina lidí řekne, že světlo svítí otvory a osvětluje druhou stranu. Ukazuje se, že správnou odpověď ve velmi dobrém přiblížení dostaneme, budeme-li předpokládat, že zdroje světla jsou rovnoměrně rozloženy v jednotlivých otvorech a jejich fáze jsou takové jako kdyby tam nepropustná deska nebyla. Samozřejmě, ve skutečnosti v otvorech nejsou žádné zdroje, v tomto případě jsou to vlastně jediná místa, kde zcela určitě nejsou zdroje. Přesto správný difrakční obrazec dostaneme za předpokladu, že otvory jsou jediná místa, kde zdroje jsou – to je dost divné. Vysvětlíme si to později, zatím předpokládejme, že je to tak.

V teorii difrakce se vyskytuje další druh difrakce, který si stručně probereme. V základním kurzu se o něm obvykle nemluví už tak brzy, jak to děláme my, a to jen proto, že ke sčítání malých vektorových příspěvků je třeba použít o něco složitější matematické vzorce. Jinak je to úplně stejné jako to, co jsme dělali dosud. Všechny interferenční jevy jsou stejné, nejde v podstatě o nic náročnějšího, jen situace je tady složitější a zmiňované vektory lze hůře spočítat.

ROZLIŠOVACÍ SCHOPNOST MŘÍŽKY • PARABOLICKÁ ANTÉNA



Obr. 30.7 Vzdálený zdroj světla vrhá na stínítko stín neprůhledného předmětu.



Obr. 30.8 Skládání amplitud mnoha oscilátorů kmitajících ve fázi, jejichž fázový posun se mění jako druhá mocnina vzdálenosti od bodu  $D$  na předcházejícím obrázku.

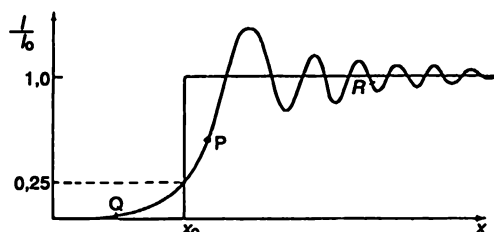
Předpokládejme, že světlo letí z nekonečna vrhá stín nějakého předmětu. Obr. 30.7 znázorňuje stínítko, na které dopadá stín od předmětu  $AB$ , přičemž zdroj světla je velmi daleko v porovnání s vlnovou délkou světla. Dalo by se očekávat, že mimo stín bude osvětlení všude jasné a ve stínu bude všude tma. Kdybychom si však znázornili intenzitu jako funkci polohy v blízkosti okraje stínu, viděli bychom, že zpočátku stoupá, pak překročí vrchol a kmitá velmi zvláštním způsobem v blízkosti okraje (obr. 30.9). Podívejme se, proč tomu tak je. Použijeme-li větu, kterou jsme ještě nedokázali, můžeme skutečnou situaci nahradit sérií zdánlivých zdrojů rozložených rovnoměrně v prostoru za objektem  $AB$ .

Představme si tam velké množství antén, jednu těsně vedle druhé. Zajímá nás intenzita v bodě  $P$ . Podobá se to tomu, co jsme už dělali, ale ne zcela, neboť naše stínítko nyní není v nekonečnu. Nechceme vědět, jaká je intenzita v nekonečnu, ale v konečném bodě. Při výpočtu intenzity v daném místě musíme sčítat příspěvky od všech antén. Nejprve je zde anténa v bodě  $D$ , přesně proti bodu  $P$ . Kdybychom se posunuli o málo výš, řekněme o vzdálenost  $h$ , časové zpoždění se zvětší. (Změní se i amplituda, neboť se změnila vzdálenost, ale je to jen velmi malý efekt, jsme-li od zdroje dost daleko a je mnohem méně významný než změna ve fázích.) Dráhový rozdíl  $EP - DP$  je  $h^2/2s$ , takže rozdíl fází se zvětšuje s druhou mocninou vzdálenosti, o níž se posuneme od bodu  $D$ , zatímco předtím jsme mívali s nekonečně a fázový rozdíl byl přímo úměrný  $h$ . Jsou-li fáze přímo úměrné, každý vektor se sčítá pootočen o konstantní úhel proti předcházejícímu. Nyní



## DIFRAKCE

však potřebujeme křivku, jež vznikne sčítáním mnoha infinitezimálně malých vektorů za podmínky, že úhel, který svírají, se ne zvětšuje lineárně, ale s *druhou mocninou* délky křivky. Ke konstrukci takové křivky je třeba trochu složitější matematiky, ale vždy jí můžeme zkonstruovat přímo nanášením vektorů a měřením úhlů. V každém případě dostaneme nádhernou křivku (Cornuovo spirálu) znázorněnou na *obr. 30.9*. Jak ji nyní využijeme?



Obr. 30.9 Průběh intenzity na hranici stínu. Geometrická hranice stínu je v bodě  $x_0$ .

Chceme-li vědět, jaká je intenzita světla například v bodě  $P$ , sčítáme příspěvky, jež mají různé fáze, od bodu  $D$  nahoru do nekonečna a od bodu  $D$  dolů jen po bod  $B_P$ , z něhož vynášíme postupně celou sérii šipek se stále se zvětšujícími úhly. Celkový příspěvek od bodu  $B_P$  nahoru proto sleduje spirálovitou křivku. Kdyby se měla integrace v některém bodě zastavit, celková amplituda by byla dána vektorem spojujícím  $B_P$  s tímto bodem; v tomto případě jdeme až do nekonečna, takže celkový příspěvek je roven vektoru  $B_{P_\infty}$ . Inflexní bod  $D$  vždy odpovídá poloze bodu  $P$ , a proto poloha bodu  $B_P$  na křivce se mění podle toho, kde se bod  $P$  nachází. Proto počáteční bod výsledného vektoru bude ležet v různých místech dolní levé části křivky podle toho, jak daleko nad bodem  $B$  se nachází bod  $P$ . Výsledný vektor  $B_{P_\infty}$  bude mít mnoho maxim a minim (*obr. 30.9*).

V opačném případě, když jsme v bodě  $Q$ , na opačné straně od bodu  $P$ , použijeme jen jeden konec spirálové křivky a ne i druhý. To znamená, že začátek se dostane jen do bodu  $B_Q$ , takže výsledná intenzita osvětlení se postupně zmenšuje, jak se bod  $Q$  posouvuje hlouběji do stínu.

Abychom si ověřili, že jsme opravdu pochopili, můžeme ihned snadno vypočítat intenzitu světla v bodě přesně proti hraně. Intenzita je zde rovna  $1/4$  intenzity dopadajícího světla. V tomto případě je začátek výsledného vektoru v bodě  $D$  na *obr. 30.8* a z celkové křivky nám zůstane jen polovina v porovnání s tím, co bychom měli, kdybychom byli hluboko v osvětlené zóně. Je-li bod  $R$  hluboko v osvětlené zóně, máme celou křivku od jednoho jejího konce až po druhý, tj. celý jednotkový vektor. Nacházíme-li se však na hranici stínu, máme jen poloviční amplitudu, což odpovídá  $1/4$  intenzity záření.

V této kapitole jsme hledali výslednou intenzitu v různých směrech od různě rozložených zdrojů. V následujícím článku odvodíme vztah, který budeme potřebovat v další kapitole v teorii indexu lomu. Dosud jsme vystačili s relativními intenzitami, ale tentokrát odvodíme úplný vztah pro výpočet pole v konkrétní situaci.

### 30.7 POLE NÁBOJŮ KMITAJÍCÍCH V ROVINĚ

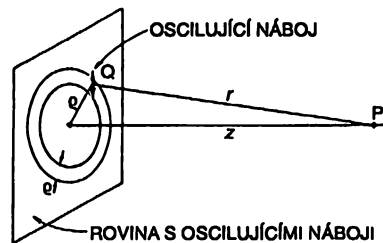
Předpokládejme, že máme mnoho zdrojů rozložených v rovině, jež současně kmitají, přičemž se pohybují v rovině a mají stejnou amplitudu a stejnou fázi. Jaké bude pole v konečné, ale přitom dostatečně velké vzdálenosti od roviny? (Nemůžeme se příliš přiblížit, neboť nemáme

ROZLIŠOVACÍ SCHOPNOST MŘÍŽKY • PARABOLICKÁ ANTÉNA

správné vzorce v blízkosti zdrojů.) Označíme-li rovinu nábojů  $XY$ , chceme vědět, jaké pole je v bodě  $P$  daleko na ose  $Z$  (obr. 30.10). Předpokládejme, že na jednotce plochy roviny se nachází  $\eta$  nábojů a že každý z nich má náboj  $q$ . Všechny náboje se pohybují jednoduchým harmonickým pohybem se stejným směrem pohybu, amplitudou a fází. Nechť pohyb každého náboje *vzhledem k jeho rovnovážné poloze* je  $x_0 \cos \omega t$ . Pomocí komplexního zápisu může být tento pohyb popsán jako  $x_0 e^{i\omega t}$ , přičemž máme na paměti, že skutečný pohyb popisuje reálná část.

Intenzitu pole v bodě  $P$  od všech nábojů dostaneme tak, že zjistíme intenzitu od každého náboje  $q$  a pak sčítáme příspěvky od všech nábojů. Víme, že radiační pole je úměrné zrychlení náboje, jež je  $-\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$  a je stejné pro každý náboj. Hledaná intenzita elektrického pole v bodě  $P$ , způsobená nábojem v bodě  $Q$ , je úměrná zrychlení náboje  $q$ , ale musíme mít na zřeteli, že v bodě  $P$  v čase  $t$  je dáno zrychlením náboje v dřívějším čase  $t' = t - r/c$ , kde  $r/c$  je čas, který potřebují vlny pole, aby prošly vzdálenost  $r$  od  $Q$  do  $P$ . Proto je pole v bodě  $P$  úměrné

$$-\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}. \quad (30.10)$$



Obr. 30.10 Radiační pole nábojů oscilujících v rovině

Dosadíme-li toto zrychlení do našeho vztahu pro intenzitu elektrického pole ve velkých vzdálenostech od vyzařujícího náboje, dostaneme

$$\text{Intenzita pole v } P \text{ od náboje v } Q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \text{ (přibližně)}. \quad (30.11)$$

Tento vztah není zcela přesný, neboť jsme neměli použít zrychlení náboje, ale jeho složku kolmou na přímkou  $QP$ . Budeme však předpokládat, že bod  $P$  je tak daleko v porovnání se vzdáleností bodu  $Q$  od osy (vzdálenost  $\rho$  na obr. 30.10), že při změnách, jež budeme brát v úvahu, můžeme kosinový faktor (jenž by byl i tak roven přibližně 1) vynechat.

Abychom dostali celkovou intenzitu pole v  $P$ , sčítáme vlivy od všech nábojů, jež jsou v rovině. Samozřejmě, měli bychom udělat *vektorový* součet, ale protože směr intenzity pole je téměř stejný pro všechny náboje, můžeme, v rámci již uvedené aproximace, prostě sčítat velikosti intenzit. V naší aproximaci závisí intenzita pole v bodě  $P$  jen na vzdálenosti  $r$ , takže všechny náboje vzdálené o stejné  $r$  vytvářejí stejná pole. Proto nejdříve sčítáme pole od nábojů rozložených na prstenci šířky  $d\rho$  s poloměrem  $\rho$ . Potom integrací přes všechna  $\rho$  dostaneme celkové pole.

Počet nábojů na prstenci se rovná součinu velikosti plochy prstence  $2\pi\rho d\rho$  a počtu nábojů na jednotkové ploše  $\eta$ . Takže máme

$$\text{Výsledné pole v } P = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^2 x_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \cdot \eta \cdot 2\pi\rho d\rho. \quad (30.12)$$

## DIFRAKCE

Tento integrál chceme vypočítat pro  $\varrho$  od  $\varrho = 0$  do  $\varrho = \infty$ . Proměnná  $t$  je po dobu integrace konstantní, takže proměnnými veličinami jsou jen  $\varrho$  a  $r$ . Vynecháme-li na chvíli všechny konstantní faktory, včetně faktoru  $e^{i\omega t}$ , zadaný integrál má tvar

$$\int_{\varrho=0}^{\varrho=\infty} \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} \varrho d\varrho. \quad (30.13)$$

K jeho výpočtu potřebujeme použít vztah mezi  $r$  a  $\varrho$

$$r^2 = \varrho^2 + z^2. \quad (30.14)$$

Protože  $z$  je nezávislý na  $\varrho$ , diferencováním máme

$$2r dr = 2\varrho d\varrho,$$

což je výhodné, neboť v integrálu můžeme zaměnit  $\varrho d\varrho$  za  $r dr$  a  $r$  se vyruší s  $r$  ve jmenovateli. Hledaný integrál má pak jednodušší tvar

$$\int_{r=z}^{r=\infty} e^{-i\omega r/c} dr. \quad (30.15)$$

Integrace exponenciální funkce je velmi snadná. Funkci dělíme koeficientem, jenž je v exponentu u  $r$  a exponenciálu vyčísíme v integračních mezích; ale integrační meze pro  $r$  nejsou stejné jako pro  $\varrho$ . Pro  $\varrho = 0$  máme  $r = z$ , takže integrujeme pro  $r$  od  $z$  do nekonečna. Dostáváme výsledek

$$-\frac{c}{i\omega} [e^{-i\infty} - e^{-i\omega z/c}], \quad (30.16)$$

kde za  $\omega r/c$  v nekonečnu jsme napsali  $\infty$ , neboť oba zápisy označují velmi velké číslo!

Přítom  $e^{-i\infty}$  je záhadná veličina. Její reálná část je například rovna  $\cos(-\infty)$ , což je matematicky řečeno, úplně neurčitá veličina (i když bychom očekávali, že to bude hodnota někde nebo všude mezi  $+1$  a  $-1$ !) Ve fyzikální situaci to však může označovat něco docela rozumného a obvykle to lze považovat za nulu. Abychom si ozřejmili, že je to tak i v našem případě, vraťme se k původnímu integrálu (30.15).

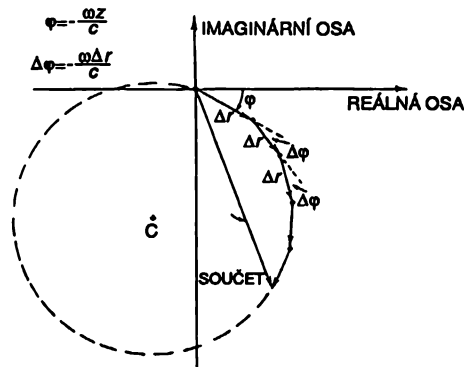
Integrál (30.15) můžeme chápat jako součet mnoha malých komplexních čísel, přičemž každé má v komplexní rovině velikost  $\Delta r$  a směrový úhel  $\varphi = -\omega r/c$ . Tento součet se můžeme pokusit vypočítat graficky. Na obr. 30.11 máme nakreslených prvních pět členů součtu. Každý úsek má délku  $\Delta r$  a s předcházejícím svírá úhel  $\Delta\varphi = -\omega\Delta r/c$ . Součet těchto prvních pěti členů je znázorněn šipkou od počátku ke konci pátého úseku. Přidáváním dalších členů bychom sledovali mnohoúhelník, až bychom se dostali nazpět do počátku (přibližně) a začali opět dokola. Přidáváním dalších členů bychom se točili stále dokola v blízkosti kružnice, o níž lze snadno ukázat, že její poloměr je roven  $c/\omega$ . Vidíme, proč integrál nedává určitou hodnotu.

Nyní se však musíme vrátit zpět k fyzice, jaká je v naší situaci. V žádné reálné situaci nemůže být rovina nábojů nekonečně rozsáhlá, ale musí někde končit. Kdyby končila najednou a měla přesně kruhový tvar, náš integrál by měl nějakou hodnotu na kružnici na obr. 30.11. Připustíme-

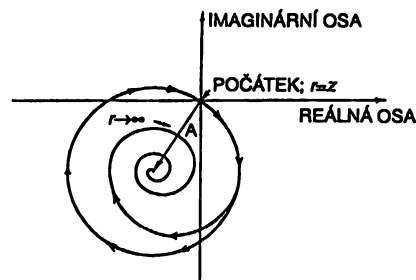
li, aby počet nábojů v rovině postupně klesal v nějaké velké vzdálenosti od středu (nebo končil náhle, ale nepravidelně, takže pro velké  $\rho$  nebude přispívat celý prstenec šířky  $d\rho$ ), koeficient  $\eta$  bude v přesném integrálu klesat k nule. Vzhledem k tomu, že budeme sčítat klesající členy, ale stále se odchylojící o stejný úhel, grafem našeho integrálu bude křivka ve tvaru spirály. Spirála nakonec skončí ve středu našeho původního kruhu, jak je to nakresleno na obr. 30.12. Fyzikálně správný integrál dává komplexní číslo  $A$  znázorněné na obrázku šipkou od počátku do středu kruhu, což je právě rovno

$$\frac{c}{i\omega} e^{-i\omega z/c}, \quad (30.17)$$

jak se můžete sami přesvědčit. Stejný výsledek bychom dostali z rovnice (30.16), kdybychom položili  $e^{-i\infty} = 0$ . (Je zde ještě další důvod, proč se příspěvek k integrálu pro velké hodnoty  $r$  zmenšuje; musíme totiž brát projekci vektoru zrychlení do roviny kolmé na spojnici  $PQ$ , což jsme zanedbávali.)



Obr. 30.11 Grafické řešení integrálu  $\int_z^\infty e^{-i\omega r/c} dr$



Obr. 30.12 Grafické řešení integrálu  $\int_z^\infty \eta e^{-i\omega r/c} dr$

Nás zajímají jen fyzikálně reálné situace, proto zvolíme  $e^{-i\infty}$  rovno nule. Vráťme-li se ke vztahu pro výsledné pole (30.12) se všemi činiteli, jež jsou v integrálu, máme

$$\text{Výsledné pole v } P = -\frac{\eta q}{2 \epsilon_0 c} i \omega x_0 e^{i\omega(t-z/c)} \quad (30.18)$$

## DIFRAKCE

(mějme na zřeteli, že  $1/i = -i$ ).

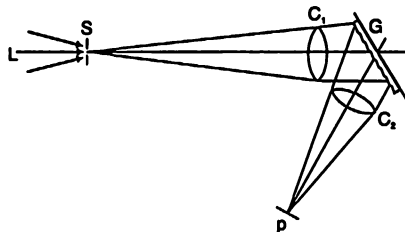
Je zajímavé si všimnout, že  $(i\omega x_0 e^{i\omega t})$  je rovno právě *rychlosti* pohybu nábojů, takže rovnici pro výpočet pole můžeme napsat také jako

$$\text{Výsledné pole v } P = -\frac{\eta q}{2 \epsilon_0 c} \text{ (rychlost nábojů v čase } t - z/c). \quad (30.19)$$

Je to trochu překvapující, protože časové zpoždění je dáno právě vzdáleností  $z$ , což je nejkratší vzdálenost od  $P$  do roviny nábojů. Ale naštěstí vychází právě takový jednoduchý výsledek. (Mimochodem můžeme dodat, že i když bylo naše odvození platné jen pro dostatečně velké vzdálenosti od roviny oscilujících nábojů, ukazuje se, že vztah (30.18) nebo (30.19) platí pro libovolnou vzdálenost  $z$ , dokonce i pro  $z < \lambda$ ).

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 30.1 ■ Vlnové délky spektrálních čar D vybuzených atomů sodíku jsou 5889,95 a 5895,92 angströmů. Jakou délku musí mít mřížka s 600 vrypů na 1 mm, aby rozlišila tyto čáry ve spektru prvního řádu?
- 30.2 ■ Po rovné cestě jede automobil se zapnutými světly, která budeme považovat za bodové zdroje. Reflektory automobilu jsou od sebe vzdáleny 120 cm. Jak daleko od automobilu musí být pozorovatel, aby si mohl být jist, že vidí dva zdroje světla a ne jeden? Uvažujte průměr zornice oka 0,5 cm a efektivní vlnovou délku vyzařovaného světla 550 nm. Domníváte se, že okolnost, že světlo je „bílé“ (tj. obsahuje směs paprsků různých vlnových délek) usnadňuje nebo naopak ztěžuje rozlišení dvou zdrojů světla?
- 30.3 ■ Na obrázku vidíme obecné schéma spektrografické mřížky. Světlo ze zdroje  $L$  prochází úzkou štěrbinou  $S$ , pak čočkou kolimátoru (nebo se odráží od zrcadla)  $C_1$ , aby vznikl rovnoběžný svazek paprsků, jako kdyby na mřížku dopadala rovinná vlna přicházející z nekonečna. Rovnoběžný svazek paprsků se pak podrobuje difrakci na mřížce  $G$ . Světlo odražené v určitém úhlovém rozsahu dopadá na čočku  $C_2$  (čočka kamery) a je zaostřeno v rovině  $P$ . Tak dostáváme soubor úzkých spektrálních čar. Nechť je délka štěrbiny  $h$ , její šířka  $w$ , ohniskové vzdálenosti čoček  $C_1$  a  $C_2$  jsou rovny  $F_1$  a  $F_2$  a úhly mezi normálou k mřížce a osami čoček  $C_1$  a  $C_2$  jsou rovny  $\theta_1$  a  $\theta_2$ . Na 1 mm mřížky je rozmístěno  $N$  vrypů. Odpovězte na následující otázky:
- Jakou šířku bude mít pás vytvářený spektrem v rovině  $p$ ?
  - Jaké vlnové délce bude odpovídat čára, která leží v rovině  $p$  v místě, kudy prochází osa čočky  $C_2$ ?
  - V jaké vzájemné vzdálenosti v ohniskové rovině se budou nacházet dvě spektrální čáry, jejichž vlnové délky se liší o 0,1 nm? Tato veličina se často nazývá disperze optické soustavy.
  - Jaká je šířka spektrální čáry v rovině  $p$ , je-li šířka štěrbiny mnohem větší než rozlišovací schopnost čočky kolimátoru (rovná  $1,22 \lambda (F_1/F_2)$ , kde  $A_1$  je apertura) a než rozšíření vytvářené mřížkou, které je rovno  $(\lambda/L) F_1$ , kde  $L$  je rozměr mřížky?



- 30.4 ■ Spektrograf slunečního věžového teleskopu na observatoři na Mt. Wilsonu je znázorněn schematicky na obrázku. Jedna a tatáž čočka zde plní úlohu kolimátoru i čočky kamery a přitom je téměř  $\theta_1 = -\theta_2$ . Ohnisková vzdálenost celého zařízení  $F = 23$  m a mřížka má rozměry 15 cm x 25 cm. Na 1 mm mřížky je rozmístěno 600 čar. Při pozorování se obvykle využívá spektrum 5. řádu.
- Při jakém úhlu náklonu mřížky  $\theta$  bude spektrální čára vybuzeného neutrálního atomu železa o vlnové délce  $\lambda = 525,0218$  nm odpovídat poloze štěrbin ve spektru 5. řádu?
  - Pro které další vlnové délky v intervalu 360–700 nm budou spektrální čáry také odpovídat poloze štěrbin?

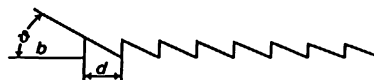
- c) Navrhněte jednoduchý způsob, jak odstranit spektra nežádoucích řádů a zachovat pouze spektrum 5. řádu.  
 d) Jaká je disperze uvedeného zařízení při vlnové délce  $\lambda = 525$  nm odpovídající čáře spektra 5. řádu?  
 e) Jaká je minimální teoretická hodnota  $\Delta\lambda$ , jež může být rozlišena na vlnové délce  $\lambda = 525$  nm ve spektru 5. řádu?



30.5 ■ Vlnové délky spektrálních čar se obvykle měří s přesností kolem 0,0001 nm pomocí spektrografů, jejichž rozlišovací schopnost je jen 0,001 nm. Není tím narušen nějaký fyzikální princip? Objasněte.

30.6 ■ Jsou-li vrypy difrakční mřížky utvářeny tak, že odrazejí většinu dopadajícího světla v jednom směru, říkáme, že mřížka v tomto směru „blyští“. Představme si takovou mřížku, jejíž vrypy mají profil daný pilovitou funkcí znázorněnou na obrázku. Povrch každého vrypu svírá s vodorovnou rovinou úhel  $\varphi_0$ .

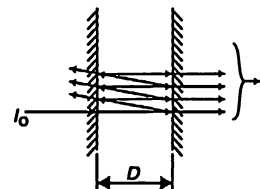
- a) Považujeme-li svazek odraženého světla za záření, jež vydávají oscilátory v látce kmitající se stejnou fází jako dopadající záření, určete, v jakém směru bude mít odražený svazek největší intenzitu, je-li úhel dopadu roven nule.



- b) Odhadněte přibližně interval úhlů, v němž mřížka „blyští“.

30.7 ■ Fabry – Perotův interferometr je tvořen dvojicí dokonale vyleštěných rovnoběžných rovinných ploch ve vzdálenosti  $D$ . Tyto roviny odrážejí  $R^2$ –část kolmo dopadajícího světla a propouštějí jeho  $T^2$ –část. Světlo o intenzitě  $I_0$  a vlnové délce  $\lambda$  dopadá nejprve zleva (viz obrázek), částečně prochází soustavou, částečně se odráží od pravé roviny, pak opět od levé a znovu prochází soustavou. Výstupní svazek je tedy tvořen paprsky, jež se odrazily 0, 2, 4, 6, ... krát a nakonec pronikly oběma rovinami.

Jak závisí intenzita procházejícího světla na veličinách  $D$ ,  $\lambda$ ,  $R$  a  $T$ ? (Poznámka. Na témž principu jsou založeny úzkopásmové, tzv. interferenční, optické filtry. Jejich odrazové plochy jsou vyrobeny z několika vrstev vysoce kvalitního skla přesně stanovené tloušťky, s různými indexy lomu.)



# 31

# Původ indexu lomu

## 31.1 INDEX LOMU

## 31.2 POLE V LÁTCE

## 31.3 DISPERZE

## 31.4 ABSORPCE

## 31.5 ENERGIE PŘENÁŠENÁ ELEKTRICKOU VLNOU

## 31.6 DIFRAKCE SVĚTLA NA CLONĚ

### 31.1 INDEX LOMU

Uvedli jsme, že rychlost světla je menší ve vodě než ve vzduchu a o trochu menší ve vzduchu než ve vakuu. Tento jev lze popsat pomocí indexu lomu  $n$ . Nyní se budeme snažit pochopit, jak toto zpomalení vzniká. Konkrétně, pokusíme se dozvědět, jak souvisí s některými fyzikálními předpoklady, které jsme udělali už dříve a které zněly

- za jakýchkoli fyzikálních podmínek celkové elektrické pole lze vyjádřit jako součet polí vytvořených všemi náboji ve vesmíru;
- radiační pole vytvořené jedním nábojem je vždy dáno jeho zrychlením vypočítaným se zpožděním při rychlosti  $c$ , a to vždy.

Jde-li o průchod světla kusem skla, mohli byste namítat: „V tom případě to neplatí, musíme brát rychlost  $c/n$ !“ To však není pravda a musíme pochopit proč.

Přibližně sice platí, že rychlost světla nebo elektromagnetické vlny při průchodu látkou s indexem lomu  $n$  je zdánlivě rovna  $c/n$ , ale pole jsou tvořena pohyby *všech* nábojů – včetně nábojů, které se pohybují v látce – a těmito základními příspěvky k poli, které se šíří konečnou rychlostí  $c$ . Naší úlohou je pochopit, jak dochází k zdánlivému zpomalení rychlosti.

Pokusíme se to objasnit na velmi jednoduchém případě. Zdroj, který budeme nazývat „vnějším zdrojem“, se nachází velmi daleko od tenké desky z průhledného materiálu, dejme tomu ze skla. Zajímáme se, jaké pole je ve velké vzdálenosti na opačné straně desky. Situace je znázorněna na *obr. 31.1*, kde si  $S$  a  $P$  představíme velmi daleko od desky. Podle principů, které jsme už vyslovili, je elektrické pole kdekoli v velké vzdálenosti od všech pohybujících se nábojů rovno vektorovému součtu polí vytvořených vnějším zdrojem (v bodě  $S$ ) a polí vytvořených všemi náboji ve skleněné desce, přičemž každé z nich má svou vlastní retardaci při rychlosti  $c$ . Pamatujme, že příspěvek od každého náboje se nezmění přítomností ostatních nábojů. To jsou naše základní



## PŮVOD INDEXU LOMU

principy. Intenzita pole v bodě  $P$  se může proto napsat jako

$$E = \sum_{\text{přes všechny náboje}} E_{\text{každého náboje}} \quad (31.1)$$

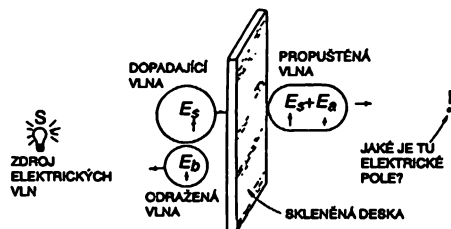
nebo

$$E = E_s + \sum_{\text{přes všechny ostatní náboje}} E_{\text{každého náboje}} \quad (31.2)$$

kde  $E_s$  je pole jen od zdroje a je rovno přesně poli, jež by bylo v bodě  $P$ , kdybychom neměli žádnou desku. Očekáváme, že v  $P$  bude pole různé od  $E_s$ , pokud jsou přítomny další pohybující se náboje.

Proč by se ve skle měly nacházet pohybující se náboje? Víme, že každá látka se skládá z atomů, jež mají elektrony. Dopadá-li elektrické pole zdroje na tyto atomy, rozkmitá jejich elektrony, neboť na ně působí silou a rozkmitané elektrony vytvářejí pole – představují nové zdroje záření. Tyto nové zdroje souvisejí se zdrojem  $S$ , neboť je rozkmitalo jeho pole. Výsledné pole není rovno jen poli zdroje  $S$ , ale je změněno dodatečnými příspěvky od ostatních pohybujících se nábojů. To znamená, že pole už není stejné jako pole, které tam bylo, dokud tam nebylo sklo, ale je modifikováno takovým způsobem, že se zdá, jakoby se pole uvnitř skla pohybovalo změněnou rychlostí. To je vysvětlení, jež bychom rádi odvodili kvantitativně.

Provést to exaktně je příliš komplikované, protože i když jsme řekli, že všechny ostatní náboje jsou poháněny polem zdroje, není to úplně tak. Jednotlivý náboj necítí jen zdroj, ale jako cokoliv na světě, cítí všechny ostatní pohybující se náboje, takže cítí i ty náboje, jež se pohybují někde jinde ve skle. Proto se celkové pole působící na daný náboj skládá z polí všech ostatních nábojů, jejichž pohyb je zpětně ovlivňován tím, co dělá daný náboj! Je vidět, že úplný a přesný popis by si vyžadoval komplikovaný systém rovnic. Problém je tak složitý, že si ho odložíme na další rok.



Obr. 31.1 Elektromagnetická vlna při průchodu vrstvou průhledné látky

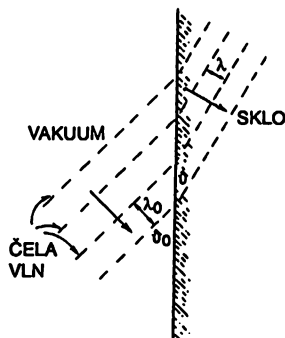
Místo toho se podíváme na jednoduchý případ, jenž nám umožní jasně pochopit fyzikální podstatu. Vezměme si případ, kdy jsou účinky všech ostatních atomů v porovnání s účinky zdroje relativně velmi malé, tj. vezmeme si takovou látku, v níž se celkové pole pod vlivem pohybu ostatních nábojů příliš nezmění. To odpovídá materiálu, jehož index lomu je velmi blízký 1; nastane to například tehdy, když hustota atomů je velmi malá. Náš výpočet bude platit pro případy, kdy index lomu je z jakýchkoli důvodů blízký 1. Tak se vyhneme komplikacím úplného obecného řešení.

Všimněme si mimochodem, že pohyb nábojů v desce vyvolává i další efekt. Tyto náboje budou vyzařovat vlny i směrem dozadu ke zdroji  $S$ . Toto vracející se pole je světlo, jež vidíme jako světlo odražené od povrchu průhledných materiálů. Nepřichází však jen od povrchu. Zpětné záření přichází odevšad z vnitřku, ale celkový jev je ekvivalentní odrazu od povrchu. Odrazové jevy jsou

## INDEX LOMU

zatím mimo rámec naší aproximace, neboť se omezíme na výpočty pro látku s indexem lomu tak blízkým 1, že se odráží jen velmi málo světla.

Dříve než budeme pokračovat v našem studiu původu indexu lomu, musíme si uvědomit, že vše, co potřebujeme k pochopení refrakce, je pochopit, proč se vlny šíří v různých látkách různou rychlostí. Ohyb paprsků je způsoben právě tím, že efektivní rychlost vln je v různých látkách různá. Abychom si připomněli, jak k tomu dochází, narýsovali jsme na *obr. 31.2* několik postupných čel elektrické vlny, která dopadá z vakua na povrch skla. Šípky kolmé na čela vln označují směr pohybu vlny. Víme, že všechny oscilace ve vlně musí mít stejnou *frekvenci*. (Viděli jsme, že vybuzené oscilace mají frekvenci stejnou jako budící síla.) Znamená to také, že čela vln na obou stranách povrchu musí mít na *povrchu stejnou vzdálenost*, musí se pohybovat společně, takže náboj umístěný na rozhraní cítí jen jednu frekvenci. *Nejkratší vzdálenost* mezi čely vln je rovna vlnové délce, což je rychlost dělená frekvencí. Na straně vakua to je  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$  a na druhé straně  $\lambda = 2\pi v/\omega$  nebo  $2\pi c/\omega n$ , když  $v = c/n$  je rychlost vlny. Z obrázku vidíme, že jediný způsob, jak dosáhnout toho, aby vlny na rozhraní správně „seděly“, je ten, že vlny v látce se budou šířit pod jiným úhlem k rozhraní. Z geometrie na obrázku je vidět, že k tomu, aby vlny „seděly“, musí platit  $\lambda_0/\sin\theta_0 = \lambda/\sin\theta$  nebo  $\sin\theta_0/\sin\theta = n$ , což je Snellův zákon. V naší další diskuzi se budeme zajímat pouze o to, proč má světlo v látce s indexem lomu  $n$  efektivní rychlost  $c/n$  a v této kapitole se nebudeme zabývat otázkou, proč světlo mění směr.



Obr. 31.2 Vztah mezi lomem vln a změnou jejich rychlosti

Vraťme se zpět k *obr. 31.1*. Potřebujeme vypočítat pole v bodě  $P$  způsobené všemi oscilujícími náboji ve skleněné desce. Tuto část pole, jež je rovna sumě napsané v rovnici (31.2) jako druhý člen, nazveme  $E_a$ . Přičteme-li jí k členu  $E_s$  pocházejícímu od zdroje, dostaneme celkové pole v bodě  $P$ .

To je pravděpodobně nejkomplikovanější věc, kterou budeme letos dělat, ale komplikovaná je jen tím, že musíme poskládat velmi mnoho malých kousků; každý z nich je však velmi jednoduchý. Na rozdíl od ostatních odvozování, kde jsme říkali: „Zapomeňme na odvození, pamatujme si jen výsledek“, teď ani tak nepotřebujeme výsledek jako samotné odvození. Jinak řečeno potřebujeme pochopit fyzikální mechanismus indexu lomu.

Abychom viděli, k čemu vlastně spějeme, najdeme, čemu by bylo rovno „opravné pole“  $E_a$  v případě, kdy celkové pole v  $P$  má vypadat jako záření způsobené zdrojem, zpomalené průchodem tenkou deskou. Kdyby deska neměla žádný vliv, pro vlnové pole šířící se doprava (podél osy  $z$ ) by platilo

$$E_z = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \quad (31.3)$$

PŮVOD INDEXU LOMU

nebo pomocí komplexního zápisu

$$E_s = E_0 e^{i\omega(t-z/d)} \quad (31.4)$$

Co by se nyní stalo, kdyby se vlna při průchodu deskou šířila pomaleji? Tloušťku desky označme  $\Delta z$ . Kdyby tam deska nebyla, vzdálenost  $\Delta z$  by světlo proletělo za dobu  $\Delta z/c$ . Ale když se v desce šíří rychlostí  $c/n$ , potrvá mu to delší čas  $n\Delta z/c$  nebo *dodatečný* čas  $\Delta t = (n-1)\Delta z/c$ . Pak se bude nadále šířit rychlostí  $c$ . Toto zpoždění při průchodu deskou můžeme vzít v úvahu tak, že v rovnici (31.4) zaměníme  $t$  za  $(t - \Delta t)$  nebo za  $[t - (n-1)\Delta z/c]$ , takže po vsunutí desky můžeme napsat

$$E_{za\ deskou} = E_0 e^{i\omega[t - (n-1)\Delta z/c - z/d]} \quad (31.5)$$

což můžeme napsat jako

$$E_{za\ deskou} = e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} E_0 e^{i\omega(t-z/d)} \quad (31.6)$$

To znamená, že vlnění za deskou můžeme dostat z vlnění, jež by existovalo, kdyby nebylo desky, tj. z  $E_s$  vynásobením faktorem  $e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c}$ . Víme, že násobení oscilující funkce jako  $e^{i\omega t}$  faktorem  $e^{i\vartheta}$  způsobí změnu fáze oscilací o úhel  $\vartheta$ , a to je právě to, co způsobilo zpoždění při průchodu vrstvou tloušťky  $\Delta z$ . Došlo ke zpoždění fáze o hodnotu  $\omega(n-1)\Delta z/c$ . (Ke zpoždění proto, že v exponentu je znaménko minus.)

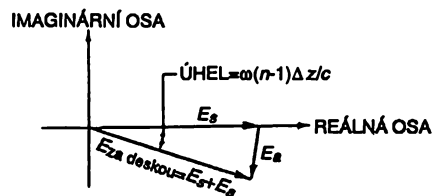
Řekli jsme si, že deska přispěje k původnímu poli  $E_s = E_0 e^{i\omega(t-z/d)}$  polem  $E_a$ , jež se přičte k původnímu poli; ale místo toho jsme zjistili, že působení desky se projeví *vynásobením* faktorem, jež posune jeho fázi. Ve skutečnosti je to však v pořádku, neboť stejného výsledku můžeme dosáhnout přičtením vhodného komplexního čísla. Takové číslo lze zvláště snadno najít, když  $\Delta z$  je malé, neboť si určitě pamatujete, že je-li  $x$  malé číslo,  $e^x$  je přibližně rovno  $(1+x)$ . Proto můžeme psát

$$e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} = 1 - i\omega(n-1)\Delta z/c \quad (31.7)$$

Použitím této rovnosti v (31.6) dostaneme

$$E_{za\ deskou} = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t-z/d)}}_{E_s} - \underbrace{\frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} E_0 e^{i\omega(t-z/d)}}_{E_a} \quad (31.8)$$

První člen je pole zdroje a druhý člen musí být roven právě  $E_a$ , poli napravo od desky způsobenému oscilujícími náboji v desce – zde vyjádřenému pomocí indexu lomu  $n$  a závislému na intenzitě vlnění zdroje.



Obr. 31.3 Graf kurčení prošlé vlny pro dané  $t$  a  $z$

## POLE V LÁTCE

Co jsme udělali, lze snadno znázornit pomocí komplexních čísel na diagramu na *obr. 31.3*. Nejdříve nakreslíme číslo  $E_s$  (zvolíme nějakou hodnotu pro  $z$  a  $t$ , takže  $E_s$  leží na reálné ose, ale to není nutné). Zpoždění způsobené zpomalením vlny v desce způsobí posunutí fáze čísla  $E_s$ , tj. pootočí  $E_s$  o nějaký záporný úhel. To je ale ekvivalentní přičtení malého vektoru  $E_a$  k vektoru  $E_s$  přibližně pod pravým úhlem. Faktor  $(-i)$  v druhém členu (31.8) znamená totéž. Vyjadřuje to, že je-li  $E_s$  reálné,  $E_a$  je záporné imaginární nebo obecně, že  $E_s$  a  $E_a$  svírají pravý úhel.

### 31.2 POLE V LÁTCE

Nyní se musíme zeptat: „Je pole  $E_a$  v druhém členu rovnice (31.8) takové pole, jaké bychom očekávali od oscilujících nábojů v desce?“ Ukážeme-li, že ano, tak jsme vlastně vypočítali, čemu je roven index lomu  $n$ . Číslo  $n$  je totiž jediná konstanta v (31.8), jež není zadána. Nyní se pokusíme vypočítat, jaké pole  $E_a$  způsobí náboje v látce. Abychom si zjednodušili sledování mnoha symbolů, jež jsme dosud použili a ještě budeme používat při dalším výpočtu, uvádíme jejich přehled v *tabulce 31.1*.

Tab.31.1

#### Symboly použité při výpočtu indexu lomu

---

$E_s$ = pole zdroje
$E_a$ = pole vytvořené náboji v desce
$\Delta z$ = tloušťka desky
$z$ = kolmá vzdálenost od desky
$n$ = index lomu
$\omega$ = úhlová frekvence záření
$N$ = počet nábojů na jednotku objemu desky
$\eta$ = počet nábojů na jednotku plochy desky
$q_e$ = náboj elektronu
$m$ = hmotnost elektronu
$\omega_0$ = rezonanční frekvence elektronu vázaného v atomu

---

Je-li zdroj  $S$  (na *obr. 31.1*) ve velké vzdálenosti nalevo od desky, bude mít pole  $E_s$  na celé desce stejnou fázi, takže v blízkosti desky můžeme napsat

$$E_s = E_0 e^{i(\omega t - z/d)}. \quad (31.9)$$

Přímo na desce, kde  $z = 0$ , budeme mít

$$E_s = E_0 e^{i\omega t} \text{ (na desce)}. \quad (31.10)$$

Každý elektron v atomech desky „pocítí“ toto elektrické pole a elektrická síla  $qE$  (předpokládáme, že  $E_0$  je vertikální) jím bude pohybovat nahoru a dolů. Abychom našli očekávaný pohyb elektronů, budeme předpokládat, že atomy jsou malé oscilátory, tj. že elektrony jsou v nich vázány pružnými silami. To znamená, že působí-li na elektron vnější síla, jeho vychýlení z rovnovážné polohy bude úměrné této síle.

## PŮVOD INDEXU LOMU

Když jste slyšeli o tom, že elektrony v atomu obíhají v oblastech zvaných orbitály, snad si pomyslíte, že je to směšný model atomu. Je to však jen velmi zjednodušená představa. Správný obraz atomu, který dává vlnová mechanika, nám říká, že pokud jde o problémy spojené se světlem, elektrony se skutečně chovají tak, jakoby byly upevněny na pružinách. Budeme proto předpokládat, že na elektrony působí lineární vratná síla, jež spolu s jejich hmotností  $m$  způsobí, že se chovají jako malé oscilátory s rezonanční frekvencí  $\omega_0$ . Takové oscilátory jsme již studovali a víme, že rovnici jejich pohybu lze napsat jako

$$m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = F, \quad (31.11)$$

kde  $F$  je budicí síla.

V našem případě je budicí síla vyvolána elektrickým polem vlny přicházejícím od zdroje, takže máme

$$F = q_e E_s = q_e E_0 e^{i\omega t}, \quad (31.12)$$

kde  $q_e$  je náboj elektronu a pro  $E_s$  používáme vztah  $E_s = E_0 e^{i\omega t}$  z rovnice (31.10). Naše pohybová rovnice pro elektron je potom

$$m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = q_e E_0 e^{i\omega t}. \quad (31.13)$$

Tuto rovnici jsme již jednou řešili a víme, že její řešení je

$$x = x_0 e^{i\omega t}. \quad (31.14)$$

Dosazením do (31.13) zjistíme, že

$$x_0 = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (31.15)$$

takže

$$x = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}. \quad (31.16)$$

Zjistili jsme tedy, jak probíhá pohyb elektronů v desce. Pro každý elektron je stejný, pouze střední, „nulovou“ polohu má každý elektron jinou.

Nyní jsme připraveni k tomu, abychom mohli najít intenzitu pole  $E_a$  vybuzeného těmito atomy v bodě  $P$ , neboť pole soustavy nábojů rozložených v rovině a pohybujících se současně jsme si odvodili v závěru předešlé kapitoly. Podíváme-li se zpět na rovnici (30.19), vidíme, že pole  $E_a$  v bodě  $P$  je rovno záporné konstantě vynásobené rychlostí nábojů v čase zpožděném o hodnotu  $z/c$ . Zderivujeme-li  $x$  v rovnici (31.16) (abychom dostali rychlost) a zahrneme zpoždění (nebo dosadíme-li prostě za  $x_0$  z (31.15) do (30.18)), dostaneme

$$E_a = -\frac{\eta q_e}{2 \epsilon_0 c} \left[ i\omega \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega(t-z/c)} \right]. \quad (31.17)$$

## DISPERZE

Jak jsme předpokládali, vybuzené pohyby elektronů vytvořily zvláštní vlnu, jež se šíří doprava (to vyjadřuje člen  $e^{i\omega(t-z/d)}$ ), amplituda je úměrná počtu atomů na jednotkové ploše desky (člen  $\eta$ ) a je úměrná i intenzitě pole zdroje (člen  $E_0$ ). Dále jsou tam členy závislé na vlastnostech atomů ( $q_e$ ,  $m$  a  $\omega_0$ ), podle očekávání.

Nejzajímavější je však to, že vztah (31.17) pro  $E_a$  je velmi podobný vztahu pro  $E_e$ , který jsme dostali v rovnici (31.8), když jsme řekli, že původní vlna se zpozdila při průchodu látkou s indexem lomu  $n$ . Tyto dva výrazy budou identické, když platí:

$$(n - 1) \Delta z = \frac{\eta q_e^2}{2 \varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (31.18)$$

Všimněme si, že obě strany jsou úměrné  $\Delta z$ , neboť  $\eta$ , počet atomů připadajících na jednotkovou plochu, je roven  $N\Delta z$ , kde  $N$  je počet atomů připadajících na jednotkový objem desky. Dosazením  $N\Delta z$  za  $\eta$  a krácením  $\Delta z$  dostáváme náš hlavní výsledek, vztah vyjadřující index lomu pomocí vlastností atomů látky a v závislosti na frekvenci světla

$$n = 1 + \frac{N q_e^2}{2 \varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (31.19)$$

Tato rovnice „vysvětluje“ index lomu, jak jsme si přáli.

### 31.3 DISPERZE

Všimněme si, že při výpočtu (31.19) jsme dostali něco velmi zajímavého. Nejenže máme pro index lomu číslo, které lze vypočítat ze základních vlastností atomů, ale zjistili jsme, jak se bude index lomu měnit v závislosti na frekvenci světla  $\omega$ . Je to něco, co bychom z jednoduchého výroku „světlo se v průhledném prostředí šíří pomaleji“ nikdy nepochopili. Samozřejmě, že nám ještě zůstal problém, jak se dozvědět, jaký je počet atomů připadajících na jednotkový objem a jaká je jejich vlastní frekvence  $\omega_0$ . To zatím nevíme, protože pro každou látku je to jiné a zatím nemůžeme formulovat obecnou teorii. Takovou teorii vlastností různých látek (jejich vlastních frekvencí apod.) lze vytvořit jen pomocí kvantové mechaniky. Kromě toho různé látky mají různé vlastnosti a různý index lomu a nemůžeme očekávat, že pro index lomu dostaneme vztah platný pro všechny látky.

Podívejme se, jak se vztah (31.19) uplatňuje za různých okolností. Pro nejběžnější plyny (např. vzduch, většina bezbarvých plynů, vodík, hélium atd.) odpovídají vlastní frekvence elektronových oscilátorů ultrafialovému záření. Tato frekvence je mnohem vyšší než frekvence viditelného světla a v prvním přiblížení můžeme zanedbat  $\omega^2$  ve srovnání s  $\omega_0^2$ . V takovém případě vidíme, že index lomu je téměř konstantní. To platí i pro většinu jiných průhledných látek jako je například sklo. Podíváme-li se na náš vztah trochu blíže, všimneme si, že jak se  $\omega$  zvětšuje, jmenovatel se zmenšuje a index lomu roste; takže  $n$  se s rostoucí frekvencí pomalu zvětšuje. Index lomu pro modré světlo je větší než pro červené. Proto optický hranol ohýbá víc paprsky modré než červené.

Jev závislosti indexu lomu na frekvenci se nazývá *disperze*, neboť to je příčina toho, že se světlo při průchodu hranolem rozptyluje, disperguje ve spektrum. Rovnice pro index lomu jako funkce

## PŮVOD INDEXU LOMU

frekvence se nazývá *disperzní vztah*. Dostali jsme vztah pro disperzi světla. V šedesátých letech našly vztahy pro disperzi nové uplatnění v teorii elementárních částic.

Vztah pro disperzi popisuje i další jevy. Kdyby vlastní frekvence  $\omega_0$  ležela v oblasti viditelného světla nebo kdybychom index lomu skla nebo podobného materiálu měřili v ultrafialové oblasti, kde  $\omega$  je blízké  $\omega_0$ , zjistili bychom, že pro frekvence blízké vlastní frekvenci může index lomu prudce vzrůst, protože jmenovatel se bude blížit nule. Dále předpokládejme, že  $\omega$  je větší než  $\omega_0$ . To nastane například tehdy, kdy materiál, jako například sklo, ozáříme rentgenovými paprsky. Opravdu, vzhledem k tomu, že mnoho látek, které jsou neprůhledné pro viditelné světlo, jako například tuha, jsou průhledné pro rentgenové paprsky, můžeme mluvit také o indexu lomu tuhy pro rentgenové záření. Všechny vlastní frekvence uhlíkových atomů budou mnohem nižší než frekvence rentgenových paprsků, neboť rentgenové záření má velmi vysokou frekvenci. Index lomu je tehdy určen naším vztahem pro disperzi, v němž  $\omega_0$  položíme rovno nule (zanedbáme  $\omega_0^2$  ve srovnání s  $\omega$ ).

Podobná situace nastane, nasměrujeme-li rádiové vlny (nebo světlo) na plyn volných elektronů. Ve vrchní atmosféře jsou elektrony uvolňovány vlivem ultrafialového záření ze svých atomů a jsou tam ve volném stavu. Pro volné elektrony  $\omega_0 = 0$  (elastická vratná síla neexistuje). Položíme-li  $\omega_0 = 0$  v našem vztahu pro disperzi, dostáváme správný vztah pro index lomu rádiových vln ve stratosféře, kde  $N$  nyní představuje hustotu volných elektronů (počet připadajících na jednotkový objem). Ale podívejme se znovu na naši rovnici. Ať už nasměrujeme rentgenové paprsky na látku nebo rádiové vlny nebo jakékoliv elektromagnetické vlny na volné elektrony, člen  $\omega_0^2 - \omega^2$  se stává *záporným* a dostáváme, že  $n$  je menší než jedna. To znamená, že efektivní rychlost světla v prostředí je *větší než  $c$* . Může to být správně?

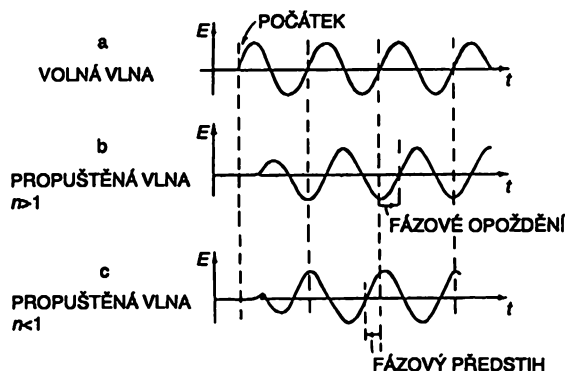
Je to správně. Přesto, že signály se nemohou šířit rychleji než rychlostí světla, přece platí, že index lomu látky pro danou frekvenci může být větší nebo menší než jedna. Znamená to tolik, že *fázový posun* způsobený rozptýleným světlem může být buď kladný nebo záporný. Lze však ukázat, že rychlost, kterou lze poslat *signál*, není určena indexem lomu pro jednu frekvenci, ale závisí na hodnotách indexu lomu pro *mnoho* frekvencí. Index lomu určuje rychlost, jíž se pohybuje vrch (nebo důl) vlny. Vrch vlny není sám o sobě signálem. O dokonalé vlně, jež není žádným způsobem modulována, tj. jež představuje nepřetržité oscilace, nemůžeme ve skutečnosti říci, kdy „začíná“, takže nelze použít jako časovaný signál. K vyslání signálu je třeba vlnu nějak změnit, udělat na ní značku, udělat jí o něco silnější nebo slabší. To znamená, že vlna musí obsahovat více než jednu frekvenci a lze ukázat, že rychlost šíření signálu nezávisí jen na indexu lomu, ale na tom, jak se index mění v závislosti na frekvenci. Toto téma musíme také odložit na pozdější dobu (48. kapitola). Tam vypočítáme skutečnou rychlost signálu v kousku skla a uvidíte, že není větší než rychlost světla, i když vrchy (což jsou matematické body) se skutečně pohybují větší rychlostí než světlo.

Abychom alespoň trochu naznačili, jak k tomu dochází, poznamenejme, že skutečný problém je v tom, že reakce nábojů má směr protichůdný k poli, tj. znaménko se mění na opačné. Tak v našem vztahu (31.16) je výchylka náboje pro  $x$  opačná vzhledem k budicí síle, neboť  $\omega_0^2 - \omega^2$  je pro malé  $\omega_0$  záporné. Tento vztah říká, že působí-li elektrické pole jedním směrem, náboj se pohybuje opačným směrem.

Jak se může stát, že se náboj pohybuje opačným směrem? Určitě to tak ihned není od začátku po příchodu elektrického pole. Na začátku pohybu nastává přechodový jev, který se po čase ustálí a pouze pak je fáze oscilací náboje opačná k budicí síle. Tehdy se může jevit, že fáze přenášeného pole předbíhá pole zdroje. Řekneme-li, že „fázová rychlost“ nebo rychlost vrchů je větší než  $c$ , rozumíme tím toto předbíhání fáze. Na obrázku 31.4 je schématicky znázorně-

## DISPERZE

no, jak to může vypadat v případě, kdy zdroj vlny v určitém okamžiku zapneme (abychom vytvořili signál). Z diagramu je vidět, že signál (tj. začátek vlny) pro vlnu, jež se ustálí s předstihem fáze, není v časovém předstihu.



Obr. 31.4 Vlnové signály

Podívejme se znovu na náš vztah pro disperzi. Měli bychom poznamenat, že naše analýza indexu lomu dává o něco jednodušší výsledek než to, co skutečně nacházíme v přírodě. Pro úplnost musíme dodat některá upřesnění. Za prvé, můžeme očekávat, že náš model atomového oscilátoru by měl mít nějaké tlumení (jinak by zůstal oscilovat navždy a to nepředpokládáme). Pohyb tlumeného oscilátoru jsme odvodili již dříve (rovnice (23.8)) a výsledek je, že jmenovatel v rovnici (31.16) a tedy i (31.19) se změní z  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  na  $(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$ , kde  $\gamma$  je koeficient útlumu.

Druhou modifikací, kterou musíme vzít v úvahu, je skutečnost, že daný atom má několik rezonančních frekvencí. Náš disperzní vztah lze snadno upravit, představíme-li si, že máme několik různých oscilátorů, jež jsou navzájem nezávislé, takže jejich příspěvky prostě sčítáme. Dejme tomu, že máme  $N_k$  elektronů v jednotkovém objemu s vlastní frekvencí  $\omega_k$  a koeficientem útlumu  $\gamma_k$ . Náš vztah pro disperzi pak bude

$$n = 1 + \frac{q_e^2}{2 \epsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}. \quad (31.20)$$

Tak dostáváme úplný výraz pro popis indexu lomu, jak ho pozorujeme u mnohých látek.<sup>40)</sup> Index lomu popsany tímto vztahem se mění v závislosti na frekvenci zhruba podle křivky znázorněné na obr. 31.5.

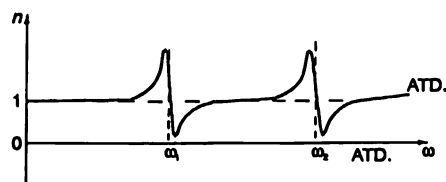
Je vidět, že pokud  $\omega$  není příliš blízko k některé z rezonančních frekvencí, je náklon křivky kladný. Takový náklon se nazývá „normální“ disperzí (protože se vyskytuje nejčastěji). Blízko rezonančních frekvencí se však nachází malý rozsah frekvencí  $\omega$ , pro něž je náklon křivky

<sup>40)</sup> I když vztah (31.20) platí i v kvantové mechanice, jeho interpretace je trochu odlišná. V kvantové mechanice má dokonce i atom s pouze jedním elektronem, jako vodík, více rezonančních frekvencí. Proto  $N_k$  není ve skutečnosti počet atomů s frekvencí  $\omega_k$ , ale je třeba ho zaměnit za  $Nf_k$ , kde  $N$  je počet atomů v jednotkovém objemu a  $f_k$  (nazývaný síla oscilátoru) je faktor, jenž říká, jak silně se u atomu projevuje každá jeho rezonanční frekvence  $\omega_k$ .



## PŮVOD INDEXU LOMU

záporný. Ten odpovídá tomu, čemu se často říká „anomální“ disperze, neboť se zdála nezvyklá, když ji poprvé pozorovali. To bylo dávno předtím než byla objevena existence elektronů. Z našeho hlediska jsou oba náklony celkem „normální“!



Obr. 31.5 Index lomu jako funkce frekvence

## 31.4 ABSORPCE

Snad jste si všimli v našem posledním vztahu pro disperzi (31.20) něčeho neobvyklého. Protože jsme tam vložili člen  $i\gamma$  vyjadřující tlumení, vychází index lomu jako komplexní číslo! Co to znamená? Výpočtem reálné i imaginární části  $n$  můžeme napsat

$$n = n' - in'' \quad (31.21)$$

kde  $n'$  a  $n''$  jsou reálná čísla. (Před  $i n''$  jsme použili záporné znaménko, protože  $n''$  pak vychází kladné, jak se můžeme snadno přesvědčit.)

Co znamená takový komplexní index lomu, to zjistíme, když se vrátíme k rovnici (31.6), jež popisuje vlnu po průchodu deskou s indexem lomu  $n$ . Když tam dosadíme naše komplexní  $n$ , po krátkém výpočtu máme

$$E_{\text{za deskou}} = \underbrace{e^{-\omega n'' \frac{\Delta z}{c}}}_A \underbrace{e^{-i\omega(n'-1) \frac{\Delta z}{c}} E_0 e^{i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)}}_B \quad (31.22)$$

Poslední činitel v rovnici (31.22) označený jako  $B$ , je to, co jsme měli již předtím a opět popisuje vlnu, jejíž fáze se průchodem látkou opozdila o úhel  $\omega(n'-1)\Delta z/c$ . První činitel  $A$  je nový. Je to exponenciální činitel s *reálným* exponentem. Exponent je záporný, takže celý činitel je roven reálnému číslu menšímu než jedna. Popisuje *pokles* intenzity pole a jak bychom očekávali, pokles je tím větší, čím větší je  $\Delta z$ . Průchodem látkou se vlna zeslabuje, látka část vlny pohlcuje, absorbuje. Vlnění vycházející na druhé straně má menší energii. To by nás nemělo překvapit, neboť tlumení, jež jsme zavedli pro oscilátory, představuje sílu tření, která musí způsobovat ztrátu energie. Vidíme, že imaginární část  $n''$  komplexního indexu lomu představuje absorpci vlnění, proto se někdy nazývá index absorpce.

Upozorňujeme i na to, že imaginární část indexu lomu  $n$  souvisí se sklonem šipky  $E_a$  na obr. 31.3 směrem k počátku. Odtud je zřejmé, proč se přenesená vlna oslabila.

Obvykle je absorpce světla velmi malá, jako například ve skle. Lze to očekávat na základě našeho vztahu (31.20), neboť imaginární část jmenovatele  $i\gamma_k \omega$  je mnohem menší než člen  $(\omega_k^2 - \omega^2)$ . Ale když se frekvence světla hodně blíží k  $\omega_k$ , rezonanční část  $(\omega_k^2 - \omega^2)$  může být

malá v porovnání s  $\gamma_k \omega$  a index se stává téměř zcela imaginárním. Absorpce světla se stává dominujícím jevem. Je to jev, jenž způsobuje tmavé čáry ve světelném spektru Slunce. Světlo ze slunečního povrchu proniklo sluneční atmosférou (stejně tak i zemskou) a bylo silně absorbováno na rezonančních frekvencích atomů ve sluneční atmosféře.

Pozorování takových spektrálních čar ve slunečním světle nám dovoluje určit rezonanční frekvence atomů, a tedy i chemické složení sluneční atmosféry. Pozorování tohoto druhu nám řeknou něco i o složení hvězd. Z těchto měření víme, že chemické prvky na Slunci a na hvězdách jsou stejné jako ty, jež nacházíme na Zemi.

### 31.5 ENERGIE PŘENÁŠENÁ ELEKTROMAGNETICKOU VLNOU

Viděli jsme, že imaginární část indexu lomu znamená absorpci. Nyní to využijeme k určení energie přenášené světelnou vlnou. Již dávno jsme uvedli důvod, proč je energie přenášená světlem úměrná  $E^2$ , tj. časové střední hodnotě druhé mocniny intenzity elektrického pole vlny. Pokles  $E$  způsobený absorpcí musí znamenat ztrátu energie, která, jak se můžeme domnívat, se nějakým třením elektronů přemění na teplo v materiálu.

Představme si světlo dopadající na jednotkovou plochu naší desky na *obr. 31.1*, řekněme jeden centimetr čtvereční. Pak můžeme napsat tuto energetickou rovnici (předpokládáme, že platí zákon zachování energie):

Energie dopadající za sekundu = energie vylétující za sekundu + práce vykonaná za sekundu. (31.23)

První člen můžeme napsat jako  $\alpha \overline{E_i^2}$ , kde  $\alpha$  je zatím neznámá konstanta úměrnosti dávající do souvislosti střední hodnotu  $E^2$  a přenášenou energii. V druhém členu musíme zahrnout část od vyzářujících atomů látky, takže musíme psát  $\alpha(\overline{E_i^2} + \overline{E_a^2})$  nebo po umocnění  $\alpha(\overline{E_i^2} + 2\overline{E_i E_a} + \overline{E_a^2})$ .

Všechny naše výpočty jsme prováděli pro tenkou vrstvu materiálu s indexem lomu ne příliš odlišným od jedné, takže  $E_a$  bude vždy mnohem menší než  $E_i$  (ulehčí se nám tím výpočet). V souladu s naší aproximací proto můžeme zanedbat člen  $\overline{E_a^2}$ , neboť je mnohem menší než  $\overline{E_i E_a}$ . Snad řeknete: „Pak bychom měli zanedbat i  $\overline{E_i E_a}$ , protože je mnohem menší než  $\overline{E_i^2}$ .“  $\overline{E_i E_a}$  je sice mnohem menší než  $\overline{E_i^2}$ , ale  $\overline{E_i E_a}$  si musíme ponechat, protože jinak by šlo o aproximaci, při níž zcela zanedbáme přítomnost materiálu. Jeden způsob, jak se můžeme přesvědčit, že naše výpočty jsou konzistentní, je ten, že nikdy nezanedbáme členy úměrné  $N\Delta z$ , což je hustota atomů v látce, ale zanedbáme členy úměrné  $(N\Delta z)^2$  a vyšším mocninám  $N\Delta z$ . Naše přiblížení můžeme tedy nazvat „přiblížením malé hustoty.“

V duchu naší aproximace jsme v naší rovnici pro energii zanedbali odraženou vlnu. To je v pořádku, neboť takový člen je úměrný  $(N\Delta z)^2$ , protože amplituda odražené vlny je úměrná  $N\Delta z$ .

Pro poslední člen v (31.23) chceme vypočítat, jakou práci vykonává dopadající vlna na elektronech za jednotku času. Víme, že práce je rovna součinu síly a vzdálenosti, takže práce vykonaná za jednotku času (nazývaná též výkon) je rovna součinu síly a rychlosti. Ve skutečnosti je rovna  $F \cdot v$ , ale jsou-li síla a rychlost rovnoběžné, jako je to tady, nemusí nás znepokojovat skalární součin (až na možnost opačného znaménka). Takže pro střední výkon vezmeme pro každý atom  $q_e \overline{E_i v}$ . Protože na jednotkové ploše je  $N\Delta z$  atomů, bude poslední člen v rovnici (31.23)  $N\Delta z q_e \overline{E_i v}$ . Naše energetická rovnice je nyní

$$\alpha \overline{E_i^2} = \alpha \overline{E_i^2} + 2 \alpha \overline{E_i E_a} - N\Delta z q_e \overline{E_i v}. \quad (31.24)$$

## PŮVOD INDEXU LOMU

Členy  $\alpha \overline{E_i^2}$  se ruší a máme

$$2 \alpha \overline{E_i E_a} = N \Delta z q_e \overline{E_i v}. \quad (31.25)$$

Nyní se vrátíme k rovnici (30.19), podle níž pro velké  $z$  platí

$$E_a = \frac{N \Delta z q_e}{2 \varepsilon_0 c} v \left( \text{zpožděné o } \frac{z}{c} \right) \quad (31.26)$$

(připomeňme, že  $\eta = N \Delta z$ ). Dosazením (31.26) do levé strany (31.25) dostaneme

$$2 \alpha \frac{N \Delta z q_e}{2 \varepsilon_0 c} \overline{E_i(z) \cdot v(\text{zpožděné o } z/c)}$$

ale  $E_i(z)$  je  $E_i$  (v atomech) zpožděné o  $z/c$ . Protože střední hodnota nezávisí na čase, je to nyní stejná hodnota jako v čase zpožděném o  $z/c$  neboli  $E_i$  je stejná střední hodnota, která je i na pravé straně (31.25). Obě strany jsou si proto rovny, je-li

$$\frac{\alpha}{\varepsilon_0 c} = 1 \text{ nebo } \alpha = \varepsilon_0 c. \quad (31.27)$$

Zjistili jsme, že má-li se energie zachovávat, musí být energie přenášená elektromagnetickou jednotkovou plochou za jednotku času (což jsme nazývali intenzitou záření) dána vztahem  $\varepsilon_0 c \overline{E^2}$ . Označíme-li ji jako  $\vec{S}$ , máme

$$\vec{S} = \left\{ \begin{array}{l} \text{intenzita záření} \\ \text{nebo} \\ \text{energie / (plocha} \cdot \text{čas)} \end{array} \right\} = \varepsilon_0 c \overline{E^2}, \quad (31.28)$$

kde čára nad označením veličiny znamená časovou střední hodnotu. Z naší teorie indexu lomu máme tak pěkný výsledek navíc!

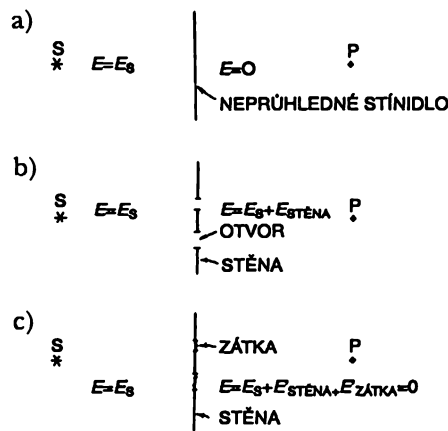
### 31.6 DIFRAKCE SVĚTLA NA CLONĚ

Nyní je vhodná chvíle, abychom se trochu věnovali jiné záležitosti, kterou můžeme zvládnout s aparátem této kapitoly. V předcházející kapitole jsme řekli, máme-li nepropustnou clonu a světlo může pronikat jen nějakými otvory, rozložení intenzity – difrakční obraz – můžeme dostat, když si místo toho představíme, že otvory jsou nahrazeny zdroji (oscilátory) rovnoměrně rozloženými v otvorech. Jinými slovy, difraktovaná vlna je stejná, jako kdyby otvory byly novými zdroji. To musíme odůvodnit, protože otvor je právě místo, kde nejsou žádné zdroje, kde nejsou žádné urychlované náboje.

Nejdříve se zeptejme: „Co je nepropustná clona?“ Předpokládejme, že mezi zdrojem  $S$  a pozorovatelem  $P$  máme úplně nepropustnou clonu jako na obr. 31.6a). Je-li clona nepropustná, není v bodě  $P$  žádné pole. Proč tam není pole? Podle základních principů dostaneme pole v bodě  $P$  jako pole  $E_i$  zdroje retardované o příslušný čas plus pole od všech nábojů okolo. Ale, jak jsme

## DIFRAKCE SVĚTLA NA CLONĚ

si již ukázali, pole  $E_i$  rozkmitá náboje v cloně a tento pohyb vytváří nové pole, které, je-li clona nepropustná, se musí *úplně rušit* s polem  $E_i$  na její druhé straně. Řeknete: „Jaký div, že se přesně ruší! Co když se neruší přesně?“ Kdyby se přesně nerušily, pole u zadní strany stínítka (pamatujme, že stínítka má určitou tloušťku) by pak nebylo přesně nulové. Kdyby nebylo nulové, rozkmitalo by náboje ve stínítku a tím by se vytvořilo další pole rušící původní pole. Takže, je-li clona dostatečně silná, neexistuje žádné zbytkové pole, neboť je dostatek možnosti, aby se vše vyrušilo. Ve smyslu našich vzorců bychom řekli, že stínítka má velký a imaginární index lomu, takže, jak jím vlna postupuje, exponenciálně se pohlcuje. Víme, že dostatečně tenký plátek i toho nejneprůhlednějšího materiálu, dokonce i zlata, je průsvitný.



Obr. 31.6 Difrakce na stínítku

Nyní se podívejme, co se stane s nepropustným stínítkem, jež má otvory, jaké jsou zobrazeny na obr. 31.6b). Jaké očekáváme, že bude pole v bodě  $P$ ? Můžeme ho napsat jako součet dvou částí – pole vytvořené zdrojem  $S$  plus pole vytvořené stěnou, tj. pohybem nábojů ve stěně. Můžeme předpokládat, že pohyby nábojů ve stěně budou složité, ale pole, které vytvářejí, můžeme najít dost jednoduchým způsobem.

Předpokládejme, že máme stejné stínítko, jen jsme v něm ucpali otvory, jak je znázorněno na obr. 31.6c). Představme si, že zátky jsou ze stejného materiálu jako stínítko. Připomínáme, že zátky budou na místě otvorů, jež jsme měli v případě b). Nyní vypočítejme pole v bodě  $P$ . V případě c) je určité nulové, ale také je rovno součtu pole zdroje a pole vytvořeného pohybem atomů ve stěně a v zátkách. Můžeme napsat rovnice:

$$\begin{aligned} \text{Případ b):} \quad E_P &= E_i + E_{\text{stěny}} \\ \text{Případ c):} \quad E_P &= 0 = E_i + E'_{\text{stěny}} + E'_{\text{zátek}} \end{aligned}$$

kde čárkou označujeme pole v případě zavřených otvorů, ale pole  $E_i$  je samozřejmě stejné v obou případech. Odečteme-li nyní obě rovnice, dostaneme

$$E_P = (E_{\text{stěny}} - E'_{\text{stěny}}) - E'_{\text{zátek}}$$

## PŮVOD INDEXU LOMU

Nejsou-li otvory příliš malé (řekněme na šířku mnoha vlnových délek), lze očekávat, že přítomnost zátek nezmění pole dopadající na stěny, snad kromě malé změny podél okrajů otvorů. Zanedbáme-li tuto malou změnu, můžeme položit  $E_{\text{stěny}} = E'_{\text{stěny}}$  a dostáváme

$$E_P = -E'_{\text{zátek}}.$$

Dostali jsme tedy následující výsledek: Jsou-li ve stínítku otvory (případ b), intenzita pole v bodě  $P$  je stejná (až na znaménko) jako intenzita pole vytvořená tou částí neprůhledné stěny, jež je umístěna *v místech, kde jsou otvory!* (Znaménko není příliš zajímavé, protože obvykle nás zajímá světelný tok, který je úměrný druhé mocnině intenzity pole.) Zdá se, že je to podivná argumentace v kruhu, ale nejen že je to pravda (v přiblížení pro ne příliš malé otvory), ale má to i svůj užitek a je to potvrzení platnosti teorie difrakce.

Pole  $E'_{\text{zátek}}$  se vypočítá v každém konkrétním případě, za předpokladu, že pohyby všech nábojů ve stínítku jsou právě takové, že vyruší pole  $E_0$  na druhé straně stínítku. Když jednou tyto pohyby známe, přidáme radiační pole v  $P$  vytvořené právě náboji zátek.

Opět poznamenejme, že tato teorie difrakce je pouze přibližná a bude dobrá jen, když otvory nejsou příliš malé. Pro příliš malé otvory bude člen  $E'_{\text{zátek}}$  příliš malý a rozdíl mezi  $E'_{\text{stěny}}$  a  $E_{\text{stěny}}$  (který jsme položili rovný nule) může být srovnatelný nebo dokonce větší než malý člen  $E'_{\text{zátek}}$  a naše aproximace již nebude platit.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 31.1 ■ Určete index lomu hliníku pro rentgenové záření o vlnové délce  $1,56 \cdot 10^{-8}$  cm za předpokladu, že elektrony v hliníku kmitají s vlastní frekvencí mnohem menší než je frekvence rentgenového záření.
- 31.2 ■ Index lomu ionosféry pro rádiové vlny o frekvenci  $100 \mu\text{s}^{-1}$  je  $n = 0,90$ . Určete koncentraci elektronů v ionosféře.
- 31.3 ■ Elektrické pole  $E$  světelných vln, jež procházejí prostředím s indexem lomu  $n$ , je  $E_0 e^{i\omega(t - nzc)}$ .
- a) Ukažte, že je-li  $n = n' - i n''$ , platí  $E = E_0 e^{-n''\omega z/c} e^{i\omega(t - n'zc)}$ .
- b) S použitím výrazu  $n - 1 = \frac{Nq^2}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + iy\omega}$ , najděte zákon poklesu intenzity světelné vlny, jejíž frekvence je přesně rovna atomové frekvenci  $\omega_0$ .
- 31.4 ■ Je známo, že okamžitá hustota toku energie elektromagnetické vlny je  $S = \epsilon_0 c E^2 \text{ W m}^{-2}$ .
- a) Určete celkovou energii, kterou za jednotku času vyzařuje elektron kmitající s amplitudou  $x_0$  a úhlovou frekvencí  $\omega$ .
- b) Porovnejte energii vyzařenou během jednoho kmitu s nahromaděnou energií  $1/2 m \omega^2 x^2$  a určete konstantu útlumu  $\gamma_R$ . Je to tzv. radiační útlum.
- c) Vybuzený atom vyzařuje fotony určité vlnové délky  $\lambda$ . Vypočítejte očekávané rozšíření spektrální čáry  $\Delta\lambda$ , je-li způsobeno pouze radiačním útlumem. Považujte přítom atom za malinký tlumený oscilátor.

# Radiační útlum.

## Rozptyl světla

---

### 32.1 RADIAČNÍ ODPOR

### 32.2 RADIAČNÍ VÝKON

### 32.3 RADIAČNÍ ÚTLUM

### 32.4 NEZÁVISLÉ ZDROJE

### 32.5 ROZPTYL SVĚTLA

#### **32.1 RADIAČNÍ ODPOR**

V předcházející kapitole jsme se dozvěděli, že když systém osciluje, vydává energii a odvodili jsme vzorec pro energii vyzářenou oscilujícím systémem. Známe-li intenzitu elektrického pole, střední hodnota druhé mocniny intenzity vynásobená  $\epsilon_0 c$  dává množství energie, jež projde za sekundu čtverečním metrem plochy kolmé na směr, jímž se záření šíří

$$P = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle. \quad (32.1)$$

Každý oscilující náboj vyzařuje energii; například i buzená anténa vyzařuje energii. Vyzařuje-li systém energii, je mu třeba energii dodávat, například dráty vedoucími k anténě, neboť platí zákon o zachování energie. Na napájecí obvod tedy anténa působí jako *odpor* nebo jako místo, kde se může energie „ztrácet“ (energie se ve skutečnosti neztrácí, vyzařuje se, ale vzhledem k napájecímu obvodu se ztrácí). V obyčejném odporu se „ztracená“ energie mění v teplo. V tomto případě „ztracená“ energie uniká do prostoru. Z hlediska teorie obvodů, bez ohledu na to, kam se energie poděje, je výsledný efekt v obvodu stejný – energie se z obvodu „ztrácí“. Proto je anténa pro generátor odporem, i kdyby byla zhotovena z čisté mědi. Skutečně, je-li dobře konstruována, jeví se jako téměř čistý odpor s velmi malou induktancí nebo kapacitancí, protože chceme, aby se z antény vyzářilo co nejvíce energie. Tento odpor antény se nazývá *radiační odpor*.

Napájí-li se anténa proudem  $I$ , je střední výkon dodávaný do antény roven střední hodnotě druhé mocniny proudu vynásobené odporem. Výkon *vyzařený* anténou je úměrný druhé

mocnině proudu v anténě, neboť všechna pole jsou úměrná proudům a uvolněná energie je úměrná druhé mocnině intenzity pole. Koeficient úměrnosti mezi vyzářeným výkonem a  $\langle I^2 \rangle$  je radiační odpor.

Zajímavá je otázka, odkud se radiační odpor bere. Vezmeme si jednoduchý příklad: Řekněme, že v anténě jsou proudy protékající nahoru a dolů. Zjistíme, že má-li anténa vyzářovat energii, musíme konat práci. Vezmeme-li nabitě těleso a urychlujeme ho směrem nahoru – dolů, vyzářuje energii. Kdyby nebylo nabitě, nevyzařovalo by energii. Vypočítat ze zákona zachování, že se energie ztrácí, je jedna věc, ale druhou věcí je odpovědět na otázku, *proti jaké síle konáme práci*. To je zajímavá a velmi těžká otázka, která nebyla nikdy úplně a uspokojivě zodpovězena pro elektrony, i když byla zodpovězena pro antény. V anténě se děje toto: Pole vytvořená náboji v jedné části antény působí na pohybující se náboje v jiné části antény. Tyto síly můžeme vypočítat, lze zjistit práci, kterou vykonávají a tak najít správný vzorec pro radiační odpor. Když říkáme, že „můžeme vypočítat“, není to úplně pravda – my nemůžeme, neboť jsme zatím nestudovali zákony elektřiny na krátkých vzdálenostech. Víme jen, čemu je rovno elektrické pole na velkých vzdálenostech. Viděli jsme vztah (28.3), ale výpočet pole uvnitř vlnové zóny je pro nás zatím příliš komplikovaný. Jelikož však platí zákon zachování energie, správný výsledek můžeme vypočítat aniž bychom znali pole na krátkých vzdálenostech. Naopak odtud plyne, že známe-li pole na velmi velkých vzdálenostech můžeme pomocí zákona zachování energie najít vztah pro síly na krátkých vzdálenostech. Zde se tím však nebudeme zabývat.

U jednotlivého elektronu je takový problém: Je-li pouze jeden náboj, jak může sám na sebe působit? Ve staré, klasické teorii byl předložen návrh, že elektron je malá kulička a že jedna část náboje působí na druhou část. Při časovému zpoždění v působení síly napříč malinkým elektronem není síla úplně ve fázi s pohybem. Je-li elektron v klidu, víme, že „akce je rovna reakci“, takže různé vnitřní síly se vyrovnávají a výsledná síla je nulová. Zrychluje-li však elektron, není z důvodu časového zpoždění síla, jež působí zezadu na přední část přesně stejná jako síla působící zepředu na jeho zadní část. Tak časové zpoždění naruší rovnováhu, takže výsledný efekt je ten, že elektron sám sebe přibrzdí jakoby tahal za tkaničky svých vlastních bot. Tento model vzniku odporu proti zrychlení, model radiačního odporu pohybujícího se náboje, narazil na mnoho těžkostí, neboť náš současný pohled na elektron je takový, že to není „malá kulička“. Je to problém, který zatím nebyl vyřešen. Přesto můžeme přesně vypočítat, jaká musí být výsledná síla radiačního odporu, tj. jak velké musí být ztráty při urychlování náboje i přesto, že mechanismus působení této síly neznáme.

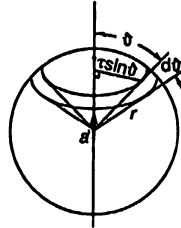
## 32.2 RADIČNÍ VÝKON

Nyní vypočteme celkovou energii vyzářovanou zrychlovaným nábojem. Aby byla naše diskuze obecná, vezmeme si případ náboje pohybujícího se s libovolným zrychlením, ale nerelativisticky. V okamžiku, kdy je zrychlení, dejme tomu, vertikální, víme, že intenzita vytvářeného elektrického pole je rovna náboji vynásobenému průmětem retardovaného zrychlení vyděleného vzdáleností. Takže elektrické pole známe v každém bodě, a proto známe i druhou mocninu intenzity pole, a tedy i energii  $\epsilon_0 c E^2$  unikající jednotkovou plochou za sekundu.

Veličina  $\epsilon_0 c$  se ve vztazích pro šíření rádiových vln vyskytuje dost často. Její převrácená hodnota se nazývá *impedance vakua* a lze si ji snadno zapamatovat. Má hodnotu  $1/\epsilon_0 c = 377$  ohmů. Takže výkon ve watttech na čtvereční metr je roven střední hodnotě druhé mocniny intenzity pole dělené 377.



RADIAČNÍ ÚTLUM. ROZPTYL SVĚTLA



Obr. 32.1 Plocha kulového pásu je  $2\pi r \sin \vartheta \cdot r d\vartheta$

Použijeme-li pro intenzitu pole náš vztah (29.1), najdeme, že

$$S = \frac{q^2 a'^2 \sin^2 \vartheta}{16 \pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3} \quad (32.2)$$

je rovno výkonu vyzářenému plochou jednoho čtverečního metru ve směru  $\vartheta$ . Všimněme si, že závisí na převrácené hodnotě druhé mocniny vzdálenosti, jak jsme si řekli už předtím. Předpokládejme, že bychom chtěli znát celkovou energii vyzářenou všemi směry. Pak musíme integrovat (32.2) přes všechny směry. Nejdříve násobíme plochou, abychom našli velikost toku ve směru malého úhlu  $d\vartheta$  (obr. 32.1). Potřebujeme znát plochu kulového pásu. Lze ji zjistit takto: Je-li  $r$  poloměr kulové plochy, je úhlová šířka pásu  $r d\vartheta$  a obvod je  $2\pi r \sin \vartheta$ , protože  $r \sin \vartheta$  je poloměr kružnice, takže plocha malé části koule je  $2\pi r \sin \vartheta$  krát  $r d\vartheta$

$$dA = 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta. \quad (32.3)$$

Vynásobením toku (32.2) plochou v čtverečních metrech připadajících na malý úhel  $d\vartheta$  dostaneme část energie uvolněné v tomto směru mezi úhlem  $\vartheta$  a  $\vartheta + d\vartheta$ . Potom integrujeme přes všechny úhly  $\vartheta$  od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ :

$$P = \int S dA = \frac{q^2 a'^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta. \quad (32.4)$$

Použitím vztahu  $\sin^3 \vartheta = (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta$  není těžké ukázat, že  $\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = 4/3$ . Použitím tohoto faktu konečně dostáváme

$$P = \frac{q^2 a'^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}. \quad (32.5)$$

Tento výraz si zaslouží několik poznámek. Za prvé, protože vektor  $a'$  má určitý směr, výraz  $a'^2$  v (32.5) bude druhou mocninou vektoru  $a'$ , tj.  $a' \cdot a'$ , což je druhá mocnina délky vektoru  $a'$ . Za druhé, tok (32.2) byl vypočítán pomocí retardovaného zrychlení, tj. pomocí zrychlení v čase, v němž byla vyzářena energie procházející nyní povrchem koule. Snad by se nám líbilo říct, že tato energie se uvolnila v dřívějším čase. To není přesné, je to jen aproximace. Přesný čas uvolnění energie nelze přesně definovat. Skutečně přesně můžeme vypočítat jen to, co se děje během celkového pohybu jako například při uzavřeném cyklu oscilací, kde zrychlení nakonec přestává. Tak zjistíme, že celkový tok energie na jednu periodu je dán druhou mocninou střední hodnoty zrychlení za tuto periodu. Ve vztahu (32.5) by měla být tato hodnota. Nebo v případě

## RADIČNÍ ÚTLUM

pohybu, při němž je zrychlení na začátku a na konci rovno nule, celková energie, která se uvolnila, je rovna integrálu podle času z (32.5).

Pro ilustraci důsledků vztahu (32.5) pro oscilující systém se podívejme, co se stane, když výchylka  $x$  náboje osciluje tak, že zrychlení  $a = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$ . Pro střední hodnotu druhé mocniny zrychlení za jednu periodu (pamatujeme, že při umocňování komplexních výrazů musíme být velmi opatrní – je to skutečně kosinus a střední hodnota  $\cos^2 \omega t$  je jedna polovina) tedy platí

$$\langle a^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega^4 x_0^2.$$

Proto

$$P = \frac{q^2 \omega^4 x_0^2}{12 \pi \epsilon_0 c^3}. \quad (32.6)$$

Vztahy, o nichž nyní mluvíme, jsou relativně náročné a poměrně moderní. Pocházejí ze začátku dvacátého století a jsou velmi známé. Pro nás je důležité, abychom o nich uměli číst i ve starších knihách, kde se používal systém jednotek odlišný od systému SI. To je možno vzít v úvahu ve výsledných vztazích platných pro elektrony podle následujícího pravidla. Veličina  $q_e^2/4\pi\epsilon_0$ , kde  $q_e$  je náboj elektronu (v coulombech) se v minulosti psala jako  $e^2$ . Velmi snadno lze vypočítat, že  $e$  je v systému SI číselně rovno  $1,5188 \cdot 10^{-14}$ , protože víme, že  $q_e = 1,60206 \cdot 10^{-19}$  a  $1/4\pi\epsilon_0 = 8,98748 \cdot 10^9$ . Proto budeme často používat zkrácené označení

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (32.7)$$

Když ve starších vztazích použijeme uvedenou hodnotu pro  $e$  a zacházíme s nimi jako by byly zapsány v systému SI, dostaneme správné výsledky. Například starší forma vztahu (32.5) je  $P = 2/3 e^2 a^2 c^{-3}$ . Potenciální energie protonu a elektronu ve vzdálenosti  $r$  je

$$\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ nebo } \frac{e^2}{r} \text{ s hodnotou } e = 1,51188 \times 10^{-14} \text{ SI.}$$

### 32.3 RADIČNÍ ÚTLUM

Fakt, že oscilátor ztrácí určitou energii, znamená, že kdybychom měli náboj umístěný na konci pružiny (nebo elektron v atomu) s vlastní frekvencí  $\omega_0$  a kdybychom ho rozkmitali, nebude oscilovat stále i kdyby se nacházel v prázdném prostoru vzdálen od čehokoliv na milióny kilometrů. I kdyby kmital bez tření, nepotřeboval mazání, nepůsobila by na něho žádná vazkost prostředí, přece by nekmital věčně, je-li elektricky nabitý, vyzařuje energii, a oscilace tedy pomalu zaniknou. Jak pomalu? Čemu je rovna kvalita  $Q$  takového oscilátoru způsobená elektromagnetickými jevy, tj. radiační odpor nebo *radiační útlum* oscilátoru? Pro jakýkoliv oscilační systém je  $Q$  rovno celkové energii oscilátoru dělené energetickou ztrátou na radián

$$Q = \frac{W}{dW/d\varphi}.$$

RADIAČNÍ ÚTLUM. ROZPTYL SVĚTLA

Protože  $\frac{dW}{d\varphi} = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{1}{\omega}$ , můžeme  $Q$  zapsat též ve tvaru

$$Q = \frac{\omega W}{\left| \frac{dW}{dt} \right|}. \quad (32.8)$$

Pro dané  $Q$  nám tento vztah říká, jak rychle se energie oscilací vytratí, neboť  $dW/dt = -(\omega/Q)W$  a řešením je  $W = W_0 e^{-\omega t/Q}$ , kde  $W_0$  je počáteční energie (v čase  $t=0$ ).

Abychom našli  $Q$  zářiče, vraťme se opět k (32.8) a pro  $dW/dt$  použijme vztah (32.6).

Co nyní vezmeme za energii oscilátoru  $W$ ? Kinetická energie oscilátoru je  $1/2 mv^2$  a střední kinetická energie je  $1/4 m\omega^2 x_0^2$ . Pamatujeme si však, že z celkové energie oscilátoru v průměru připadá polovina na kinetickou energii a polovina na potenciální energii, proto náš výsledek zdvojnásobíme a zjistíme, že celková energie oscilátoru je rovna

$$W = \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2. \quad (32.9)$$

Co použijeme jako frekvenci v těchto vztazích? Vezmeme vlastní frekvenci  $\omega_0$ , neboť to je frekvence, kterou z praktického hlediska vyzařuje náš atom a za  $m$  dáme hmotnost elektronu  $m_e$ . Po jednoduchých úpravách dostáváme

$$\frac{1}{Q} = \frac{4\pi e^2}{3\lambda m_e c^2}. \quad (32.10)$$

(Abychom tento vztah viděli lépe v jeho historické podobě, použili jsme naše zkrácené označení  $q_e^2/4\pi\epsilon_0 = e^2$  a zbývající člen  $\omega_0/c$  jsme zapsali jako  $2\pi/\lambda$ .)  $Q$  je bezrozměrná veličina, kombinace  $e^2/m_e c^2$  musí být jen vlastností náboje a hmotnosti elektronu, jeho vnitřní vlastností a musí mít rozměr *délky*. Dostala název *klasický poloměr elektronu*, neboť v prvních atomových modelech snažících se vysvětlit radiační odpor elektronu na základě síly působící jednou částí elektronu na jiné části bylo třeba, aby elektron měl řádově rozměr takové velikosti. Tato veličina však neznamená, že nadále věříme tomu, že elektron skutečně takový poloměr má. Číselná hodnota poloměru je

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (32.11)$$

Pojďme nyní vypočítat  $Q$  pro atom vyzařující světlo – dejme tomu pro atom sodíku. Vlnová délka je pro sodíkový atom rovna přibližně 6 000 angströmů<sup>41)</sup> ve žluté části viditelného světla a je to typická vlnová délka. Platí

$$Q = \frac{3\lambda}{4\pi r_0} \approx 5 \cdot 10^7, \quad (32.12)$$

<sup>41)</sup> Dříve používaná délková jednotka angström  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ . (Pozn. red.)

## NEZÁVISLÉ ZDROJE

takže  $Q$  pro atom je řádově rovno  $10^8$ . Znamená to, že atomový oscilátor bude oscilovat  $10^8$  rádiánů nebo  $10^7$  oscilací než se ztlumí o faktor  $1/e$ . Frekvence světla odpovídající 6 000 angströmům je  $f = c/\lambda$ , což je řádově  $10^{15}$  cyklů za sekundu, takže doba života, tj. čas za který se energie vyzařujícího atomu zmenší o faktor  $1/e$ , je řádově  $10^{-8}$  s. Volně vyzařující atomy září za normálních okolností asi tak dlouho. Platí to pro atomy nacházející se v prázdném prostoru, kde nejsou nijak rušeny. Je-li elektron v pevné látce, kde se musí srážet s jinými atomy nebo elektrony, přistoupí ještě další síly odporu a tlumení je jiné.

Efektivní odpor  $\gamma$  v zákoně pro útlum oscilátoru můžeme najít ze vztahu  $1/Q = \gamma/\omega_0$  a víme, že velikost  $\gamma$  určuje, jaká bude šířka rezonanční křivky (obr. 23.2). Tak jsme právě vypočetli *šířku spektrálních čar* pro volně zářící atomy! Jestliže  $\lambda = 2\pi c/\omega$ , pak máme

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c\Delta\omega}{\omega^2} = 2\pi c \frac{\gamma}{\omega_0^2} = \frac{2\pi c}{Q\omega_0} = \frac{\lambda}{Q} = \frac{4\pi r_0}{3} = 1,18 \times 10^{-14} \text{ m.} \quad (32.13)$$

### 32.4 NEZÁVISLÉ ZDROJE

Jako přípravu na naše další téma – rozptyl světla, musíme probrat určitou stránku interference, již jsme se zatím nezabývali. Je otázka, kdy interference *nenastane*. Máme-li zdroje  $S_1$  a  $S_2$  s amplitudami  $A_1$  a  $A_2$  a pozorujeme z místa, do něž oba signály přijdou s fázemi  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  (jsou to kombinace vlastních oscilací a časového zpoždění, jež závisí na poloze pozorovatele), tok energie, kterou dostaneme, lze najít složením dvou komplexních vektorů  $A_1$  a  $A_2$  pod úhly  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  (jak jsme dělali v 30. kapitole). Zjistíme, že výsledná energie je úměrná

$$A_R^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (32.14)$$

Kdyby zde nebyl smíšený člen  $2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ , celková energie by se prostě rovnala součtu energií  $A_1^2 + A_2^2$  uvolněných každým zdrojem zvlášť, což je výsledek, který obvykle očekáváme. Takže výsledná intenzita světla, přicházejícího ze dvou zdrojů, je rovna součtu intenzit obou světél. Máme-li smíšený člen, výsledek není roven takovému součtu, neboť je zde ještě interference. V případě, že tento člen se dá zanedbat, můžeme říct, že se interference ztratila. Je jasné, že v přírodě je vždy přítomná, jen my jí nemusíme být schopni postřehnout.

Podívejme se na některé příklady. Nejprve předpokládejme, že máme dva zdroje vzdálené 7 000 000 000 vlnových délek, což není nemožné. Je pravda, že pak fázový rozdíl nabývá v daném směru nějakou konkrétní hodnotu. Ale když se posuneme jen o vlásek v jednom směru, několik vlnových délek, což je zanedbatelná vzdálenost (už jen naše oko má takový otvor, že středuje účinky ve velmi velké oblasti ve srovnání s jednou vlnovou délkou), relativní fáze se změní a funkce kosinus se změní velmi prudce. Vezmeme-li průměrnou intenzitu malé oblasti, při malém pohybu se kosinus střídavě mění na kladný a záporný a v průměru dává nulovou hodnotu.

Středujeme-li tedy přes oblasti, kde se fáze mění velmi prudce v závislosti na poloze, nedostáváme interference.

Další příklad. Předpokládejme, že našimi dvěma zdroji jsou dva nezávislé zdroje rádiových vln – ne jeden oscilátor se dvěma anténami, což by zabezpečovalo, že fáze jsou stále stejné, ale dva nezávislé zdroje. Dále nechť tyto zdroje nejsou naladěny *přesně* na tutéž frekvenci (je velmi těžké je vyladit na stejnou frekvenci, aniž by byly vzájemně propojeny). V tomto případě mluvíme o dvou *nezávislých zdrojích*. Protože frekvence si nejsou přesně rovny, i když vlny byly

zpočátku ve fázi, jedna trochu předběhne druhou a brzy už nebudou ve fázi. Tento proces stále pokračuje, až se vlny opět dostanou do fáze. Takže fázový rozdíl mezi zdroji se postupně mění v závislosti na čase. Není-li však naše pozorování natolik přesné, abychom mohli tyto rychlé časové změny pozorovat a středujeme-li přes mnohem delší čas přestože se intenzita zvětšuje a zmenšuje jako při rázech zvukových vln, interferenční člen v průměru opět vymizí.

Proto můžeme říct, že v každém případě, kdy interferenční člen při vystředování vymizí, interferenci nemáme!

Je mnoho knih, v nichž se tvrdí, že dva rozdílné zdroje nikdy neinterferují. To není fyzikální tvrzení, ale pouhé vyjádření stupně citlivosti experimentálního zařízení v době, kdy byla kniha napsána. Ve světelném zdroji září nejprve jeden atom, pak druhý atd. a právě jsme viděli, že atom září spojitě jen asi  $10^{-8}$  sekundy. Po tomto čase září další atom, pak zase další atd. takže fáze mohou být skutečně stejné jen  $10^{-8}$  sekundy. Proto, když středujeme přes mnohem delší čas než  $10^{-8}$  sekundy, nevidíme interferenci od dvou nezávislých zdrojů, neboť jejich fáze se nemohou udržet déle než  $10^{-8}$  sekundy. S fotobuňkami lze provést velmi rychlou detekci a ukázat, že existuje interference, která kolísá v závislosti na čase po dobu asi  $10^{-8}$  sekundy. Většina detekčních zařízení neregistruje tak krátké časové intervaly, a proto žádnou interferenci nezaznamenává. Lidské oko, které vystředovává děje v intervalu jedné desetiny sekundy, nemá určitě žádnou možnost vidět interferenci mezi dvěma obyčejnými zdroji.

Nedávno se podařilo sestrojit takové zdroje světla, jež se vypořádávají s tímto jevem tak, že nutí všechny atomy zářit současně. Zařízení, jímž toho lze dosáhnout, je velmi komplikované a můžeme ho pochopit pouze pomocí kvantové mechaniky. Nazývá se *laser*. Pomocí laseru lze sestrojit zdroj, jehož interferenční čas, po který je fáze konstantní, je mnohem delší než  $10^{-8}$  sekundy. Může být řádově setina, desetina nebo dokonce jedna sekunda, takže frekvenci dvou různých laserů lze zachytit pomocí obyčejných fotobuňek. Snadno lze zaznamenat pulzování rázů mezi dvěma laserovými zdroji. Bezpochyby se brzy někomu podaří se dvěma zdroji světlicmi na stěnu ukázat tak pomalé rázy, že bude vidět, jak se stěna osvětluje a tmavne!

Další propad, kdy se interferenční člen v průměru ruší, nastává tehdy, máme-li ne dva ale mnoho zdrojů. V takovém případě napíšeme výraz pro  $A_R^2$  jako součet velkého počtu amplitud (komplexních čísel) umocněných na druhou a smíšených členů mezi každým párem amplitud. Když smíšené členy v průměru vymizí, interferenční jev nenastane. Může se stát, že zdroje jsou umístěny tak náhodně, že i když je fázový rozdíl mezi  $A_2$  a  $A_3$  určitý, silně se liší od fázového rozdílu  $A_1$  a  $A_2$  atd. Takže budeme mít mnoho kosinových členů, kladných i záporných, jež se navzájem v průměru ruší.

Situace je tedy taková, že v mnoha případech interferenci nepozorujeme, ale vidíme pouze celkovou intenzitu rovnající se součtu všech intenzit.

### 32.5 ROZPTYL SVĚTLA

Naše předcházející téma nás vede k jevu, jenž nastává ve vzduchu jako důsledek nepravidelných poloh atomů. Při probírání indexu lomu jsme viděli, že dopadající světlo způsobí vyzařování atomů. Elektrické pole dopadajícího paprsku rozkmitá elektrony a ty začnou v důsledku svého zrychlení vyzařovat. Rozptýlené světlo se zkombinuje s původním a ve stejném směru jako bylo původní světlo vznikne paprsek s odlišnou fází, což způsobuje vznik indexu lomu.

Co však můžeme říct o intenzitě světla, jež je vyzařováno v jiných směrech? Obyčejně, jsou-li atomy hezky pravidelně geometricky uspořádány, lze snadno ukázat, že v ostatních směrech nedostáváme nic, neboť sčítáme mnoho vektorů, jejichž fáze se stále mění, a výsledek bude

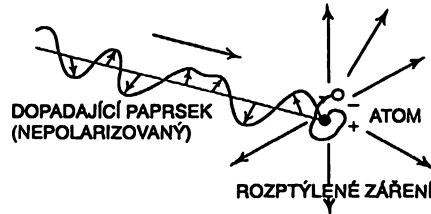
## ROZPTYL SVĚTLA

nulový. Jsou-li však atomy rozmístěny *náhodně*, výsledná intenzita v každém směru je rovna součtu intenzit rozptýlených každým atomem, jak jsme o tom právě hovořili. Navíc, v plynu se atomy neustále pohybují, takže relativní fáze dvou atomů se mění v čase, a proto každý kosinový člen v průměru vymizí. Ke zjištění, kolik světla se rozptýlí v plynu do určitého směru, stačí zjistit, kolik se ho rozptýlí od jednoho atomu a intenzitu záření vynásobit počtem atomů.

Již dříve jsme poznamenali, že takový rozptyl světla je příčinou modré barvy oblohy. Sluneční světlo prochází vzduchem, a když se podíváme stranou od Slunce – řekněme kolmo k paprskům – vidíme modré světlo. Nyní musíme vypočítat množství světla, které vidíme a zjistit, proč je modré.

Je-li v bodě, kde se nachází atom, intenzita elektrického pole dopadajícího světla  $E = E_0 e^{i\omega t}$ , víme, že elektron v atomu začne pod jejím vlivem kmitat (obr. 32.2). Z rovnice (23.8) máme pro amplitudu

$$\hat{x} = \frac{q_e \hat{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma)}. \quad (32.15)$$



Obr. 32.2 Svazek záření dopadá na atom a uvádí do pohybu náboje (elektrony), které jsou v něm. Pohybující se elektrony vzápětí vyzařují v různých směrech

Mohli bychom zahrnout tlumení i možnost, že se atom chová jako několik oscilátorů s různou frekvencí a sčítat přes tyto frekvence, ale pro jednoduchost si vezměme jen jeden oscilátor a tlumení zanedbejme. Potom výsledná reakce na vnější elektrické pole, kterou jsme brali v úvahu již při výpočtu indexu lomu, je prostě

$$\hat{x} = \frac{q_e \hat{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (32.16)$$

Použitím vztahu (32.2) a zrychlení odpovídajícímu tomuto  $\hat{x}$  bychom nyní snadno vypočítali intenzitu světla, které atom emituje v různých směrech.

Místo toho, abychom ušetřili čas, vypočítáme prostě celkové množství světla rozptýleného do *všech* směrů. Celkové množství světelné energie rozptýlené jedním atomem do všech směrů za sekundu je samozřejmě dáno rovnicí (32.6). Takže po dosazení a úpravě máme pro celkový rozptýlený výkon vyzařovaný do všech směrů

$$\begin{aligned} P &= \frac{q_e^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \frac{q_e^2 E_0^2}{m_e^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \cdot \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{q_e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m_e^2 c^4} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} = \\ &= \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \cdot \frac{8\pi r_0^2}{3} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \end{aligned} \quad (32.17)$$

## RADIČNÍ ÚTLUM. ROZPTYL SVĚTLA

Výsledek jsme napsali v tomto tvaru, neboť takto si ho lze snadno zapamatovat: Za prvé, celková rozptýlená energie je úměrná druhé mocnině původního pole. Co to znamená? Druhá mocnina intenzity dopadajícího pole je samozřejmě úměrná energii dopadající za sekundu. Skutečně, množství energie dopadající na metr čtverečný za sekundu je rovno  $\epsilon_0 c$  násobené střední hodnotou druhé mocniny intenzity elektrického pole  $\langle E^2 \rangle$  a je-li  $E_0$  maximální hodnota  $E$ ,  $\langle E^2 \rangle = 1/2 E_0^2$ . Znamená to, že celková rozptýlená energie je úměrná energii dopadající na metr čtverečný. Čím je sluneční světlo osvětlující oblohu jasnější, tím bude obloha jasnější.

Dále, jaká část dopadajícího světla se rozptýlí? Představme si svazek paprsků a „terč“ (ne skutečný, hmotný terč, protože ten by způsobil difrakci světla apod., jde nám jen o myšlenou plochu, nakreslenou někde v prostoru) plochy  $\sigma$ . Celková energie, která projde plochou  $\sigma$ , je, za daných okolností, úměrná dopadající intenzitě záření i ploše  $\sigma$  a bude

$$P = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \sigma. \quad (32.18)$$

Nyní přistoupíme k našemu problému trochu jinak: řekneme, že atom rozptyluje všechnu energii, jež dopadá na určitou plochu, a určíme velikost této plochy. Naše odpověď pak nebude záviset na intenzitě dopadajícího záření; bude to poměr energie rozptýlené k energii dopadající na jeden metr čtverečný. Jinými slovy poměr

$$\frac{\text{celková energie rozptýlená za sekundu}}{\text{energie dopadající na metr čtverečný za sekundu}} \text{ se rovná } \textit{ploše}.$$

Tato plocha má ten význam, že když se všechna energie, která na ni dopadá, rozptýlí do všech směrů, udává podíl energie, jež se rozptýlí na jednom atomu.

Této ploše se říká *účinný průřez rozptylu*. Účinný průřez se běžně používá při popisu jevů, kde nějaká veličina závisí na intenzitě dopadajícího svazku. V těchto případech se pravděpodobnost daného jevu popisuje tak, že se určí efektivní plocha, jež by byla zapotřebí k zachycení odpovídající části svazku. To však neznamená, že oscilátor *má* takovou plochu! Kdyby tam nebylo nic jiného než volně kmitající elektrony, fyzikálně by to neodpovídalo žádné skutečné ploše. Je to jen způsob, jak lze vyjádřit odpověď na některé problémy; říká nám, na jak velkou plochu by musel dopadat původní svazek, abychom dostali příslušné množství vycházející energie. V našem případě to je

$$\sigma_s = \frac{8\pi r_0^2}{3} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (32.19)$$

(kde index  $s$  znamená rozptyl).

Podívejme se na některé případy. Nejdříve přejdeme k velmi malé vlastní frekvenci  $\omega_0$  nebo ke zcela volným elektronům, pro které  $\omega_0 = 0$ . Úhlová frekvence  $\omega$  se pak vykrátí a účinný průřez je konstantní. Tato nízkofrekvenční limita čili účinný průřez volných elektronů je znám jako *účinný průřez Thomsonova rozptylu*. Je to plocha, čtverec o délce strany rovné přibližně  $10^{-15}$  metru, tj.  $10^{-30}$  čtverečného metru, což je dost malá plocha!

Na druhé straně, když si vezmeme světlo ve vzduchu, pamatujeme si, že vlastní frekvence oscilátorů pro vzduch jsou vyšší než frekvence viditelného světla. Znamená to, že v prvním přiblížení můžeme zanedbat  $\omega^2$  ve jmenovateli a vidíme, že rozptyl je úměrný čtvrté mocnině

## ROZPTYL SVĚTLA

frekvence. Proto se světlo dejme tomu, dvakrát vyšší frekvence rozptyluje šestnáctkrát intenzivněji, což je dost velký rozdíl. Modré světlo, jehož frekvence je přibližně dvakrát vyšší než frekvence červeného světla, se rozptyluje šestnáctkrát intenzivněji než červené světlo, a to už je značný rozdíl. Proto, když se podíváme na nebe za jasného počasí, vypadá tak nádherně modře!

K těmto výsledkům je třeba dodat několik poznámek. Jedna zajímavá otázka zní: Proč vůbec vidíme *mraky*? Odkud se vzaly? Každý ví, že to je kondenzovaná vodní pára, ale vodní pára je v atmosféře už i *předtím* než se kondenzuje, tak proč ji nevidíme už tehdy? Že ji vidíme, když je zkondenzovaná, to je celkem zřejmé. Předtím tam mraky nebyly a najednou tam *jsou*, takže záhada, odkud se berou mraky, není dětskou otázkou jako: „Tatínku, kde se vzala voda?“, ale je třeba jí pořádně vysvětlit.

Právě jsme si vysvětlili, že každý atom rozptyluje světlo, takže je jasné, že vodní pára ho bude rozptylovat také. Záhadou je, proč voda, když je zkondenzovaná do mraků, rozptyluje takové obrovské množství světla?

Zamysleme se nad tím, co se stane, když místo jednoho atomu budeme mít seskupení atomů, řekněme dvou, jež jsou velmi blízko ve srovnání s vlnovou délkou světla. Vzpomeňme si, že atomy mají průměr přibližně jeden angström, zatímco vlnová délka světla je asi 5 000 angströmů, takže, když se vytvoří shluk několika atomů, mohou být ve srovnání s vlnovou délkou světla velmi blízko sebe. Když na ně začne působit elektrické pole, *oba atomy se začnou pohybovat společně*. Intenzita rozptýleného elektrického pole bude pak dána součtem intenzit obou polí ve fázi, tj. amplituda bude dvojnásobná ve srovnání s jediným atomem a energie, jež se rozptýlí, bude proto ne dvakrát, ale čtyřikrát větší než s jedním atomem! Takže shluky atomů vyzařují nebo rozptylují více energie než jednotlivé atomy. Náš argument o nezávislosti fází je založen na předpokladu, že mezi dvěma atomy je skutečně velký fázový rozdíl, což je pravda, jen když jsou od sebe vzdáleny několik vlnových délek a nepravidelně uspořádány nebo když se pohybují. Je-li však jeden atom těsně vedle druhého, nevyhnutně rozptylují světlo ve fázi a koherentně interferují, což způsobuje růst rozptylu.

Máme-li ve shluku  $N$  atomů, malinkou kapičku vody, každý z nich bude buzen elektrickým polem stejně jako předtím (vzájemný účinek atomů můžeme zanedbat, jde nám jen o princip) i amplituda rozptylu bude od každého stejná, takže celkové rozptýlené pole bude  $N$ -krát silnější. *Intenzita rozptýleného světla bude proto  $N^2$ -krát větší*. Snad bychom očekávali, že to bude pouze  $N$ -krát víc ve srovnání s tím, když jsou atomy prostorově rozptýleny, ale ono je to  $N^2$ -krát víc. Lze tedy říct, že pro shluk  $N$  molekul vody je rozptyl  $N^2$ -krát silnější než je rozptyl na jednotlivých atomech. Jak se voda sráží, rozptyl narůstá. Narůstá až *do nekonečna*? Ne! Kdy začne selhávat tato analýza? Pro jak velký shluk atomů již nebude platit taková argumentace? Odpověď zní: Když se vodní kapka zvětší natolik, že její rozměry jsou přibližně rovny vlnové délce. Pak už všechny atomy nejsou ve fázi, protože jsou od sebe příliš vzdálené. Zvětšuje-li se velikost kapek, rozptyl stále roste, dokud kapka nenabyde rozměru vlnové délky. Pak se rozptyl s narůstáním kapky už zdaleka tak rychle nezvětšuje. Navíc se ztratí modrá barva, protože než se dosáhne této limity pro velké vlnové délky, kapky mohou být již příliš velké pro malé vlnové délky. I když se krátké vlny na atomu rozptylují víc než dlouhé vlny, jakmile jsou všechny kapky větší než vlnová délka, dochází k většímu zvýraznění červeného konce spektra než modrého konce, takže barva se posune od modré směrem k červené.

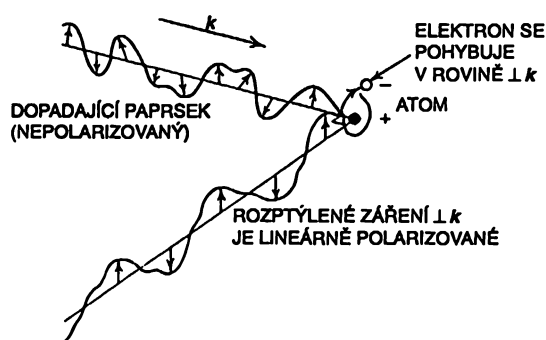
Ukážeme si to pokusem. Můžeme vytvořit částice, jež jsou na začátku velmi malé a pak se zvětšují. Použijeme roztok thiosíranu sodného s kyselinou sírovou, v němž se vylučují drobná zrnka síry. Zrníčka síry jsou na začátku velmi malá a rozptylové světlo je trochu namodralé. Dalším vylučováním rozptyl zintenzivní, a když částice narůstají, zbarví se do běla. Navíc světlo,



## RADIAČNÍ ÚTLUM. ROZPTYL SVĚTLA

které pronikne roztokem, bude ochuzeno o modrou složku. To je také důvod, proč je zapadající slunce zbarveno červeně. Světlo, jež přichází do oka silnou vrstvou vzduchu, ztratilo rozptylem mnoho ze své modré složky, takže je žlutě-červené.

Je ještě další důležitá věc, která už vlastně patří do následující kapitoly o polarizaci, ale je tak zajímavá, že na ni upozorníme již nyní. Jde o to, že elektrické pole rozptýleného světla má tendenci kmitat v určitém směru. Elektrické pole dopadajícího světla osciluje nějakým způsobem a jím buzený oscilátor se pohybuje v též směru. Díváme-li se pod pravým úhlem k paprsku, uvidíme *polarizované světlo*, to jest světlo, v němž intenzita elektrického pole má jen jeden směr. Atomy mohou obecně kmitat v libovolném směru pod pravým úhlem ke směru paprsku, ale když kmitají ve směru přímo k nám nebo od nás, kmity nevidíme. Proto, když se elektrické pole dopadajícího světla mění a kmitá v libovolném směru, je nepolarizované, ale světlo rozptýlené pod úhlem  $90^\circ$  k paprsku, kmitá jen v jednom směru (viz obr. 32.3).



Obr. 32.3 Znárodnění vzniku polarizace záření rozptýleného pod pravým úhlem k původnímu svazku

Existuje látka nazvaná polaroid, jež má tu vlastnost, že když jí prochází světlo, projde jen ta část elektrického pole, jež má směr podél jedné dané osy. Můžeme ji použít k testování polarizace a opravdu zjistíme, že světlo rozptýlené roztokem thiosíranu sodného je silně polarizované.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 32.1 ■ Ukažte, že má-li pohybová rovnice nabitého oscilátoru tvar

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x - \frac{2e^2}{3c^2 m} \cdot \frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{F(t)}{m},$$

pak člen obsahující třetí derivaci a odpovídající tzv. radiační síle tření správně popisuje rychlost ztráty energie zářením (radiační odpor) pro libovolnou frekvenci. Necht'  $F(t) = A \cos \omega t$ . Najděte práci, kterou vykonává radiační síla tření.

- 32.2 ■ Svazek světla prochází oblastí, obsahující  $N$  rozptylových center v jednotce objemu. Srážkový průřez rozptylu na každém z nich je roven  $\sigma$ . Ukažte, že intenzita světla závisí na prošlé vzdálenosti  $x$  vztahem  $I = I_0 e^{-N\sigma x}$ .

- 32.3 ■ Použijte výraz pro srážkový průřez  $\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$

a vzorec pro index lomu plynu a ukažte, že veličina  $N\sigma$  může být zapsána ve tvaru

$$N\sigma = \frac{2}{3\pi} \frac{(n-1)^2}{N} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^4.$$

(Tímto způsobem byla poprvé vypočítána Avogadrova konstanta z pokusů s rozptýleným světlem.)

- 32.4 ■ Jaké množství modrého světla ( $\lambda = 450$  nm) vyzařovaného Sluncem prochází atmosférou a) je-li Slunce v zenitu, b) je-li Slunce  $10^\circ$  nad obzorem?

- 32.5 ■ Když byly objeveny nové paprsky (rentgenové paprsky neboli paprsky X, s tehdy ještě neznámými a udivujícími vlastnostmi), byla vyslovena domněnka, že jsou to, podobně jako světlo, příčné elektromagnetické vlny. Pak bylo zpozorováno, že se tyto paprsky rozptylují na elektronech v látce. Jak by bylo možné dokázat, že jsou to skutečně příčné vlny? Lze rentgenové paprsky polarizovat?

- 32.6 ■ Vnitřní sluneční koróna (nazývaná  $K$  koróna) je tvořena slunečním světlem rozptýleným na volných elektronech. Zdánlivý jas této  $K$  koróny ve vzdálenosti jednoho slunečního poloměru od okraje slunečního disku představuje  $10^{-8}$  jasu slunečního (na jednotku plochy). Určete počet volných elektronů v  $1 \text{ cm}^3$  v prostoru v blízkosti Slunce.

- 32.7 ■ Ukažte, že veličina  $(\epsilon_0 c)^{-1}$  má rozměr odporu a odhadněte jeho číselnou hodnotu.

- 32.8 ■ Mezihvězdný prostor je zaplněn oblaky tvořenými nepatrnými zrnky prachu skládajících se z uhlíku, ledu a velmi malého množství jiných prvků. Jaká musí být nejmenší hmotnost takových zrnků připadajících na jednotku plochy (v  $\text{g cm}^{-2}$ ), aby zhoršila viditelnost námi pozorovaných hvězd řekněme 100krát (o pět hvězdných veličin). Nezapomeňte, že světlo se na zrnkách prachu může nejen rozptylovat, ale může být jimi i pohlcováno.

- 32.9 ■ Krátký přímý úsek drátu rozptyluje elektromagnetické vlny vyzařované radiolokátorem. Elektrické pole dopadající vlny interaguje s pohybujícími se elektrony v drátu a nastává rozptyl. Je-li délka drátu mnohem menší než je vlnová délka elektromagnetických vln, můžeme předpokládat, že střední posunutí elektronů podél osy drátu je úměrné složce intenzity elektrického pole  $E_1$  vlny rovnoběžné s drátem. Je-li v drátu  $N$  elektronů a označíme-li jejich střední posunutí  $d$ , platí  $d = \chi E_1$ . Máme zjistit, v závislosti na  $\chi$  a  $N$ , a) čemu je roven srážkový průřez rozptylu drátu, b) jak závisí srážkový průřez rozptylu na orientaci drátu.

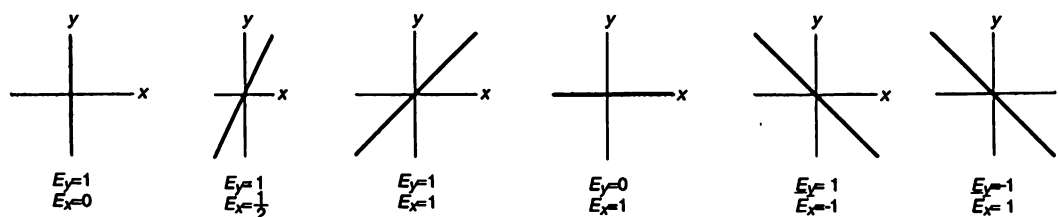
# 33

# Polarizace

- 33.1 ELEKTRICKÝ VEKTOR SVĚTLA
- 33.2 POLARIZACE ROZPTÝLENÉHO SVĚTLA
- 33.3 DVOJLOM
- 33.4 POLARIZÁTORY
- 33.5 OPTICKÁ AKTIVITA
- 33.6 INTENZITA ODRAŽENÉHO SVĚTLA
- 33.7 ANOMÁLNÍ LOM SVĚTLA

## 33.1 ELEKTRICKÝ VEKTOR SVĚTLA

V této kapitole se budeme zabývat jevy, jež souvisí s tím, že intenzita elektrického pole popisujícího světlo je vektor. V předcházejících kapitolách jsme se nezajímali o směr oscilací intenzity elektrického pole; pouze jsme poznamenali, že vektor intenzity elektrického pole leží v rovině kolmé ke směru šíření světla. Konkrétní směr, který v této rovině má, nás už nezajímá. Nyní si probereme jevy, jejichž hlavním rysem je právě konkrétní směr oscilací elektrického pole.



Obr. 33.1 Skládání kmitů ve směru os  $x$  a  $y$  ve fázi

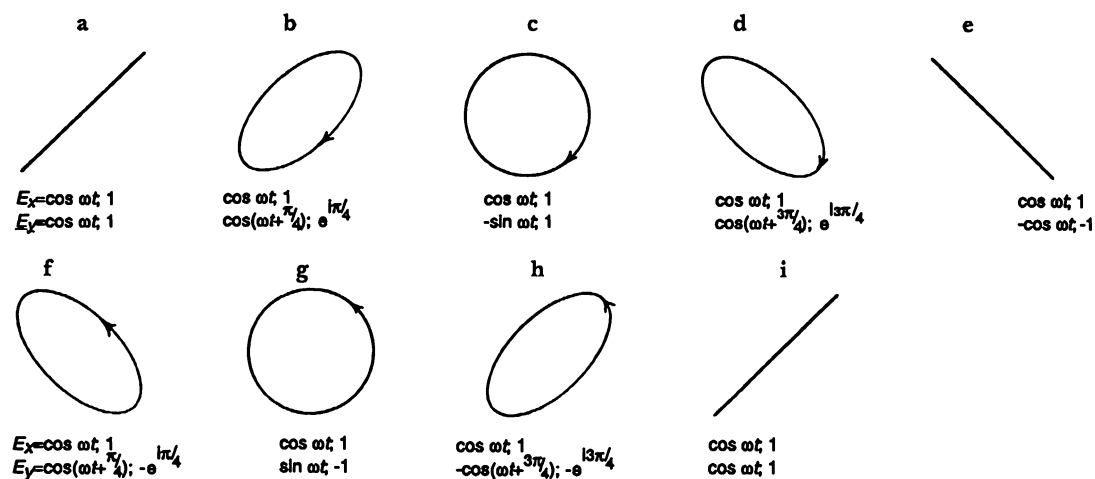
V ideálním monochromatickém světle musí elektrické pole oscilovat s přesnou frekvencí, ale protože složka  $x$  a složka  $y$  oscilují nezávisle, musíme se podívat, co vznikne skládáním dvou nezávislých vzájemně kolmých oscilací. Jaké pole vznikne, kmitají-li složka  $x$  i  $y$  se stejnou frekvencí? Probíhá-li kmitání ve směru osy  $x$  a k němu se přidá další kmitavý pohyb se stejnou fází ve směru osy  $y$ , budou výsledné kmity probíhat v novém směru v rovině  $xy$ . Na obr. 33.1 jsou

## ELEKTRICKÝ VEKTOR SVĚTLA

znázorněny superpozice pro různé amplitudy kmitů  $x$  a  $y$ . Výsledky znázorněné na *obr. 33.1* nejsou jediné možné. Ve všech těchto případech jsme předpokládali, že kmity  $x$  a  $y$  jsou ve fázi, ale nemusí tomu tak být. Může se však stát, že kmity  $x$  a  $y$  nejsou ve fázi.

Nejsou-li kmity  $x$  a  $y$  ve fázi, opisuje konec vektoru intenzity elektrického pole elipsu. Lze to znázornit známým způsobem. Zavěsíme-li kuličku na dlouhé vlákno tak, že se může volně kývat v horizontální rovině, bude vykonávat sinusoidální oscilace. Když umístíme počátek souřadnic  $x$  a  $y$  v klidové poloze kuličky, může kulička kmitat ve směru  $x$  nebo ve směru  $y$  se stejnou frekvencí kyvadla. Výběrem vhodné počáteční polohy a rychlosti můžeme docílit toho, že kulička kmitá buď podél osy  $x$  nebo podél osy  $y$  nebo podél libovolné přímky v rovině  $xy$  procházející počátkem. Tyto pohyby kuličky jsou analogické s oscilacemi vektoru intenzity elektrického pole znázorněnými na *obr. 33.1*. Protože kmity  $x$  a  $y$  nabývají současně svá maxima a minima, jsou obě oscilace v každém okamžiku ve fázi. Víme však, že nejobecnější pohyb kuličky je pohyb po elipse; to odpovídá oscilacím, kdy pohyby  $x$  a  $y$  nejsou ve fázi. Superpozice kmitů  $x$  a  $y$ , jež nejsou ve fázi, je znázorněna pro různé úhly mezi fázemi těchto kmitů na *obr. 33.2*. Obecný výsledek je takový, že vektor intenzity elektrického pole opisuje elipsu. Pohyb po přímce je zvláštním případem pohybu po elipse, jež odpovídá nulovému fázovému rozdílu (nebo celočíselnému násobku  $\pi$ ). Pohyb po kružnici odpovídá stejným amplitudám s fázovým rozdílem  $90^\circ$  (nebo lichým celočíselným násobkům  $\pi/2$ ).

Na *obr. 33.2* jsme označili vektory intenzity elektrického pole ve směrech  $x$  a  $y$  komplexními čísly, jež jsou vhodným způsobem pro vyjádření fázového rozdílu. Nezaměňujme přitom v tomto zápisu reálnou a imaginární složku komplexního elektrického vektoru se složkami pole  $x$  a  $y$ . Složky  $x$  a  $y$  znázorněné na *obr. 33.1* a *obr. 33.2* jsou skutečná elektrická pole, která můžeme měřit. Reálná a imaginární složka komplexního vektoru intenzity elektrického pole jsou pouze vhodným matematickým vyjádřením a nemají fyzikální význam.



Obr. 33.2 Skládání kmitů ve směru os  $x$  a  $y$  se stejnými amplitudami, ale s různými relativními fázemi. Složky  $E_x$  a  $E_y$  jsou vyjádřeny v reálném i komplexním tvaru

Nyní trochu terminologie. Říkáme, že světlo je *lineárně polarizované* (někdy též rovinně polarizované), osciluje-li vektor intenzity elektrického pole podél přímky. Obrázek 33.1 znázorňuje lineární polarizaci. Pohybuje-li se konec vektoru intenzity elektrického pole po elipse, je

## POLARIZACE

světlo *elipticky polarizované*. Pohybuje-li se konec vektoru intenzity elektrického pole po kružnici, máme *kruhovou polarizaci*. Letí-li světlo přímo proti nám a konec vektoru elektrického pole se otáčí proti směru hodinových ručiček, jde o pravotočivou polarizaci. Obrázek 33.2g znázorňuje pravotočivou kruhovou polarizaci a obrázek 33.2c znázorňuje levotočivou kruhovou polarizaci. V obou případech světlo vychází kolmo ven z papíru. Naše konvence označování levotočivé a pravotočivé kruhové polarizace je konzistentní s označováním, které se dnes používá ve fyzice pro všechny další částice, jež projevují polarizaci (například elektrony). V některých knihách o optice se však používá opačná konvence, takže je třeba jisté opatrnosti.

Uvažovali jsme světlo polarizované lineárně, kruhově a elipticky, čímž jsme vyčerpali vše kromě případu *nepolarizovaného* světla. Jak může být světlo nepolarizované, když víme, že musí kmitat po některé elipse? Není-li světlo dokonale monochromatické nebo když poměr fází  $x$  a  $y$  není dokonale ustálený, takže vektor intenzity elektrického pole zpočátku kmitá v jednom směru a pak v druhém, tehdy se polarizace neustále mění. Vzpomeňme si, že jeden atom vyzařuje po dobu  $10^{-8}$  sekundy, a vyzařuje-li jeden atom světlo s určitou polarizací a pak další atom vyzařuje zase s jinou polarizací, polarizace se bude měnit každých  $10^{-8}$  sekundy. Mění-li se polarizace rychleji, než jsme schopni ji detekovat, nazýváme světlo nepolarizovaným, neboť všechny jevy polarizace se v průměru ruší. U nepolarizovaného světla se žádný polarizační interferenční jev neprojevuje. Jak je však vidět z definice, je světlo nepolarizované jen tehdy, když my nejsme schopni zjistit, zda je polarizované nebo ne.

### 33.2 POLARIZACE ROZPTÝLENÉHO SVĚTLA

První příklad jevu polarizace, který jsme uvedli, je rozptyl světla. Představme si svazek světla, například slunečního, dopadající na vrstvu vzduchu. Elektrické pole způsobí oscilace nábojů ve vzduchu a jejich pohyb vyvolá vyzařování světla s největší intenzitou v rovině kolmé ke směru oscilací nábojů. Světelný paprsek je nepolarizovaný, takže směr polarizace se neustále mění a také se neustále mění směr oscilací nábojů ve vzduchu. Všimneme-li si světla rozptýleného pod úhlem  $90^\circ$ , vysílají kmitající náboje světlo k pozorovateli pouze tehdy, jsou-li kmitky kolmé ke směru, jímž se dívá pozorovatel a tehdy bude světlo polarizované podél směru kmitů. Takže rozptyl je jedním z příkladů, jak lze získat polarizaci.

### 33.3 DVOJLOM

Dalším zajímavým jevem souvisejícím s polarizací je fakt, že existují látky, jež mají jiný index lomu pro světlo lineárně polarizované v jednom směru a jiný pro světlo lineárně polarizované v druhém směru. Představme si, že bychom měli látku skládající se z dlouhých, nesférických molekul, jejichž podélná osa by byla značně delší než příčná, a jež by byly v látce uloženy rovnoběžně. Co se stane, prochází-li oscilující elektrické pole takovou látkou? Předpokládejme, že vzhledem ke struktuře molekul se elektrony, které jsou v látce, rozkmitají pod vlivem elektrického pole snáze ve směru podélné osy molekul než ve směru příčném. Pak můžeme očekávat rozdílné chování látky vůči světlu polarizovanému podél směru molekul a světlu polarizovanému příčně. Nazvěme směr podélné osy molekul *optickou osou*. Pro světlo polarizované ve směru optické osy je jiný index lomu než pro světlo polarizované pod pravým úhlem k optické ose. Taková látka se nazývá *dvojlomnou*, tj. má dva indexy lomu, závisící na směru polarizace uvnitř látky. Jaká látka může být dvojlomná? V dvojlomné látce musí být nějakým způsobem seřazeny

nesymetrické molekuly. Krystal, který má krychlovou symetrii, určitě nemůže být dvojlomný, ale dlouhé krystaly v podobě jehlic nepochybně obsahují nesymetrické molekuly a lze u nich pozorovat výrazný dvojlom.

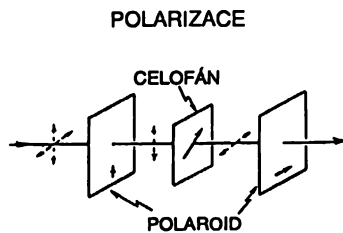
Podívejme se, co můžeme očekávat, prosvítíme-li desku z dvojlomné látky polarizovaným světlem. Je-li světlo polarizováno podél optické osy, projde deskou určitou rychlostí; je-li polarizováno kolmo, přenáší se jinou rychlostí. Zajímavá situace nastane, je-li světlo polarizováno pod úhlem  $45^\circ$  k optické ose. Před chvílí jsme si řekli, že polarizace pod úhlem  $45^\circ$  znamená superpozici polarizací  $x$  a  $y$  se stejnou amplitudou a fází, jak je na *obr. 33.2a*. Protože polarizace  $x$  a  $y$  se v látce šíří různou rychlostí, jejich fáze se při průchodu látkou mění nesterjně. Takže, i když jsou oscilace  $x$  a  $y$  na začátku ve fázi, v látce je fázový rozdíl mezi nimi úměrný tloušťce vrstvy. S postupem světla látkou se mění jeho polarizace, jak je znázorněno na sérii obrázků (*obr. 33.2*). Je-li tloušťka desky taková, že mezi polarizacemi  $x$  a  $y$  vznikne fázový rozdíl  $90^\circ$  jako na *obr. 33.2c*, vyjde světlo jako kruhově polarizované. Taková destička se nazývá čtvrtvlnová, protože posune polarizace  $x$  a  $y$  fázově o čtvrtinu periody. Projde-li lineárně polarizované světlo čtvrtvlnovými destičkami, vyjde opět jako lineárně polarizované, ale pod pravým úhlem k původnímu směru, jak je vidět z *obr. 33.2e*.

Tento jev lze snadno znázornit kouskem celofánu. Celofán se skládá z dlouhých vláknitých molekul a není izotropní, neboť vlákna leží většinou v jednom směru. K demonstraci dvojlomu potřebujeme svazek lineárně polarizovaného světla; můžeme ho získat tak, že necháme procházet nepolarizované světlo vrstvou polaroidu. Polaroid (podrobně si ho probereme později) má tu užitečnou vlastnost, že propouští světlo lineárně polarizované podél osy polaroidu, zatímco světlo polarizované ve směru kolmém na osu polaroidu silně absorbuje. Propustíme-li polaroidem nepolarizované světlo, projde jím pouze ta část nepolarizovaného svazku, která osciluje rovnoběžně s osou polaroidu, takže propuštěný svazek je lineárně polarizován. Tato vlastnost polaroidu je vhodná i k detekci směru polarizace lineárně polarizovaného svazku nebo také k určení toho, zda je svazek lineárně polarizován nebo ne. Světlo necháme prostě procházet polaroidem, přičemž jím otáčíme v rovině kolmé ke svazku. Je-li svazek lineárně polarizován, neprojde destičkou polaroidu, pokud je jeho osa kolmá ke směru polarizace. Otočíme-li polaroid o  $90^\circ$ , projde svazek jen málo oslaben. Nezávisí-li intenzita procházeného světla na orientaci polaroidu, znamená to, že svazek není lineárně polarizován.

K demonstraci dvojlomu celofánu použijeme dva polaroidy, jak je znázorněno na *obr. 33.3*. První polaroid nám dává lineárně polarizovaný svazek, jenž prochází celofánem a pak druhým polaroidem, který nám ukáže, jak celofán ovlivnil jím procházející polarizované světlo. Nastavíme-li osy obou polaroidů zpočátku vzájemně kolmo a celofán odstraníme, neprojde druhým polaroidem žádné světlo. Vložíme-li nyní mezi polaroidy celofán a začneme jím otáčet kolem osy svazku, zjistíme, že část světla druhým polaroidem prochází. Existují však dva navzájem kolmé směry orientace celofánu, kdy druhým polaroidem neprojde žádné světlo. Tyto směry, při nichž celofán neovlivní jím procházející lineárně polarizované světlo, musí být rovnoběžné a kolmé na optickou osu celofánu.

Předpokládáme, že při těchto dvou orientacích celofánu má světlo různou rychlost, ale směr jeho polarizace se nezmění. Po pootočení celofánu do střední polohy mezi těmito dvěma směry, jak je ukázáno na *obr. 33.3*, vidíme, že druhým polaroidem prochází jasné světlo.

Shodou okolností má celofán, jenž se běžně používá k balení, tloušťku, která je přibližně rovna polovině vlnové délky pro většinu barev bílého světla. Svírá-li dopadající lineárně polarizované světlo s optickou osou úhel  $45^\circ$ , otočí takový celofán jeho polarizaci o  $90^\circ$  a svazek vyletující z celofánu pak kmitá ve správném směru, aby mohl projít druhým polaroidem.



Obr. 33.3 Experimentální demonstrace dvojlomu celofánu. Vektory intenzity elektrického pole světla jsou znázorněny čárkovaně. Směr propustnosti polaroidů a optická osa celofánu jsou označeny šipkami. Dopadající paprsek není polarizovaný.

Provedeme-li pokus s bílým světlem, bude mít celofán správnou půlvlnovou tloušťku jen pro některou složku bílého světla a vyletující svazek bude mít barvu této složky. Barva světla bude záviset na tloušťce celofánu, jíž světlo prošlo. Tuto tloušťku můžeme snadno měnit jeho nakláněním, takže světlo celofánem prochází šikmo, a tedy podél delší dráhy. S náklonem celofánu se mění barva procházejícího světla. Pomocí celofánu různých tloušťek lze zkonstruovat filtry, které propouštějí různé barvy. Tyto filtry mají zajímavou vlastnost, že jsou-li osy polaroidů na sebe kolmé, propouštějí jednu barvu a jsou-li navzájem rovnoběžné, propouštějí doplňkovou barvu.

Také další využití látek s uspořádanými molekulami má praktický význam. Některé plastické hmoty se skládají z velmi dlouhých, komplikovaných a navzájem propletených molekul. Nechá-li se plastická hmota opatrně ztvrdnout, uspořádají se všechny molekuly tak, že v jednom i druhém směru je jich stejný počet a plastická hmota není příliš dvojlomná. Při tvrdnutí působí na hmotu obyčejně tlaky a mechanická napětí, takže materiál není zcela homogenní. Působíme-li na takovou plastickou hmotu mechanickým napětím, jako bychom tahali celou spleť vláken a ve směru působícího napětí bude uspořádáno více vláken než v jiných směrech. Proto, když se na určité plastické látky působí tlakem, stávají se dvojlomnými, jak můžeme zjistit, když je prosvítíme polarizovaným světlem. Při pozorování světla polaroidem je vidět soustava tmavých a světlých proužků, (barevných, když jsme použili bílé světlo). Při změně mechanického napětí se soustava proužků mění a z jejich tvaru a hustoty lze určit, jak je vzorek namáhán. V inženýrské praxi se tento jev používá k určování namáhání součástí složitých tvarů, jež by bylo možné těžko vypočítat.

Jiná zajímavá možnost jak vyvolat dvojlom je použití tekutých látek. Mějme tekutinu složenou z dlouhých asymetrických molekul, které mají na koncích kladný nebo záporný náboj, takže se chovají jako elektrické dipóly. Za normálních okolností jsou molekuly v důsledku srážek orientovány náhodně a se stejným počtem molekul natočených tím nebo jiným směrem. Přiložíme-li elektrické pole, budou mít molekuly tendenci se uspořádat a v tom okamžiku se tekutina stane dvojlomnou. Se dvěma polaroidy a s průhlednou nádobkou obsahující takovou polarizovanou tekutinu můžeme sestavit zařízení, které bude propouštět světlo jen tehdy, bude-li zapnuto elektrické pole. Získáme tak elektrickou uzávěrku světla, jíž se také říká *Kerrův článek*. Jev, že elektrické pole může v určitých tekutinách vyvolat dvojlom, se nazývá *Kerrův jev*.

### 33.4 POLARIZÁTORY

Zatím jsme uvažovali látky, jež mají rozdílné indexy lomu pro světlo polarizované v různých směrech. Velký praktický význam mají také krystaly a jiné látky, jež mají nejen rozdílné indexy lomu pro světlo polarizované v různých směrech, ale i koeficienty absorpce. Na základě stejných důvodů, které jsme uvedli u dvojlomu, je pochopitelné, že v anizotropní látce se i absorpce může měnit podle směru, v němž jsou náboje nuceny kmitat. Dávno známým příkladem je turmalín a dalším je polaroid. Polaroid je tvořen tenkou vrstvou malých, rovnoběžně uložených krystalků

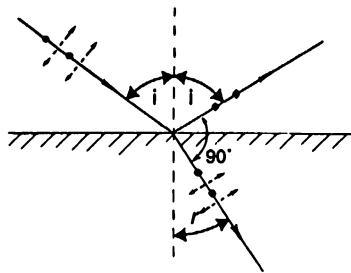
## POLARIZÁTORY

herapathitu (jodosulfátu chininu). Tyto krystaly absorbují světlo oscilující v jednom směru a téměř neabsorbují světlo oscilující v druhém směru.

Předpokládejme, že polaroid osvětlíme světlem lineárně polarizovaným pod úhlem  $\vartheta$  k propustnému směru. Jaká bude intenzita světla, které jde polaroidem? Dopadající světlo lze rozložit na složku kolmou k propustnému směru, úměrnou  $\sin \vartheta$  a na složku rovnoběžnou s propustným směrem, úměrnou  $\cos \vartheta$ . Polaroidem projde jen složka amplitudy  $\cos \vartheta$ , složka  $\sin \vartheta$  se absorbuje. Amplituda světla, jež prošlo polaroidem, je menší než amplituda dopadajícího světla o faktor  $\cos \vartheta$ . Energie, tj. intenzita světla, je úměrná druhé mocnině  $\cos \vartheta$ . Tedy intenzita propuštěného světla, je-li dopadající světlo polarizováno pod úhlem  $\vartheta$ , je úměrná  $\cos^2 \vartheta$ . Intenzita absorbovaného světla je, samozřejmě úměrná  $\sin^2 \vartheta$ .

Zajímavý paradox nastane za takovéto situace: Víme, že dvěma zkříženými polaroidy, jejichž osy svírají pravý úhel, svazek světla neprochází. Vsuneme-li však *mezi* oba polaroidy destičku třetího polaroidu s osou propustnosti pod úhlem  $45^\circ$  k osám zkřížených polaroidů, nějaké světlo projde. Víme, že polaroid světlo nevytváří, ale absorbuje ho. Přesto přidání třetího polaroidu pod úhlem  $45^\circ$  umožní nějakému světlu proletět. Analýzu tohoto jevu ponecháme čtenáři jako cvičení.

Jeden z nejzajímavějších příkladů polarizace nenastává u komplikovaných krystalů nebo složitých látek, ale při jednom z nejnámějších a nejjednodušších jevů – při odrazu světla od povrchu. Vězte nebo ne, světlo odražené od povrchu skla může být polarizované a lze to velmi snadno fyzikálně vysvětlit. Brewster experimentálně zjistil, že světlo odražené od povrchu je úplně polarizované, svírají-li odražený a lomený paprsek v látce pravý úhel. Tato situace je znázorněna na *obr. 33.4*. Je-li dopadající paprsek polarizován v rovině dopadu, odraz vůbec nenastane. Paprsek se odrazí pouze tehdy, je-li dopadající paprsek polarizován kolmo k rovině dopadu. Důvod lze velmi snadno pochopit. V látce je světlo polarizováno příčně a víme, že jsou to právě pohyby nábojů, jež generují vynořující se paprsek, který nazýváme odraženým. Zdrojem tohoto odraženého světla není prostě odraz dopadajícího paprsku. Hlubší analýza tohoto jevu nám říká, že dopadající paprsek rozkmitá v látce náboje, které pak generují odražený paprsek. Z *obr. 33.4* je jasné, že jen kmity kolmé na rovinu papíru mohou vyzařovat ve směru odrazu a proto odražený paprsek bude polarizován kolmo na rovinu dopadu. Je-li dopadající paprsek polarizován v rovině dopadu, žádné světlo se neodrazí.



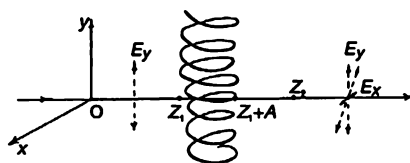
Obr. 33.4 Odraz lineárně polarizovaného světla pod Brewsterovým úhlem. Směr polarizace je naznačen pomocí čárkovaných šipek. Kroužky znázorňují polarizaci kolmou na směr papíru

Tento jev lze jasně ukázat na odrazu lineárně polarizovaného světla dopadajícího na kousek plochého skla. Nastavením skla pod různými úhly dopadu pro polarizovaný paprsek je možné zjistit náhlý pokles intenzity odraženého světla právě při dopadu pod *Brewsterovým úhlem*. Tento pokles je vidět jen tehdy, lež-li rovina polarizace v rovině dopadu. Je-li kolmá k rovině dopadu, pozorujeme obvyklou intenzitu odraženého světla ve všech směrech.



### 33.5 OPTICKÁ AKTIVITA

Další velmi zajímavý polarizační jev můžeme pozorovat v látkách složených z molekul bez zrcadlové symetrie: u molekul ve tvaru vývrtky nebo ve tvaru rukavice či jakéhokoliv jiného tvaru, který se v zrcadle zobrazuje tak, jako když levá rukavice přechází v pravou. Předpokládejme, že všechny molekuly v látce jsou stejného typu, tj. žádná není zrcadlovým obrazem druhé. U takové látky se může projevit zvláštní jev, nazvaný *optická aktivita*, kdy lineárně polarizované světlo, které touto látkou prochází, stáčí směr polarizace kolem osy paprsku.



Obr. 33.5 Tvar molekuly, která nemá zrcadlovou symetrii. Na molekulu dopadá světelný paprsek lineárně polarizovaný ve směru osy  $y$ .

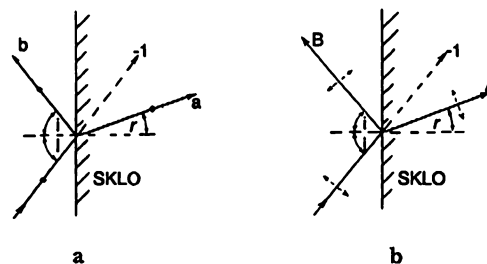
K pochopení optické aktivity jsou potřebné určité výpočty, ale i bez nich můžeme kvalitativně ukázat, jak tento jev vzniká. Vezměme asymetrickou molekulu spirálovitého tvaru, jaká je znázorněna na obr. 33.5. K tomu, aby se u látky projevila optická aktivita, není nutné, aby její molekuly měly tvar vývrtky, ale tento jednoduchý tvar si vezmeme jako typický příklad pro molekuly bez zrcadlové symetrie. Dopadá-li na molekulu světlo lineárně polarizované ve směru osy  $y$ , jeho elektrické pole rozkmitá náboje podél závitů spirály, čímž vytvoří proud ve směru osy  $y$  a náboje budou vyzařovat elektrické pole  $E_y$ , polarizované v ose  $y$ . Jsou-li elektrony při kmitání nuceny se pohybovat podél spirály, musí se pohybovat také ve směru osy  $x$ . Proud procházející podél spirály vtéká v bodě  $z = z_1$  do roviny papíru a v bodě  $z = z_1 + A$  ven z papíru ( $A$  je průměr naší spirálové molekuly). Lze předpokládat, že proud ve směru osy  $x$  nevyvolá žádné výsledné záření, neboť na protilehlých stranách spirály teče opačným směrem. Vezmeme-li však složku pole  $x$  v bodě  $z = z_2$ , vidíme, že pole vyzařené proudem z bodu  $z = z_1 + A$  a pole z bodu  $z = z_1$  se dostanou do bodu  $z_2$  s časovým rozdílem  $A/c$ , takže jejich fázový posun je  $\pi + \omega A/c$ . Protože tento fázový rozdíl není roven přesně  $\pi$ , tato dvě pole se úplně neruší a zůstane nám malá složka  $x$  elektrického pole vytvořeného pohybem elektronů v molekule, zatímco budící elektrické pole mělo jen složku  $y$ . Součet této malé složky  $x$  a velké složky  $y$  vytváří výsledné pole, jež je mírně skloněno vzhledem k ose  $y$ , tj. k původnímu směru polarizace. Jak světlo postupuje látkou, směr jeho polarizace se otáčí kolem osy paprsku. Pomocí několika dalších příkladů a analýzou proudů indukovaných dopadajícím elektrickým polem lze ukázat, že existence optické aktivity a znaménko rotace jsou nezávislé na orientaci molekul.

Běžnou látkou, jež se vyznačuje optickou aktivitou, je glukosa. Lze to snadno ukázat pomocí polaroidové destičky, která vytvoří lineárně polarizovaný paprsek, průhledné nádoby obsahující glukosu a druhé destičky, již se zjistí pootočení směru polarizace při průchodu světla glukosou.

**33.6 INTENZITA ODRAŽENÉHO SVĚTLA**

Nyní se podíváme na koeficient odrazu jako na funkci úhlu. Obrázek 33.6a. znázorňuje dopad světelného paprsku na povrch skla, kde se částečně odráží a částečně láme směrem do skla. Nechť je dopadající paprsek jednotkové amplitudy lineárně polarizovaný kolmo na rovinu papíru. Amplitudu odraženého světla označíme  $b$  a amplitudu lomeného paprsku  $a$ . Samozřejmě, že odražený i lomený paprsek budou lineárně polarizované a vektory intenzit elektrického pole dopadající, budou odražené a lomené vlny navzájem rovnoběžné. Obrázek 33.6b znázorňuje stejnou situaci, ale teď předpokládáme, že dopadající vlna jednotkové amplitudy je polarizována v rovině papíru. Amplitudy odražené a lomené vlny si nyní označme jako  $A$  a  $B$ .

Chceme vypočítat, jak silný je odraz v těchto dvou případech znázorněných na obr. 33.6a a na obr. 33.6b. Už víme, že když je úhel mezi odraženým a lomeným paprskem roven pravému úhlu, na obr. 33.6b nebude odražený paprsek, ale zkusme, zda by se nám nepodařilo získat i kvantitativní řešení problému – exaktní vztah pro  $B$  a  $b$  jako funkce úhlu dopadu  $i$ .



Obr. 33.6 Odraz a lom vlny s jednotkovou amplitudou dopadající na povrch skla.

- Dopadající vlna je lineárně polarizovaná kolmo na rovinu papíru.
- Dopadající vlna je lineárně polarizovaná v směru znázorněném čárkovaným vektorem intenzity elektrického pole.

Princip, který musíme pochopit, je takový: Proudů vyvolané ve skle vytvářejí dvě vlny. První je odražená vlna. Navíc víme, že kdyby ve skle nebyly indukované proudy, dopadající vlna by pokračovala přímočaře do skla. Pamatujme, že výsledné pole je vytvořeno všemi zdroji na světě. Zdroj dopadajícího světla vytváří pole jednotkové amplitudy, jež by se pohybovalo ve skle podél přerušované čáry na obrázcích. Takové pole nepozorujeme, a proto proudy indukované ve skle musí vytvářet pole s amplitudou  $-1$ , jež postupuje podél přerušované čáry. Na základě toho vypočítáme amplitudy odražených vln  $a$  a  $A$ .

Na obrázku 33.6a vidíme, že pole s amplitudou  $b$  vzniká pohybem nábojů ve skle, jež buď pole s amplitudou  $a$  uvnitř skla, a proto je  $b$  úměrné  $a$ . Protože naše dva obrázky jsou úplně stejné až na směr polarizace, mohli bychom předpokládat, že poměr  $B/A$  bude stejný jako poměr  $b/a$ . To neplatí úplně, neboť na obr. 33.6b nejsou směry všech polarizací navzájem rovnoběžné, jak to bylo na obr. 33.6a. Při vytváření  $B$  se uplatní jen složka  $A$ , která je kolmá k  $B$ ,  $A \cos(i + r)$ . Správný vztah úměrnosti je pak

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A \cos(i + r)}. \quad (33.1)$$

## POLARIZACE

Nyní použijeme trik. Víme, že na obou obrázcích 33.6a i b musí elektrické pole ve skle vyvolávat oscilace nábojů, které generují pole s amplitudou  $-1$ , polarizované rovnoběžně s polarizací dopadajícího světla a šířící se podél směru přerušované čáry. Z části b našeho obrázku je zřejmé, že správnou polarizaci má jen ta složka  $A$ , která je kolmá na přerušovanou čáru, zatímco na obr. 33.6a se uplatní celá amplituda  $a$ , neboť polarizace vlny  $a$  je rovnoběžná s polarizací vlny s amplitudou  $-1$ . Proto můžeme napsat

$$\frac{A \cos(i - r)}{a} = \frac{-1}{-1}, \quad (33.2)$$

neboť každá z obou amplitud na levé straně rovnice (33.2) vytváří vlnu s amplitudou  $-1$ . Dělením rovnice (33.1) rovnicí (33.2) dostaneme výsledek

$$\frac{B}{b} = \frac{\cos(i + r)}{\cos(i - r)}, \quad (33.3)$$

který si můžeme ověřit tím, co už víme. Položíme-li  $(i + r) = 90^\circ$ , dává rovnice (33.3)  $B = 0$ . To je podle Brewstera správně, takže zatím naše výsledky, aspoň na první pohled, nejsou špatné.

Pro dopadající vlny jsme předpokládali jednotkové amplitudy, takže koeficient odrazu pro vlny polarizované v rovině dopadu je  $|B|^2/1^2$  a koeficient odrazu pro vlny polarizované kolmo na rovinu dopadu je  $|b|^2/1^2$ . Poměr těchto dvou koeficientů je dán vztahem (33.3).

Nyní uděláme malý zázrak, neboť vypočítáme nejen poměr těchto koeficientů, ale dokonce každý koeficient  $|B|^2$  i  $|b|^2$  samostatně! Ze zákona zachování energie víme, že energie lomeného paprsku musí být rovna rozdílu energie dopadající vlny a energie odražené vlny: v jednom případě  $1 - |B|^2$  a v druhém  $1 - |b|^2$ . Navíc, poměr energií, které vniknou do skla na obr. 33.6b a na obr. 33.6a, je roven poměru druhých mocnin amplitud lomených paprsků, tj.  $|A|^2/|a|^2$ . Někdo se může zeptat, zda opravdu víme, jak se má vypočítat energie, která je ve skle, vždyť kromě energie elektrického pole je tam ještě energie pohybu atomů. Je však jasné, že všechny různé příspěvky k celkové energii budou úměrné druhé mocnině amplitudy elektrického pole, a proto můžeme psát

$$\frac{1 - |B|^2}{1 - |b|^2} = \frac{|A|^2}{|a|^2}. \quad (33.4)$$

Nyní použijeme rovnici (33.2), abychom z tohoto vztahu vyloučili  $A/a$  a  $B$  vyjádříme pomocí  $b$  prostřednictvím rovnice (33.3):

$$\frac{1 - |b|^2 \frac{\cos^2(i + r)}{\cos^2(i - r)}}{1 - |b|^2} = \frac{1}{\cos^2(i - r)}. \quad (33.5)$$

Tato rovnice obsahuje jen jednu neznámou  $b$ . Řešením dostáváme

$$|b|^2 = \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)}, \quad (33.6)$$

## ANOMÁLNÍ LOM SVĚTLA

a pomocí (33.3) najdeme

$$|B|^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(i - r)}{\operatorname{tg}^2(i + r)}. \quad (33.7)$$

Našli jsme koeficient odrazu  $|b|^2$  pro dopadající vlnu polarizovanou kolmo na rovinu dopadu a také koeficient odrazu  $|B|^2$  pro dopadající vlnu polarizovanou v rovině dopadu!

Takovými argumenty lze dále ukázat, že koeficient  $b$  je reálný. K tomu je třeba uvážit případ, kdy světlo dopadá na povrch skla z obou stran současně. Toho lze sice obtížně dosáhnout experimentálně, ale je zajímavé to analyzovat teoreticky. Analýzou tohoto obecného případu můžeme dokázat, že  $b$  musí být reálné, a proto  $b = \pm \sin(i - r) / \sin(i + r)$ . Provedeme-li rozbor odrazu světla z obou stran velmi tenké destičky a vypočítáme množství odraženého světla, můžeme dokonce určit i znaménko. Víme, kolik světla by se mělo odrazit od tenké vrstvy, neboť víme, jaké proudy se generují a dokonce jsme odvodili, jaké pole je vytvářeno takovými proudy.

Pomocí těchto argumentů lze ukázat, že

$$b = -\frac{\sin(i - r)}{\sin(i + r)}, \quad B = -\frac{\operatorname{tg}(i - r)}{\operatorname{tg}(i + r)}. \quad (33.8)$$

To jsou známé *Fresnelovy vztahy*. Vyjadřují koeficienty odrazu jako funkce úhlu dopadu a úhlu lomu.

V limitě, když se úhly  $i$  i  $r$  blíží k nule, tj. pro kolmý dopad, máme pro obě polarizace  $B^2 \approx b^2 \approx (i - r)^2 / (i + r)^2$ , protože jak siny, tak i tangenty jsou prakticky rovny svým argumentům. Víme však, že  $\sin i / \sin r = n$  a pro malé úhly  $i / r \approx n$ , takže lze snadno ukázat, že pro kolmý dopad platí

$$B^2 = b^2 = \frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2}.$$

Zajímavé je například zjistit, kolik světla se odráží od povrchu vody při kolmém dopadu. Index lomu vody je  $n = 4/3$ , takže koeficient odrazu je  $1/7^2 \approx 2\%$ . Při kolmém dopadu se od povrchu vody odráží jen dvě procenta světla.

### 33.7 ANOMÁLNÍ LOM SVĚTLA

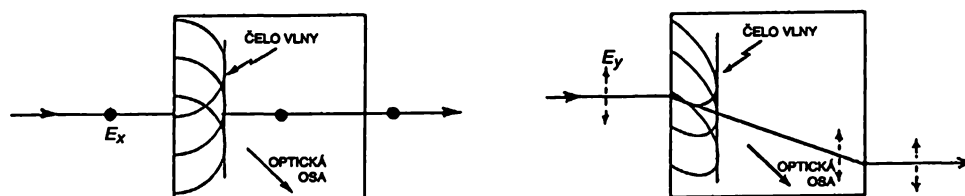
Poslední polarizační jev, jímž se budeme zabývat, byl ve skutečnosti objeven jako jeden z prvních – je to anomální lom. Námořníci, kteří navštívili Island, přivezli do Evropy krystaly islandského vápence ( $\text{CaCO}_3$ ), který měl zajímavou vlastnost, že vše, na co se člověk tímto krystalem podíval, viděl dvojmo, tj. jako dva obrazy. To mezi jiným zaujalo i Huygense a hrálo důležitou roli při objevu polarizace. Jak to obvykle bývá, jevy, které jsou objeveny jako první, lze nejobtížněji vysvětlit. Nejdříve je třeba důkladně pochopit fyzikální princip a až pak pečlivě vybrat ty jevy, u nichž se tento princip projevuje co nejjednodušeji.

Anomální lom je zvláštním případem dvojlomu, jímž jsme se již zabývali. Anomální lom vzniká tehdy, když optická osa, tj. dlouhá osa našich asymetrických molekul, není rovnoběžná s povrchem krystalu. Na obr. 33.7, jsou nakresleny dva kousky dvojlomného materiálu s vyznačenými optickými osami. Na obrázku vlevo je dopadající paprsek lineárně polarizovaný ve směru kolmém na optickou osu materiálu. Když tento paprsek dopadne kolmo na povrch materiálu,

## POLARIZACE

každý bod povrchu se stane zdrojem vlnění, jež postupuje krystalem rychlostí  $v_{\perp}$ , tj. rychlostí světla v krystalu, když je polarizace kolmá na optickou osu. Čelo vlny, které je obálkou těchto všech malých kulových vln, se pohybuje přímo krystalem až vyletí na druhé straně ven. To je normální chování, jaké se dalo očekávat a takový paprsek se nazývá *řádný paprsek*.

Na obrázku vpravo je směr lineární polarizace světla otočen o  $90^{\circ}$ , takže optická osa krystalu leží v rovině polarizace. Podíváme-li se nyní na malé vlny vznikající v libovolném místě povrchu krystalu, vidíme, že se nešíří jako kulové vlny. Světlo, které se šíří podél optické osy, má rychlost  $v_{\perp}$ , neboť směr polarizace je kolmý na optickou osu krystalu, zatímco světlo, které se šíří kolmo na optickou osu krystalu, má rychlost  $v_{\parallel}$ , protože jeho polarizace je rovnoběžná s optickou osou krystalu. V dvojlomném materiálu máme  $v_{\parallel} \neq v_{\perp}$  a na našem obrázku  $v_{\parallel} < v_{\perp}$ . Podrobnější analýzou lze ukázat, že vlny se šíří po povrchu elipsoidu, jehož hlavní osa má směr optické osy krystalu. Obálka všech těchto elipsoidálních vln tvoří vlnu postupující krystalem ve směru vyznačeném na obrázku. Na zadní stěně krystalu nastane lom paprsku stejně jako na přední stěně, takže světlo vyletí rovnoběžně s dopadajícím paprskem, jen trochu posunuté. Tento paprsek se neláme podle Snellova zákona lomu, ale šíří se jakýmsi zvláštním směrem, proto se nazývá *mimořádný paprsek*.



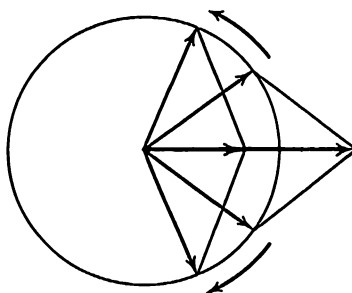
Obr. 33.7 Obrázek vlevo znázorňuje dráhu řádného paprsku při průchodu dvojlomným krystalem. Mimořádný paprsek je znázorněn na obrázku vpravo. Optická osa leží v rovině papíru.

Když na krystal vykazující anomální lom dopadne nepolarizovaný paprsek, rozdělí se na řádný paprsek, který prostupuje krystalem normálně, přímo, a na mimořádný paprsek, který se při průchodu krystalem posune. Tyto dva vystupující paprsky jsou lineárně polarizované pod pravým úhlem jeden k druhému. Lze to ukázat pomocí polaroidu, jímž můžeme určit polarizace vycházejících paprsků. Správnost naší interpretace tohoto jevu můžeme dokázat i tak, že krystal osvětlíme lineárně polarizovaným světlem. Vhodnou orientací směru polarizace dopadajícího paprsku můžeme dosáhnout toho, že světlo projde krystalem bez rozdělení, a to buď přímo nebo s posunutím.

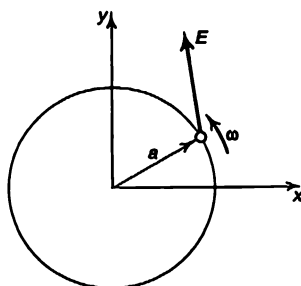
Na obrázcích 33.1 a 33.2 jsme znázornili všechny různé případy polarizace jako superpozici dvou zvláštních případů polarizace ve směru osy  $x$  a osy  $y$  při různých amplitudách a fázích. Mohli bychom použít i jiné páry polarizovaných paprsků. Stejně dobře by nám posloužily polarizace podél libovolných dvou kolmých os  $x'$  a  $y'$  pootočených vzhledem k  $x$  a  $y$ . (Například libovolné polarizace lze dosáhnout superpozicí případu a) a případu e) na obr. 33.2). Je zajímavé, že tuto myšlenku lze rozšířit ještě i na další případy. Například libovolné lineární polarizace lze dosáhnout superpozicí vhodné velikosti pravotočivé a levotočivé kruhové polarizace při vhodných fázích (případy c) a g) na obr. 33.2), neboť součtem dvou vektorů rotujících v opačných směrech dostaneme vektor oscilující po přímce (obr. 33.8). Když se fáze jednoho vzhledem k druhému o něco posune, změní se směr přímky. Takže všechny obrázky na obr. 33.1 můžeme označit jako „superpozici pravotočivé a levotočivé kruhové polarizovaného světla téže intenzity při různých vzájemných fázích“. Když se levotočivě polarizované světlo ve fázi opozdí

## ANOMÁLNÍ LOM SVĚTLA

za světlem polarizovaným pravotočivě, směr lineární polarizace se změní. Proto jsou opticky aktivní látky vlastně dvojlomné. Jejich vlastnosti lze popsat různými indexy lomu pro pravotočivě a levotočivě kruhově polarizované světlo. Superpozicí pravotočivě a levotočivě kruhově polarizovaného světla různé intenzity vzniká elipticky polarizované světlo.



Obr. 33.8 Součet dvou vektorů se stejnou amplitudou rotujících v opačných směrech dává vektor oscilující podél pevné přímky.



Obr. 33.9 Pohyb náboje po kružnici vyvolaný kruhově polarizovaným světlem.

Kruhově polarizované světlo má další zajímavou vlastnost – přenáší moment hybnosti ve směru šíření světla. Pro ilustraci si představme, že takové světlo dopadne na atom, který může kmitat jako harmonický oscilátor v libovolném směru v rovině  $xy$ . Pak bude výchylka elektronu ve směru osy  $x$  způsobena složkou  $E_x$  intenzity pole, zatímco výchylka  $y$  bude způsobena složkou pole  $E_y$ , ale s fázovým zpožděním o  $90^\circ$ . Točivé elektrické pole světla způsobí, že se elektron bude pohybovat po kružnici s úhlovou rychlostí  $\omega$  (obr. 33.9). Směr posunutí elektronu  $a$  a směr síly  $q_e E$  nemusí být stejné, závisí to na útlumových charakteristikách oscilátoru, ale oba směry rotují současně.  $E$  může mít složku kolmou k  $a$ , takže se může projevit moment síly  $\tau$  a vykoná se práce. Práce vykonaná za sekundu je rovna  $\tau\omega$ . Po dobu periody  $T$  se absorbuje energie rovnající se  $\tau\omega T$ , zatímco  $\tau T$  je velikost momentu hybnosti předaného objemu látky, v němž se pohlcuje energie. Vidíme tedy, že pravotočivě kruhově polarizovaný světelný paprsek, který přenáší celkovou energii  $\mathcal{E}$  má moment hybnosti  $\mathcal{E}/\omega$  (jeho vektor směřuje ve směru šíření světla). Když se takový paprsek pohlcuje, předává přitom i moment hybnosti. Levotočivě kruhově polarizované světlo má moment hybnosti  $-\mathcal{E}/\omega$ .

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 33.1 ■ Dvě polaroidové destičky jsou umístěny tak, že jejich osy polarizace svírají pravý úhel. Mezi nimi leží třetí destička, jejíž osa polarizace svírá úhel  $\vartheta$  s osou první destičky. Jaká bude intenzita světla procházejícího takovou soustavou, jsou-li všechny polaroidy ideální, bezztrátové?
- 33.2 ■ Předpokládejme, že svazek lineárně polarizovaného světla intenzity  $I_0$  dopadá na polaroidovou destičku, jejíž osa je rovnoběžná se směrem polarizace, a přitom je intenzita procházejícího světla  $\alpha^2 I_0$ . Bude-li osa destičky kolmá ke směru polarizace, bude destičkou procházet jen  $\varepsilon^2 I_0$  část dopadajícího světla, kde  $\varepsilon \ll 1$ . (Kdyby byl polaroid ideální, měli bychom  $\alpha^2$  rovno jedné a  $\varepsilon^2$  rovno nule.) Nechť nepolarizované světlo intenzity  $I_0$  prochází soustavou dvou takových destiček, přičemž jejich osy svírají úhel  $\vartheta$ . Jaká bude intenzita prošlého světla. Odrazové jevy zanedbejte.
- 33.3 ■ Ukažte, že pro Brewsterův úhel  $\vartheta_B$  platí vztah  $\operatorname{tg} \vartheta_B = n$ .
- 33.4 ■ Odhadněte intenzitu a polarizaci záření vydávaného elektronem, jenž se pohybuje konstantní rychlostí po kruhové dráze, v bodech ležících a) na ose procházející středem kružnice, b) v rovině kružnice.
- 33.5 ■ Index lomu krystalického křemene pro světlo o vlnové délce 600 nm je roven  $n_o = 1,544$  pro řádný a  $n_e = 1,553$  pro mimořádný paprsek. V krystalu křemene vyříznutém rovnoběžně s krystalovou osou bude rozdíl rychlostí řádného a mimořádného paprsku největší, budou-li kolmé k rovině krystalu. Jaká musí být tloušťka krystalu, aby se fáze obou paprsků uvažovaného světla při jeho průchodu posunula o  $90^\circ$ ?
- 33.6 ■ Student prvního ročníku Caltechu na procházce s dívkou vidí Měsíc pod úhlem  $10^\circ$  nad obzorem a jeho zobrazení na klidné hladině jezera. S nostalgií vzpomíná na přednášky, kapitulu 33, a pokouší se vypočítat, jaký bude jas obrazu Měsíce ve srovnání s jasem Měsíce na obloze. Přitom předpokládá, že měsíční světlo je nepolarizované (téměř) a zapomíná, že jeho přítelkyně pravděpodobně odejde. Jaký bude výsledek? Ukažte, že relativní intenzita tečných paprsků (odražených pod úhlem blízkým k pravému) se blíží 100 % .
- 33.7 ■ Světlo dopadá kolmo na jednu ze stěn krystalu diamantu ( $n = 2,40$ ). a) Jaká část dopadajícího světla se odráží? b) Čemu je roven Brewsterův úhel pro diamant?
- 33.8 ■ Vraťte se k podmínkám úlohy 33.5 a předpokládejme, že indexy lomu křemene pro světlo o vlnové délce  $\lambda_1 = 410$  nm jsou rovny  $n_o = 1,557$  a  $n_e = 1,567$  a že krystal křemene tvoří čtvrtvinovou destičku pro světlo o vlnové délce  $\lambda_2 = 600$  nm. Popište stav polarizace světla o vlnové délce  $\lambda_1$ , jež prošlo krystalem, jestli dopadající paprsky byly lineárně polarizovány.
- 33.9 ■ Dostali jste vyleštěnou destičku, například z černého obsidiánu. Máte změřit index lomu tohoto materiálu. Jak budete postupovat?

# Relativistické jevy a záření

---

- 34.1 POHYBUJÍCÍ SE ZDROJE
- 34.2 „ZDÁNlivý“ POHYB
- 34.3 SYNCHROTRONOVÉ ZÁŘENÍ
- 34.4 KOSMICKÉ SYNCHROTRONOVÉ ZÁŘENÍ
- 34.5 BRZDNÉ ZÁŘENÍ
- 34.6 DOPPLERŮV JEV
- 34.7 VLNOVÝ ČTYŘVEKTOR
- 34.8 ABERACE
- 34.9 HYBNOST SVĚTLA

## 34.1 POHYBUJÍCÍ SE ZDROJE

V této kapitole popíšeme několik různorodých jevů souvisejících se zářením, a tím uzavřeme klasickou teorii šíření světla. V naší analýze světla jsme se dostali dost daleko, až do pozoruhodných detailů. Jedinou významnou otázkou související s elektromagnetickým zářením, kterou jsme neprobrali, je otázka, co se stane, když jsou rádiové vlny uzavřeny v krabici o rozměrech srovnatelných s vlnovou délkou a s odražejiícími stěnami, nebo když jsou přenášeny podél dlouhé trubice. K *duťinovým rezonátorům* a k *vlnovodům* se vrátíme ještě později. Nejdříve použijeme jiný fyzikální příklad, zvuk, a potom se vrátíme k tomuto tématu. S touto výjimkou představuje tato kapitola naše poslední úvahy o klasické teorii světla.

Všechny jevy, o nichž zde bude nyní řeč, spojuje to, že nějak souvisí s efekty spojenými s *pohybujícími se zdroji*. Dále už nepředpokládáme, že zdroj je lokalizován a že všechny jeho pohyby se odehrávají v okolí pevného bodu relativně malými rychlostmi.

Připomínáme základní zákon elektrodynamiky, který říká, že na velkých vzdálenostech od pohybujícího se náboje je intenzita elektrického pole dána vztahem



RELATIVISTICKÉ JEVI A ZÁŘENÍ

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d^2 \mathbf{r}'_0}{dt^2}. \quad (34.1)$$

Elektrické pole je určeno druhou derivací podle jednotkového vektoru  $\mathbf{r}'_0$ , který směřuje ke zdánlivé poloze náboje. Tento jednotkový vektor nesměřuje k současné poloze náboje, ale spíše k poloze, kde by byl náboj, kdyby informace letěla od náboje k pozorovateli konečnou rychlostí  $c$ .

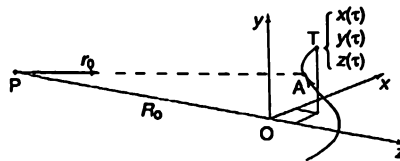
Selektivním polem je spojeno magnetické pole, vždy pod pravým úhlem k elektrickému poli a pod pravým úhlem ke směru, v němž se jeví být zdroj, podle vztahu

$$\mathbf{B} = -\mathbf{r}'_0 \times \frac{\mathbf{E}}{c}. \quad (34.2)$$

Dosud jsme se zabývali pouze případem, kdy pohyby byly, co se týká rychlosti, nerelativistické, takže nebylo třeba uvažovat o nějakém pohybu ve směru zdroje. Nyní se budeme zabývat obecnějším případem, kdy pohyb může probíhat libovolnou rychlostí, a uvidíme, jaké jevy můžeme očekávat za těchto okolností. Dovolíme, aby rychlost pohybu byla libovolná, ale nadále budeme předpokládat, že detektor je velmi daleko od zdroje.

Z naší diskuze v kapitole 28 už víme, že to co je ve výrazu  $d^2 \mathbf{r}'_0 / dt^2$  nejdůležitější, jsou změny směru vektoru  $\mathbf{r}'_0$ . Necht' souřadnice náboje jsou  $(x, y, z)$ , přičemž  $z$  měříme ve směru k pozorovateli (obr. 34.1). V daném okamžiku, dejme tomu  $\tau$ , má náboj tři složky polohy náboje  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  a  $z(\tau)$ . Vzdálenost  $R$  je rovna dost přesně  $R(\tau) = R_0 + z(\tau)$ . Směr vektoru  $\mathbf{r}'_0$  závisí hlavně na  $x$  a na  $y$ , na  $z$  závisí málo. Příčné složky jednotkového vektoru  $\mathbf{r}'_0$  jsou  $x/R$  a  $y/R$ , a když tyto složky derivujeme, dostaneme člen s  $R^2$  ve jmenovateli:

$$\frac{d\left(\frac{x}{R}\right)}{dt} = \frac{dx}{R} - \frac{dz}{dt} \frac{x}{R^2}$$



Obr. 34.1 Dráha pohybujícího se náboje. Skutečná poloha v čase  $\tau$  je v T, ale retardovaná poloha je v A.

Jsmo-li dostatečně daleko od zdroje, jediné, čím se musíme zabývat, jsou změny  $x$  a  $y$ . Činitel  $1/R_0$  můžeme vytknout a máme

$$E_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 x'}{dt^2}$$

$$E_y = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0} \frac{d^2 y'}{dt^2}, \quad (34.3)$$

kde  $R_0$  je přibližně rovno vzdálenosti náboje  $q$ , vezměme ji jako vzdálenost  $OP$  počátku souřadnicové soustavy  $(x, y, z)$ . Elektrické pole tak lze velmi jednoduše vypočítat. Je to násobek konstanty a velmi jednoduchých výrazů – druhých derivací souřadnic  $x$  a  $y$ . (Mohli bychom to vyjádřit matematicky tak, že  $x$  a  $y$  bychom nazvali příčnými složkami polohového vektoru náboje  $r$ , ale to by nepřidalo nic na jasnosti výkladu.)

Uvědomujeme si, že souřadnice se musí měřit ve zpožděném, retardovaném čase a tady zjistíme, že  $z(\tau)$  toto zpoždění ovlivní. Čemu je roven retardovaný čas? Je-li čas pozorování  $t$  (to je čas v bodě  $P$ ), čas  $\tau$ , který tomu odpovídá v bodě  $A$ , není roven času  $t$ , ale je to čas zpožděný o podíl celkové vzdálenosti, kterou musí světlo proletět a rychlosti světla. V prvním přiblížení je toto zpoždění rovno  $R_0/c$ , což je konstanta a nepřináší to nic zajímavého. Ale v dalším přiblížení musíme zahrnout vlivy závislosti polohy ve směru osy  $z$  na čase  $\tau$ , neboť, když je  $q$  o trochu dále, retardace je o něco větší. Dosud jsme to zanedbávali, a je to jediná změna, kterou musíme provést, aby naše výsledky platily pro všechny rychlosti.

Musíme zvolit určitou hodnotu  $t$  a z ní vypočítat  $\tau$  a tak zjistit, jaké jsou  $x$  a  $y$  v čase  $\tau$ . To budou potom retardovaná  $x$  a  $y$ , jež označíme jako  $x'$  a  $y'$  a jejichž druhá derivace určuje pole. Čas  $\tau$  se určí pomocí vztahu

$$t = \tau + \frac{R_0}{c} + \frac{z(\tau)}{c}$$

a

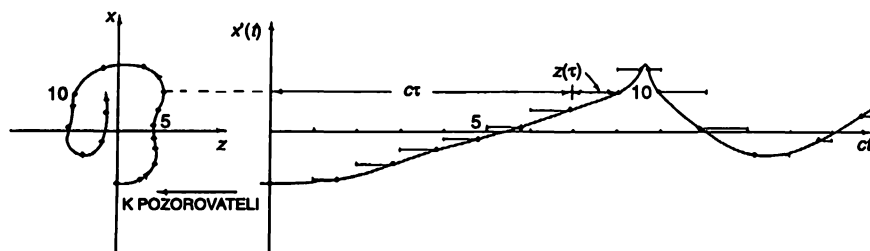
$$x'(\dot{t}) = x(\tau), \quad y'(\dot{t}) = y(\tau). \quad (34.4)$$

To jsou sice komplikované rovnice, ale jejich řešení lze snadno popsat geometricky. Geometrický obraz nám poskytne dobrý kvalitativní odhad toho, o čem tu jde, ale k odvození přesných výsledků je třeba mnoha podrobných matematických výpočtů.

### 34.2 „ZDÁNlivÝ“ POHYB

Rovnice (34.4) můžeme zajímavě zjednodušit. Zanedbáme-li nezajímavý konstantní příspěvek ke zpožděnému času  $R_0/c$ , což znamená, že počátek  $t$  změním o konstantu, dostaneme

$$ct = c\tau + z(\tau), \quad x' = x(\tau), \quad y' = y(\tau). \quad (34.5)$$

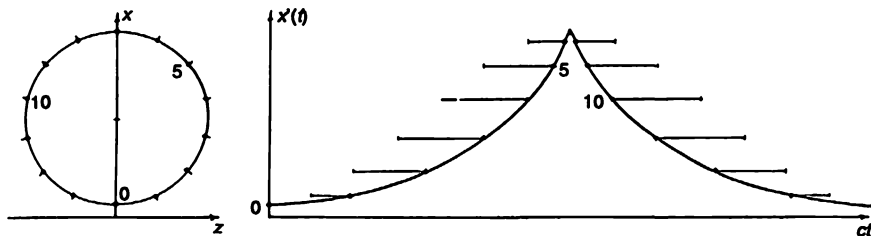


Obr. 34.2 Geometrické řešení  $x'(\dot{t})$  rovnic (34.5)

Nyní potřebujeme určit  $x'$  a  $y'$  jako funkce  $t$  a ne jako funkce  $\tau$ , a to můžeme provést takto: z rovnic (34.5) víme, že ke skutečnému pohybu máme přičíst součin konstanty (rychlosti světla) a  $\tau$ . Je to znázorněno na obr. 34.2. Vezmeme skutečný pohyb náboje (znázorněný vlevo)

## RELATIVISTICKÉ JEVY A ZÁŘENÍ

a představíme si, že přitom, jak se náboj pohybuje, mění se jeho vzdálenost od bodu  $P$  rychlostí  $c$  (kontrakce délky nebo podobné relativistické efekty se zde neprojeví; je to jen matematický úkon přičítání  $c\tau$ ). Takto dostaneme nový pohyb, pro nějž je  $ct$  souřadnicí ve směru pohledu. (Na obrázku je výsledek pro dost komplikovaný pohyb v rovině, ale je zřejmé, že pohyb nemusí probíhat v jedné rovině – může být ještě komplikovanější). Vtip je v tom, že horizontální vzdálenost (tj. směr pohledu) není rovna starému  $z$ , ale  $z + c\tau = ct$ . Tak jsme našli průběh křivky  $x'$  (i  $y'$ ) jako funkce  $t$ . Je třeba se ještě podívat na zrychlení, tj. druhou derivaci této křivky. Konečná odpověď pak zní: Abychom našli elektrické pole pohybujícího se náboje, je třeba vzít pohyb náboje a posunout ho zpět rychlostí  $c$ , abychom ho „otevřeli“. Takto získaná křivka pak udává závislost  $x'$  a  $y'$  na  $t$ . Zrychlení této křivky určuje elektrické pole jako funkci  $t$ . Můžeme si také představit, že tato celá „pevná“ křivka se pohybuje dopředu rychlostí  $c$  rovinou pohledu, takže průsečík s touto rovinou má souřadnice  $x'$  a  $y'$ . Zrychlení tohoto bodu vytváří elektrické pole. Toto řešení je stejně přesné jako rovnice, z níž jsme vyšli – je to prostě geometrická reprezentace.

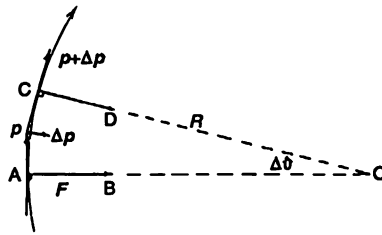


Obr. 34.3 Průběh  $x'(t)$  pro částici pohybující se po kružnici konstantní rychlostí  $v=0,94c$

Je-li pohyb náboje relativně pomalý, například máme-li oscilátor kmitající pomalu nahoru a dolů, a budeme-li tento pohyb přenášet rychlostí světla, dostaneme jednoduchou kosinovou křivku. To nám dá vztah, jímž jsme se již dlouho zabývali – určuje pole vytvořené kmitajícím nábojem. Mnohem zajímavějším příkladem je elektron pohybující se téměř rychlostí světla po kruhové dráze. Při pohledu v rovině dráhy se retardované  $x'(t)$  jeví tak, jak je to znázorněno na obr. 34.3. Jaká je to křivka? Kdybychom polohový vektor ze středu kružnice k náboji prodloužili radiálně, dále za náboj (stačí o málo, pohybuje-li se náboj velmi rychle), dostali bychom se do bodu, který se pohybuje rychlostí světla. Naložíme-li na náboj další, zpětný pohyb rychlostí světla, dostaneme pohyb, který odpovídá pohybu náboje na obvodu kola točícího se bez prokluzování nazpátek rychlostí  $c$ . Tak dostaneme křivku, jež je velmi podobná cykloidě – nazývá se *hypocykloida*. Blíží-li se rychlost pohybu náboje rychlosti světla, hroty křivky jsou skutečně velmi ostré. Kdyby se náboj pohyboval přesně rychlostí světla, hroty by byly „nekonečně ostré“. To je ovšem zajímavé – znamená to, že v blízkosti hrotu je druhá derivace obrovská. V každém cyklu dostaneme ostrý puls elektrického pole. Něco takového bychom nedostali při nerelativistickém pohybu, kde při každém oběhu náboje vznikají stále oscilace stejné intenzity. Zde dostáváme ostré impulzy elektrického pole, jdoucí za sebou v časových intervalech rovnajících se  $T_0$ , kde  $T_0$  je perioda otáček náboje. Tyto silné impulzy elektrického pole jsou vyzařovány v úzkém kuželu ve směru pohybu náboje. Zakřivení dráhy je při pohybu náboje směrem od bodu  $P$  velmi malé a i radiální pole je v tomto směru velmi malé.

### 34.3 SYNCHROTRONOVÉ ZÁŘENÍ

V synchrotronu máme velmi rychlé elektrony pohybující se po kruhových dráhách. Jejich rychlost se těsně blíží rychlosti světla, a záření, o němž jsme právě mluvili, lze vidět jako skutečné světlo! Podívejme se na to podrobněji.



Obr. 34.4 Pohyb nabité částice po kruhové (nebo spirálovité) dráze v homogenním magnetickém poli

V synchrotronu máme elektrony, které se pohybují dokola v homogenním magnetickém poli. Nejprve se podívejme, proč se pohybují po kružnicích. Z rovnice (12.10) víme, že síla působící na částici v magnetickém poli je rovna

$$F = qv \times B \quad (34.6)$$

a její směr je kolmý k magnetickému poli i ke směru rychlosti. Síla je rovna časové změně hybnosti. Na obrázku 34.4 je znázorněna hybnost částice a síla, která na ni působí v magnetickém poli směřujícím směrem vzhůru ven z papíru. Svírá-li síla s rychlostí pravý úhel, kinetická energie, a tedy i rychlost zůstávají *konstantní*. Jediné, co magnetické pole způsobí, je změna *směru pohybu*. Za dobu  $\Delta t$  se vektor hybnosti změní o  $\Delta p = F \Delta t$  pod pravým úhlem k  $p$ , takže  $p$  se otočí o úhel  $\Delta \vartheta = \Delta p / p = qvB \Delta t / p$ , protože  $|F| = qvB$ . Za stejnou dobu se částice posune o vzdálenost  $\Delta s = v \Delta t$ . Je vidět, že přímky  $AB$  a  $CD$  se protnou v bodě  $O$ , přičemž  $OA = OC = R$ , kde  $\Delta s = R \Delta \vartheta$ . Dosazením do předcházejících výrazů máme  $R \Delta \vartheta / \Delta t = R \omega = v = qvBR / p$ , odkud

$$p = qBR \quad (34.7)$$

$$\omega = \frac{qvB}{p}. \quad (34.8)$$

Stejný argument můžeme použít i v každém dalším okamžiku a z toho můžeme usoudit, že částice se musí pohybovat úhlovou rychlostí  $\omega$  po kruhové dráze s poloměrem  $R$ .

Výsledek, že hybnost částice je rovna součinu náboje, magnetického pole a poloměru, je velmi důležitý zákon, jenž se často používá. Je důležitý pro praxi, protože, máme-li elementární částice se stejným nábojem pohybující se ve známém magnetickém poli, stačí změřit poloměry křivosti jejich drah a určíme tak hybnost částic. Vynásobíme-li obě strany rovnice (34.7)  $c$  a vyjádříme  $q$  v jednotkách elektronového náboje  $q_e$ , můžeme udávat hybnost v elektronvoltech. V těchto jednotkách dostáváme vztah

$$pc(\text{eV}) = 3 \times 10^8 \left( \frac{q}{q_e} \right) BR, \quad (34.9)$$

## RELATIVISTICKÉ JEVI A ZÁŘENÍ

kde  $B$ ,  $R$  a rychlost světla (numericky je rovna  $3 \times 10^8$ ) jsou vyjádřeny v jednotkách SI. Jednotka soustavy SI pro magnetické pole  $B$  se nazývá weber na metr čtverečný.<sup>42)</sup> Starší jednotka, jež se ještě používá, se nazývá gauss; jeden  $\text{Wb} \cdot \text{m}^{-2}$  je rovna  $10^4$  gaussů. Abychom si představili, jak velká jsou magnetická pole, nejsilnější magnetické pole, jehož lze dosáhnout pomocí železa, je kolem  $1,5 \times 10^4$  gaussů. Za touto hranicí se výhoda použití železa ztrácí. Dnešní elektromagnety, se supervodivým vinutím, dokáží vytvořit stabilní pole více než  $10^5$  gaussů, tj. 10 jednotek SI. Magnetické pole Země dosahuje na rovnku několik desetin gaussu.

Vraťme se k rovnici (34.9) a představme si synchrotron dosahující miliardu elektronvoltů, takže  $pc$  má hodnotu  $10^9$  eV. (K energii se vrátíme za chvíli.) Máme-li  $B$  odpovídající, řekněme 10 000 gaussů (tj. 1 jednotce v SI soustavě), vidíme, že  $R$  bude rovno 3,3 metru. V Kalifornském technickém institutu je skutečný poloměr synchrotronu 3,7 metru, pole je o něco silnější a energie je 1,5 miliard eV. Aspoň máme představu, proč má synchrotron takové rozměry.

Vypočítali jsme hybnost, ale víme, že celková energie, včetně klidové energie, je dána vztahem  $W = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ . Klidová energie elektronu odpovídající  $mc^2$  je  $0,511 \cdot 10^6$  eV, takže je-li  $pc = 10^9$  eV, můžeme zanedbat  $mc^2$  a pro všechny praktické účely brát  $W = pc$  pro relativistické rychlosti. Prakticky je jedno, řekněme-li že energie elektronu je miliarda elektronvoltů nebo že součin hybnosti a  $c$  je miliarda elektronvoltů. Snadno lze ukázat, že pro  $W = 10^9$  eV se rychlost elektronu liší od rychlosti světla pouze o jednu osmimilióntinu!

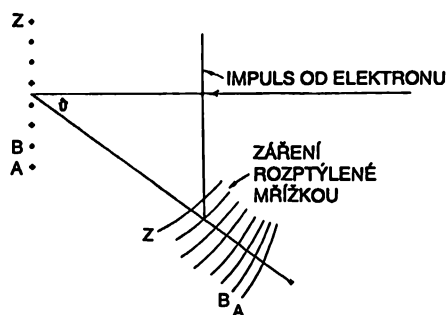
Nyní se podívejme na záření, jež tato částice vyzařuje. Částice pohybující se po kružnici s poloměrem 3,3 metru nebo s obvodem 20 metrů projde tuto dráhu asi za stejnou dobu, za jakou proletí světlo vzdálenost 20 metrů, takže vlnová délka záření vyzářeného touto částicí by měla být 20 metrů – tj. v oblasti krátkých radiových vln. Ale vzhledem k efektu transformace vzdáleností, o němž jsme diskutovali (viz obr. 34.3) a protože vzdálenost, o kterou musíme zvětšit myšlený poloměr, abychom dostali rychlost světla je pouze jedna osmimilióntina poloměru dráhy elektronu, hroty hypocykloidy jsou mimořádně ostré ve srovnání se vzdáleností mezi nimi. Zrychlení, druhá derivace dráhy podle času, se bude v blízkosti hrotu měnit ještě prudčeji. Faktor stlačení  $8 \times 10^6$  se uplatní dvakrát, neboť časové měřítko v blízkosti hrotů bude dvakrát stlačeno. Proto můžeme očekávat, že efektivní vlnová délka bude mnohem menší, až  $64 \times 10^{12}$  – krát menší než 20 metrů, což odpovídá rentgenovému záření. (Ve skutečnosti je třeba vzít v úvahu nejen samotný hrot, ale i určitou oblast v jeho okolí. To způsobí, že místo druhé mocniny budeme mít mocninu  $3/2$ , ale ještě stále budeme nad optickou oblastí frekvencí.) Nerelativistický elektron by vyzařoval 20 – metrové radiové vlny a relativistický jev zmenší vlnovou délku natolik, že ji můžeme vidět! Je zřejmé, že světlo musí být polarizované s vektorem intenzity elektrického pole kolmým k homogennímu magnetickému poli.

Abychom lépe pochopili, co budeme pozorovat, předpokládejme, že takové světlo (pro jednoduchost, protože pulzy jsou daleko od sebe, si vezmeme pouze jeden pulz) nasměrujeme na difrakční mřížku, tvořenou mnoha rozptylujícími dráty. Co uvidíme, až se pulz vzdálí od mřížky? (Měli bychom vidět červené světlo, modré světlo apod., pokud vůbec nějaké světlo uvidíme.) Co ale vidíme ve skutečnosti? Impulz dopadne čelem vlny na mřížku a způsobí, že se všechny její oscilátory pohnou najednou prudce nahoru a dolů, právě jednou. Tím vyvolají účinky v různých směrech, jako na obr. 34.5. Bod  $P$  je tady blíž k jednomu konci mřížky než k druhému, takže první tohoto bodu dosáhne elektrické pole z vodiče  $A$ , pak z vodiče  $B$ , atd., až nakonec doletí impulz od posledního vodiče. Zkrátka, výsledný odraz od všech drátů vypadá jako na obr. 34.6a; je to elektrické pole, jež se skládá ze série impulzů a jeho průběh se velmi

<sup>42)</sup> Dnes má název tesla a označení T. (Pozn. red.)

## KOSMICKÉ SYNCHROTRONOVÉ ZÁŘENÍ

podobá sinusoidální vlně, jejíž vlnová délka je rovna vzdálenosti mezi impulzy, právě tak, jako by na mřížku dopadalo monochromatické světlo! Takže dostáváme barevné světlo. Nedostali bychom takové světlo od „impulzu“ jakéhokoliv druhu? Ne. Předpokládejme, že křivky by měly mnohem hladší průběh – pak bychom skládali rozptýlené vlny oddělené velmi krátkými časy (obr. 34.6b). Vidíme, že pole nebude vůbec kolísat, bude to velmi hladká křivka, neboť každý impulz se za čas, jenž je mezi nimi, změní jen velmi málo.



Obr. 34.5 Světlo, jež dopadne na difrakční mřížku ve formě jediného ostrého impulzu se rozptýlí na různé strany jako světlo s různými barvami



Obr. 34.6 Výsledné elektrické pole způsobené sérií  
a) ostrých impulzů  
b) hladkých impulzů

Elektromagnetické záření vyzařované relativistickými nabitými částicemi obíhajícími v magnetickém poli se nazývá *synchrotronní záření*. Původ tohoto názvu je zřejmý, ale tento jev se neomezuje jen na synchrotrony ani na pozemské laboratoře. Vzrušující a zajímavé je to, že se vyskytuje i v přírodě!

### 34.4 KOSMICKÉ SYNCHROTRONOVÉ ZÁŘENÍ

V roce 1054 patřila čínská a japonská civilizace mezi nejvyspělejší na světě. Byly si vědomy existence vesmíru, a co je nejzajímavější, v tomto roce zaznamenaly explodující jasnou hvězdu. (Překvapující je, že žádný z evropských mnichů, kteří napsali všechny knihy středověku, si nedal tu námahu, aby zapsal, že na nebi explodovala hvězda.) Dnes si můžeme tuto hvězdu vyfotografovat; vidíme ji na obr. 34.7. Na vnější straně je mnoho červených vláken, způsobených atomy řídkého plynu, rozkmitanými na svých vlastních frekvencích. Toto světlo má jasné čárové spektrum skládající se z různých frekvencí. Červená čára v tomto případě patří dusíku. Naproti tomu v centrální oblasti je záhadná rozmazaná světlá skvrna se spojitým spektrem, tj. nejsou tam frekvence, jež by souvisely s nějakými atomy. Není to ani prach rozzářený okolními hvězdami, což je jeden způsob, jak by mohlo vzniknout spojitě spektrum. Je to průzračný objekt, můžeme skrz něj vidět hvězdy, ale *vyzařuje* světlo.

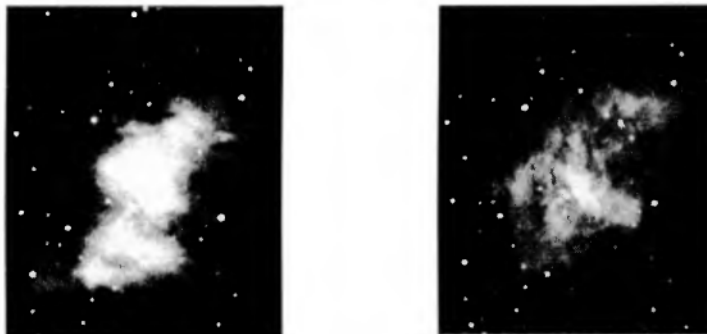
Na obr. 34.8 máme pohled na stejný objekt pomocí světla z oblasti spektra, kde nejsou jasné

## RELATIVISTICKÉ JEVY A ZÁŘENÍ

spektrální čáry, takže vidíme jen centrální oblast. Kromě toho byly na teleskop nasazeny polarizátory a uvedené snímky odpovídají jejich dvěma navzájem kolmým orientacím. Vidíme, že obrázky se liší! Znamená to, že světlo je polarizované. Lze předpokládat, že je tam místní magnetické pole a v něm obíhá mnoho velmi rychlých elektronů.



Obr. 34.7 Krabí mlhovina ve všech barvách (bez filtru)



Obr. 34.8 Krabí mlhovina při pohledu skrz modrý filtr a polaroid.

- a) vektor intenzity elektrického pole je svislý,
- b) vektor intenzity elektrického pole je vodorovný

Právě jsme si vysvětlovali, jak mohou obíhat elektrony v magnetickém poli po kružnici. K tomuto pohybu můžeme přidat libovolný rovnoměrný pohyb ve směru pole, neboť síla  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  nemá žádnou složku v tomto směru a jak jsme již poznamenali, synchrotronové záření je polarizováno ve směru kolmém k průmětu magnetického pole do roviny pohledu.

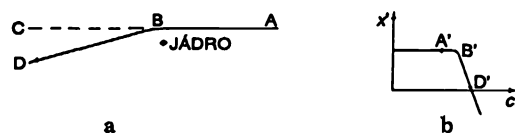
Z těchto dvou skutečností můžeme usoudit, že v oblasti, kde jeden obraz je světlý a druhý tmavý, musí být elektrické pole úplně polarizováno v jednom směru. Znamená to, že je tam

magnetické pole pod pravým úhlem k tomuto směru, zatímco v druhých oblastech, kde je silné vyzařování (na druhém obrázku), musí být směr magnetického pole jiný. Při pozorném studiu *obr. 34.8* na nich můžeme vidět soustavu čar, přičemž čáry na jednom obrázku jsou kolmé na čáry na druhém obrázku. Na obrázcích je vidět určitou vláknitou strukturu. Siločáry magnetického pole pravděpodobně sahají do relativně velkých vzdáleností, a tak jsou tu rozsáhlé oblasti, v nichž má pole s kroužícími elektrony jeden směr, zatímco v jiných oblastech má pole i kroužící elektrony jiný směr.

Proč si elektrony zachovávají tak vysokou energii tak dlouhou dobu? Vždyť od exploze uplynulo již 900 let; jak to, že si udržují tak velkou rychlost? Příčina toho, proč si elektrony zachovávají svou vysokou energii, a co všechno přitom probíhá, není dosud dostatečně známa.

### 34.5 BRZDNÉ ZÁŘENÍ

Nyní se stručně zmíníme o dalším jevu, který pozorujeme u velmi rychle letících částic vyzařujících energii. Podstata tohoto jevu je velmi podobná tomu, čím jsme se právě zabývali. Předpokládejme, že v látce jsou nabitě částice a že do ní vletí, dejme tomu, velmi rychlý elektron (*obr. 34.9*). Elektrické pole v blízkosti atomových jader elektron přitahuje, urychluje apod., takže dráha jeho pohybu se mírně zakříví. Jaké elektrické pole vzniká ve směru  $C$ , pohybuje-li se elektron rychlostí blízkou rychlosti světla? Připomeňme si naše pravidlo: Vezmeme skutečný pohyb a posuneme ho zpět rychlostí  $c$  a tak dostáváme křivku, jejíž křivost je mírou elektrického pole. Pro elektron letící rychlostí  $v$  směrem k nám dostaneme zpáteční pohyb a celý obrázek se stlačí na menší rozměry, úměrné tomu, kolikrát je  $c-v$  menší než  $c$ . Když je  $1-v/c \ll 1$ , v bodě  $B'$  je velmi ostré a prudké zakřivení dráhy, a vezmeme-li druhou derivaci, dostaneme velmi silné pole ve směru pohybu. Proto, když velmi energetické elektrony procházejí látkou, vystřelují záření ve směru svého pohybu. Tento jev se nazývá *brzdné záření*. Synchrotron se ve skutečnosti nepoužívá ani tak k získání vysokoenergetických elektronů (kdybychom je uměli vyvést z urychlovače vhodným způsobem, tak bychom takto nemluvili), jako spíše k získání vysokoenergetických fotonů – paprsků  $\gamma$ . Energetické elektrony se propustí pevným wolframovým terčem a nechají vyžářit fotony mechanismem brzdného záření.



Obr. 34.9 Rychlý elektron letící blízko jádra vyzařuje energii ve směru svého pohybu

### 34.6 DOPPLERŮV JEV

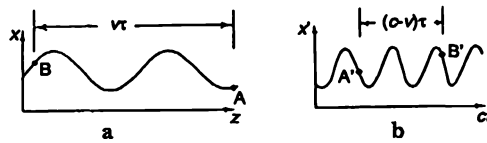
Pokračujeme ve studiu některých dalších jevů souvisejících s pohybujícími se zdroji. Předpokládejme, že zdrojem je stacionární atom kmitající na některé ze svých vlastních frekvencí  $\omega_0$ . Frekvence pozorovaného světla je pak  $\omega_0$ . Vezmeme si teď podobný oscilátor kmitající na frekvenci  $\omega_1$ , přičemž se současně celý atom, celý oscilátor, pohybuje směrem k pozorovateli rychlostí  $v$ . Skutečný pohyb v prostoru je pak takový, jak je to na *obr. 34.10a*. Nyní si zahrajeme naši obvyklou hru; přidáme  $c\tau$ , tedy celou křivku posuneme zpět a zjistíme, že osciluje, jako na



RELATIVISTICKÉ JEVI A ZÁŘENÍ

obr. 34.10b. Když se oscilátor za daný čas posunul o vzdálenost  $v\tau$ , na grafu závislosti  $x'$  na  $ct$  je to vzdálenost  $(c - v)\tau$ . Proto se nyní všechny kmity oscilátoru s frekvencí  $\omega_1$  vykonané za čas  $\Delta\tau$  nacházejí v intervalu  $\Delta t = (1 - v/c)\Delta\tau$ . Jsou stlačeny, a když k nám tato křivka dospěje rychlostí  $c$ , vidíme světlo s frekvencí vyšší s koeficientem stlačení  $(1 - v/c)$ . Takže pozorujeme frekvenci

$$\omega = \frac{\omega_1}{1 - \frac{v}{c}} \quad (34.10)$$



Obr. 34.10  $x$ -za  $x'$ - $t$  diagramy pohybujícího se oscilátoru

Tuto situaci bychom mohli analyzovat i různými jinými způsoby. Předpokládejme, že atom by nevyzařoval sinusoidální vlny, ale sérii impulsů „pí, pí, pí, pí...“ s určitou frekvencí  $\omega_1$ . S jakou frekvencí je zachytíme my? První signál k nám dorazí s určitým zpožděním, ale další je opožděn už méně, neboť zatím se atom přiblížil k přijímači. V důsledku pohybu se proto čas mezi signály zkrátí. Pomocí geometrické analýzy zjistíme, že frekvence signálů se zvětší s činitelem  $1/(1 - v/c)$ .

Znamená to, že frekvence, kterou bychom pozorovali, kdybychom měli obyčejný atom kmitající na vlastní frekvenci  $\omega_0$  a pohybující se směrem k přijímači, by byla  $\omega = \omega_0 / (1 - v/c)$ ? Ne! Jak víme, v důsledku relativistické dilatace času není vlastní frekvence pohybujícího se atomu  $\omega_1$  stejná, jakou bychom naměřili, kdyby byl atom v klidu. Je-li  $\omega_0$  skutečná vlastní frekvence, pak modifikovaná vlastní frekvence  $\omega_1$  bude

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (34.11)$$

Proto pozorovaná frekvence je

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} \quad (34.12)$$

Takový posun frekvence se nazývá *Dopplerův jev*: letí-li zdroj směrem k nám, světlo, které vyzařuje, se nám jeví modřejší, a když letí směrem od nás, zdá se červenější.

Uvedeme další dvě odvození tohoto zajímavého a důležitého výsledku. Představme si, že nyní je zdroj vyzařující vlny s frekvencí  $\omega_0$  v klidu, zatímco pozorovatel se pohybuje ke zdroji rychlostí  $v$ . Za nějakou dobu  $t$  se pozorovatel posune do nové polohy vzdálené o  $vt$  od místa, kde byl v čase  $t=0$ . O kolik radiánů se změnila fáze vlnění, jež kolem něho prošlo? Pro libovolný pevný bod to bylo  $\omega_0 t$ , a navíc pozorovatel v důsledku svého pohybu ještě viděl  $vtk_0$  radiánů (počet radiánů

na metr násobeno vzdáleností). Proto celkový počet radiánů za dobu  $t$ , neboli pozorovaná úhlová frekvence, bude  $\omega_1 = \omega_0 + k_0 v$ . Tuto analýzu jsme provedli z hlediska pozorovatele, jenž je v klidu. Jak to bude vypadat u pohybujícího se pozorovatele? Opět musíme vzít v úvahu rozdíl v rychlosti plynutí času pro tyto dva pozorovatele, což tentokrát znamená, že musíme dělit  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Je-li tedy  $k_0$  vlnové číslo, tj. počet radiánů na metr ve směru pohybu, a  $\omega_0$  je frekvence, sleduje pohybující se pozorovatel frekvenci

$$\omega = \frac{\omega_0 + k_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (34.13)$$

V případě světla víme, že  $k_0 = \omega_0/c$ , takže máme

$$\omega = \frac{\omega_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (34.14)$$

což není vůbec podobné vztahu (34.12)! Liší se snad frekvence, kterou bychom pozorovali při pohybu směrem ke zdroji od frekvence, kterou bychom pozorovali, kdyby se zdroj pohyboval směrem k nám? Samozřejmě, že ne! Teorie relativity říká, že tyto dvě frekvence musí být *přesně stejné*. Kdybychom byli dostatečně zkušení matematikové, snad bychom si již byli všimli, že tyto dva matematické výrazy jsou přesně stejné. To, že jsou si tyto výrazy nutně rovny, je jeden ze způsobů, jímž někteří lidé rádi dokazují, že relativita vyžaduje dilataci času. Kdybychom nezahrnuli výrazy s odmocninou, frekvence by si nebyly rovny.

Protože známe teorii relativity, provedme analýzu ještě třetím způsobem, který se může zdát obecnější. (Ve skutečnosti je to stejné, neboť na tom, jak to děláme, nezáleží!) Podle teorie relativity existuje vztah mezi polohou a časem, jak je vidí jeden pozorovatel a mezi polohou a časem, jak je vidí druhý pozorovatel, který je v relativním pohybu vzhledem k prvnímu. Tyto vztahy jsme si uvedli již dávno (kapitola 16); jsou to *Lorentzova transformace* a *zpětná Lorentzova transformace*. Připomeneme si je:

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t + \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (34.15)$$

Kdybychom byli v klidu, vlny by měly tvar  $\cos(\omega t - kx)$ ; všechny nuly, maxima a minima by sledovaly tento tvar. Co ale uvidí člověk v pohybu, pozoruje-li stejnou fyzikální vlnu? Kde je pole nulové, tam jsou polohy všech nul stejné. Je to relativistický invariant (je-li pole nulové, každý naměří, že je rovno nule). Proto je tvar vlny i pro druhého pozorovatele stejný, jen ho musíme přetransformovat do jeho souřadnicové soustavy

## RELATIVISTICKÉ JEVY A ZÁŘENÍ

$$\cos(\omega t - kx) = \cos \left[ \omega \frac{t' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - k \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right].$$

Po úpravě výrazů v závorce dostaneme

$$\begin{aligned} \cos(\omega t - kx) &= \cos \left[ \frac{\omega + kv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t' - \frac{k + \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x' \right] = \\ &= \cos \left[ \omega' t' - k' x' \right]. \end{aligned} \quad (34.16)$$

Je to opět vlna kosinusového tvaru, v níž se určitá konstantní frekvence  $\omega'$  násobí  $t'$  a nějaká jiná konstanta  $k'$  se násobí  $x'$ . Konstantu  $k'$  nazýváme vlnovým číslem nebo počtem vln na metr z hlediska druhého pozorovatele. Druhý pozorovatel proto sleduje novou frekvenci a nové vlnové číslo dané jako

$$\omega' = \frac{\omega + kv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (34.17)$$

a

$$k' = \frac{k + \frac{\omega v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (34.18)$$

Při pohledu na (34.17) vidíme, že je to stejný vztah jako (34.13), který jsme získali fyzikálně názornějším způsobem.

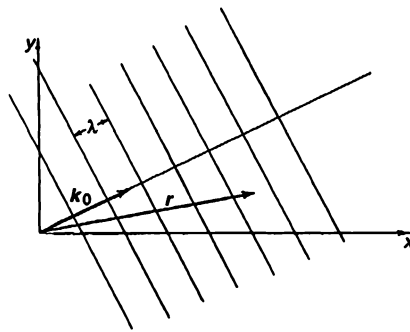
### 34.7 VLNOVÝ ČTYŘVEKTOR

Vztahy zaznamenané rovnicemi (34.17) a (34.18) jsou velmi zajímavé, neboť nám říkají, že nová frekvence  $\omega'$  je kombinací staré frekvence  $\omega$  a starého vlnového čísla  $k$  a že nové vlnové číslo je kombinací starého vlnového čísla a staré frekvence. Vlnové číslo určuje rychlost změny fáze se vzdáleností a frekvence určuje rychlost změny fáze s časem a tyto výrazy velmi připomínají Lorentzovy transformace polohy a času. Podíváme-li se na  $\omega$  jako na  $t$  a na  $k$  jako na  $x$  vydělené  $c^2$ , nové  $\omega'$  bude jako  $t'$  a nové  $k'$  bude jako  $x'/c^2$ . To znamená, že při Lorentzově transformaci se  $\omega$  a  $k$  transformují jako  $t$  a  $x$ . Vytvářejí to, čemu říkáme *čtyřvektor*; když má nějaká veličina čtyři složky, které se transformují jako čas a prostor, je to čtyřvektor. Všechno se zdá být v pořádku až na jednu maličkost. Řekli jsme, že čtyřvektor musí mít čtyři složky. Kde jsou zbývající dvě?

## VLNOVÝ ČTYŘVEKTOR

Viděli jsme, že  $\omega$  a  $k$  jsou jako čas a prostor v jednom prostorovém směru, ale ne ve všech směrech, proto dále musíme studovat problém šíření světla ve třech prostorových směrech a ne pouze v jednom, jak jsme to dělali dosud.

Předpokládejme, že máme souřadnicovou soustavu  $x, y, z$  a vlnění, jehož čela se šíří, jak je znázorněno na obr. 34.11. Vlnová délka vlnění je  $\lambda$ , ale směr pohybu vlny nesouhlasí se směrem některé ze souřadnicových os. Jaký vztah dostaneme pro takovou vlnu? Odpověď je  $\cos(\omega t - k s)$ , kde  $k = 2\pi/\lambda$  a  $s$  je vzdálenost ve směru pohybu vlny – složka polohového vektoru ve směru pohybu. Můžeme to vyjádřit takto: Je-li polohový vektor bodu v prostoru  $r$ , s je  $r \cdot e_k$ , kde  $e_k$  je jednotkový vektor ve směru pohybu. Znamená to, že s je rovno  $r \cos(r, k_0)$ , tj. složce vzdálenosti ve směru pohybu. Naše vlna je proto  $\cos(\omega t - k k_0 \cdot r)$ .



Obr. 34.11 Rovinná vlna šířící se šikmým směrem

Ukazuje se, že bude velmi vhodné definovat nový vektor  $k$ . Nazveme ho *vlnový vektor*. Jeho velikost je rovna vlnovému číslu  $2\pi/\lambda$  a směřuje ve směru šíření vlnění

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} k_0 = k k_0. \quad (34.19)$$

Pomocí vlnového vektoru můžeme zapsat naši vlnu jako  $\cos(\omega t - k \cdot r)$  nebo jako  $\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)$ . Jaký význam má některá složka  $k$ , například  $k_x$ ? Je vidět, že  $k_x$  znamená rychlost změny fáze vzhledem k  $x$ . Na obr. 34.11 vidíme, že fáze se mění se změnou  $x$ , jako by se podél  $x$  šířila vlna, ale s delší vlnovou délkou. „Vlnová délka ve směru osy  $x$ “ je delší než přirozená, skutečná vlnová délka, podle vztahu

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos \alpha}, \quad (34.20)$$

kde  $\alpha$  je úhel mezi směrem skutečného šíření vlny a směrem osy  $x$ . Proto je rychlost změny fáze, jež je úměrná převrácené hodnotě  $\lambda_x$ , menší s faktorem  $\cos \alpha$ ; tak se bude měnit  $k_x$  – bude to velikost  $k$  krát kosinus úhlu mezi  $k$  a osou  $x$ !

To je podstata vlnového vektoru, který používáme k popisu vlnění ve třech rozměrech. Ve speciální teorii relativity se čtyři složky  $\omega, k_x, k_y, k_z$  transformují jako čtyřvektor, kde  $\omega$  odpovídá času a  $k_x, k_y, k_z$  odpovídají složkám čtyřvektoru  $x, y$  a  $z$ .

V naší předcházející diskuzi o speciální teorii relativity (kapitola 17) jsme poznali, že lze ze čtyřvektorů vytvořit relativistický skalární součin. Označíme-li polohový vektor jako  $x_\mu$ , kde  $\mu$

## RELATIVISTICKÉ JEVY A ZÁŘENÍ

označuje čtyři složky (čas a tři prostorové složky), a vlnový vektor jako  $k_\mu$ , kde  $\mu$  má také čtyři hodnoty, jednu pro čas a tři pro prostor, skalární součin  $x_\mu$  a  $k_\mu$  je  $\sum' k_\mu x_\mu$  (viz kapitola 17). Tento skalární součin je invariant nezávislý na soustavě souřadnic. Čemu je roven? Podle definice čtyřrozměrného skalárního součinu je roven:

$$\sum' k_\mu x_\mu = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z. \quad (34.21)$$

Z vlastností čtyřvektorů plyne, že  $\sum' k_\mu x_\mu$  je invariant vzhledem k Lorentzově transformaci. Ale to je přesně ta veličina, jež vystupuje v kosinu pro rovinnou vlnu, která musí být invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci. Nemůžeme mít vztah, jenž by obsahoval něco, co by se měnilo v argumentu kosinu, neboť víme, že fáze vlny se nemůže změnit se změnou souřadnicové soustavy.

### 34.8 ABERACE

Při odvození rovnic (34.17) a (34.18) jsme si vzali jednoduchý příklad, kdy  $k$  leželo ve směru pohybu, ale je jasné, že to můžeme zobecnit i na jiné případy. Například předpokládejme, že máme zdroj, jenž vyzařuje světlo v určitém směru z hlediska nehybného pozorovatele, zatímco my se pohybujeme, řekněme spolu se Zemí (obr. 34.12). Z kterého směru se nám zdá, že přichází světlo? Abychom to zjistili, museli bychom napsat čtyři složky  $k_\mu$  a aplikovat na ně Lorentzovu transformaci. Odpověď lze najít i takto: Abychom uviděli světlo, musíme naklonit náš teleskop. Proč? Protože světlo letí dolů rychlostí  $c$  a my se pohybujeme do strany rychlostí  $v$ , takže teleskop musíme naklonit dopředu, aby dopadající světlo procházelo přímo tubusem. Snadno zjistíme, že je-li vertikální vzdálenost  $ct$ , horizontální vzdálenost bude  $vt$ , a proto pro úhel náklonu  $\vartheta'$  platí  $\text{tg } \vartheta' = v/c$ . To je hezké – až na jednu věc:  $\vartheta'$  není úhel, o který bychom měli naklonit teleskop vzhledem k Zemi, neboť celou analýzu jsme prováděli z hlediska nehybného pozorovatele. Když jsme řekli, že horizontální vzdálenost je  $vt$ , pozemský pozorovatel by našel jinou vzdálenost, neboť měří „zkráceným“ pravítkem. V důsledku kontrakce délky vychází, že

$$\text{tg } \vartheta' = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (34.22)$$

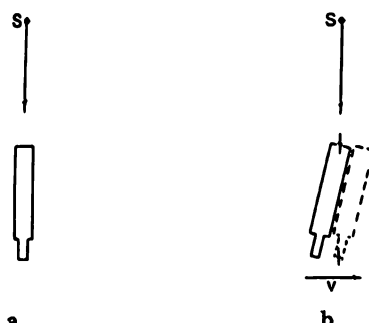
což je ekvivalentní

$$\sin \vartheta' = \frac{v}{c}. \quad (34.23)$$

Pro čtenáře bude poučné odvodit tento výsledek pomocí Lorentzovy transformace.

Skutečnost, že teleskop je třeba naklonit, se nazývá *aberrace* byla experimentálně pozorována. Jak ji můžeme pozorovat? Kdo může říct, kde se má daná hvězda nacházet? Předpokládejme, že k tomu bychom hvězdu viděli, se musíme dívat špatným směrem. Jak potom víme, že je to špatný směr? Protože Země obíhá kolem Slunce. Dnes musíme teleskop nasměrovat jedním směrem a za šest měsíců ho musíme naklonit opačným směrem. To je důvod, proč můžeme říct, že takový jev existuje.

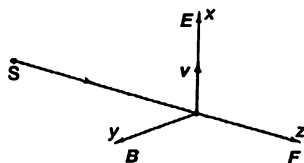
### ABERACE • HYBNOST SVĚTLA



Obr. 34.12 Pohled na vzdálený zdroj  $S$   
 a) nehybným teleskopem,  
 b) teleskopem pohybujícím se stranově

### 34.9 HYBNOST SVĚTLA

Nyní přejdeme k dalšímu tématu. V celé naší diskuzi v posledních kapitolách jsme nikdy nic neřekli o účincích magnetického pole, jež je spojeno se světlem. Účinky magnetického pole jsou obvykle velmi malé, ale existuje jeden zajímavý a důležitý jev, jenž je důsledkem magnetického pole. Předpokládejme, že světlo přicházející ze zdroje působí na náboj a rozkmitá ho. Budeme předpokládat, že elektrické pole má směr osy  $x$ , takže náboj se také pohybuje ve směru osy  $x$ , jeho poloha je  $x$  a jeho rychlost je  $v$ , jak je znázorněno na obr. 34.13. Magnetické pole svírá s elektrickým polem pravý úhel. Jak působí magnetické pole na náboj, jímž elektrické pole kmitá nahoru a dolů? Magnetické pole působí na náboj (řekněme na elektron) jenom, když se náboj pohybuje, ale elektron se přece pod vlivem elektrického pole pohybuje, takže obě pole působí společně. Kmitá-li náboj nahoru a dolů, má nějakou rychlost a působí na něj síla o velikosti součinu  $B$ ,  $v$  a  $q$ . Jaký směr má tato síla? Leží ve směru šíření světla. Proto, když na náboj svítí světlo a náboj se v důsledku toho rozkmitá, působí na něj ještě síla ve směru světelného paprsku. Tomu se říká *radiační tlak* nebo tlak světla.



Obr. 34.13 Síla magnetického pole působící na náboj rozkmitaný elektrickým polem má směr světelného paprsku.

Určíme velikost tohoto radiálního tlaku. Je zřejmé, že  $F = qvB$ , nebo, vzhledem k tomu, že všechno osciluje, je třeba vzít střední časovou hodnotu  $\langle F \rangle$ . Z (34.2) vidíme, že magnetické pole je rovno elektrickému poli dělenému  $c$ , a proto potřebujeme najít střední hodnotu součinu intenzity elektrického pole a rychlosti a vynásobit ji nábojem a  $1/c$ :  $\langle F \rangle = q \langle vE \rangle / c$ . Součin náboje  $q$  a intenzity  $E$  elektrického pole dává sílu působící na náboj a síla působící na náboj násobená rychlostí je rovna výkonu  $dW/dt$  dodanému náboji! Proto síla, tj. hybnost dodaná světlem za sekundu, je rovna  $1/c$  násobeno energií světla absorbovanou za sekundu! To je obecné pravidlo, neboť jsme si nic neřekli o síle oscilátoru nebo zda se některé náboje neruší.

## RELATIVISTICKÉ JEVY A ZÁŘENÍ

Vždy, když dochází k absorpci světla, působí tlak. Hybnost dodaná světlem za sekundu je vždy rovna absorbované energii dělené  $c$

$$\langle F \rangle = \frac{dW}{dt} \cdot \frac{1}{c}. \quad (34.24)$$

Víme, že světlo přenáší energii. Nyní vidíme, že přenáší i hybnost a navíc, že tato hybnost je rovna  $1/c$ -násobku energie.

Při emisi světla ze zdroje dochází ke zpětnému rázu zdroje – probíhá totéž na opačnou stranu. Vyzáří-li atom některým směrem energii  $W$ , získá zpětnou hybnost  $p = W/c$ . Při kolmém odrazu světla od zrcadla dostaneme dvojnásobek síly.

Až sem jsme se dostali pomocí klasické teorie světla. Víme však, že existuje kvantová teorie a že v mnoha případech se světlo chová jako částice. Energie světla – částice je součin konstanty a frekvence

$$W = h\nu = \hbar\omega. \quad (34.25)$$

Nyní víme, že světlo má také hybnost, jež je rovna podílu energie a  $c$ . Proto platí, že tyto částice světla, fotony mají hybnost

$$p = \frac{W}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k. \quad (34.26)$$

Směr hybnosti je přitom stejný jako směr šíření světla, takže pomocí vektorového zápisu máme

$$W = \hbar\omega, \quad p = \hbar k. \quad (34.27)$$

Také víme, že energie a hybnost částice by měly tvořit čtyřvektor. Právě jsme zjistili, že  $\omega$  a  $k$  tvoří čtyřvektor. Proto je dobré, že v obou vztazích v (34.27) je  $\hbar$  konstanta. Znamená to, že kvantová teorie a teorie relativity jsou vzájemně konzistentní teorie.

Rovnici (34.27) lze elegantněji zapsat jako  $p_\mu = \hbar k_\mu$ , což je relativistická rovnice pro částici spojenou s vlnou. I když jsme mluvili jen o fotonech, pro něž  $k$  (velikost  $k$ ) je rovno  $\omega/c$  a  $p = W/c$ , je tento vztah mnohem obecnější. V kvantové mechanice projevují vlnové vlastnosti nejen fotony, ale všechny částice, přičemž frekvence a vlnové číslo vln souvisí s energií a hybností částic prostřednictvím (34.27) (de Broglieho vztahy) a to i tehdy, když  $p$  není rovno  $W/c$ .

V poslední kapitole jsme viděli, že paprsek pravotočivě nebo levotočivě kruhově polarizovaného světla přenáší moment hybnosti úměrný energii vlnění  $\mathcal{L}$ . V kvantové mechanickém pojetí se paprsek kruhově polarizovaného světla považuje za proud fotonů, z nichž každý má moment hybnosti podél směru šíření světla rovný  $\pm \hbar$ . Tak je vyjádřena polarizace z korpuskulárního hlediska – fotony mají moment hybnosti, podobně jako rotující kulky vystřelené z pušky. Tato představa o kulkách je ve skutečnosti stejně neúplná jako představa o vlnách a vše si budeme muset podrobněji prodiskutovat později, v kapitole o kvantových vlastnostech.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 34.1 ■ Kotouč o poloměru  $A$  se valí bez prokluzování po vodorovné rovině. Napište rovnici trajektorie, kterou opisuje bod nacházející se ve vzdálenosti  $\vartheta$  od středu kotouče, v závislosti na  $A$ ,  $R$  a úhlu pootočení kotouče. Osa  $x$  míří svisle vzhůru od středu kotouče a osa  $z$  ve směru jeho pohybu. Najděte zrychlení  $d^2x/dt^2$  bodu při  $z = ct$ .
- 34.2 ■ Výraz získaný v předchozí úloze se hodí k vyjádření intenzity vyzařování částice, jež se pohybuje po kruhové trajektorii s poloměrem  $R$ . Vyjádřete výsledek pomocí pozorovaných veličin  $R$ ,  $v$  (rychlost částice) a  $x$  (poloha částice v okamžiku pozorování).
- 34.3 ■ Najděte poměr intenzit vyzařování nabitě částice, jež se pohybuje po kruhové dráze směrem k pozorovateli a od něho.
- 34.4 ■ Odvoďte vzorec pro aberaci  $\sin \vartheta = v/c$  z Lorentzovy transformace.
- 34.5 ■ Ukažte, že rychlost elektronu o energii 1 GeV se liší od rychlosti světla o jednu osmimilióntinu.
- 34.6 ■ Při pozorování čáry  $D$  ve spektru sodíku (její laboratorní vlnová délka je 589,0 nm) bylo zjištěno, že je ve spektru hvězdy posunuta a má vlnovou délku 588,0 nm. Jakou rychlostí se pohybuje hvězda vzhledem k pozorovateli?
- 34.7 ■ Astronom z Caltechu R. Minkowski dospěl k závěru, že nejvzdálenější mlhovina, kterou pozoroval, se od nás vzdaluje rychlostí 0,6  $c$ . Jak velký je dopplerovský posun pro světlo, jež přichází z této mlhoviny? Určete pozorovanou vlnovou délku ve spektru této mlhoviny, je-li tato vlnová délka v soustavě spojené s mlhovinou rovna 300 nm.
- 34.8 ■ Bradley objevil v roce 1728 aberaci světla spočívající v tom, že pozorované hvězdy se jeví na obloze posunuty, protože Země se pohybuje na oběžné dráze kolem Slunce. Proto při pozorování hvězd v blízkosti pólu ekliptiky musíme naklonit osu dalekohledu dopředu (ve směru pohybu Země) o  $20,5''$ . Vezmeme-li rychlost světla rovnou  $3,00 \cdot 10^8$  m s<sup>-1</sup>, jaká bude velikost poloměru zemské dráhy vypočítaná na základě tohoto pozorování?
- 34.9 ■ Budeme předpokládat, že meziplanetární prostor je zaplněn malými zrnky prachu s průměrnou hustotou  $\rho$  a přibližně kulového tvaru s poloměrem  $R$ .
- Ukažte, že pro zrnko libovolného poloměru nezávisí poměr gravitační přitažlivé síly a radiační odpudivé síly na vzdálenosti od Slunce.
  - S použitím údaje, že intenzita slunečního záření na zemské dráze je  $1374$  W m<sup>-2</sup>, a za předpokladu, že srážkový průřez absorpce záření je  $\pi R^2$  určete, při jaké hodnotě poloměru  $R$  budou síly gravitačního přitahování a radiačního odpuzování vyrovnány.
  - Vezmeme-li v úvahu výsledky uvedené v kapitole 32, můžeme usoudit, že srážkový průřez absorpce zrněk může být značně větší než  $\pi R^2$ ?



# Barevné vidění

## 35.1 LIDSKÉ OKO

## 35.2 BARVA ZÁVISÍ NA INTENZITĚ

## 35.3 MĚŘENÍ BAREVNÉHO VJEMU

## 35.4 DIAGRAM BAREVNOSTI

## 35.5 MECHANIZMUS BAREVNÉHO VIDĚNÍ

## 35.6 FYZIOCHEMIE BAREVNÉHO VIDĚNÍ

### 35.1 LIDSKÉ OKO

Existence barev závisí zčásti na fyzikálním světě. O barvách mýdlových bublin a podobných jevech mluvíme jako o výsledku interference. Existence barev, samozřejmě, závisí na oku a na tom, co se děje za okem, v mozku. Fyzika charakterizuje světlo vstupující do oka, ale dále jsou naše vjemy výsledkem fotochemicko – neurologických procesů a psychologické odezvy.

Existuje mnoho zajímavých jevů spojených s viděním, jež zahrnují směs fyzikálních jevů a fyziologických procesů a jejich úplné pochopení musí sahat za hranice fyziky v obvyklém smyslu. Nechceme se omlouvat za takové odbočení do jiných oblastí poznání, neboť rozdělení do různých oblastí je pouhá lidská konvence a nepřirozená věc. Přírodu nezajímá naše dělení a mnoho zajímavých jevů překlenuje mezery mezi různými oblastmi.

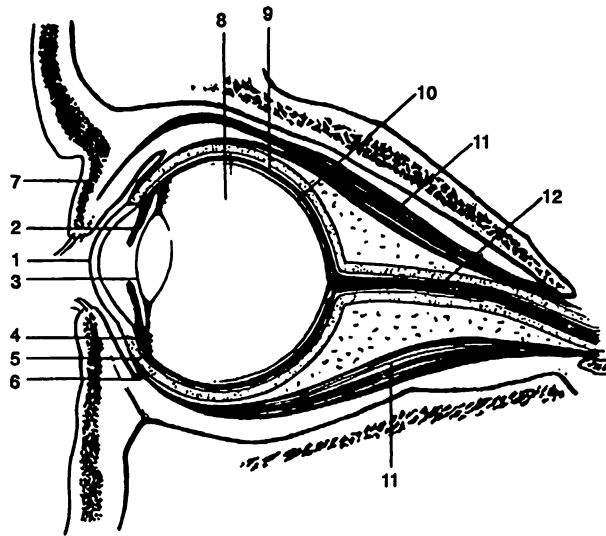
Třetí kapitolu jsme věnovali obecným vztahům mezi fyzikou a jinými vědními obory a nyní se podrobněji podíváme na jednu oblast, v níž mají fyzika a jiné vědy k sobě velice, velice blízko. Tato oblast se týká *vidění*. Přesněji, budeme mluvit o *barevném vidění*. V této kapitole se soustředíme hlavně na pozorovatelné jevy lidského vidění a v následující kapitole na fyziologické aspekty vidění jak u člověka, tak u jiných živočichů.

Vše začíná okem. Abychom pochopili vidění, potřebujeme jisté znalosti o oku. V další kapitole se budeme zabývat tím, jak pracují jednotlivé části oka a jak jsou navzájem propojeny s nervovým systémem. Teď si jen stručně popíšeme funkci oka (*obr. 35.1*).

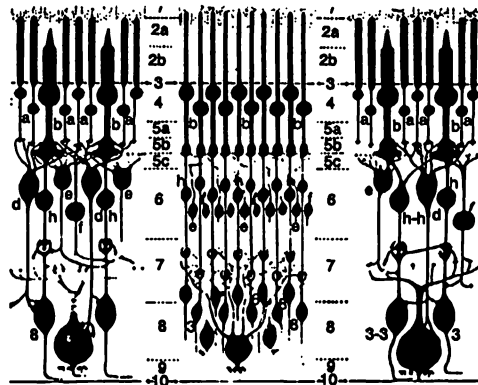
Světlo vstupuje do oka *rohovkou*. Již jsme mluvili o tom, jak se přitom láme a jak se vytváří obraz na sítnici umístěné v zadní části oka, takže na ni dopadá světlo z různých částí vnějšího zorného pole. *Sítnice* není úplně stejnorodá. Existuje na ní místo, jež se nazývá *žlutá skvrna*. Leží ve středu zorného pole, kde vidíme nejostřeji a používáme ji, když si chceme něco důkladně prohlédnout. Z naší zrakové zkušenosti dobře víme, že pro rozeznání detailů jsou okrajové části

## LIDSKÉ OKO

oka podstatně méně účinné než jeho střed. Na sítnici je také místo, odkud vycházejí nervy přenášející zrakové informace; je to *slepá skvrna*. Na ní se nenacházejí žádné citlivé části sítnice. Můžeme se o ní přesvědčit například tak, že když zavřeme levé oko díváme se přímo na nějaký předmět a pak začneme posouvat prst nebo nějaký jiný malý předmět ven ze zorného pole, najednou ho v jisté poloze neuvidíme. Víme o jediném praktickém využití tohoto jevu; jeden fyziolog se stal královým oblíbencem poté, co ho na tento jev upozornil. V průběhu nudných porad, které měl král se svými rádci, se mohl bavit „usekáváním jejich hlav“ tak, že se díval na jednoho a sledoval jak zmizela hlava druhého.



Obr. 35.1 Oko: 1–rohovka, 2–duhovka, 3–čočka, 4–řasnatá vlákna, 5–bělmo, 6–spojivka, 7–kruhový sval, 8–sklivce, 9–sítnice, 10–cévnatka, 11–oční svaly, 12–zrakový nerv



Obr. 35.2 Struktura sítnice (Světlo přichází zdola)

Na obrázku 35.2 je ve zvětšeném měřítku schématicky znázorněn průřez sítnicí. V různých částech má sítnice různou strukturu. Na okraji sítnice je nejvíce buněk, jež se nazývají *tyčinky*.

## BAREVNÉ VIDĚNÍ

V blízkosti žluté skvrny najdeme u tyčinek i *čípky*. Jejich strukturu si popíšeme později. Čím blíže k žluté skvrně, tím je větší počet čípků a v samotné žluté skvrně jsou už jen tyto buňky. Jsou tam tak nahuštěny, že jsou mnohem jemnější nebo tenčí než kdekoli jinde na sítnici. Znamená to, že ve středu zorného pole vidíme pomocí čípků, ale směrem k okraji jsou rozloženy tyčinky. Zajímavé je, že každá buňka sítnice citlivá ke světlu není spojena vláknem přímo s optickým nervem, ale je spojena s mnoha jinými buňkami, jež jsou tak navzájem propojeny. Jsou to v podstatě 4 druhy buněk; některé přenášejí informace na optický nerv, jiné jsou pospojovány hlavně „horizontálně“. Nyní se však nebudeme pouštět do takových detailů. Hlavní, co zdůrazňujeme, je, že světelný signál se již zde zpracovává. Informace z různých buněk se nedostávají přímo do mozku, bod po bodu, ale v sítnici dochází ke zpracování určité části informace pomocí kombinace informací z různých zrakových receptorů. Je důležité, abychom si uvědomili, že určité jevy spojené s mozkovou činností probíhají již v samotném oku.

### 35.2 BARVA ZÁVISÍ NA INTENZITĚ

Jednou z nejpřekvapivějších vlastností vidění je adaptace oka na tmu. Když vyjdeme z rozsvíceného pokoje do tmy, vidíme chvíli velmi špatně, ale postupně lépe a lépe, až nakonec vidíme předměty, které jsme předtím vůbec neviděli. Při velmi malé intenzitě osvětlení, věci, které vidíme, nemají barvu. Je známo, že vidění přizpůsobené tmě je téměř zcela zprostředkováno tyčinkami, zatímco vidění v jasném světle je zprostředkováno čípkami. Tak tedy můžeme pochopit mnohé jevy jako důsledek přechodu od společné funkce tyčinek a čípků k samotné funkci tyčinek.

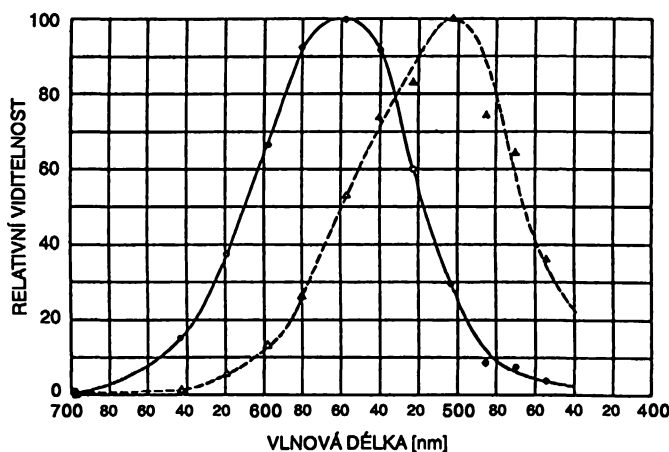
V mnoha případech, kdyby intenzita světla byla větší, bychom viděli barvy a zjistili bychom, že věci, které vidíme, jsou krásné. Například při pohledu teleskopem vidíme obrazy nejasných mlhovin jako černobílé. W. C. Miller v observatořích na Mt. Wilsonu a Mt. Palomaru měl dostatek trpělivosti, aby získal barevné snímky takových objektů. Nikdo nikdy okem tyto barvy neviděl, ale nejsou to umělé barvy, je to prostě dáno tím, že intenzita světla není dostatečná k tomu, abychom ho viděli čípkami v našem oku. Mezi nejokázalejší objekty tohoto druhu patří Prstencová mlhovina a Krabí mlhovina. První má vnitřní část krásně modrou s jasně červeným vnějším kolem a druhá má modrý opar prostoupený jasně červenou – oranžovými vlákny.

V jasném světle mají tyčinky velmi malou citlivost, ale ve tmě se časem jejich schopnost vidět světlo zvětšuje. Změny intenzity světla, na které je možno se adaptovat, jsou ve větším poměru než milión ku jedné. Tato adaptace se v přírodě neděje jen pomocí buněk jednoho druhu, ale funkce vidění se posouvá od buněk citlivých na jasné světlo, vidících barvy, tj. čípků, k tyčinkám – buňkám citlivým k malým intenzitám a přizpůsobivým šeru. Mezi zajímavé důsledky tohoto posunu patří, za prvé, že se vytratí barva a za druhé, že různě zbarvené předměty mají různý relativní jas. Ukazuje se, že tyčinky vidí lépe než čípky směrem k modré barvě a čípky vidí například červené světlo, zatímco pro tyčinky to je absolutně nemožné. Proto je červené světlo pro tyčinky černé. Dva barevné papíry, řekněme modrý a červený, přičemž červená barva může být na dobrém světle jasnější než modrá, se budou v přítmí, co se týká jasnosti, jevit zcela naopak. Je to velmi překvapující jev. Když si v tmavé místnosti prohlédneme barevný časopis nebo jiný barevný předmět, můžeme posoudit, které plochy jsou světlejší, a které jsou tmavší, a když ho pak vyneseme na světlo, uvidíme, jak zajímavě se mění jasnost toho, co se zdálo být nejjasnější, a co se nezdálo být tak jasné. Tento jev se nazývá *Purkyňův efekt*.

Na obrázku 35.3 máme křivky citlivosti oka v přítmí; přerušovaná čára odpovídá situaci, kdy používáme tyčinky, zatímco plná čára znázorňuje citlivost oka za světla. Vidíme, že tyčinky jsou

## BARVA ZÁVISÍ NA INTENZITĚ • MĚŘENÍ BAREVNÉHO VJEMU

nejcitlivější pro zelenou oblast a čípků pro žlutou oblast. Červeně zabarvený papír (650 nm) vidíme, když je dobře osvětlený, ale ve tmě ho skoro nevidíme.



Obr. 35.3 Spektrální citlivost oka. Přerušovaná čára odpovídá tyčinkám, plná čára odpovídá čípkům.

Dalším projevem toho, že v přímém přehledu přebírají funkci vidění tyčinky, a že ty nejsou ve žluté skvrně, je fakt, že díváme-li se v přímém přímém na nějaký předmět, nevidíme ho tak ostře, jako když se na něj podíváme trochu z boku. Nejasnou hvězdu nebo mlhovinu můžeme někdy lépe vidět, když se na ni podíváme mírně ze strany, než když se na ni díváme přímo, protože ve středu žluté skvrny nemáme citlivé tyčinky.

Jiným zajímavým důsledkem toho, že směrem k okraji zorného pole počet čípků klesá, je skutečnost, že dokonce jasně zbarvené předměty přitom ztrácejí svou barvu. Přesvědčit se o tom je možné tak, že se díváme v určitém neměnném směru a necháme, aby se někdo, kdo drží v ruce nějaký barevný předmět, přibližoval do směru našeho pohledu ze strany. Dříve než se dostane přímo před nás, snažme se rozhodnout, jakou barvu má daný předmět. Zjistíme, že předmět vidíme mnohem dříve než jsme schopni určit jeho barvu. Doporučuje se vstupovat do zorného pole z opačné strany než je slepá skvrna, neboť jinak vzniká zmatek; nejdříve už téměř vidíme barvu, pak najednou nevidíme nic a pak opět vidíme barvu.

Další zajímavostí je, že okrajové části sítnice jsou velmi citlivé k pohybu. I když koutkem oka dobře nevidíme, když se na kraji našeho zorného pole pohne nějaký malý brouček, o němž ani nevíme, že tam je, ihned to zaregistrujeme. Všichni jsme stvořeni tak, že ostrážitě vnímáme, když se něco pohne na okraji našeho zorného pole.

### 35.3 MĚŘENÍ BAREVNÉHO VJEMU

Nyní přejdeme k vidění za jasného světla, k vidění pomocí čípků a k otázce barvy, jež je pro toto vidění nejcharakterističtější. Jak víme, bílé světlo je možné rozložit pomocí hranolu na celé spektrum vlnových délek, které vnímáme jako různé barvy. Barvy, to jsou naše vjemy. Libovolný zdroj světla lze analyzovat pomocí difrakční mřížky nebo pomocí hranolu a lze určit jeho spektrální složení, tj. „množství“ světla každé vlnové délky. Některé světlo může obsahovat mnoho modré barvy, dost červené, málo žluté atd. Fyzikálně lze vše určit velmi přesně, otázkou však je, jakou barvu budeme vnímat. Je samozřejmé, že různé barvy nějak závisí na spektrálním

## BAREVNÉ VIDĚNÍ

složení světla, problém je v tom, jaké spektrální charakteristiky způsobí různé barevné vjemy. Například, co je třeba udělat, abychom viděli zelenou barvu? Všichni víme, že prostě stačí vzít si zelenou část spektra. Je to však jediný způsob, jak lze získat zelenou nebo jakoukoliv jinou barvu?

Existuje více spektrálních rozložení, jež způsobí stejný vizuální efekt? Určitě ano. Jak brzy uvidíme, počet základních vizuálních efektů je velmi omezen, fakticky jsou jen tři, ale existuje nekonečné množství různých spektrálních křivek, jež můžeme nakreslit pro světlo přicházející z různých zdrojů. Potřebujeme vyřešit tuto otázku: Za jakých podmínek se různé rozložení světla jeví oku jako stejná barva?

Nejúčinnější psychofyzikální technikou k určení barev je ta, když se oko používá jako nulový přístroj. Přitom se nesnažíme definovat, co způsobuje, že barvu vnímáme jako zelenou, nebo za jakých okolností k tomu dochází. To by bylo příliš složité. Místo toho studujeme, za jakých podmínek jsou dva vizuální podněty nerozlišitelné. Pak nemusíme rozhodovat, zda dva lidé vidí stejné vjemy za různých okolností, ale spíš jen to, zda budou dva vjemy stejné pro jednu osobu stejné i pro osobu jinou. Nemusíme rozhodnout, zda to, co někdo cítí, když vidí něco zeleného, je stejné jako to, co cítí jiný při pohledu na stejnou věc. O tom stejně nic nevíme.

Pro ilustraci těchto možností můžeme použít čtyři projektory s filtry, jejich jas lze spojitě měnit v širokém rozmezí. Jeden má červený filtr a na plátně vytvoří červenou skvrnu, druhý má zelený filtr a vytváří zelenou skvrnu, třetí má modrý filtr a čtvrtý vytváří bílý kruh s černou skvrnou uprostřed. Zapneme-li nyní červené světlo a dále zelené, vidíme, že část, kde se barvy překrývají, v nás vyvolá vjem, který nenazýváme červenou – zelenou barvou, ale nově, v tomto případě žluté barvy. Změnou proporcí červené a zelené můžeme projít různými odstíny oranžové atd. Nastavíme-li filtry na určitý odstín žluté, můžeme tentýž odstín získat, dostat ne smísením těchto dvou barev, ale smísením některých jiných barev, například žlutého filtru a bílého světla nebo něčeho podobného, co vytváří stejný vjem. Takže různé barvy lze vytvářet nejen jedním způsobem, ale více způsoby, smísením barev z různých filtrů.

Tento náš objev lze vyjádřit analyticky. Například určitou žlutou barvu lze vyjádřit jako nějaký symbol  $Y$ , jenž je součtem určitého množství světla z červeného filtru ( $R$ ) a ze zeleného filtru ( $G$ ). Když k popisu jasu světla ( $R$ ) a ( $G$ ) použijeme písmena  $r$  a  $g$ , máme pro žluté světlo

$$Y = rR + gG. \quad (35.1)$$

Jak můžeme získat všechny různé barvy smísením dvou nebo tří světél různých pevně zvolených barev? Podívejme se, co lze v této souvislosti udělat. Všechny barvy určitě nezískáme jen smísením červené a zelené, neboť tato kombinace například nikdy nedá modrou. Když k nim přidáme modrou, střední část, kde se všechny tři barvy prolínají, lze zbarvit tak, že je skoro bílá. Sledováním střední části při mísení těchto různých barev zjistíme, že změnou jejich proporcí můžeme získat pozoruhodné spektrum barev a není vyloučeno, že smísením těchto tří barev je možné vytvořit všechny barvy. Pověme si, do jaké míry je to pravda; v podstatě je to tak a brzy uvidíme, jak lépe definovat jejich proporce.

Abychom to lépe objasnili, nastavíme projektory tak, aby se všechny skvrny vzájemně překrývaly a pak se pokusíme smísením dostat barvu, kterou bude mít vnější prstenec při zapnutí čtvrté lampy. To, co jsme považovali za bílou barvu čtvrtého projektoru, se teď jeví nažloutlé. Vhodnými změnami intenzity červené, zelené a modré barvy můžeme po několika pokusech najít barvu, která se velmi blíží k tomuto odstínu „krémové“, jakou má prstenec. Proto není těžké uvěřit, že můžeme vytvořit všechny barvy. Za chvíli se pokusíme udělat žlutou barvu, ale nejdřív si řekneme, že existuje barva, jejíž vytvoření může být velmi obtížné. Lidé, kteří přednášejí

o barvách, vytvářejí všechny možné barvy, ale nikdy ne *hnědou* a je dost těžké si vzpomenout, zda jsme vůbec někdy viděli hnědé světlo. Co se toho týká, tato barva se nikdy nepoužívá při vytváření světelných efektů na jevištích, takže se zdá, že vytvořit hnědé světlo může být nemožné. Abychom zjistili, zda lze hnědé světlo vytvořit, poznamenejme, že hnědé světlo je něco, co nejsme zvyklí vidět bez příslušného pozadí. Fakticky ho můžeme sestavit smísením červené a žluté. Na důkaz toho, že se díváme na hnědé světlo, prostě zvýšíme jas pozadí, proti kterému se na světlo díváme a zjistíme, že je to skutečně to, co nazýváme hnědou! Hnědá, to je vždy tmavá barva na světlejším pozadí. Hnědou barvu můžeme snadno měnit. Když dáme například pryč trochu zelené, dostaneme červenohnědou jako je barva čokolády, a když přidáme trochu zelené, dostaneme tu strašnou barvu, jakou mají uniformy americké armády, ale světlo této barvy není tak strašné samo o sobě; když ho vidíme proti světlému pozadí, je žlutavě zelené.

Nyní dejme na čtvrtou lampu žlutý filtr a pokusme se takovou barvu namístit. (Samozřejmě, že intenzita musí být v rozsahu jednotlivých lamp. Nemůžeme namístit příliš jasnou barvu, neboť lampy nemusí mít dostatečný výkon.) Žlutou však namístit můžeme. Použijeme směs zelené a červené a k tomu přidáme špetku modré, aby to bylo perfektní. Snad jsme ochotni věřit, že při dobrých podmínkách můžeme dokonale namístit jakoukoliv danou barvu.

Nyní si proberme zákony mísení barev. V první řadě jsme zjistili, že různá spektrální složení mohou vytvářet stejnou barvu. Dále jsme zjistili, že „libovolnou“ barvu lze vytvořit smísením tří barev – červené, modré a zelené. Nejzajímavější rys mísení barev je tento: Máme-li nějaké barevné světlo, řekněme  $X$ , které je pro oko nerozlišitelné od světla  $Y$  (může mít jiné spektrální složení, ale *jeví se* jako nerozlišitelné), nazýváme tato světla „stejnými“ v tom smyslu, že oko je vnímá jako stejná a píšeme

$$X = Y. \quad (35.2)$$

Zde máme jeden z velkých zákonů barev: Jsou-li dvě spektrální složení nerozlišitelná, a přidáme-li ke každému z nich, řekněme, světlo  $Z$  (zápis  $X + Z$  znamená, že obě světla svítí na stejné místo) a pak vezmeme  $Y$  a přidáme k němu stejné množství stejného světla  $Z$ , nové směsi jsou též navzájem nerozlišitelné

$$X + Z = Y + Z. \quad (35.3)$$

Před chvílí jsme namístiti žlutou barvu, aby odpovídala předloze. Osvítíme-li ji spolu s předlohou růžovým světlem, nové barvy si budou opět odpovídat. Takže přidání jakéhokoliv světla k barvám, které již jsou stejné, zanechá opět stejné barvy. Mohli bychom to shrnout tak, že máme-li jednu světla, která se barevně rovnají, když je vidíme vedle sebe a za stejných podmínek, jejich rovnost se zachová a jedno světlo můžeme zaměnit druhým při libovolném mísení barev. Fakticky se ukazuje, a je to velmi důležité a zajímavé, že tato rovnost barev světla nezávisí na charakteristikách oka v době pozorování. Víme, že když se dlouho díváme na jasnou červenou plochu nebo do jasného červeného světla, a pak se podíváme na bílý papír, zdá se být zelenkavý a i ostatní barvy vidíme pozměněny. Když však máme nyní dvě stejná, řekněme, žlutá světla, jež skutečně vnímáme jako stejná, pak se nadlouho zahledíme na jasnou červenou plochu, a opět se podíváme zpět na naše žluté barvy, už nebudou vypadat jako žluté. Nevím, jak budou vypadat, ale přesto se budou jevit stále stejné. Proto, když se oko přizpůsobuje různě intenzitě světla, rovnost barev stále platí se zřejmou výjimkou, když se dostaneme do oblasti, kde je intenzita světla tak malá, že vidění se přesouvá z čípků na tyčinky. Pak už rovnost barev neplatí, neboť používáme jiný systém.

Druhý princip týkající se mísení barev je tento: Jakoukoliv barvu lze vytvořit ze tří různých barev, v našem případě z červené, zelené a modré. Jejich mísením ve vhodném poměru můžeme

## BAREVNÉ VIDĚNÍ

vytvořit barvu, jakou chceme, jak jsme si ukázali na našich dvou příkladech. Tyto zákony jsou velmi zajímavé i matematicky. A pro ty, jež matematické vyjádření zajímá, je uvedeme. Předpokládejme, že vezmeme naše tři barvy, červenou, zelenou a modrou, označíme je jako  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a budeme je nazývat našimi primárními barvami. Každou barvu pak lze vytvořit smísením těchto tří barev v určitých množstvích; například množství  $a$  barvy  $A$  plus množství  $b$  barvy  $B$  a množství  $c$  barvy  $C$  dává barvu  $X$ .

$$X = aA + bB + cC. \quad (35.4)$$

Předpokládejme, že jinou barvu  $Y$  lze vytvořit ze stejných barev.

$$Y = a' A + b' B + c' C. \quad (35.5)$$

Pak se ukazuje, že smísením těchto dvou světél se získá světlo, jež lze vytvořit tak, že sčítáme složky  $X$  a  $Y$  (je to jeden z důsledků zákonů, o nichž jsme právě mluvili):

$$Z = X + Y = (a + a') A + (b + b') B + (c + c') C. \quad (35.6)$$

Vypadá to jako matematika sčítání vektorů, kde  $(a, b, c)$  jsou souřadnice jednoho vektoru a  $(a', b', c')$  jsou souřadnice druhého vektoru, přičemž nové světlo  $Z$  je „součtem“ těchto vektorů. To je předmět, který vždy přitahoval fyziky i matematiky. Například Schrödinger napsal o barevném vidění nádherný článek, v němž rozvinul tuto teorii vektorů k analýze smísení barev.

Vzniká otázka, které primární barvy jsou správné. Něco takového jako správné primární barvy k smísení světla neexistuje. Z praktického hlediska mohou existovat tři barevné pigmenty, z nichž lze namíchat víc barevných odstínů a jež jsou užitečnější než jiné tři, ale to nás nyní nezajímá. Libovolná tři různě barevná světla<sup>43)</sup> lze vždy smísit ve správném poměru a vznikne jakákoliv jiná barva. Můžeme předvést tento fantastický fakt? Místo červené, zelené a modré použijeme v našich projektech červenou, modrou a žlutou. Můžeme použít červenou, modrou a žlutou k vytvoření dejme tomu zelené?

Mísením těchto tří barev v různých poměrech dostáváme různé barvy v rozsahu téměř celého spektra, ale přes mnohé pokusy zjistíme, že nic z toho se nepodobá zelené. Otázka zní: „Můžeme vytvořit zelenou?“ Ano, ale jak? Když do zelené přimícháme trochu červené, vznikne barva, kterou můžeme vytvořit pomocí určitého poměru žluté a modré! Takže nakonec jsme dosáhli rovnosti barev, jenomže jsme museli udělat malý podvod tím, že jsme přidali červenou na druhou stranu. Protože však máme určitou matematickou představu, chápeme, že jsme vlastně dokázali nikoliv to, že  $X$  lze vždy vytvořit, dejme tomu, z červené, modré a žluté, ale přidáním červené na druhou stranu jsme zjistili, že červená plus  $X$  se dá vytvořit z modré a žluté. Převedení červené na druhou stranu rovnice, můžeme interpretovat jako záporný příspěvek, takže dovolíme-li, aby koeficienty v rovnici, jako je (35.4), byly jak kladné tak i záporné, a interpretujeme-li záporný příspěvek tak, že znamená přidání dané barvy na druhou stranu, můžeme tvrdit, že jakoukoliv barvu lze vytvořit libovolnými třemi barvami a něco takového jako fundamentální primární barvy neexistuje.

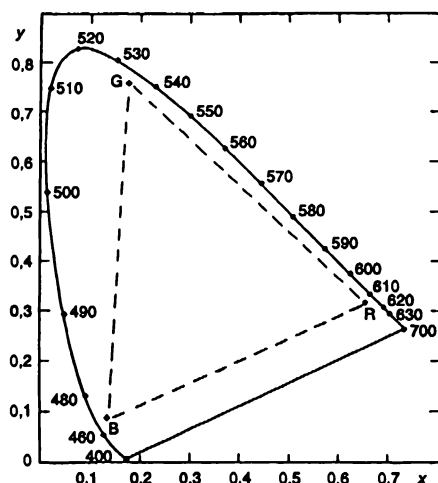
Můžeme se zeptat, zda existují takové tři barvy, z nichž lze získat všechny ostatní jen pomocí kladných příspěvků. Odpověď je, že neexistují. Každá sada tří primárních barev vyžaduje pro některé barvy záporné příspěvky a proto neexistuje jediný způsob, jak definovat primární barvy.

<sup>43)</sup> Samozřejmě s výjimkou případu, kdy barva jednoho z nich vznikne smísením barev druhých dvou.

V základních učebnicích se říká, že jsou to červená, zelená a modrá, ale to je dáno jen tím, že z těchto barev lze získat větší spektrum barev jen pomocí kladných příspěvků než pro některé jiné kombinace.

### 35.4 DIAGRAM BAREVNOSTI

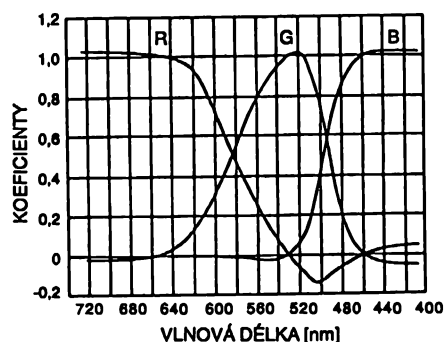
Nyní se podíváme na kombinace barev na úrovni matematiky v geometrickém vyjádření. Je-li možné každou barvu reprezentovat rovnicí (35.4), můžeme ji znázornit jako vektor v prostoru, kde na osy barevných souřadnic nanášíme hodnoty  $a, b$  a  $c$  a určité barvě odpovídá určitý bod. Odpovídají-li jiné barvě jiné hodnoty ( $a', b', c'$ ), odpovídá jí jiný bod. Smísením těchto dvou barev vznikne barva, kterou získáme sčítáním těchto dvou vektorů. Tento diagram lze do roviny zjednodušit na následujícím základě: zdvojnásobíme-li pro nějakou barvu  $a, b$  a  $c$ , tj. když je všechny zvětšíme ve stejném poměru, dostaneme stejnou barvu jen jasnější. Proto, rozhodneme-li se všechno zredukovat na stejnou světelnou intenzitu, můžeme použít projekce na rovinu, je to provedeno na obr. 35.4. Z toho vyplývá, že libovolná barva, kterou lze získat smísením dvou barev v libovolném poměru, se bude nacházet někde na čáře spojující tyto dva body. Například pro stejný poměr barev bude výsledná barva ležet ve středu mezi nimi a pro  $1/4$  jedné a  $3/4$  druhé bude ležet ve čtvrtině vzdálenosti od první k druhé. Vezmeme-li za primární barvy modrou, zelenou a červenou, vidíme, že všechny barvy, jež z nich můžeme vytvořit pomocí kladných koeficientů, leží uvnitř čárkovaného trojúhelníka, jež obsahuje skoro všechny běžné barvy. Všechny možné viditelné barvy jsou totiž ohraničeny zakřivenou čarou ohraničující divně tvarovanou plochu. Odkud pochází tato plocha? Kdosi jednou velmi pozorně sladil všechny viditelné barvy pomocí tří speciálních barev. Nemusíme ale kontrolovat všechny viditelné barvy, stačí, když si zkontrolujeme čisté spektrální barvy, spektrální čáry. Libovolné světlo můžeme považovat za součet různých kladných příspěvků různých čistých spektrálních barev – čistých z fyzikálního hlediska. Dané světlo bude obsahovat určité množství spektrálních barev – červené, žluté, modré atd. Proto, když víme, kolik je třeba každé naší primární barvy k vytvoření těchto čistých složek, můžeme vypočítat, kolik je jí třeba k vytvoření dané barvy. Najdeme-li tedy barevné koeficienty všech spektrálních barev pro libovolné dané tři primární barvy, můžeme sestavit celou tabulku mísení barev.



Obr. 35.4 Standardní diagram barevnosti



## BAREVNÉ VIDĚNÍ



Obr. 35.5 Barevné koeficienty pro čisté spektrální barvy vyjádřené pomocí určité sady primárních barev. (R – červená, G – zelená, B – modrá)

Příklad takového experimentálního mísení barev je na obr. 35.5. Je na něm vidět, jaké množství každé ze tří různých primárních barev, červené, zelené a modré, je třeba k vytvoření všech spektrálních barev. Na levém konci spektra je červená, vedle je žlutá a tak až po modrou. Všimněme si, že v některých bodech jsou nutná záporná znamení. Na základě takových údajů je pak možné najít polohy všech barev na náčrtku, na němž jsou osy  $x$  a  $y$  dány do souvislosti s množstvím různých použitých primárních barev. Takovým způsobem byly nalezeny zakřivené hraniční čáry. Jsou to polohy čistých spektrálních čar. Každou libovolnou barvu lze vytvořit pomocí sčítání spektrálních čar, proto vše, co lze vytvořit spojením jedné části hraniční čáry s její druhou částí, odpovídá barvám přítomným v přírodě. Přímá čára spojuje krajní fialový bod s krajním červeným bodem spektra. Je to poloha purpurové. Uvnitř hraničních čar jsou barvy, jež lze vytvořit pomocí světla a vně barvy, jež nelze pomocí světla vytvořit, a které nikdo nikdy neviděl (snad jen v halucinacích).

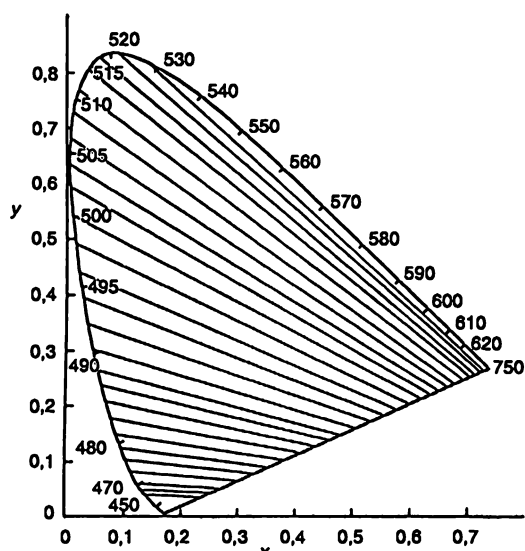
### 35.5 MECHANIZMUS BAREVNÉHO VIDĚNÍ

Další stránka problému souvisí s otázkou, proč se barvy tak chovají. Podle nejjednodušší teorie, kterou navrhl Young a Helmholtz, se předpokládá, že v oku jsou tři různé pigmenty citlivé na světlo, jež mají různá absorpční spektra, takže jeden pigment silně absorbuje, dejme tomu, červené světlo, druhý modré a třetí zelené světlo. Když je osvětíme, nastane v těchto třech oblastech různá absorpce a tyto tři části informace se v mozku nebo v oku, případně někde jinde zpracovávají na výsledný barevný vjem. Snadno lze ukázat, že z těchto předpokladů by vyplývala všechna pravidla mísení barev. O celé věci se mnoho debatovalo, další problém je samozřejmě určit absorpční charakteristiky každého z těchto tří pigmentů. Bohužel se ukazuje, že vzhledem k tomu, že barevné souřadnice lze libovolně transformovat, můžeme při experimentech s mísením barev najít jen všechny možné lineární kombinace absorpčních křivek, ale ne křivky pro jednotlivé pigmenty. Lidé se snažili různými způsoby získat určitou křivku, jež by popsala nějakou fyzikální vlastnost oka. Jedna z nich se nazývá křivka jasu a je na obr. 35.3. Jsou tam dvě křivky, jedna pro vidění za šera, druhá pro vidění za světla – ta je křivkou jasu pro čípky. Měř se tak, že se zjišťuje, jaké je nejslabší barevné světlo, jež jsme ještě schopni zaregistrovat. Určuje míru citlivosti oka v různých spektrálních oblastech. Tu lze změřit i jiným zajímavým způsobem. Vezmeme-li dvě barvy, jimiž budeme střídavě osvětlovat nějakou plochu a bude-li frekvence střídání barev dost nízká, budeme pozorovat blikání. Budeme-li barvy střídát rychleji, při určité

## DIAGRAM BAREVNOSTI • MECHANIZMUS BAREVNÉHO VIDĚNÍ

frekvenci, jež závisí na jasnosti světla, blikání ustane. Může to být třeba při 16 opakováních za sekundu. Nyní nastavíme jas nebo intenzitu obou barev tak, aby při 16 cyklech blikání ustalo. Abychom s takto nastavenou intenzitou světla opět pozorovali blikání barev, musíme frekvenci hodně snížit. Takže při vyšších frekvencích vzniká blikání jasu a při nižších frekvencích blikání barev. Pomocí techniky blikání lze nastavit dvě barvy na „stejný jas“. Výsledek je téměř stejný jako výsledky měření prahové citlivosti oka na vidění světla pomocí čípků. Většina pracovníků používá k definici křivky jasu tuto metodu.

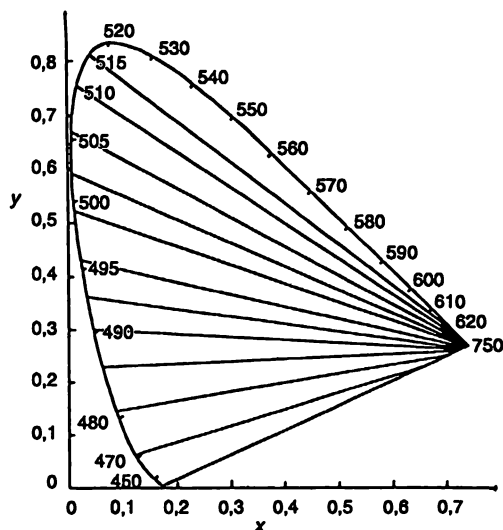
Nacházejí-li se v oku tři pigmenty citlivé na barvy, je třeba pro každý z nich určit tvar absorpčního spektra. Jak? Víme, že jsou lidé, kteří jsou barvoslepi – osm procent mužů a půl procenta žen. Většina barvoslepých lidí nebo lidí s abnormálním barevným viděním mají jinou míru citlivosti k různým barvám, ale k vytvoření dané barvy stále potřebují tři různé barvy. Jsou však i tací, jež se nazývají dichromati a kteří získávají libovolný barevný vjem jen pomocí dvou primárních barev. Vnucuje se tady myšlenka, že jim chybí jeden ze tří pigmentů. Kdybychom našli tři druhy barvoslepých dichromatů, kteří mají různá pravidla mísení barev, jedněm by měla chybět červená, druhým zelená a třetímodrá pigmentace. Měření těchto tří typů bychom mohli určit tři hledané křivky! Tři druhy barvoslepých dichromatů skutečně existují. Dva z nich jsou dost běžné a třetí je dost vzácné. Pomocí nich se podařilo určit absorpční spektra pigmentů.



Obr. 35.6 Polohy barev zaměňovaných deuteranopy

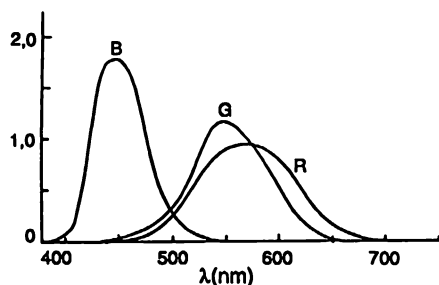
Na obr. 35.6 je znázorněno mísení barev pro určitý druh barvoslepých osob, tzv. deuteranopů. Pro ně nejsou polohy konstantních barev body, ale určité přímky, podél nichž se jim barva jeví jako stejná. Pokud je teorie, že jim chybí jedna ze tří informací, správná, všechny takové přímky by se měly protínat v jednom bodě. Když tento graf pozorně změříme, zjistíme, že se dokonale protínají. Ovšem, je to proto, že graf byl sestaven matematikem a nepředstavuje skutečné údaje! Je pravda, podíváme-li se na nejnovější články se skutečnými údaji, na grafu, jako na obr. 35.6, není průsečík všech přímek na správném místě. Pomocí přímek na uvedeném obrázku nemůžeme určit rozumné spektrum; potřebovali bychom negativní i pozitivní absorpci pro různé oblasti. Pomocí nových údajů výzkumů Justové vychází každá z absorpčních křivek všude kladná.

## BAREVNÉ VIDĚNÍ



Obr. 35.7 Polohy barev zaměňovaných protanopy

Na obr. 35.7 je znázorněn jiný typ barvosleposti, tzv. protanopický typ, jenž má ohnisko v blízkosti červeného konce hraniční křivky. To přibližně odpovídá i údajům Justové. Pomocí tří typů barvosleposti byly nakonec definitivně určeny tři křivky citlivosti pigmentů, jak jsou znázorněny na obr. 35.8. Definitivně? Snad. Otázkou je, zda platí třipigmentová teorie, zda je barvoslepost důsledkem toho, že jeden pigment chybí a dokonce i to, zda jsou údaje o mísení barev u barvoslepých správné. Různí odborníci mají různé výsledky. Na tomto poli se stále ještě pracuje.



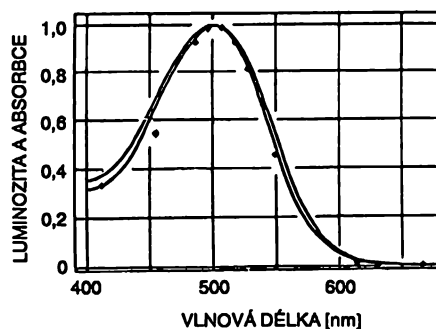
Obr. 35.8 Spektrální citlivost receptorů normálního trichromata

### 35.6 FYZIOCHEMIE BAREVNÉHO VIDĚNÍ

A což tak zkontrolovat, zda tyto křivky platí pro skutečné pigmenty v oku? Pigmenty, jež lze získat ze sítnice, se většinou skládají z pigmentu nazvaného rhodopsin (oční purpur). Jeho nejzajímavější vlastností je za prvé, že se nachází téměř u všech obratlovců a za druhé, že jeho křivka citlivosti se krásně shoduje s citlivostí oka, jak vidíme na obr. 35.9. Jsou tam naneseny ve stejném měřítku citlivosti rhodopsinu a oka adaptovaného na tmou. Je jasné, že to je pigment, pomocí kterého vidíme za šera; oční purpur je pigment tyčinek a nemá nic společného s barevným viděním. Tento fakt byl zjištěn v roce 1877. Dokonce i dnes lze říci, že barevné

## FYZIOCHEMIE BAREVNÉHO VIDĚNÍ

pigmenty čípků se nikdy nepodařilo získat ve zkumavce. V roce 1958 bylo možné tvrdit, že barevné pigmenty nikdy nikdo neviděl. Od té doby Rushton pomocí jednoduchého a krásného experimentu dva z nich detekoval.



Obr. 35.9 Citlivost oka přizpůsobeného tmě v porovnání s absorpční křivkou rhodopsinu

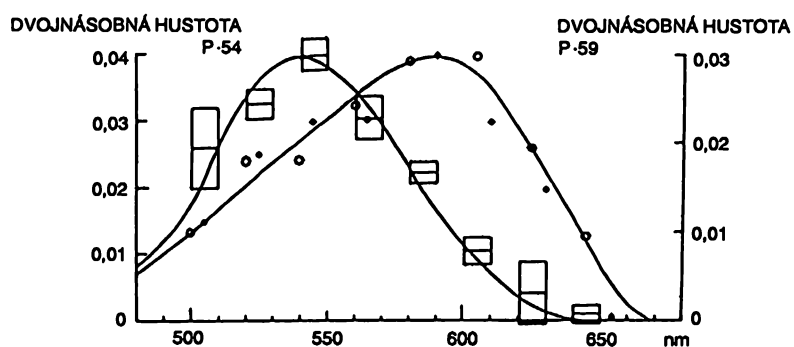
Těžkosti zřejmě spočívají v tom, že když je oko tak málo citlivé na jasné světlo ve srovnání s citlivostí na nízké intenzity, potřebuje k vidění mnoho rhodopsinu, ale nepotřebuje tolik barevných pigmentů k vidění barev. Rushtonova myšlenka byla ponechat pigmenty v oku a nějak je změřit. Provedl to následovně. Existuje přístroj nazvaný oftalmoskop, jímž se pomocí čoček vyšle světlo do oka a odražené světlo přicházející zpět se soustředí do ohniska. Pomocí tohoto přístroje lze zjistit, kolik světla se odrazilo zpět. Tak lze měřit koeficient odrazu světla, které prošlo pigmentem dvakrát (světlo se na očním pozadí odráží a znovu prochází pigmentem při návratu zpět). Příroda není vždy tak krásně organizovaná. Čípky jsou zkonstruovány tak zajímavě, že světlo, které vstupuje do čípku, se odráží od stěn a postupuje dolů k malým citlivým bodům ve vrcholu. Světlo jde až k citlivému bodu, odráží se a vrací zpět a opět vylétá ven, takže na své cestě prochází kolem velkého množství tohoto pigmentu. Při pohledu na žlutou skvrnu, kde nejsou tyčinky, nám rhodopsin situaci nekomplikuje. Ale barva sítnice byla pozorována již dávno, je oranžovo – růžová, jsou v ní také krevní cévy a materiál zadní stěny oka, jenž má také svou barvu. Jak víme, že se díváme na pigment? Odpověď je tato: Za prvé, vezmeme si barvoslepu osobu, která má méně pigmentu a pro kterou je proto možné snadněji provést analýzu. Za druhé, různé pigmenty, jako rhodopsin, mění svou intenzitu, když je vybíjí světlo; při osvětlení mění svou koncentraci. Proto při sledování absorpčního spektra oka osvětlil Rushton celé oko dalším světlem, které měnilo koncentraci pigmentu a měřil změnu, která nastala ve spektru. Samozřejmě, že tento rozdíl nemá nic společného s množstvím krve nebo s barvou odrazových vrstev apod., ale závisí jen na pigmentu. Tak Rushton získal křivku pro protanopické oko, která je na obr. 35.10.

Druhá křivka na obr. 35.10 je křivka získaná pro normální oko. Tato křivka vznikla měřením normálního oka. Známe-li vlastnost jednoho pigmentu, můžeme vybělit druhý pigment červeným světlem, na nějž není první pigment citlivý. Červené světlo nemá na protanopické oko vliv, ale ovlivňuje normální oko, takže tak můžeme získat křivku pro chybějící pigment. Tvar jedné křivky se shoduje se zelenou křivkou Justové, ale červená křivka je o něco posunuta. Snad se dostáváme na správnou stopu, ale je možné, že ne, neboť poslední výzkumy s deuteranopy neukazují na to, že by nějaký pigment chyběl.

Otázka barvy není jen otázkou fyziky světla. Barva je *vjem* a *vjem* barvy se v různých situacích mění. Například máme-li růžové světlo vytvořené překrýváním bílého a červeného světla (růžová

## BAREVNÉ VIDĚNÍ

je jediná barva, kterou můžeme vytvořit pomocí bílé a červené), můžeme ukázat, že bílá se bude zdát modrá. Postavíme-li do cesty paprskům nějaký předmět, dostaneme od něho dva stíny – jeden osvětlený pouze bílým světlem a druhý pouze červeným světlem. Většině lidí se zdá, že „bílý“ stín je modrý, ale když ho zvětšujeme, až pokryje celé plátno, najednou vidíme, že je bílý a ne modrý! Další podobné efekty můžeme získat smísením červeného, žlutého a bílého světla. Červená, žlutá a bílá mohou vytvořit pouze oranžovožluté barvy, tedy když je smísíme v přibližně stejném poměru, dostaneme jen oranžové světlo. Navzdory tomu, když z těchto světél vytvoříme stíny s různě překrývajícími se barvami, dostaneme celou sérii nádherných barev, které tam vlastně nejsou (světlo je jen oranžové), ale jsou v našich vjemech. Jasně vidíme mnoho různých barev, které jsou zcela jiné než „fyzikální“ barvy v paprsku. Velmi důležité je, abychom si uvědomili, že již sítnice o světle „přemýšlí“; porovnává to, co vidí v jedné oblasti s tím, co vidí v druhé, i když si to neuvědomuje. O našich poznacích, jak to sítnice dělá, se dočtete v další kapitole.



Obr. 35.10 Absorpční spektrum barevného pigmentu barvosleпého protanopa (čtverce) a normálního oka (tečky)

# Mechanismus vidění

---

## 36.1 BAREVNÝ VJEM

## 36.2 FYZIOLOGIE OKA

## 36.3 TYČINKY

## 36.4 SLOŽENÉ OKO HMYZU

## 36.5 JINÉ OČI

## 36.6 NEUROLOGIE ZRAKU

### **36.1 BAREVNÝ VJEM**

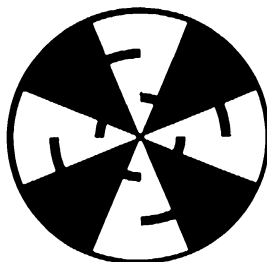
Při studiu pocitu vidění si musíme uvědomit, že nevidíme náhodné barevné nebo světelné skvrny (mimo galerie moderního umění)! Když se na něco díváme, vidíme člověka nebo věc; jinými slovy mozek interpretuje, co vidíme. Jak to dělá, nikdo neví a je třeba dodat, že to dělá na velmi vysoké úrovni. I když k tomu, abychom rozeznali člověka, potřebujeme dlouhou zkušenost, má vidění mnoho stránek, které jsou mnohem elementárnější, ale které také zahrnují kombinování informací z různých částí toho, co vidíme. Abychom pochopili vytváření celkového obrazu, stojí za to prostudovat první stupně skládání informací z různých buněk sítnice. V této kapitole se soustředíme hlavně na tento aspekt vidění, i když se vedle toho zmíníme i o dalších problémech, jež s tím souvisejí.

Příkladem akumulace současných informací z různých částí oka na velmi elementární úrovni, aniž bychom si to uvědomovali nebo mohli vůlí ovládat, byl modrý stín vytvořený bílým světlem při současném osvětlení plátna bílým a červeným světlem. Tento efekt zahrnuje přinejmenším naši znalost o tom, že pozadí plátna je růžové, i když se díváme jen na modrý stín, z něhož do našeho oka přichází jen bílé světlo. Někde došlo ke spojení různých částí informací. Čím známější a úplnější je kontext toho, co vidíme, tím udělá oko větší korekce všech zvláštností. Land skutečně ukázal, že smísíme-li tuto zdánlivou modrou s červenou v různých poměrech pomocí dvou průhledných fotografických desek, které různě absorbují červené a bílé světlo, pak lze dosáhnout celkem věrného znázornění reálné scény s reálnými předměty. V tomto případě dostaneme také mnoho intermediálních zdánlivých barev analogických tomu, co bychom dostali

## MECHANIZMUS VIDĚNÍ

smísením červené a modro – zelené; zdá se to být téměř úplný systém barev, ale podíváme-li se na ně velmi pozorně, vidíme, že nejsou příliš dobré. I tak je překvapující, jak mnoho můžeme získat pouze z červené a bílé. Čím víc je scéna podobná reálné situaci, tím více jsme schopni vykompenzovat skutečnost, že světlo není ve skutečnosti žádné jiné, jen růžové!

Dalším příkladem je vznik „barev“ na černobílém rotujícím kotouči, jehož černé a bílé plochy jsou znázorněny na *obr. 36.1*. Při rotaci kotouče jsou změny světlé a tmavé stejné pro jakýkoliv poloměr, rozdíly je jen v pozadí pro dva druhy „proužků“. A přece, jeden z prstenců se jeví zbarvený jednou barvou a druhý druhou.<sup>44)</sup> Proč je tyto barvy vidět, to zatím ještě nikdo neví, ale je jasné, že dochází ke skládání informací na velmi elementární úrovni, nejpravděpodobněji v samotném oku.



Obr. 36.1 Při rotaci kotouče se na jednom z tmavých prstenců objeví barvy. Když se změní směr rotace kotouče, barvy se objeví na druhém prstenci.

Téměř všechny dnešní teorie barevného vidění se shodují v tom, že údaje o mísení barev nasvědčují, že v čípcích oka jsou jen tři druhy pigmentů, a že k barevnému vjemu dochází v podstatě díky spektrální absorpci v těchto třech pigmentech. Ale výsledný vjem, který je spojen s absorpčními charakteristikami těchto pigmentů, není roven nutně součtu jednotlivých vjemů. Všichni souhlasíme s tím, že žlutá prostě nevypadá jako červeno – zelená; objev, že světlo je ve skutečnosti směs barev, může být pro mnoho lidí obrovským překvapením. Je zřejmé, že vnímání světla souvisí s jiným procesem než s pouhým mísením. Hudební akord je tvořen například třemi tóny, jež jsou stále přítomny a když se dobře zaposloucháme, můžeme je slyšet každý zvlášť. Nemůžeme se však dobře zadívat a uvidět červenou a zelenou zvlášť.

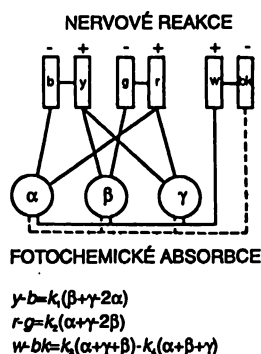
Starší teorie vidění tvrdily, že existují tři pigmenty a tři druhy čípků, každý obsahující jeden pigment, a že nervy spojují každý čípek s mozkem, takže do mozku se přenáší trojí informace a tam už se s ní může dít cokoli. To je samozřejmě neúplná představa. Objev, že informace se přenáší do mozku optickým nervem, nic neznamená, protože to není ani jen začátek řešení našeho problému. Musíme si položit základnější otázky: Záleží na tom, kde se informace spojují, vyplývá z toho nějaký rozdíl? Je důležité to, že se informace přenáší do mozku optickým nervem nebo může předtím provést sítnice nějakou analýzu? Na obrázku jsme viděli, že sítnice je velmi komplikovaná s množstvím propojení (*obr. 35.2*), a že by mohla vykonávat nějakou analýzu.

Lidé studující anatomii a vývoj oka ukázali, že sítnice je ve skutečnosti součástí mozku. Po dobu embryonálního vývoje se část mozku vysune dopředu, přičemž se vyvinou dlouhá vlákna, která potom spojují oko s mozkem. Sítnice je vnitřně organizována stejně jako mozek a kdosi to výstižně vyjádřil takto: „Mozek si našel způsob, jak se dívat na svět.“ Oko je část mozku, která se takříkajíc dotýká vnějšího světla. Není proto nepravděpodobné, že už v samotné sítnici nastává určitá analýza barev.

<sup>44)</sup> Barvy závisí na rychlosti otáčení, intenzitě osvětlení a do určité míry na tom, kdo se dívá, a jak soustředěně se na ně dívá.

## BAREVNÝ VJEM

Tím se nám nabízí zajímavá možnost. U žádného jiného smyslu, který umožňuje nějaká měření, nedochází před vstupem do nervu k tak velkému množství procesů, jež by bylo možné nazvat výpočty. Pro všechny ostatní smysly probíhají výpočty v samotném mozku, kde je tolik vzájemných spojů, že dostat se na určité místo a provést tam měření, je téměř nemožné. U zrakového smyslu máme světlo, tři vrstvy buněk vykonávajících výpočty a výsledek se přenáší zrakovým nervem. Máme proto první možnost fyziologicky pozorovat, jak asi pracují první vrstvy mozku při svých krocích. Je to dvojnásob zajímavé, nejen z hlediska vidění, ale i z hlediska celkové fyziologie.



Obr. 36.2 Nervové spoje podle „oponentní“ teorie barevného vidění

Skutečnost, že existují tři pigmenty neznamena, že musí být tři druhy vjemů. Jiná teorie barevného vidění má zcela protikladná schémata uspořádání barev (obr. 36.2). Podle ní jedno z nervových vláken přenáší hodně impulsů, když oko vidí žlutou barvu a málo impulsů, když vidí modrou. Další nervové vlákno přenáší stejným způsobem zelenou a červenou informaci a další bílou a černou. Jinak řečeno, někdo se již pokusil odhadnout způsob připojení a metodu výpočtu.

Problémy, jež bychom rádi vyřešili odhadem těchto výpočtů, souvisí s otázkou zdánlivých barev, které vidíme na růžovém podkladě, tím, co se stane, když se oko adaptuje na různé barvy a otázkou tzv. psychologických jevů. Psychologickými jevy jsou například takové jevy, jako že bílou „nechtíme“ jako červenou, žlutou a modrou. Tato teorie barevného vidění dále pokročila, protože psychologové tvrdí, že existují čtyři zdánlivé čisté barvy: „Existují čtyři stimuly, jež mají pozoruhodnou schopnost vyvolat psychologicky jednoduché barvy – modrou, žlutou, zelenou a červenou. Na rozdíl od žlutohnědé, červenohnědé, purpurové nebo od většiny odlišitelných barev jsou tyto jednoduché barvy nesměsáné v tom smyslu, že žádná z nich se nezúčastňuje na podstatě druhé; přesněji modrá není nažloutlá, načervenalá nebo nazelenalá atd.; jsou to psychologicky primární barvy.“ To nazýváme psychologickým faktem. Abychom zjistili, na základě čeho se došlo k tomuto konstatování, musíme opravdu těžko hledat v celé odborné literatuře. Vše, co o tom najdeme v moderní literatuře, je opakování toho, co jsme citovali. Případně bývá citován jistý německý psycholog, pro nějž je uznávanou autoritou Leonardo da Vinci, který, jak všichni dobře víme, byl velký umělec. Říká: „Leonardo si myslel, že existuje pět barev.“ Hledáme-li dál, v ještě starší knize najdeme takový důkaz: „Purpurová je červeno – modrá, oranžová je červeno – žlutá, ale můžeme vidět červenou jako purpurovo – oranžovou? Není červená a modrá jednodušší než purpurová nebo oranžová? Průměrná osoba, které se zeptáte, jaké jsou jednoduché barvy, vám vyjmenuje červenou, žlutou a modrou, tyto tři a některí pozorovatelé dodají ještě čtvrtou, zelenou. Psychologové si zvykli považovat tyto čtyři za



významné barvy.“ Taková je tedy situace v psychologické analýze věci. Když každý říká, že jsou tři, tak jsou tři, a když někdo řekne, že jsou čtyři a oni chtějí, aby byly čtyři, tak budou čtyři. Na tom jsou vidět těžkosti psychologického výzkumu. Je jasné, že máme takové pocity, ale informace o nich lze získat jen velmi těžko.

Druhým směrem, kterým se můžeme ubírat, je směr fyziologický, to je experimentálně zjistit, co se ve skutečnosti děje v mozku, v oku, v sítnici nebo kdekoli a můžeme objevit, že se po určitých nervových vláknech přenášejí určité kombinace impulzů z různých buněk. Mimochodem, primární pigmenty se nemusí nacházet v oddělených buňkách; mohou být buňky, jež obsahují směsi různých pigmentů, buňky s červeným a zeleným pigmentem, buňky, kde jsou všechny tři pigmenty (informace od všech tří je pak informace o bílé barvě) atd. Existuje mnoho způsobů, jak lze celý systém poskládat a na nás je, abychom objevili, jak je to v přírodě. Nakonec, můžeme mít naději, že pochopíme-li fyziologické souvislosti, potom aspoň zčásti pochopíme psychologické aspekty, o nichž jsme mluvili. Proto se podíváme tímto směrem.

## 36.2 FYZIOLOGIE OKA

Abychom si připomněli propojení uvnitř sítnice, znázorněné na *obr. 35.2*, nebudeme mluvit jen o barevném vidění, ale o vidění obecně. Sítnice je ve skutečnosti jako povrch mozku. I když skutečný obraz, jak ho vidíme mikroskopem, je o něco komplikovanější než tento schématický náčrt, můžeme při pozorné analýze vidět všechna vzájemná spojení. Nejsou pochybnosti, že jedna část povrchu sítnice je spojena s druhými částmi a že informace, jež se šíří v dlouhých axonech k nervovým buňkám, jsou kombinace informací z mnoha buněk. Jsou zde tři vrstvy buněk s navazujícími funkcemi: buňky sítnice, jež jsou ovlivňovány světlem, intermediální buňky, které přebírají informace od jednotlivých nebo od několika buněk sítnice a odevzdávají je buňkám v třetí vrstvě, odkud se přenášejí do mozku. Buňky v těchto vrstvách jsou křížově propojeny všemi možnými směry.

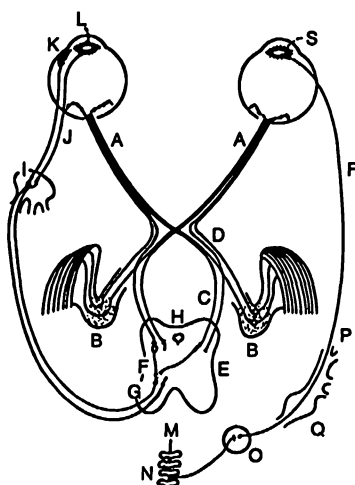
Nyní přejdeme k některým stránkám struktury a činnosti oka (viz *obr. 35.1*). Zaostřování světla se uskutečňuje hlavně rohovkou, díky jejímu zakřivenému povrchu, na němž se paprsky lámou. Proto nevidíme dobře pod vodou, neboť ve vodě nemáme dostatečný rozdíl mezi indexy lomu rohovky, který je roven 1,37 a vody, jenž je 1,33. Za rohovkou je tekutina s indexem lomu téměř 1,33 a pak čočka, která má velmi zajímavou strukturu: skládá se ze série vrstev jako cibule, jenomže je celá průhledná. Uprostřed má index lomu 1,40 a na krajích 1,38. (Bylo by dobré, kdybychom uměli vyrobit optické sklo s proměnlivým indexem lomu. Pak bychom nemuseli zakřivovat povrch čoček, jako to musíme dělat při konstantním indexu.) Navíc rohovka nemá tvar kulové plochy. U sférické čočky se projevuje určitá sférická aberace. Rohovka je na okrajích „plošší“ než kulová čočka, takže má menší sférickou aberaci! Pomocí systému rohovka – čočka se světlo zaostřuje na sítnici. Při pohledu na blízké a vzdálenější předměty se čočka naplná nebo uvolňuje, čímž přizpůsobuje ohnisko různým vzdálenostem. K přizpůsobení oka celkovému množství světla slouží duhovka, podle níž udáváme barvu očí jednotlivých osob – hnědou, modrou apod. Když se množství světla zvětšuje nebo zmenšuje, duhovka se stahuje nebo rozšiřuje.

Podívejme se na nervový systém, jenž řídí akomodaci čočky, pohyby oka, svaly, jež pohybují okem a duhovkou a který je schématicky znázorněn na *obr. 36.3*. Největší část informace, jež vychází z oka po optickém nervu A, se rozdělí do dvou svazků (o nichž ještě bude řeč) a tak jde do mozku. Několik vláken, které nás nyní zajímají, však nejde přímo do vizuálního centra v mozku, kde „vidíme“ obrazy, ale místo toho jdou do mezimozku (H). Jimi se měří osvětlení a nastavuje se clona duhovky, když je obraz rozmazaný, snaží se zkorrigovat čočky, nebo když je

## FYZIOLOGIE OKA

obraz rozdvojený, snaží se nastavit oči na binokulární vidění. Prochází mezimozkem a zpětně se napojují na oko. *K* jsou svaly, jež ovládají akomodaci čoček a *L* jsou další svaly, jež jsou napojeny na duhovku. Duhovka má dva systémy svalů. Jeden tvoří kruhový sval *L*, který při podráždění duhovku stahuje a uzavírá. Jeho činnost je velmi rychlá a je přímo spojen s mozkem prostřednictvím krátkých axonů. Druhý, opačně působící systém, tvoří radiální svaly, takže, když se setmí a kruhový sval se uvolní, radiální svaly duhovku rozevřou. Zde se setkáváme, jako na mnoha jiných místech v těle, s několika svaly, jež působí v opačných směrech. V každém takovém případě je nervový systém ovládající svaly velmi jemně vyvážen, takže, když se vyšle signál, aby se jeden sval stáhnul, automaticky se vysílá i signál k uvolnění druhého svalu. Duhovka je v tom vzácnou výjimkou: nervy, jež způsobují stažení duhovky, jsme si již popsali, ale o nervech, které způsobují její roztážení, nikdo neví, odkud přesně přicházejí. Vedou někde dolů do míchy v hrudní části páteře, z míchy vedou vzhůru krčními gangliemi zpět do hlavy, aby nakonec ovládly zpětný pohyb duhovky. Vskutku, tento signál prochází zcela jiným nervovým systémem, vůbec ne centrálním, ale sympatickým nervovým systémem. Je to velmi divný způsob zabezpečení správné funkce.

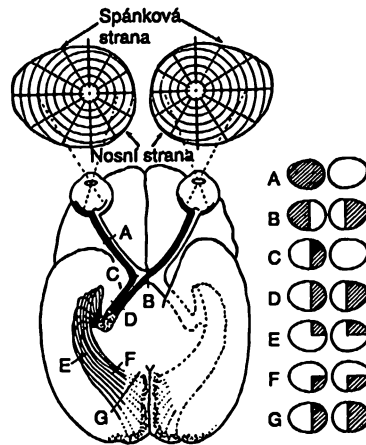
Další zvláštní věc týkající se oka jsme si již jednou zdůraznili. Jde o to, že buňky citlivé na světlo jsou na opačné straně, takže světlo musí projít několika vrstvami jiných buněk, než se dostane k receptorům – vnitřní strana je obrácena směrem ven! Vidíme, že některé vlastnosti oka jsou podivuhodné a některé jsou zdánlivě hloupé.



Obr. 36.3 Nervové mezispojení pro mechanické ovládní očí

Obrázek 36.4 znázorňuje spojení mezi očima a částí mozku, která má přímý vztah k procesu vidění. Ihned za bodem *D* vnikají vlákna zrakových nervů do určité zóny nazvané geniculatum laterale, odkud jdou do části mozku nazvané kůrové zrakové centrum. Všimněme si, že část vláken jde z každého oka do opačné části mozku, takže vytvořený obraz je neúplný. Zrakové nervy z levé části pravého oka procházejí optickým křížem (chiasma opticum) *B* a přidávají se k nim nervy z levé části levého oka. Takže levá část mozku dostává všechny informace přicházející z levé části každého oka, tj. z pravé části vizuálního pole, zatímco pravá strana mozku vidí levou část vizuálního pole. Tak se skládají informace z každého oka k určení vzdálenosti objektů. V tom spočívá binokulární systém vidění.

## MECHANIZMUS VIDĚNÍ



Obr. 36.4 Nervové spojení očí se zrakovým centrem

Spojení mezi sítnicí a zrakovým centrem jsou velmi zajímavá. Poškodí-li se část sítnice, celé nervové vlákno odumře a podle toho můžeme zjistit, kde bylo připojeno. Ukazuje se, že v principu jde o spojení jedna k jedné – každému bodu na sítnici odpovídá jeden bod v zrakovém centru a body, jež jsou velmi blízko sebe na sítnici, jsou blízko sebe i v zrakovém centru. Zrakové centrum tak ještě stále odpovídá prostorovému seskupení tyčinek a čípků, i když už značně zdeformovanému. Body, jež jsou ve středu pole, a jsou na sítnici soustředěny na velmi malé ploše, jsou v zrakovém centru rozloženy na velmi mnoho buněk. Je vhodné, když věci, které jsou původně těsně vedle sebe, zůstanou vedle sebe i nadále. Nejzajímavější stránka celé věci je však tato: Místo, kde se zdá, že je nejdůležitější, aby věci zůstaly těsně vedle sebe, by bylo přesně ve středu vizuálního pole. I když se to zdá neuvěřitelné, svislá čára jdoucí středem našeho zrakového pole je taková, že informace z bodů ležících napravo od ní jdou do levé části mozku a informace z bodů ležících od ní nalevo jdou do pravé strany mozku. A tato střední oblast je rozdělena svislým řezem přímo uprostřed, takže věci, které jsou si ve středu velmi blízké, jsou od sebe v mozku velmi vzdálené! Takže informace z jedné části mozku se musí nějak dostávat do druhé části, což je dost překvapující.

Velmi zajímavá je otázka, jak je celá tato síť propojena. Zde je starý problém, týkající se toho, co je již propojeno a co se teprve spojí učení, zkušeností. Někdy dříve se učilo, že přesné spojení ani není potřebné, stačí, když existují hrubé spoje a pak na základě zkušeností se malé dítě naučí, že když se věc nachází „tam“, vyvolá to určité pocity v mozku. (Lékaři nám vždy rádi řekají, co dítě „cítí“, ale jak vědí, co cítí dítě, když je mu jeden rok?) Lze předpokládat, že roční dítě vidí nějaký předmět „tam“, má určité pocity a učí se sáhnout „tam“, protože, když sáhne „sem“, předmět nenahmatá. Takový přístup pravděpodobně není správný, protože vidíme, že v mnoha případech již existují hotová detailní spojení. Mnohem více světla vrhají na věc některé pozoruhodné experimenty s mloky. (Shodou okolností mlok má přímé křížové spojení bez optického kříže, protože oči, které má každé na jedné straně hlavy, nemají společnou část zorného pole. Mlok nemá binokulární vidění.) Lze provést následující experiment. Přetneme-li mlokovu zrakový nerv, nerv z očí opět naroste. Tisíce a tisíce buněk vláken se tak opět spojí. U zrakového nervu nezůstávají vlákna jedno u druhého – je to jako velký spletený telefonní kabel, kde se všechna vlákna krouť a překrývají, ale když se dostanou do mozku, všechna se opět uspořádají. Vzniká otázka: Když se mlokovu protne zrakový nerv, napojí se vůbec někdy správně? Odpověď je pozoruhodná: Ano. Protne-li mlokovu nerv a ten opět naroste, má mlok opět

## TYČINKY

dobrou zrakovou ostrost. Protneme-li však zrakový nerv, oko obrátíme vzhůru nohama a necháme opět přirůst, má mlok znovu dobrý ostrý zrak, ale je tady jedna osudná chyba: Když mlok vidí mouchu „tam nahoře“, skočí za ní „tam dolů“ a nikdy se to správně nenaučí. Jde tu proto o jakýsi záhadný způsob, kterým si tisíce vláken v mozku najdou své správné místo.

Otázka počtu daných a získávaných spojů je důležitá pro teorii vývoje živočichů. Odpověď není známa, ale problematika se intenzivně zkoumá.

Stejný experiment provedený s karasem zlatým ukazuje, že na místě, kde jsme nerv přesekli, vznikne nepěkný uzel jako velká jizva, ale přesto všechna vlákna srostou tak, že spojují správná místa mozku.

Abyste se to mohlo uskutečnit, jak rostou nová vlákna ve starých kanálech zrakového nervu, musí se nějak rozhodovat, kterým směrem mají růst. Jak to dělají? Zdá se, že záhada rozdílného růstu různých vláken je chemické povahy. Představme si obrovské množství rostoucích vláken, z nichž každé se něčím liší od svých sousedů a přitom roste tak, že si najde své jediné správné místo pro konečné spojení s mozkiem! Přitom zřejmě reaguje individuálním způsobem na nějaký neznámý chemický podnět. To je velmi zajímavá, přímo fantastická věc. Je to jeden z největších nedávných objevů biologie a nepochybně souvisí s mnoha dávnými nevyřešenými problémy růstu, organizace a vývoje organizmů a hlavně embryí.

Další zajímavý jev souvisí s pohyby očí. Oči se musí pohybovat tak, aby jejich dva obrazy za různých okolností splývaly. Tyto pohyby jsou různého druhu. Jeden spočívá ve sledování něčeho, co si vyžaduje, aby se oči současně pohybovaly ve stejném směru, vpravo nebo vlevo, další pohyb je směřuje na stejné místo při různých vzdálenostech od očí, což vyžaduje protiběžné pohyby očí. Nervy ovládající oční svaly jsou popojeny tak, že jsou k těmto pohybům přizpůsobeny. Jeden druh nervů způsobuje stahy svalů na vnitřní straně jednoho oka a na vnější straně druhého oka a současně uvolní svaly na opačných stranách, takže oči se pohybují současně. Vzruch z dalšího centra způsobí, že oči se vychýlí z rovnoběžného směru směrem k sobě. Každé oko se může otočit k vnějšímu koutku, když se druhé oko pohybuje k nosu, ale je nemožné, ať už vědomě nebo nevědomě, otočit obě oči současně k vnějším koutkům. Ne proto, že by na očích nebyly takové svaly, ale proto, že neexistuje způsob jak vyslat signál, že se mají obě oči otočit směrem ven. Výjimkou může být úraz nebo porušený nerv. I když svaly jednoho oka jím mohou volně pohybovat, ani jogín nedokáže vytočit současně obě oči směrem ven, neboť, jak se zdá, nejsme k tomu přizpůsobeni. Naše nervová spojení jsou do jisté míry zafixována. To je důležitý fakt, protože většina starších knih o anatomii a psychologii neuznává nebo nezdůrazňuje skutečnost, že naše nervová spojení jsou do takové míry zafixována – tvrdí, že vše je jen naučené.

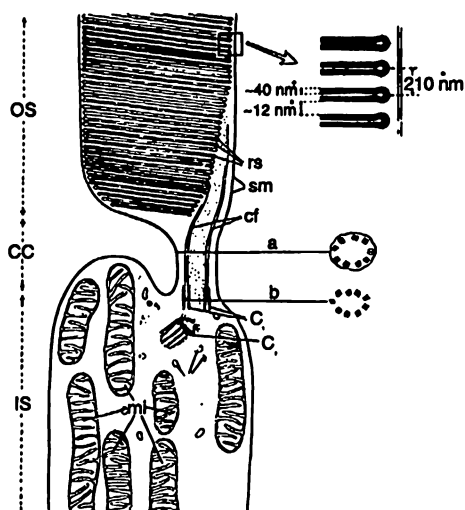
### 36.3 TYČINKY

Podívejme se pozorněji, co se děje v tyčinkách. *Obr. 36.5* znázorňuje střed tyčinkové buňky při pohledu elektronovým mikroskopem (tyčinka vyčnívá ze zorného pole). Mnoho vrstev je složeno z rovinných útvarů, zvětšeně je vidíme vpravo. Obsahují látku rhodopsin, barvu nebo pigment, jenž vyvolává zrakový efekt v tyčinkách. Pigment rhodopsin je protein obsahující zvláštní skupinu nazvanou retinal, kterou můžeme oddělit od proteinu, a která je nepochybně hlavní příčinou absorpce světla. Důvod existence rovinných útvarů neznáme, ale je velmi pravděpodobné, že existuje nějaký důvod, proč musí být rhodopsinové molekuly uloženy rovnoběžně. Po chemické stránce je tato problematika dobře rozpracována, ale může se tu uplatnit i fyzika. Je možné, že všechny molekuly jsou seřazeny do jakési řady, takže, je-li některá z nich vypuzena, elektron, jenž se při tom uvolní, proletí celou řadou až dolů, aby signál vyšel

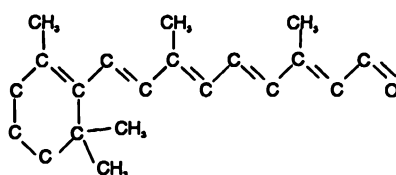
## MECHANIZMUS VIDĚNÍ

ven, případně něco podobného. To je velmi důležitý, zatím však nevyřešený problém. Uplatnit se zde může biochemie i fyzika pevných látek.

Takovou vrstevnatou strukturu můžeme najít i jinde, kde je důležité světlo, například u chloroplastu v rostlinách, kde světlo způsobuje fotosyntézu. Při zvětšení tam najdeme téměř stejné vrstvy, jen v rostlinách je místo retinalu chlorofyl. Chemická struktura retinalu je znázorněna na obr. 36.6. V bočním řetězci obsahuje sérii střídajících se dvojných vazeb, což je charakteristické pro téměř všechny silně absorbující organické látky jako je chlorofyl, krev atd. Je to látka, kterou si člověk nedokáže vytvořit ve svých vlastních buňkách – musíme ji přijímat potravou. Proto ji jsme ve formě zvláštní látky, jež je skoro stejná jako retinal, jen na pravém konci má ještě připojen vodík – je to vitamin A. Je-li přísun tohoto vitamínu nedostatečný, máme málo retinalu a může se to projevit jako šeroslepost. Tehdy není v rhodopsinu dostatek pigmentu, abychom viděli v šeru pomocí tyčinek.



Obr. 36.5 Elektronová mikrofotografie tyčinkových buněk



Obr. 36.6 Struktura retinalu

Důvod, proč takový řetězec dvojných vazeb silně absorbuje světlo, je také znám. Můžeme ho naznačit. Řada střídavých vazeb se nazývá konjugovanou dvojnou vazbou; dvojná vazba znamená, že tam je jeden elektron navíc a tento elektron se může velmi snadno přesunout doprava nebo doleva. Když na takovou molekulu dopadne světlo, elektrony v každé dvojně vazbě se posunou o jeden krok. Posunou se všechny elektrony v celém řetězci, jako když padají kostky domina postavené do řady, a i když se každá posune jen o kousek (očekáváme, že v jednom atomu se může elektron posunout pouze o malou vzdálenost), ale výsledný efekt je stejný, jakoby se

## SLOŽENÉ OKO HMYZU

elektron posunul z jednoho konce až na druhý konec! Je to totéž, jako by se jeden elektron pohyboval sem a tam po celém řetězci. Proto vlivem elektrického pole vzniká mnohem silnější absorpce, než kdybychom mohli posunout elektron jen o vzdálenost odpovídající jednomu atomu. Retinin velmi silně absorbuje světlo, neboť elektrony tak lze snadno posouvat. Takový je tedy fyzikálněchemický mechanismus.

### 36.4 SLOŽENÉ OKO HMYZU

Vraťme se nyní do biologie. Lidské oko není jediným druhem oka. Téměř všichni obratlovci mají oči podobné lidským. Nižší živočichové však mají mnoho jiných druhů očí: oční skvrny, různé oční pohárky a jiné méně citlivé orgány, o nichž nemáme čas hovořit. Mezi bezobratlými však existuje jeden druh vysoce vyvinutého oka a to je složené oko hmyzu. (Většina hmyzu má vedle velkých složených očí ještě i různé dodatečné, jednodušší oči.) Velmi podrobně se zkoumal zrak včely. Vlastnosti včelího zraku lze snadno studovat, protože včely přitahuje med a lze připravit experimenty, kde se med odliší tak, že se položí na modrý nebo na červený papír a sleduje se, ke kterému včely přiletí. Takovou metodou se podařilo objevit několik velmi zajímavých věcí týkajících se vidění včel.

V první řadě musíme poznamenat, že při pokusech měřit jak vidí včely rozdíl v barvě mezi dvěma „bílými“ papíry, zjistili někteří vědci, že včely to příliš dobře neumí a jiní zjistili, že jsou v tom fantastické. I když byly dva kousky bílého papíru téměř úplně stejné, včely stále mohly poznat rozdíl mezi nimi. Experimentátoři použili na jednom papíru zinkovou bělobu a na druhém olověnou bělobu, a i když jsou obě barvy pro nás úplně stejné, včely je mohly stále rozeznat, neboť tyto barvy různě odrážejí světlo v ultrafialové oblasti. Tak se zjistilo, že včelí oko je citlivé v širším rozsahu spektra než je náš rozsah. Naše oko vidí od 700 nm do 400 nm, od červené po fialovou, ale včelí oko vidí až do 300 nm, tj. po ultrafialovou oblast! Na základě toho vzniká mnoho zajímavých jevů. Za prvé, včely mohou rozlišit mnoho květů, které se nám zdají stejné. Samozřejmě, musíme si uvědomit, že barvy květů nejsou určeny pro naše oči, ale pro včely; jsou to signály, které přitahují včely k určitým květům. Všichni víme, že existuje mnoho „bílých“ květů. Bílá barva není zřejmě pro včely příliš zajímavá, neboť se ukazuje, že všechny bílé květy různě odrážejí *ultrafialové* světlo. Neodrážejí ho na sto procent, jak by ho měla odrážet skutečná bílá. Ne všechno světlo se odráží zpět, ultrafialové chybí, to znamená, že vzniká nějaká barva, právě tak jako pro nás, když chybí modrá, světlo je žluté. Proto jsou pro včely všechny květy barevné. Ale také se zjistilo se, že včely nevidí červenou. Proto bychom mohli očekávat, že všechny červené květy jsou pro včelu černé, ale není tomu tak. Při podrobném studiu červených květů dokonce i naším okem můžeme postřehnout, že většina z nich má mírně namodralý nádech, protože dodatečně odrážejí ještě i modrou barvu, kterou včela vidí. Experimenty dále ukazují, že květy se liší i v tom, jak různé části jejich okvětních lístků odrážejí ultrafialové světlo atd. Kdybychom tedy mohli vidět květy tak, jak je vidí včely, byly by ještě krásnější a různorodější!

Bylo zjištěno, že existují takové červené květy, které *neodrážejí* modré nebo ultrafialové světlo, takže včelám se budou zdát černé! To velmi zaujalo odborníky zabývající se těmito věcmi, protože černá barva se zdá být nezajímavá, neboť je těžko odlišitelná od špinavého stínu. Skutečně se ukázalo, že se včely těmto květům vyhýbají, ale „navštěvují“ je kolibřici a ti červenou vidí!

Další zajímavou stránkou zraku včel je, že při pohledu na kousek modrého nebe umí včela určit směr ke Slunci, aniž by ho viděla. My to tak snadno nedokážeme. Když se podíváme z okna na nebe a vidíme, že je modré, kterým směrem se nachází Slunce? Včela to pozná, protože je

## MECHANIZMUS VIDĚNÍ

dost citlivá k polarizaci světla a rozptýlené světlo oblohy je polarizované.<sup>45)</sup> O tom jak se tato citlivost uplatňuje, se stále ještě diskutuje. Zatím nevíme, zda díky tomu, že odraz světla je různý za různých okolností nebo je přímo včelí oko tak citlivé.<sup>46)</sup>

Říká se také, že včela postřehne blikání až do frekvence 200 cyklů za sekundu, zatímco my jen do 20. Pohyby včel v úlu jsou velmi rychlé. Včely pohybují nohama a vibrují křídly, ale tyto pohyby lze velmi těžko postřehnout naším okem. Kdybychom však viděli mnohem rychleji, tyto pohyby bychom pozorovali. Pro včelu je asi velmi důležité, aby její oko mělo tak rychlý postřeh.

Podívejme se, jakou ostrost vidění můžeme předpokládat u včely. Její oko je složené, vytvořené z velkého množství zvláštních buněk nazvaných ommatidia. Jsou uspořádána kuželovitě na kulové ploše na vnější části hlavy včely. Jedno ommatidium je na obr. 36.7. Nahoře se nachází průhledná část, druh jakési „čochky“, ale ve skutečnosti je to spíš filtr nebo světelná trubice, která přivádí světlo podél tenkého vlákna, kde pravděpodobně dochází k absorpci. Z druhého konce vychází nervové vlákno. Centrální vlákno je obklopeno šesti buňkami, které ho kryjí. Takový popis pro naše účely stačí. Hlavní je, že ommatidium je kuželovitý útvar a že se jich vejde na povrchu včelího oka vedle sebe velmi mnoho.

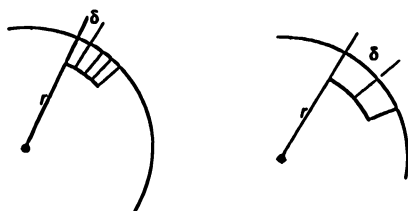


Obr. 36.7 Struktura ommatidia (jednoduché buňky složeného oka)

<sup>45)</sup> Lidské oko je také mírně citlivé na polarizaci světla a určit polohu Slunce se lze naučit! Uplatňuje se zde Haidingerův jev. Podíváme-li se na široké, volné prostranství polarizačními skly, uprostřed vizuálního pole vidíme slabou nažloutlou strukturu, podobnou hodinovému sklíčku. Můžeme ho vidět i na modré obloze a bez pomoci polarizačních brýlí, když otočíme hlavu ze strany na stranu kolem osy vidění.

<sup>46)</sup> Důkazy z posledního období naznačují, že jde o přímou citlivost oka.

### SLOŽENÉ OKO HMYZU



Obr. 36.8 Schéma umístění ommatidií v oku včely

Nyní se podívejme na rozlišovací schopnost včelího oka. Nakreslíme-li čáry znázorňující ommatidia na povrchu koule s poloměrem  $r$  (obr. 36.8), můžeme vypočítat šířky každého ommatidia. Použijeme k tomu náš rozum a budeme předpokládat, že vývoj je stejně chytrý jako my. Je-li ommatidium velmi velké, rozlišovací schopnost bude malá. Jedna buňka získá informaci z jednoho směru a vedlejší buňka z nějakého jiného směru atd., a co je mezi tím, to včela dobře neuvidí. Takže neurčitost zrakové ostrosti oka bude určitě souviset s nějakým úhlem – s úhlem příslušejícím jednomu ommatidiu – mezi krajním směrem ommatidia a směrem ke středu křivosti oka. (Zrakové buňky jsou, samozřejmě, pouze na povrchu koule, uvnitř je hlava včely.) Tento úhel od jednoho ommatidia k druhému je roven poměru průměru ommatidia a poloměru oka

$$\Delta \alpha_g = \frac{\delta}{r}. \quad (36.1)$$

Takže bychom mohli říct, „čím bude  $\delta$  menší, tím bude lepší zraková ostrost oka. Proč potom nemá včela velmi tenoučká ommatidia?“ Odpověď je následující. Z fyziky již víme dost k tomu, abychom si uvědomili, že chceme-li světlo dostat do úzké štěrbině, uplatní se ohybové jevy a v daném směru nebudeme dobře vidět. Vzhledem k difrakci tam může vnikat světlo z různých směrů z celkového úhlu  $\Delta \alpha_d$  takového, že

$$\Delta \alpha_d = \frac{\lambda}{\delta}. \quad (36.2)$$

Nyní vidíme, že bude-li  $\delta$  příliš malé, nebude vzhledem k difrakci každé ommatidium vidět jen v jednom směru. Budou-li ommatidia příliš velká, uvidí každé v určitém směru, ale nebude jich dost k tomu, aby vytvořily dobrý obraz dané scény. Proto vzdálenost  $\delta$  nastavíme tak, abychom optimalizovali vliv obou účinků. Sečteme-li je a najdeme minimum tohoto součtu (obr. 36.9), máme

$$\frac{d(\Delta \alpha_g + \Delta \alpha_d)}{d\delta} = 0 = \frac{1}{r} - \frac{\lambda}{\delta^2}. \quad (36.3)$$

Odtud plyne pro vzdálenost

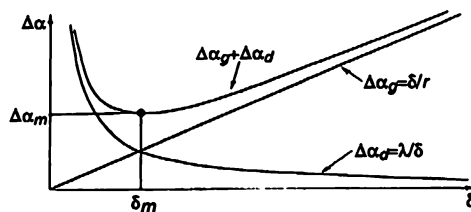
$$\delta = \sqrt{\lambda r}. \quad (36.4)$$

Odhadneme-li, že  $r$  je kolem 3 milimetrů a za vlnovou délku světla, které vidí včela, vezmeme 400 nm, máme

$$\delta = (3 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-7})^{1/2} \text{ m} = 3,5 \times 10^{-5} \text{ m} = 35 \text{ } \mu\text{m}.$$



### MECHANIZMUS VIDĚNÍ



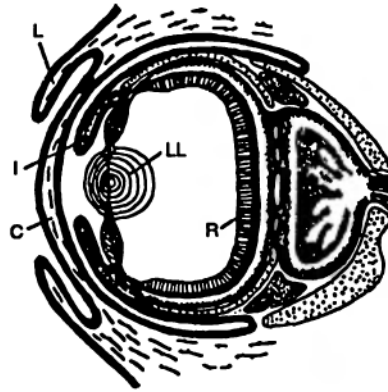
Obr. 36.9 Optimální velikost ommatidia je  $\delta_m$

Podle literatury je to 30  $\mu\text{m}$ , což je v dobrém souhlasu s naším odhadem, a tedy chápeme, čím je určena velikost včelího oka! Lze postupovat i opačně, vycházet z tohoto čísla a zjistit, jaká je rozlišovací schopnost včelího oka. Ve srovnání s naším je velmi slabá. Ve porovnání se včelou jsme schopni uvidět předměty, jejichž zdánlivá velikost je třicetkrát menší. Ve srovnání s námi vidí včela dost rozmazaně a neostře. Přesto je to v pořádku a je to nejlepší, co může být. Můžeme se zeptat, proč nemá včela dobré oči jako my s čočkou atd. Je k tomu několik zajímavých důvodů. Za prvé, včela je příliš malá, a kdyby měla takové oko jako my, ale v měřítku svých rozměrů, otvor oka by měl kolem 30  $\mu\text{m}$  a difrakce by se projevila tak silně, že by jí i stejně neviděla dobře. Oko není dobré, je-li příliš malé. Za druhé, kdyby bylo tak velké jako včelí hlava, byla by celá hlava obsazena okem. Krása složeného oka je v tom, že nepotřebuje prostor, je to jen velmi tenká vrstva na povrchu včely. Takže, když tvrdíme, že ho mají mít takové jako my, musíme si připomenout, že i včely mají své vlastní problémy!

### 36.5 JINÉ OČI

Kromě včel vidí barvu i mnozí jiní živočichové. Ryby, motýli, ptáci a plazi mohou vidět barvu, ale předpokládá se, že většina savců ji vidět nemůže. Primáti ji mohou vidět. Ptáci barvu určitě vidí a to souvisí i se zbarvením ptáků. Bylo by zbytečné, aby samečkové byli tak krásně zbarveni, kdyby to samičky nemohly ocenit! Takže vývoj pohlavního nebo jiného vybavení, které mají ptáci, je výsledkem toho, že samičky jsou schopny vidět barvy. Až se příště podíváme na páva a zamysleme se nad bohatstvím a jemností jeho zbarvení, měli bychom vzdát hold ne pávovi, ale pávici za její zrakovou ostrost a estetický smysl, neboť ten inspiroval takovou nádhernou podřvanou!

Všichni bezobratlí mají slabě vyvinuté oči nebo složené oči, ale všichni obratlovci mají oči podobné našim, až na jednu výjimku. Když myslíme na nejvyšší formu živočichů, obvykle říkáme: To jsme my, ale když přistoupíme na méně předpojaté hledisko a omezíme se jen na bezobratlé, k nimž nepatříme a zeptáme se, který z nich je nejvyšší živočich, většina zoologů bude souhlasit s tím, že je to chobotnice! Velmi zajímavé je to, že kromě vyvinutého mozku a reakcí, jež jsou pro bezobratlé velmi dobré, má ještě i samostatně vyvinuté oko. Není to složené oko nebo oční skvrna – má rohovku, víčko, duhovku, má čočku, má dvě oblasti naplněné tekutinou a vzadu má sítnici. V podstatě je to stejné jako u obratlovců! Je to zajímavý příklad koincidence v evoluci, kde příroda našla dvakrát totéž řešení problému, jen s malým vylepšením. Překvapivě se ukazuje, že sítnice chobotnice je také část mozku, jež se oddělila v embryonálním vývoji od mozku stejně jako u obratlovců, ale odlišné a zajímavé je to, že buňky citlivé na světlo jsou na vnitřní straně a buňky, které „dělají výpočty“, jsou za nimi, opačně, než u našeho oka. Tak aspoň vidíme, že pro otočení naší sítnice vnitřkem ven není nějaký vážný důvod. (Viz obr. 36.10) Krakatice obrovská má největší oči na světě. Našli se už i takové oči, které měly průměr až 38 cm!

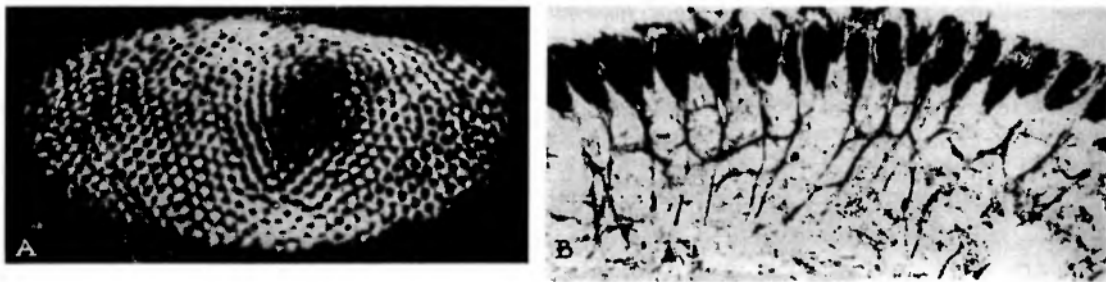


Obr. 36.10 Oko chobotnice

### 36.6 NEUROLOGIE ZRAKU

Jeden z hlavních bodů našeho předmětu je otázka propojení informací z jedné části oka s druhou částí. Podívejme se na složené oko ostrorepa amerického, s nímž byly provedeny pozoruhodné experimenty. Nejdříve si musíme uvědomit, jaké informace se mohou přenášet prostřednictvím nervů. Nerv přenáší určitý vzruch, jenž má elektrické účinky a je snadné je detekovat. Je to vzruch podobný vlně, která se šíří podél nervu a vyvolává nějaké účinky na jeho druhém konci. Informace se šíří podél dlouhé části nervové buňky, nazvané axon, ve formě určitého hrotovitého pulzu. Šíř-li se po nervu jeden pulz, nemůže hned po něm následovat další. Všechny pulzy mají stejnou velikost, takže při větším dráždění nedostaneme větší pulzy, ale za sekundu je jich víc. Velikost pulzu je určena nervovým vláknem. To je důležité si uvědomit, abychom viděli, co se děje dále.

Na obrázku 36.11a) je složené oko ostrorepa amerického. Oku se moc nepodobá, má jen kolem tisíce ommatidií. Na obrázku 36.11b) je průřez oka. Jsou tam vidět ommatidia s nervovými vlákny, které z nich vycházejí do mozku. Všimněme si, že dokonce i u ostrorepa je málo mezipojů. Jsou mnohem jednodušší než v lidském oku a to nám umožňuje studovat jednodušší případ.

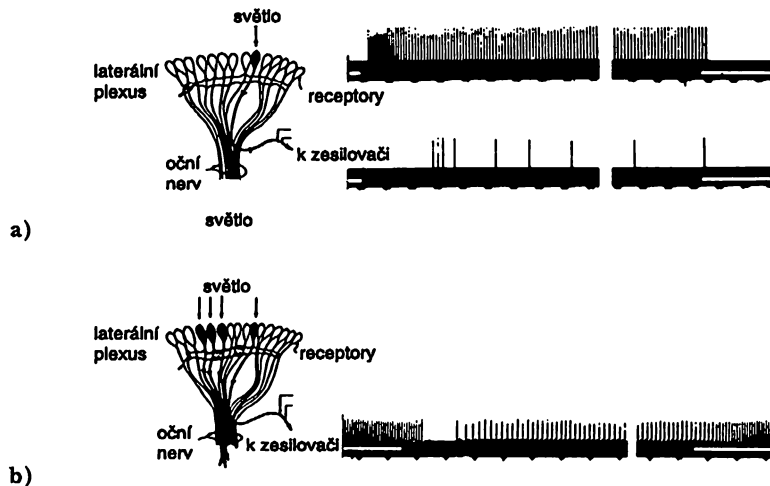


Obr. 36.11 Složené oko ostrorepa amerického: a) normální pohled, b) průřez

Nyní se podívejme na experimenty, jež byly provedeny pomocí jemných elektrod napojených na optické nervy ostrorepa při osvětlení pouze jednoho ommatidia, což lze snadno realizovat

## MECHANIZMUS VIDĚNÍ

pomocí čoček. Zapneme-li v nějakém čase  $t_0$  světlo a měříme vycházející elektrické signály, zjistíme, že nejprve je krátká pauza a za ní následuje série pulzů, které se postupně ustálí, a následují v pravidelných intervalech jak je to na *obr. 36.12a*). Když světlo vypneme, signály se ztratí. Zajímavé je, že necháme-li zesilovač napojen na týž nerv a osvětlíme jiné ommatidium, nic se nestane, nevzniknou žádné signály.

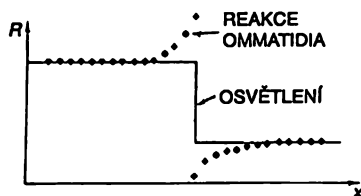


Obr. 36.12 Reakce nervových vláken oka ostrorepa amerického na světlo

Nyní provedeme jiný experiment. Osvítíme původní ommatidium a dostaneme to, co předtím. Když však nyní osvětlíme i jiné blízké ommatidium, pulzy se na chvíli přeruší a pak pokračují v mnohem pomalejším rytmu (*obr. 36.12b*). Rytmus jednoho je zpomalen pulzy, které přicházejí z druhého! Každý nerv tedy přenáší signály z jednoho ommatidia, ale jejich množství je ovlivněno signály z ostatních ommatidií. Když je tedy celé oko téměř rovnoměrně osvětleno, bude informace přicházející z jednoho ommatidia relativně slabá, neboť je brzděna ostatními. Toto přibrzdění je aditivní. Neboť osvětlíme-li mnoho blízkých ommatidií, bude zbrzdění velké. Pro blízká ommatidia je tedy přibrzdění velké a pro ta, jež jsou dost daleko, je prakticky nulové. Takže je aditivní a závisí na vzdálenosti. To je první příklad toho, jak se kombinují informace z různých částí oka už v samotném oku. Když o tom trochu přemýšlíme, vidíme, že je to asi zařízení k zesílení kontrastu na obrysech předmětů, neboť, je-li část obrazu světlá a část černá, dávají ommatidia v osvětlené části pulzy zeslabované okolním světlem, takže jsou relativně slabé. Zato ommatidium, jež je zaměřeno na okraj předmětu a ještě dostává světlo, je přibrzdováno okolními, ale těch není mnoho, neboť některá z nich jsou tmavá. Výsledný signál je proto silnější. Výsledek bude dán křivkou na *obr. 36.13*. Ostrorep bude vidět zvýrazněný obrys předmětu.

Fakt, že dochází k zvýraznění obrysů, je znám již dávno. Je to zajímavý jev, který psychologové mnohokrát komentovali. Abychom nakreslili předmět, stačí, když nakreslíme jeho obrysy. Jak jsme zvyklí se dívat na obrázky, které mají jen obrysy! Co jsou to obrysy? Obrys je jen rozdíl na okraji mezi světlem a tmou nebo mezi dvěma barvami. Není to nic určitého. Třeba se zdá neuvěřitelné, ale vůbec to neznamená, že každý předmět má kolem sebe čáru! Taková čára neexistuje. Existuje jen v našem psychologickém založení – začínáme rozumět tomu, proč stačí čára, abychom dostali klíč k celé věci. Lze předpokládat, že naše oči pracují podobným způsobem – mnohem komplikovanějším, ale podobným.

JINÉ OČI • NEUROLOGIE ZRAKU



Obr. 36.13 Výsledná reakce ommatidia ostrorepa amerického na ostré rozhraní při osvětlení

Nakonec stručně popíšeme pěkný, rozsáhlejší a pokročilejší výzkum, který se prováděl se žábami. Pomocí velmi jemných elektrod zasunutých do optických nervů žáby můžeme získat signály, které postupují jen daným axonem, podobně jako tomu bylo u ostrorepa. Na základě analogického experimentu zjistíme, že tato informace nezávisí jen na jednom místě v oku, ale je součtem informací z více míst.

Poslední experimenty studující funkci žabího oka jsou následující. Můžeme najít čtyři druhy nervových vláken odpovídajících čtyřem druhům reakcí. Tyto experimenty se neprovádějí zapínáním a vypínáním světelných pulzů, protože to žába nevidí. Žába si prostě sedí a její oči se vůbec nehýbají, pokud se nepohne list leknínu a v tom případě kývá očima přesně tak, že obraz se nemění. Jinak žába oči neotáčí. Když se něco pohybuje v jejím zorném poli, například malý brouček (musí být schopna vidět něco malého pohybujícího se na pevném pozadí), ukáže se, že má čtyři druhy vláken, které přenášejí informaci. Jejich vlastnosti jsou shrnuty v *tabulce 36.1*. Udržovaná detekce rozhraní (nevymazatelná) znamená, že posuneme-li do zorného pole žáby předmět s okrajem v tomto vlákne, vznikne mnoho pulzů, které trvají, dokud se předmět pohybuje, ale klesnou na udržovanou hodnotu, když je okraj už v zorném poli, i když se nepohybuje. Vypneme-li světlo, pulzy zmizí. Když ho opět zapneme, dokud je okraj ještě v zorném poli, opět se obnoví. Další druh vlákna je velmi podobný, ale nereaguje, je-li okraj přímý. Musí být vypouklý s tmavým pozadím! Jak komplikovaný musí být systém mezipojení v sítnici žabího oka, aby rozeznal, že do zorného pole vstoupil vypouklý předmět! Dále, i když toto vlákno částečně udržuje signály, není to tak dlouho jako u prvního vlákna a při vypnutí a opětovném zapnutí světla se signály už neobnoví. Závisí na pohybu vypouklého předmětu v zorném poli. Oko ho vidí vstupovat dovnitř a pamatuje si, že tam je, ale stačí, když na chvíli vypneme světlo, zapomene na něj a už ho nevidí.

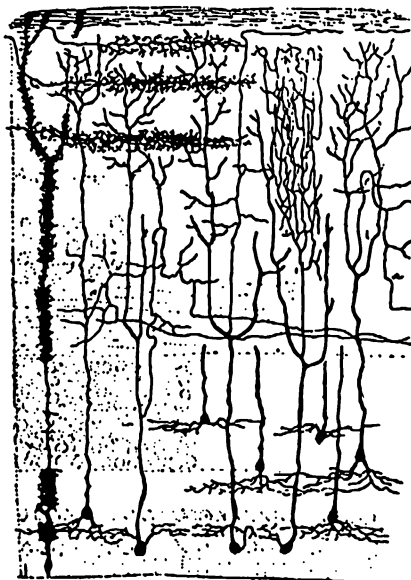
Tabulka 36.1 Typy reakcí optických vláken žáby

Typ	Rychlost	Úhlové pole
1. Udržovaná detekce rozhraní (nevymazatelná)	0,2-0,5 m/s	1°
2. Detekce vypouklého rozhraní (vymazatelná)	0,5 m/s	2°-3°
3. Detekce změny kontrastu	1-2 m/s	7°-10°
4. Detekce stmívání	do 0,5 m/s	do 15°
5. Detekce tmy	?	velmi velké

Další příklad se týká detekce změny kontrastu. Pohybuje-li se rozhraní dovnitř nebo ven, vznikají pulzy, ale když se nehýbe, žádné pulzy nevznikají.

Dále se v oku žáby nachází detektor stmívání. Klesá-li intenzita světla, generuje signály; když se však intenzita ustálí, signály přestanou. Detektor působí jen při stmívání.

## MECHANIZMUS VIDĚNÍ



Obr. 36.14 Tectum žáby

Nakonec je tam několik vláken, které slouží jako detektory tmy. Nejpřekvapivější na nich je, že neustále vyrábějí signály. Zvětšíme-li osvětlení, následují signály řidčeji, ale neustanou. Když osvětlení zmenšíme, signály jsou častější. Ve tmě divoce kmitají a neustále říkají: „Je tma! Je tma! Je tma!“

Tyto reakce se zdají být dosti komplikované na to, aby bylo možné je klasifikovat a můžeme i pochybovat zda se experimenty správně interpretují. Proto je velice zajímavý poznatek, že takové čtyři druhy vláken je u žáby možno jasně anatomicky rozeznat! Po klasifikaci těchto reakcí byly realizovány jiné experimenty (je důležité, že až *po* provedení klasifikace), při nichž se zjistilo, že v různých vlákních není rychlost šíření signálů stejná, což umožňuje další nezávislou kontrolu toho, o které vlákno jde!

Další zajímavou otázkou je, z jak velké oblasti sbírá určité vlákno informaci. Zjistilo se, že tato oblast je různá pro různá vlákna.

Obr. 36.14 znázorňuje povrch nazvaný tectum žáby, kde vstupují vlákna zrakového nervu do mozku. Všechna nervová vlákna vytvářejí spojení v různých vrstvách tecta. Tato vrstevnatá struktura je podobná sítnici, a to je z části důvod, proč víme, že sítnice a mozek jsou si navzájem podobné. Vezmeme-li elektrodu a procházíme jí postupně různými vrstvami, můžeme zjistit, kde příslušná vlákna končí a dostaneme nádherný výsledek, že různé druhy vláken končí v různých vrstvách! První druh vláken končí ve vrstvě prvního typu, druhý ve vrstvě druhého typu, třetí a pátý končí na stejném místě a nehlouběji ze všech končí čtvrtý druh. (Jaká shoda okolností, že je očíslovali téměř ve správném pořadí? Není to tak, protože právě kvůli tomu je přečíslovali; v prvním článku byly očíslovány jinak!)

Můžeme stručně shrnout, co jsme se naučili: Pravděpodobně existují tři pigmenty. Mohou existovat různé druhy receptorových buněk obsahujících tyto tři pigmenty v různých poměrech, ale existuje mnoho mezispojení, která dovolují sčítání a odčítání barev sčítáním a zesilováním signálů v nervovém systému. Takže dříve než pochopíme barevné vidění, budeme muset pochopit výsledný vjem. Je to stále otevřený problém, ale výzkumy pomocí mikroelektrod a podobných zařízení nám snad poskytnou víc informací o tom, jak vidíme barvy.

# Kvantové chování

## 37.1 MECHANIKA ATOMŮ

## 37.2 EXPERIMENT S KULKAMI

## 37.3 EXPERIMENT S VLNAMÍ

## 37.4 EXPERIMENT S ELEKTRONÝ

## 37.5 INTERFERENCE ELEKTRONOVÝCH VLN

## 37.6 SLEDOVÁNÍ ELEKTRONŮ

## 37.7 ZÁKLADNÍ PRINCIPY KVANTOVÉ MECHANIKY

## 37.8 PRINCIP NEURČITOSTI

### 37.1 MECHANIKA ATOMŮ

V posledních několika kapitolách jsme se zabývali základními myšlenkami potřebnými k pochopení nejdůležitějších světelných jevů, nebo obecně elektromagnetického záření. Zabývali jsme se „klasickou teorií“ elektromagnetických vln, která poskytuje adekvátní popis přírody pro velké množství jevů. Zatím nás nemuselo znepokojovat, že energie světla se šíří v porcích zvaných „fotony“.

Rádi bychom se dál zabývali problémem chování relativně velkých částí hmoty, například jejich mechanickými a tepelnými vlastnostmi. Při tomto studiu dojdeme velmi rychle k tomu, že „klasická“ (nebo starší) teorie velmi rychle selže, neboť hmota se skládá z malých částic s rozměry atomů. Přesto se budeme dál zabývat klasickou fyzikou, neboť jen tu můžeme pochopit pomocí klasické mechaniky, kterou jsme se učili. Nebudeme však příliš úspěšní. Zjistíme, že na rozdíl od světla se v případě látek velmi rychle dostaneme do těžkostí. Atomové jevy bychom mohli nechávat soustavně stranou, ale radši si uděláme krátkou exkurzi, v níž si popíšeme základní myšlenky kvantových vlastností hmoty, tj. kvantové principy atomové fyziky, abychom získali odhad toho, co budeme vynechávat. Některé důležité věci budeme totiž muset vynechat, i když se jim nebudeme moci zcela vyhnout.

Podáme tedy jen *úvod* do kvantové mechaniky, neboť jí samou se budeme zabývat mnohem později.

Kvantová mechanika – to je popis vlastností hmoty ve všech jejích detailech, ale hlavně popis toho, co se s ní děje na úrovni atomů. Objekty, které mají velmi malé rozměry, se vůbec nechova-

jí tak, jak bychom očekávali na základě naší bezprostřední zkušenosti. Nechovají se jako vlny, ani jako částice, nechovají se jako mraky, ani jako kulečnickové koule nebo závaží na pružinách, jako nic z toho, co jsme již viděli.

Newton si myslel, že světlo se skládá z částic, ale pak se zjistilo, že se chová jako vlnění. Avšak později (začátkem 20. století) se zase ukázalo, že někdy se světlo opravdu chová jako částice. Historie objevu elektronu byla taková, že nejdříve se předpokládalo, že se chová jako částice a pak se zjistilo, že se chová v mnoha ohledech jako vlna. Takže ve skutečnosti se nechová ani tak, ani tak. Dnes už neříkáme, zda se elektron chová jako částice nebo vlna – prostě jsme to vzdali. Chová se jako něco úplně jiného.

Existuje však jedno šťastné řešení – elektrony se chovají právě tak jako světlo. Všechny atomové objekty (elektrony, protony, neutrony, fotony atd.) se chovají stejně, všechno jsou to „částice – vlny“ nebo jak bychom je již nazvali. Proto vše, co se dozvíme o vlastnostech elektronů (které budeme používat v našich příkladech), bude platit pro všechny částice včetně fotonů světla.

V první čtvrtině našeho století se nahromadilo o dějích na úrovni atomů a objektů malých rozměrů množství informací, které způsobovaly rostoucí zmatek. Jeho vysvětlení podali v letech 1926 a 1927 Schrödinger, Heisenberg a Born. Podařilo se jim získat konzistentní popis chování hmoty při velmi malých rozměrech. V této kapitole si probereme základní body tohoto popisu.

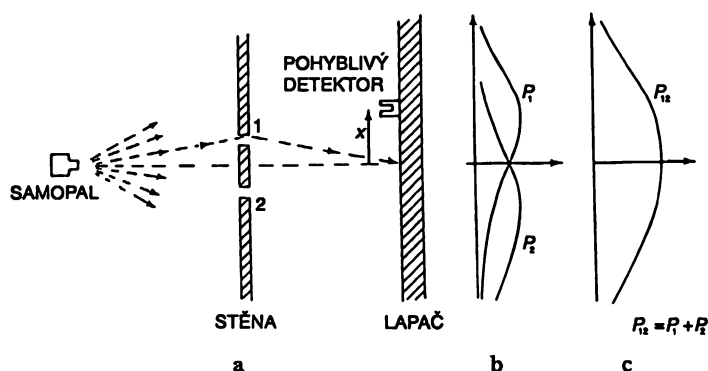
Protože se chování atomů vůbec nepodobá tomu, co známe z běžné zkušenosti, je velmi těžké si na ně zvyknout a nováčkovi i zkušenému fyzikovi se zdá divné a záhadné. Dokonce ani odborníci ho nechápou tak, jak by si přáli. Je to zcela odůvodněné, neboť celá bezprostřední lidská zkušenost a intuice platí pro velké objekty. Víme, jak se chovají velké objekty, ale objekty malých rozměrů se tak prostě nechovají. Proto se o nich dozvídáme pomocí abstrakce a představitosti, a ne prostřednictvím přímé zkušenosti.

V této kapitole se pustíme hned do základních projevů tohoto záhadného chování v jeho nejzvláštnější formě. Budeme zkoumat jev, který naprosto nelze vysvětlit žádným klasickým způsobem, a který tvoří podstatu kvantové mechaniky. Obsahuje vlastně celou a jedinou záhadu. Tuto záhadu nemůžeme *vysvětlit*. Můžeme si jen říct, jak to funguje a tím si ozřejmíme základní zvláštnosti kvantové mechaniky.

## 37.2 EXPERIMENT S KULKAMI

Abychom pochopili kvantové chování elektronů, budeme je srovnávat v určitém experimentálním uspořádání s chováním takových částic, jako jsou kulky a s chováním vln na vodě. Nejdříve se podíváme, jak se v experimentu, zobrazeném na *obr. 37.1*, budou chovat kulky. Máme samopal, který střílí proud kulek. Není příliš přesný, protože rozptyluje kulky náhodně v dosti širokém úhlu, jak naznačuje obrázek. Před samopalem je pancéřová deska, jež má dva otvory takové velikosti, že jimi může proletět právě jedna kulka. Za ní se nachází ochranná zeď (například z tlustého dřeva), která zachytí kulky, jež do ní narazí. Před zdí máme umístěn „detektor“ kulek. Může to být krabice naplněná pískem. Každá kulka, která treffe detektor, v něm uváže. Budeme-li chtít, můžeme detektor vyprázdnit a zjistit kolik kulek se v něm zachytilo. Detektor se může pohybovat nahoru a dolů (ve směru, který nazveme  $x$ ). S tímto zařízením jsme schopni experimentálně najít odpověď na otázku: „Jaká je pravděpodobnost toho, že kulka, která proletí otvory v desce, dopadne na zachytnou zeď ve vzdálenosti  $x$  od středu?“ Všimněme si nejprve, že mluvíme o pravděpodobnosti, neboť neumíme přesně říci, kam určitá kulka dopadne. Kulka, již se podaří trefit některý z otvorů, se může odrazit od okraje a dopadnout kamkoliv. Pod „pravděpodobností“ myslíme možnost, že kulka dopadne na detektor. Můžeme ji určit tak, že

spočítáme kulky, jež se zachytily v detektoru za určitou dobu a tento počet dělíme celkovým počtem kulek, jež za tuto dobu narazily na záchytnou stěnu. Můžeme také předpokládat, že po dobu měření střílí samopal stále rovnoměrným tempem, takže hledaná pravděpodobnost bude úměrná počtu střel, které dopadly na detektor za nějaký pevně stanovený čas.



Obr. 37.1 Interferenční experiment s kulkami

Pro naše účely bude lepší, když si představíme trochu zidealizovaný experiment, v němž kulky nejsou skutečnými kulkami, ale jsou nezničitelné – nemohou se například rozlomit na polovinu. V našem experimentu kulky přilétají nepoškozené, a když v detektoru něco najdeme, je to vždy celá kulka. Bude-li frekvence výstřelů samopalu malá, zjistíme, že v libovolném okamžiku nedopadne na stěnu buď nic nebo jen jedna kulka. Velikost celku tedy nezávisí na kadenci samopalu. Kulky přilétají vždy ve stejných celcích. Detektorem měříme pravděpodobnost toho, že přiletí celek. Tuto pravděpodobnost měříme jako funkci vzdálenosti  $x$ . Výsledek takového měření s tímto zařízením (i když jsme měření neprováděli, výsledek si můžeme představit) je zobrazen na grafu c) na obr. 37.1. Na grafu nanášíme vodorovně pravděpodobnost a svisle  $x$ , takže stupnice  $x$  souhlasí s náčrtem zařízení. Tuto pravděpodobnost nazýváme  $P_{12}$ , neboť kulky mohly přiletět jedním nebo druhým otvorem. Není nic divného na tom, že  $P_{12}$  je největší ve středu grafu a že pro velká  $x$  je velmi malé. Možná se budete divit, že  $P_{12}$  má maximum pro hodnotu  $x = 0$ . To lze pochopit, když experiment zopakujeme tak, že nejdříve zakryjeme otvor 2 a pak otvor 1. Je-li otvor 2 zakrytý, kulky mohou létat jen prvním otvorem a dostaneme křivku, označenou na části b) obrázku jako  $P_1$ . Podle očekávaní maximum  $P_1$  najdeme pro tu hodnotu  $x$ , která leží na přímce spojující samopal a otvor č. 1. Když se zakryje otvor č. 1, dostaneme symetrickou křivku zobrazenou jako  $P_2$ . Srovnáním částí b) a c) na obr. 37.1 dostáváme důležitý výsledek

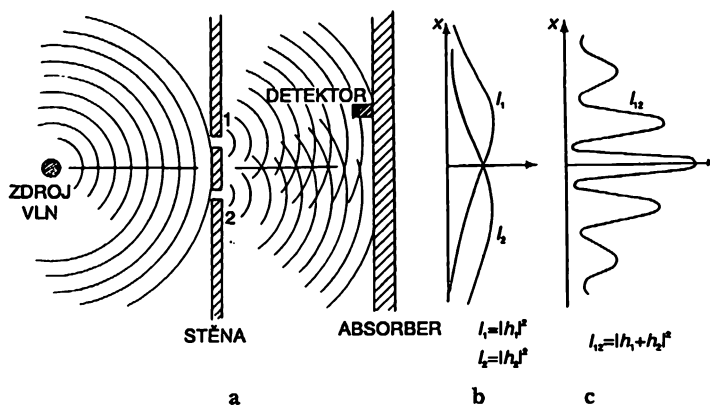
$$P_{12} = P_1 + P_2 \quad (37.1)$$

Pravděpodobnosti se prostě sčítají. Výsledek s oběma otevřenými otvory je roven součtu výsledků, je-li otevřen jen jeden otvor. Říkáme, že při tom „nenastává interference“, jak uvidíme později. Tolik o kulkách, přilétají v celcích a pravděpodobnost jejich dopadu neprojevuje interferenci.



## 37.3 EXPERIMENT S VLNAMÍ

Nyní chceme provést podobný experiment s vlnami. Na obr. 37.2 je náčrt experimentálního zařízení. Máme koryto s mělkou vodou. Zdrojem vln je nějaký malý předmět poháněný motorem nahoru a dolů, který vytváří kruhové vlny. Napravo od zdroje máme opět stěnu s dvěma otvory a za ní je druhá stěna, která je pro jednoduchost „absorbérem“, takže vlny, které na ní dopadají, se neodrážejí. Toho lze dosáhnout pomocí postupné písčové „pláže“. Před pláž umístíme detektor, který se může pohybovat podél osy  $x$  jako dřívě. Jako detektor si můžeme představit přístroj k měření výšky vln, jen jeho stupnice bude kalibrována v druhé mocnině skutečné výšky, takže jeho údaje budou úměrné energii vlnění nebo také výkonu přenášenému vlněním k detektoru.



Obr. 37.2 Interferenční experiment s vlnami na vodě

První věc, jíž je třeba si všimnout, je to, že intenzita vlnění může nabýt libovolnou velikost. Pokud se zdroj hýbe jen velmi málo, je vlnění u detektoru velmi slabé. Když se zdroj pohybuje víc, je i intenzita vlnění u detektoru větší. Intenzita vlny může nabývat jakoukoliv hodnotu. Nemohli bychom říci, že energie se přenáší v jakýchsi „celcích“.

Nyní změřme intenzitu vln pro různé hodnoty  $x$  za předpokladu, že zdroj vlnění pracuje stále rovnoměrně. Dostaneme zajímavý výsledek označený na obrázku (část c) jako křivka  $I_{12}$ . Vznik takového průběhu jsme odvodili při studiu interference elektromagnetických vln. V tomto případě bychom viděli, že na otvorech nastává difrakce původní vlny a od každého otvoru se šíří nové kruhové vlny. Zakryjeme-li na chvíli jeden z otvorů a změřme rozložení intenzity podél absorbéru, dostaneme dost jednoduché křivky, znázorněné na obrázku v části b).  $I_1$  je intenzita vlny z otvoru 1 (kterou měříme tak, že otvor 2 je zakryt) a  $I_2$  je intenzita vlny z otvoru 2 (při zavřeném otvoru 1).

Intenzita  $I_{12}$ , kterou pozorujeme, když jsou oba otvory otevřeny, určitě není rovna součtu  $I_1$  a  $I_2$ . Řekáme, že dochází k „interferenci“ dvou vln. Na některých místech (kde má křivka  $I_{12}$  maxima) jsou vlnění „ve fázi“, součet amplitud je velký a je tedy velká i intenzita. Taková „konstruktivní interference“ nastane všude tam, kde je vzdálenost detektoru od jednoho otvoru větší (nebo menší) o celý násobek vlnové délky než vzdálenost detektoru od druhého otvoru.

Na místech, kam dopadnou vlny s fázovým rozdílem  $\pi$  (kde jsou v protifázi), bude výsledné vlnění v detektoru rovno rozdílu obou amplitud. Vlny „interferují destruktivně“ a pro intenzitu vlny dostáváme malou hodnotu. Tak malé hodnoty dostaneme všude tam, kde se vzdálenost otvoru 1 od detektoru liší od vzdálenosti k otvoru 2 o lichý násobek poloviny vlnové délky. Malé hodnoty  $I_{12}$  na obr. 37.2 odpovídají místům, kde vlny interferují destruktivně.

Určitě si pamatujeme, že vztah mezi  $I_1$ ,  $I_2$  a  $I_{12}$  lze vyjádřit takto: Okamžitou výšku vody v detektoru od vlny z otvoru 1 lze zapsat jako  $\hat{h}_1 e^{i\omega t}$  (z toho reálná část), kde amplituda  $\hat{h}_1$  je obecně komplexní číslo. Intenzita je úměrná střední hodnotě druhé mocniny výšky nebo pomocí komplexních čísel  $|\hat{h}_1|^2$ . Podobně pro otvor 2 je výška rovna  $\hat{h}_2 e^{i\omega t}$  a intenzita je úměrná  $|\hat{h}_2|^2$ . Jsou-li otevřeny oba otvory, výšky vln se sčítají  $(\hat{h}_1 + \hat{h}_2) e^{i\omega t}$  a intenzita je  $|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2$ . Pro naše účely můžeme vynechat konstantu úměrnosti, takže pro interferující vlny máme vztahy:

$$I_1 = |\hat{h}_1|^2 \quad I_2 = |\hat{h}_2|^2 \quad I_{12} = |(\hat{h}_1 + \hat{h}_2)|^2. \quad (37.2)$$

Vidíme, že výsledek se zcela liší od toho, co jsme dostali pro kulky (rovnice 37.1). Umocníme-li  $|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2$ , vidíme, že

$$|\hat{h}_1 + \hat{h}_2|^2 = |\hat{h}_1|^2 + |\hat{h}_2|^2 + 2 |\hat{h}_1| |\hat{h}_2| \cos \delta, \quad (37.3)$$

kde  $\delta$  je fázový rozdíl mezi  $\hat{h}_1$  a  $\hat{h}_2$ . Pomocí intenzit můžeme napsat

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (37.4)$$

Poslední člen v (37.4) je „interferenční člen“. Tolik, pokud jde o vlny na vodě. Intenzita může nabývat jakoukoliv hodnotu a projevuje interferenci.

### 37.4 EXPERIMENT S ELEKTRONÝ

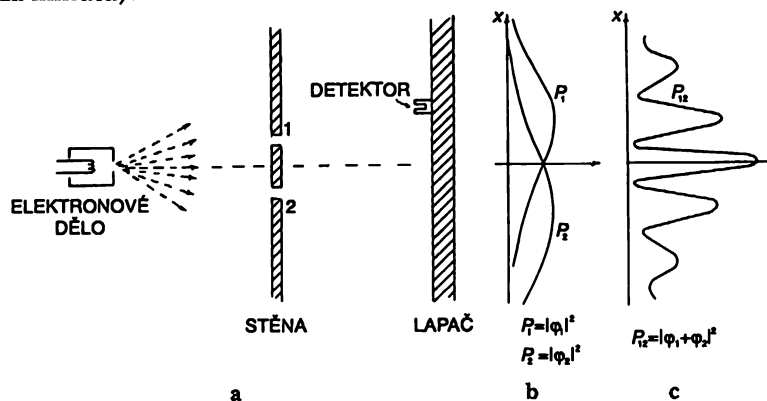
Nyní si představme podobný experiment s elektrony. Je znázorněn na obr. 37.3. Použijeme elektronové dělo, jež se skládá z elektricky žhaveného wolframového vlákna obklopeného kovovou krabicí s otvorem. Má-li drát záporné napětí vzhledem ke krabici, budou elektrony emitované drátem urychlovat směrem ke krabici a některé z nich proletí otvorem. Všechny elektrony vylétující z děla budou mít (přibližně) stejnou energii. Před dělem je opět stěna (z tenkého plechu) s dvěma otvory. Za ní se nachází další deska, která slouží k zachytávání elektronů. Před ní umístíme pohyblivý detektor. Detektorem může být Geigerův počítač nebo ještě lépe, elektronový násobič napojený na reproduktor.

Hned na začátku musíme říci, abyste se nepokoušeli tento experiment sestavit (na rozdíl od předcházejících dvou). Tento experiment se nikdy takto nedělal. Obtíž spočívá v tom, že k tomu, aby se projevil pro nás zajímavý efekt, muselo by mít zařízení neskutečně malé rozměry. Provádíme „myšlený experiment“, který jsme si vybrali proto, že se o něm dá snadno přemýšlet. Výsledky známe, neboť bylo provedeno mnoho experimentů v takových měřítkách a rozměrech, že se v nich popisované jevy projeví.

První věc, které si v našem experimentu s elektrony všimneme, je ta, že z detektoru (tj. z reproduktoru) slyšíme ostrá „cvaknutí“. Všechna „cvaknutí“ jsou stejná. Neexistují „polocvaknutí“. Také si všimneme, že „cvaknutí“ jsou velmi nepravidelná; něco jako: cvak... cvak – cvak... cvak...

## KVANTOVÉ CHOVÁNÍ

cvak... cvak – cvak... cvak... atd., jistě jste to slyšeli, když pracoval Geigerův počítač. Počet cvaknutí, jež napočítáme za dostatečně dlouhou dobu, dejme tomu za mnoho minut, bude vždy přibližně stejný. Můžeme mluvit o průměrném tempu, s jakým je slyšet cvaknutí (v průměru tolik a tolik cvaknutí za minutu).



Obr. 37.3 Interferenční experiment s elektrony

Při posouvání detektoru se tempo cvakání buď zrychluje nebo zpomaluje, ale velikost (hlasitost) každého cvaknutí je stejná. Snížíme-li teplotu vlákna v děle, tempo cvakání se zpomalí, ale stále zní každé cvaknutí stejně. Všimli bychom si také, že když použijeme dva nezávislé detektory, cvakne jeden nebo druhý, ale nikdy ne oba najednou. (Leda že by občas následovala dvě cvaknutí tak rychle za sebou, že by je naše ucho nemuselo rozlišit.) Cokoliv tedy dopadá na zachycovač, dopadá v „celcích“. Všechny „celky“ mají stejnou velikost: přilétají jen úplně „celky“ a přilétají na zachycovač jednotlivě. Říkáme: „Elektrony vždy přilétají ve stejných celcích.“

Podobně jako u našeho experimentu s kulkami můžeme jít dál a experimentálně najít odpověď na otázku, jaká je relativní pravděpodobnost toho, že elektronový „celek“ dopadne na zachycovač v různých vzdálenostech  $x$  od středu. Jako již dříve relativní pravděpodobnost dostaneme sledováním tempa cvakání při rovnoměrné činnosti děla. Pravděpodobnost, že celky dopadnou do určitého bodu  $x$ , je úměrná střednímu tempu cvakání v bodě  $x$ .

Výsledkem našeho experimentu je zajímavá křivka označená jako  $P_{12}$  na obr. 37.3c). Ano. Tak se chovají elektrony.

### 37.5 INTERFERENCE ELEKTRONOVÝCH VLN

Pokusme se analyzovat křivku na obr. 37.3, abychom viděli, zda můžeme pochopit toto chování elektronů. První, co bychom řekli, je, že přilétají-li elektrony v celcích, přilétají buď otvorem 1 nebo otvorem 2. Zformujeme to jako předpoklad:

*Předpoklad A:* Každý elektron prochází buď otvorem 1 nebo otvorem 2.

Na základě předpokladu A všechny elektrony, které doletí na zachycovač, můžeme rozdělit do dvou tříd: 1) na ty, které přiletěly otvorem 1 a 2) na ty, co přiletěly otvorem 2. Takže naměřená křivka musí být dána součtem efektů od elektronů, které přiletěly otvorem 1 a od elektronů, které přiletěly otvorem 2. Ověřme si to experimentem. Nejdříve budeme měřit elektrony, které

přiletí otvorem 1. Otvor 2 uzavřeme a spočítáme cvakání v našem detektoru. Z tempa cvakání dostaneme  $P_1$ . Výsledek měření je znázorněn křivkou označenou na *obr. 37.3b*) jako  $P_1$ . Výsledek se zdá být celkem rozumný. Stejným způsobem měříme  $P_2$ , rozložení pravděpodobnosti pro elektrony, které přiletěly otvorem 2. Výsledek tohoto experimentu je také znázorněn na obrázku.

Je jasné, že výsledek  $P_{12}$ , získaný, když byly oba otvory otevřeny, není součtem pravděpodobností  $P_1$  a  $P_2$  pro každý otvor zvlášť. Analogicky s naším vlnovým experimentem můžeme říci: „Existuje tady interference.“

Pro elektrony: 
$$P_{12} \neq P_1 + P_2. \quad (37.5)$$

Jak může dojít k takové interferenci? Snad bychom měli říci: „Dobře, to znamená, že pravděpodobně není pravda, že celky letí jedním nebo druhým otvorem, neboť, kdyby to byla pravda, pravděpodobnosti by se měly sčítat. Možná, že letí nějakým komplikovanějším způsobem. Rozdělí se na polovinu a ...“ Ale ne! Nemohou se rozdělit, vždy přilétají v celcích... „Dobře, snad některé z nich projdou otvorem 1 a pak projdou kolem otvorem 2 a tak několikrát dokola nebo letí po nějaké jiné komplikované dráze... pak, tím že zakryjeme otvor 2, změníme celkové možnosti a elektron, který začal letět otvorem 1, nakonec dopadne na zachycovač...“ Ale všimněme si! Existují takové body, do nichž přiletí velmi málo elektronů, když jsou otevřeny oba otvory, ale když jeden z nich zavřeme, přiletí do nich mnoho elektronů, takže zakrytím jednoho otvoru se *zvýší* počet od druhého otvoru. Je třeba si také všimnout, že ve středu křivky je  $P_{12}$  víc než dvakrát větší než  $P_1 + P_2$ . Vypadá to tak, jakoby se zakrytím jednoho otvoru *snížil* počet elektronů, které přilétávají druhým otvorem. Tyto dva jevy lze těžko vysvětlit tím, že by elektrony letěly po složitějších drahách.

Je to úplně záhadné a čím víc na to myslíme, tím se to zdá záhadnější. Bylo vymyšleno mnoho teorií k vysvětlení křivky  $P_{12}$  pomocí jednotlivých elektronů letících otvory po komplikovaných drahách, ale ani jedna nebyla úspěšná. Žádná neumí získat správnou křivku  $P_{12}$  pomocí  $P_1$  a  $P_2$ .

Přesto je matematika dávající do souvislosti  $P_1$  a  $P_2$  s  $P_{12}$  mimořádně jednoduchá, což je dost překvapující.  $P_{12}$  se podobá  $I_{12}$  z *obr. 37.2* a tam to bylo jednoduché. Co se děje na zachycovači lze popsat pomocí dvou komplexních čísel, která můžeme nazvat  $\hat{\varphi}_1$  a  $\hat{\varphi}_2$  (samozřejmě, že jsou funkcemi  $x$ ). Druhá mocnina absolutní hodnoty  $\hat{\varphi}_1$  dává výsledek, pro otvor 1, tj.  $P_1 = |\hat{\varphi}_1|^2$ . Výsledek, pro otvor 2, je dán podobně jako  $P_2 = |\hat{\varphi}_2|^2$ , a výsledek pro oba otvory je  $P_{12} = |\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2|^2$ . Je to stejná matematika, kterou jsme měli pro vlny na vodě! (Tak jednoduchý výsledek by se dal těžko získat tím, že elektrony by létaly otvory sem a tam po nějakých komplikovaných drahách.)

Můžeme tedy udělat závěr: Elektrony přilétají v celcích jako částice a pravděpodobnost dopadu těchto celků je rozložena jako rozložení intenzity vlny. V tomto smyslu se elektron chová „někdy jako částice a někdy jako vlna“.

Mimochodem, když jsme se zabývali klasickými vlnami, definovali jsme intenzitu jako časovou střední hodnotu druhé mocniny amplitudy a komplexní čísla jsme použili jako trik ke zjednodušení analýzy. Ale z kvantové mechaniky vychází, že amplitudy *musí* být reprezentovány komplexními čísly. Jen reálná část nepostačuje. Zatím je to jen technický rozdíl, neboť jinak vypadají vzorce úplně stejně.

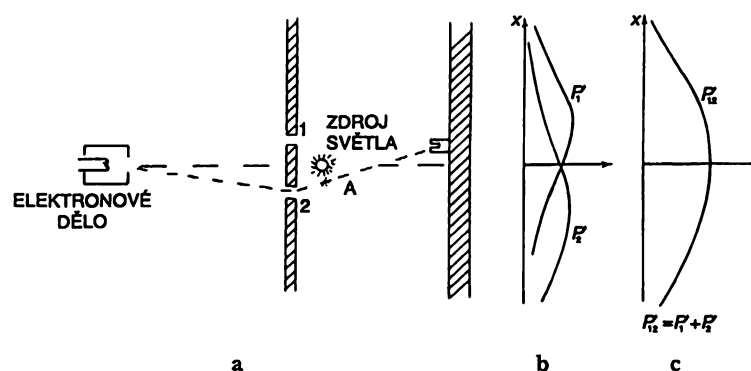
Je-li pravděpodobnost přiletu oběma otvory dána tak jednoduše, i když ne jako součet  $P_1 + P_2$ , není k tomu vlastně už co dodat. S tím, že se příroda chová takovým způsobem, souvisí mnoho drobných záludností. Rádi bychom si nyní některé z nich ilustrovali. Za prvé, protože

## KVANTOVÉ CHOVÁNÍ

počet elektronů, které dopadnou do určitého bodu není roven počtu těch, které proletí otvorem 1, plus těch, které proletí otvorem 2, jak plyne z předpokladu A. *Předpoklad A tedy neplatí.* Není pravda, že elektron musí letět *buď* otvorem 1 *nebo* otvorem 2. Toto tvrzení lze ověřit dalším experimentem.

### 37.6 SLEDOVÁNÍ ELEKTRONŮ

Pokusíme se provést následující experiment: Do naší elektronové aparatury přidáme velmi silný zdroj světla a umístíme ho za stěnu s otvory, těsně mezi ně, jak je ukázáno na *obr. 37.4*. Víme, že elektrické náboje rozptylují světlo, takže, když elektron proletí na své cestě k detektoru kolem zdroje, část světla se na něm rozptýlí i do našeho oka, a tak uvidíme, kudy elektron letí. Když například elektron poletí po dráze otvorem 2, měli bychom vidět světelný záblesk vycházející z blízkosti bodu A na *obr. 37.4*. Když elektron poletí přes otvor 1, budeme očekávat, že uvidíme záblesk v blízkosti horního otvoru. Kdyby se stalo, že světlo uvidíme na obou místech současně, protože elektron se rozdělil na poloviny ... Provedme už ten experiment!



Obr. 37.4 Jiný experiment s elektrony

Vidíme toto: *vždy*, když slyšíme „cvaknutí“ z našeho elektronového detektoru (na zachycovači), *vidíme také* světelný záblesk *buď* v blízkosti otvoru 1 *nebo* blízko otvoru 2, ale *nikdy* ne u obou současně! Výsledek je vždy stejný, bez ohledu na to, kde máme detektor. Z tohoto pozorování můžeme vyvodit závěr, že sledujeme-li elektrony, vidíme, že procházejí jedním nebo druhým otvorem. Experimentálně je tedy potvrzeno, že předpoklad A musí platit.

Kde je potom chyba v našem argumentu *proti* tvrzení A? Proč prostě  $P_{12}$  není rovno  $P_1 + P_2$ ? Vraťme se k experimentu. Sledujme dráhy elektronů a zjistíme, co se s nimi děje. V každé poloze  $x$  detektoru spočítáme dopadající elektrony a také si pomocí sledování záblesků všimneme, kterým otvorem přiletěly. Můžeme si o tom vést takové záznamy: Vždy, když budeme slyšet „cvaknutí“ a uvidíme záblesk v blízkosti otvoru 1, uděláme čárku v prvním sloupci a když uvidíme záblesk v blízkosti otvoru 2, uděláme čárku v druhém sloupci. Každý elektron je zaznamenán v některé ze dvou tříd: mezi těmi, které proletěly otvorem 1 nebo mezi těmi, které proletěly otvorem 2. Z čísel zaznamenaných ve sloupci 1, dostaneme pravděpodobnost  $P_1$ , že elektron přiletí na detektor otvorem 1 a z čísel zaznamenaných ve sloupci 2 dostaneme  $P_2$ , pravděpodobnost toho, že elektron dopadne na detektor otvorem 2. Zopakujeme-li toto měření pro mnoho hodnot  $x$ , dostaneme křivky  $P_1$  a  $P_2$  znázorněné na *obr. 37.4b*).

To není ani tak překvapující! Pro  $P_1$  dostáváme něco velmi podobného tomu, co jsme předtím dostali pro  $P_1$  zakrytým otvorem 2 a  $P_2$  je podobné tomu, co jsme dostali zakrytým otvorem 1. Takže odpadají všechny komplikované záležitosti jako průchod oběma otvory. Sledujeme-li elektrony, vidíme, že prolétají otvory tak, jak to od nich očekáváme. Ať už jsou otvory zavřené nebo otevřené, ty, které vidíme přiletět otvorem 1, mají stejné rozložení, bez ohledu na to, zda je otvor zavřený nebo otevřený.

Ale počkejme! Co nyní dostáváme pro celkovou pravděpodobnost? Pravděpodobnost toho, že elektrony dopadnou na detektor libovolnou cestou? Tuto informaci už máme. Prostě se zatváříme, jako bychom se nikdy nedívali na světelné záblesky a sečteme impulzy detektoru, jež jsme měli rozděleny do dvou sloupců. Musíme sčítat jenom tato čísla. Pro pravděpodobnost, že elektron přiletí na zachycovač libovolným otvorem máme  $P_{12} = P_1 + P_2$ . Takže při sledování toho, kterým otvorem naše elektrony prolétají, již nedostáváme známou interferenční křivku  $P_{12}$ , ale novou  $P_{12}$ , v níž se neprojevuje interference! Když světlo vypneme, dostaneme opět  $P_{12}$ .

Musíme udělat závěr, že *když se na elektrony díváme*, jejich rozložení na zachycovači je jiné, než když se na ně nedíváme. Narušila se snad celá věc tím, že jsme zapnuli světelný zdroj? Musí to být tak, že elektrony jsou velmi jemné a světlo tím, že se na nich rozptyluje, do nich „strčí“ a tím se změní jejich pohyb. Víme, že elektrické pole světla působí na elektron se projeví silou pohybující elektronem. Možná jsme měli očekávat takovou změnu pohybu. V každém případě má světlo na elektrony velký vliv. Tím, že jsme se pokusili elektrony „sledovat“, změnili jsme jejich pohyb. To znamená, že náraz, který elektron pocítí, když se na něm rozptyluje foton, je takový, že dokáže dostatečně změnit pohyb elektronu, takže, když měl letět do bodu, kde má  $P_{12}$  maximum, přiletěl tam, kde má minimum. To je důvod, proč už nevidíme interferenční efekty.

Možná si myslíte: „Nepoužívejme tak silný zdroj! Zmenšeme jeho jas! Světelné vlny potom budou slabší a nebudou tak silně elektrony rušit. Určitě, čím bude světlo slabší a slabší, tím budou světelné vlny slabší a slabší, až budou mít zanedbatelný efekt.“ Dobře, zkusme to. První věc, které si všimneme, je ta, že záblesky světla rozptýleného na elektronech letících kolem se nezeslabují. *Jsou to vždy stejně velké záblesky*. Jediná věc, která se stane při zmenšování jasu světla, je ta, že někdy slyšíme „cvaknutí“ v detektoru, ale nevidíme *žádný záblesk*. Elektron proletěl kolem aniž bychom ho viděli. Pozorujeme jen to, že světlo se projevuje podobně jako elektrony, věděli jsme, že je to vlnění, nyní zjišťujeme, že jsou to také „částice“. Vždy přiletí nebo se rozptyluje v celcích, které nazýváme „fotony“. Zmenšením *intenzity* světelného zdroje nezměníme *velikost* fotonů, jen *počet* emitovaných fotonů za jednotku času. To vysvětluje, proč při slabém zdroji některé elektrony proletí kolem aniž bychom je viděli. Když elektron letěl kolem, právě tam nebyl žádný foton.

Trochu to odstraňuje. Je-li pravda, že vždy, když „vidíme“ elektron, vidíme záblesk stejné velikosti, pak vidíme *vždy* jen ty elektrony, jejichž pohyb byl světlem ovlivněn. Zkusme provést takový experiment se slabým světlem. Uslyšíme-li nyní cvaknutí v detektoru, uděláme si o tom záznam v některém ze tří sloupců: Ve sloupci 1 pro elektrony, jež vidíme u otvoru 1, ve sloupci 2 pro elektrony, jež vidíme u otvoru 2 a ve sloupci 3 pro elektrony, jež jsme vůbec neviděli. Zpracujeme-li tyto údaje (vypočítáme pravděpodobnosti), dostaneme tyto výsledky: Elektrony, které jsme „viděli u otvoru 1“ mají rozdělení jako  $P_1$ ; ty, jež jsme „viděli u otvoru 2“, mají rozdělení jako  $P_2$  (takže ty, které jsme „viděli buď u otvoru 1 nebo u otvoru 2“ mají rozdělení jako  $P_{12}$ ) a ty, které jsme vůbec neviděli, mají „vlnové“ rozložení jako je  $P_{12}$  na obr. 37.3! *Když elektrony nevidíme, máme interference!*

Je to pochopitelné. Když elektron nevidíme, žádný foton na něj nepůsobil a když ho vidíme, působil na něj foton. Toto působení je vždy stejné, neboť světelné fotony vyvolávají vždy stejně

velký záblesk a rozptyl fotonů je dostatečně silný jev k tomu, aby zrušil jakýkoliv interferenční efekt.

Neexistuje nějaký způsob, jak uvidět elektrony aniž bychom je ovlivnili? V jedné z předcházejících kapitol jsme se dozvěděli, že hybnost, kterou má „foton“, je nepřímo úměrná vlnové délce ( $p = h/\lambda$ ). Náraz, který pocítí elektron od fotonu při jeho rozptylu směrem do našeho oka, závisí určitě na velikosti hybnosti fotonu. Když jsme chtěli elektrony ovlivnit jen slabě, neměli jsme zmenšovat intenzitu světla, ale frekvenci (to je totéž jako zvětšení vlnové délky). Použijme světlo červenější barvy! Můžeme dokonce použít infračervené „světlo“ nebo rádiové vlny (jako radar) a „zjistit“ kudy letěl elektron pomocí nějakého zařízení, které může „vidět světlo“ takových vlnových délek. Použitím jemnějšího „světla“ se snad vyhneme silnému ovlivňování elektronů.

Zkusme provést celý experiment s delšími vlnami. Budeme ho několikrát opakovat vždy se „světlem“, které má větší vlnovou délku. Zpočátku se zdá, že se nic nemění. Výsledky jsou stále stejné. Pak se stane strašná věc. Jistě si pamatujete, jak jsme si řekli, když jsme mluvili o mikroskopu, že vzhledem k vlnové povaze světla existuje určité omezení pro vzdálenost dvou bodů, abychom je mohli ještě vidět jako dvě oddělené tečky. Tato vzdálenost je řádově rovna vlnové délce světla. Proto, když je nyní vlnová délka větší než je vzdálenost mezi otvory, vidíme při rozptylu světla elektrony rozmazaný záblesk a už nemůžeme říci, kterým otvorem elektron proletěl. Víme jen to, že někde proletěl. A právě pomocí „světla“ této barvy zjistíme, že nárazy na elektrony jsou tak slabé, že  $P_{12}$  se začíná podobat  $P_{12}$  – začneme registrovat nějakou interferenci. Ovlivnění elektronů světlem bude dostatečně malé, až když jsou vlnové délky „světla“ mnohem delší než vzdálenost mezi otvory (kdy už nemáme žádnou možnost určit, kudy elektron proletěl), a tehdy opět dostaneme křivku  $P_{12}$  znázorněnou na obr. 37.3.

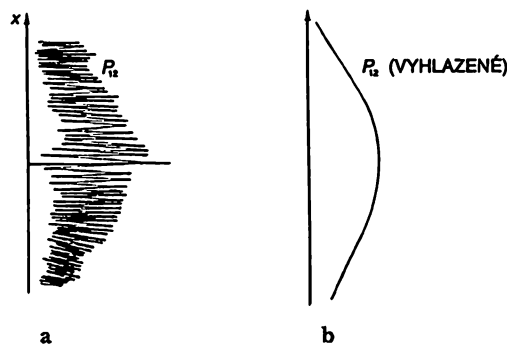
Zjišťujeme, že v našem experimentu nelze světlo nastavit tak, aby se dalo určit, kudy elektron proletěl a aby se současně nezměnilo rozložení pravděpodobnosti. Heisenberg naznačil, že nové zákony přírody mohou být konzistentní, jen když existují nějaká základní omezení našich experimentálních schopností, která jsme si předtím neuvědomovali. Jako obecný princip navrhl Heisenberg svůj *princip neurčitosti*, který v řeči našeho experimentu můžeme zformulovat takto: „Nelze zkonstruovat takové zařízení, pomocí něhož bychom mohli určit, kterým otvorem proletěl elektron, aniž bychom elektrony neovlivnili natolik, že by se porušil interferenční obraz.“ Když nějaké zařízení dokáže určit, kterým otvorem elektron proletěl, nemůže být tak dostatečně jemné, že by se podstatně neporušil interferenční obraz. Nikdo nikdy nenašel ani nevymyslel způsob, jak by bylo možné princip neurčitosti obejít. Musíme proto předpokládat, že popisuje základní vlastnost přírody.

Řeknete: „Dobře, ale co bude s předpokladem A? Je pravda nebo není, že elektron prochází buď otvorem 1 nebo otvorem 2? Jediná odpověď, kterou máme je ta, že pomocí experimentu jsme zjistili, že k tomu, abychom se nedostali do rozporu, musíme přemýšlet určitým zvláštním způsobem. Abychom se vyhnuli nesprávným předpovědím, musíme mluvit takto:“ Díváme-li se na otvory, nebo přesněji, máme-li zařízení, jež může určit, zda elektron prochází otvorem 1 nebo 2, lze říci, že prochází buď otvorem 1 nebo otvorem 2. Ale když se nepokoušíme určit, kudy jdou elektrony, když nic nemůže v experimentu elektrony ovlivnit, nelze říci, zda elektrony jdou otvorem 1 nebo otvorem 2. Kdyby to někdo řekl a začal z toho vyvozovat závěry, dopustí se ve své analýze chyby. To je logické „lano“, po němž musíme balancovat, chceme-li úspěšně popsat přírodu.

Když se pohyb hmoty – včetně elektronů – musí popsat pomocí vln, co potom platí pro naše kulky z prvního experimentu? Proč tam nevidíme interferenční obraz? Z vlnového popisu vyplývá, že vlnové délky kulek jsou tak nepatrné, že interferenční obraz je velmi jemný. Tak

## ZÁKLADNÍ PRINCIPY KVANTOVÉ MECHANIKY

jemný, že oddělená maxima a minima nelze rozeznat žádným detektorem s konečnými rozměry. Viděli jsme jen určitý průměr, jenž dává klasickou křivku. Na *obr. 37.5* jsme se pokusili schematicky naznačit, jak to vypadá pro velkorozměrné objekty. V části a) je znázorněno rozložení pravděpodobnosti, které lze předpovědět pro kulky pomocí kvantové mechaniky. Rychlé kmity by měly představovat interferenční obraz od takových velmi krátkých vln. Avšak libovolný fyzikální detektor zabírá vždy několik vlnových délek a měření dává hladkou křivku nakreslenou na obrázku v části b).



Obr. 37.5 Interferenční obraz s kulkami: a) skutečný, b) pozorovaný

### 37.7 ZÁKLADNÍ PRINCIPY KVANTOVÉ MECHANIKY

Napíšeme shrnutí hlavních závěrů z našich experimentů, ale upravíme si je do takové formy, aby platily obecně, pro všechny takové experimenty. Naše shrnutí bude úspěšnější, když si nejprve definujeme „ideální experiment“ jako takový, v němž se neprojevují neurčité vnější vlivy, s nimiž nemůžeme počítat. Budeme zcela přesní, když řekneme: „Ideální experiment je ten experiment, v němž jsou všechny počáteční i konečné podmínky přesně definovány.“ „Událost“ budeme obecně nazývat určitou množinou počátečních a konečných podmínek. (Například: „Elektron vyletí z děla, dopadne na detektor a nic jiného se nestane.“) Přístupme tedy ke shrnutí našich poznatků:

#### SHRUTÍ

1. Pravděpodobnost  $P$  toho, že v ideálním experimentu nastane nějaká událost, je dána druhou mocninou absolutní hodnoty komplexního čísla  $\varphi$ , jež se nazývá amplitudou pravděpodobnosti  $\varphi$ :

$$P = |\varphi|^2. \quad (37.6)$$

2. Může-li nějaká událost nastat několika způsoby, je amplituda pravděpodobnosti takové události rovna součtu amplitud pravděpodobností pro každý způsob uvažovaný zvlášť. Nastává interference.

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\ P &= |\varphi_1 + \varphi_2|^2. \end{aligned} \quad (37.7)$$



## KVANTOVÉ CHOVÁNÍ

3. Lze-li se v experimentu určit, která z možností skutečně nastala, je pravděpodobnost události rovna součtu pravděpodobností pro každou alternativu. Interference se ztrácí.

$$P = P_1 + P_2. \quad (37.8)$$

Můžeme se stále ptát: „Jak to funguje? Jaký se za tímto zákonem skrývá mechanismus?“ Nikdo za tímto zákonem nenašel žádný mechanismus. Nikdo neumí víc „vysvětlit“ než jsme si právě „vysvětlili“. Nikdo neumí dát nějaký hlubší pohled na tuto situaci. Nemáme ani nejmenší potuchu o existenci nějakého fundamentálnějšího mechanismu, z něhož by bylo možné odvodit tyto výsledky.

*Rádi bychom zdůraznili velmi důležitý rozdíl, který je mezi klasickou a kvantovou mechanikou.* Mluvili jsme o pravděpodobnosti toho, že za daných okolností přiletí elektron. Předpokládali jsme, že v našem experimentu (nebo třeba v tom nejdokonalejším), by bylo nemožné exaktně předpovědět, co se stane. Můžeme předpovídat jen pravděpodobnost! To by znamenalo, je-li to opravdu tak, že fyzika se vzdala možnosti pokusit se exaktně předpovědět, co se stane za daných okolností. Ano, fyzika se toho vzdala! Nevíme, jak předpovědět, co se stane za daných okolností, a nyní věříme, že je to nemožné, a že jediné, co lze předpovědět, jsou pravděpodobnosti různých událostí. Je třeba uznat, že je to ústupek od našeho dřívějšího ideálu poznání přírody. Může to být krok zpět, ale nikdo nepřišel na to, jak by se dal obejít.

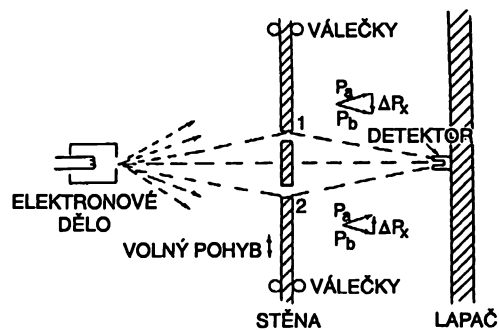
Uvedeme několik poznámek o jednom návrhu, který někdy slyšíme, jak se pokusit vyhnout uvedenému popisu. Lze ho vyjádřit takto: „Elektron má možná nějaký vnitřní pohyb – nějaké vnitřní proměnné – o němž zatím ještě nevíme. Snad to bude důvod, proč neumíme předpovědět, co se stane. Kdybychom se mohli na elektron podívat víc zblízka, snad bychom uměli povědět, kam dopadne.“ Podle toho, co dosud víme, je to nemožné. Vznikne nová obtíž. Předpokládejme, že uvnitř elektronu pracuje jakýsi mechanismus, který určuje, kam elektron dopadne. Tento mechanismus musí *také* rozhodnout, kterým otvorem elektron poletí na své cestě. Nesmíme však zapomenout, že to co je uvnitř elektronu, by nemělo záviset na tom, co děláme, například na tom, zda otevřeme nebo zakryjeme některý z otvorů. Takže, když se elektron rozhodne ještě před startem: a) který otvor použije, b) kam dopadne; pro elektrony, které si zvolily otvor 1, bychom měli dostat  $P_1$ , pro elektrony, které si zvolily otvor 2, bychom měli dostat  $P_2$  a pro elektrony, které proletí oběma otvory, bychom měli nevyhnutně dostat součet  $P_1 + P_2$ . Zdá se, že to by nebylo možné obejít. Právě jsme si ale experimentálně ověřili, že tak tomu není. Nikdo nenašel řešení této hádanky. Proto se musíme v současnosti omezit na výpočet pravděpodobnosti. Říkáme „v současnosti“, ale máme velmi silné podezření, že je to něco, co s námi zůstane navždy – že je nemožné rozluštit tuto záhadu – že příroda skutečně taková je.

### 37.8 PRINCIP NEURČITOSTI

Heisenberg původně vyjádřil princip neurčitosti takto: Měříme-li nějaký objekt a přitom dokážeme určit jeho složku hybnosti ve směru osy  $x$  s nepřesností  $\Delta p$ , nemůžeme současně poznat složku jeho polohy  $x$  s větší přesností než  $\Delta x = \hbar / \Delta p$ . Součin neurčitosti polohy a hybnosti v kterémkoliv okamžiku musí být větší než Planckova konstanta. Je to vyjádření zvláštního případu principu neurčitosti, který jsme již uvedli v obecnější formě: Nelze zkonstruovat zařízení, jež by určilo, která ze dvou možností vznikla aniž by současně nedošlo k porušení interferenčního obrazu.

## ZÁKLADNÍ PRINCIPY KVANTOVÉ MECHANIKY

Na jednom zvláštním případě si ukažme, že Heisenbergův princip neurčitosti musí platit, nechceme-li se dostat do těžkostí. Představme si, že experiment z obr. 37.3 upravíme tak, že stěnu s otvory upevníme na válečky, na nichž se může volně pohybovat nahoru a dolů (ve směru osy  $x$ ), jak je to na obr. 37.6. Pozorným sledováním pohybů stěny se můžeme pokusit určit, kterým z otvorů elektron prošel. Představme si, co se stane, je-li detektor umístěn v poloze  $x = 0$ . Očekávali bychom, že elektron, jenž prochází otvorem 1, musí být stěnou odchýlen směrem dolů, aby dopadl na detektor. Když se změní svislá složka hybnosti elektronu, musí se stěna odrazit opačným směrem se stejnou hybností. Stěna pocítí náraz směrem vzhůru. Prochází-li elektron dolním otvorem, měla by stěna pocítit náraz směrem dolů. Je jasné, že pro libovolnou polohu detektoru bude odevzdaná hybnost stěně jiná, když elektron poletí otvorem 1, než když poletí otvorem 2. Takže sledováním pohybu stěny můžeme snadno říci, kterou dráhu elektron použil, aniž bychom elektrony ovlivnili.



Obr. 37.6 Experiment, v němž se měří zpětný ráz stěny

Abychom to mohli udělat, musíme znát hybnost stěny předtím, než jí proletí elektron. Změříme-li její rychlost po průletu elektronu, můžeme určit změnu hybnosti stěny. Pamatujme, že podle principu neurčitosti nemůžeme současně znát s libovolnou přesností polohu stěny a její hybnost. Neznáme-li však přesnou polohu stěny, nevíme ani přesně, kde se nacházejí oba otvory. Pro každý elektron budou na jiném místě. To znamená, že pro každý elektron bude střed interferenčního obrazu jinde. Rychlé změny interferenčního obrazu se takto smažou. V další kapitole si ukážeme kvantitativně, že určíme-li dostatečně přesně hybnost stěny, abychom podle zpětného rázu zjistili, který otvor byl použit, potom bude podle principu neurčitosti neurčitost v poloze stěny  $x$  dost velká, aby se obraz na detektoru posouval nahoru a dolů ve směru osy  $x$  o vzdálenost, jež je rovna přibližně vzdálenosti maxima od vedlejšího minima. Tyto náhodné posuny stačí k tomu, aby se obraz rozmazal natolik, že nevidíme žádnou interferenci.

Princip neurčitosti „ochraňuje“ kvantovou mechaniku. Heisenberg si uvědomil, že kdyby se dala změřit současně hybnost i poloha s větší přesností, kvantová mechanika se zhroutí. Proto vyslovil domněnku, že to musí být nemožné. Mnoho lidí se pokoušelo vymyslet nějaký způsob, jak by se to dalo udělat, ale nikdo nedokázal vymyslet, jak změřit polohu i hybnost čehokoliv – stěny, elektronu, kulečnickové koule, atd. – s větší přesností. Kvantová mechanika si zachovává svou ohroženou, ale odůvodněnou existenci.

# Souvislost mezi vlnovým a korpuskulárním hlediskem

---

## 38.1 AMPLITUDY VLN PRAVDĚPODOBNOTI

## 38.2 MĚŘENÍ POLOHY A HYBNOSTI

## 38.3 DIFRAKCE NA KRYSTALECH

## 38.4 VELIKOST ATOMU

## 38.5 ENERGETICKÉ HLADINY

## 38.6 FILOZOFICKÉ DŮSLEDKY

### 38.1 AMPLITUDY VLN PRAVDĚPODOBNOTI

V této kapitole se zamyslíme nad vztahem mezi vlnovým a korpuskulárním hlediskem. Z poslední kapitoly už víme, že ani vlnové, ani korpuskulární hledisko není správné. Obvykle jsme se snažili vše podávat přesně nebo alespoň tak přesně, že se to nemuselo měnit, když se naše vědomosti dostaly dále – mohli jsme je rozšířit, ale nikdy jsme je nemuseli měnit! Pokusíme-li se mluvit o vlnovém nebo korpuskulárním obraze, oba jsou přibližné a oba se budou muset změnit. Proto ani to, co se v této kapitole dozvíme, nebude v určitém smyslu přesné; bude to polointuitivní argumentace, která se později upřesní, ale některé věci se změní, budeme-li je interpretovat kvantově – mechanicky správně. Důvod, proč to tak uděláme, je ten, že se nehodláme zabývat přímo kvantovou mechanikou, ale chceme získat aspoň určitou představu o jevech, s nimiž se setkáme. Navíc, protože se všechny naše zkušenosti týkají vln a částic, abychom pochopili, oč tu jde, dřív než zvládneme celou matematiku kvantově – mechanických amplitud,

## AMPLITUDY VLN PRAVDĚPODOBNOSTI

je velmi výhodné použít vlnové a korpuskulární představy. Přitom se budeme snažit ilustrovat nejslabší místa, ale většinou budeme téměř zcela korektní – je to zcela věc interpretace.

Především víme, že nový způsob reprezentace světa v kvantové mechanice – nový rámec – spočívá v tom, že každé možné události přísluší amplituda. Týká-li se událost dopadu jedné částice, můžeme určit amplitudu pravděpodobnosti, že se částice najde v různých časech na různých místech. Pravděpodobnost nalezení částice je pak úměrná druhé mocnině absolutní hodnoty amplitudy. Obecně se amplituda pravděpodobnosti, že najdeme částici na různých místech v různých časech, mění s polohou a časem.

Ve zvláštním případě se amplituda mění v prostoru a čase sinusoidálně jako  $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  (nezapomínejme, že tyto amplitudy jsou komplexní a ne reálné) a zahrnuje určitou frekvenci  $\omega$  a vlnový vektor  $\mathbf{k}$ . Ukazuje se, že v klasické limitě to odpovídá situaci, kde jsme si představovali, že máme částici se známou energií  $E$ , jež souvisí s frekvencí vztahem

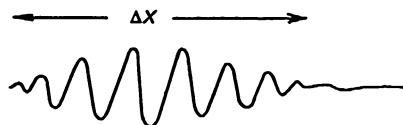
$$E = \hbar \omega \quad (38.1)$$

a známou hybností  $\mathbf{p}$ , která souvisí s vlnovým vektorem vztahem

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}. \quad (38.2)$$

To znamená, že představa částice je omezená. Představa částice – její polohy, hybnosti atd. – kterou tak často používáme, je určitým způsobem neuspokojivá. Například, je-li amplituda pravděpodobnosti toho, že najdeme částici na různých místech, dána funkcí  $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , jejíž druhá mocnina absolutní hodnoty je konstantní, bude to znamenat, že pravděpodobnost nalezení částice je pro všechny body stejná. Pak nevíme, kde se částice nachází; částice může být kdekoli a její poloha je velmi neurčitá.

Na druhé straně, je-li poloha částice více méně dobře známá a umíme ji předpovědět dost přesně, pravděpodobnost toho, že se najde na různých místech, musí být omezena na oblast délky  $\Delta x$ . Mimo tuto oblast je pravděpodobnost nulová. Tato pravděpodobnost je rovna druhé mocnině absolutní hodnoty amplitudy, proto, je-li druhá mocnina absolutní hodnoty rovna nule, bude rovna nule i amplituda. Dostáváme vlnový impulz o délce  $\Delta x$  (obr. 38.1) a jeho vlnová délka (vzdálenost mezi nulovými hodnotami) je to, co odpovídá hybnosti částice.

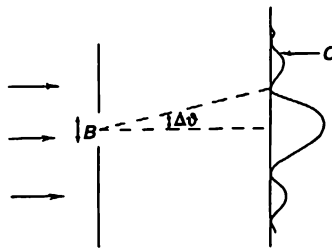


Obr. 38.1 Vlnový balík délky  $\Delta x$

Zde se setkáváme s podivnou vlastností vln. Je to velmi snadná věc, která nijak nesouvisí s kvantovou mechanikou. Něco, co zná každý, kdo se zabývá vlněním, i když nezná kvantovou mechaniku: *Pro krátký vlnový impulz nemůžeme jednoznačně definovat vlnovou délku.* Vlnové číslo je neurčité, souvisí s konečnou délkou impulzu, a proto je neurčitá i hybnost částice.

### 38.2 MĚŘENÍ POLOHY A HYBNOSTI

Podívejme se na dva příklady, abychom si ozřejmili, proč musí podle kvantové mechaniky existovat neurčitost v poloze nebo v hybnosti. Už dříve jsme viděli, že kdyby něco takového neexistovalo – kdyby bylo možné současně měřit polohu i hybnost – byl by to paradox. To naštěstí nenastává a skutečnost, že taková neurčitost vyplývá z vlnového obrazu svědčí o tom, že vše je vzájemně konzistentní.



Obr. 38.2 Difrakce částic procházejících štěrbinou

Uvedeme příklad, na němž lze snadno pochopit, jaký je vztah mezi polohou a hybností. Předpokládejme, že máme štěrbinu a částice s určitou energií, jež přilétají velmi zdaleka, takže v podstatě všechny letí vodorovně (obr. 38.2). Budeme se zajímat o svislou složku hybnosti. Všechny částice mají, v klasickém smyslu, určitou horizontální hybnost  $p_0$ , takže, v klasickém smyslu, známe vertikální hybnost  $p_y$  každé částice předtím, než proletí štěrbinou. Částice neletí ani směrem vzhůru, ani dolů, neboť přilétá od velmi vzdáleného zdroje – a proto je její vertikální hybnost rovna nule. Předpokládejme, že dále letí částice štěrbinou vertikální šířky  $B$ . Po průletu štěrbinou známe vertikální polohu – souřadnici  $y$  a to s pozoruhodnou přesností  $\pm B$ . Neurčitost polohy  $\Delta y$  je tedy rovna řádově  $B$ . Mohlo by se zdát, vzhledem k tomu, že hybnost částice má čistě horizontální směr, bude  $\Delta p_y$  rovno nule, ale není tomu tak. Věděli jsme, že hybnost je horizontální, ale už to nevíme. Dříve, než částice proletěly otvorem, neznali jsme jejich vertikální polohu a nyní, tím, že jsme je nechali proletět otvorem, jsme ztratili informaci o jejich vertikální hybnosti! Proč? Podle vlnové teorie při průchodu vln štěrbinou dochází k jejich rozmazání nebo difrakci, podobně jako u světla. Proto existuje určitá pravděpodobnost, že částice nevyletují ze štěrbinu úplně přímo. Difrakční efekt rozmáže obraz jejich rozmístění a úhel, který můžeme definovat jako úhel prvního minima, je mírou neurčitosti konečného úhlu.

Jak dochází k rozmazání obrazu? Řekneme-li, že je rozmazaný, znamená to, že existuje určitá pravděpodobnost, že částice se vychýlí nahoru nebo dolů, tj. že bude mít složku hybnosti ve směru nahoru nebo dolů. Mluvíme o pravděpodobnosti a o částici, protože difrakční obraz můžeme proměnit pomocí počítače částic, který, když zachytí částici, dejme tomu v bodě  $C$  na obr. 38.2, zachytí celou částici, takže v klasickém smyslu, aby se částice dostala od štěrbinu do  $C$ , musí mít nějakou vertikální hybnost.

Abychom dostali aspoň přibližnou představu o rozmazání hybnosti, uvědomme si, že rozmazání vertikální hybnosti je rovno  $p_0 \Delta \theta$ , kde  $p_0$  je horizontální hybnost. Jak velké je  $\Delta \theta$  v difrakčním obraze? Víme, že první minimum nastává při takovém úhlu  $\Delta \theta$ , při němž je dráha vln od jednoho okraje štěrbinu delší o vlnovou délku než dráha vln od druhého okraje štěrbinu – zdůvodnili jsme si to už dříve (v kapitole 30). Proto  $\Delta \theta$  je  $\lambda/B$ , takže  $\Delta p_y$  je v tomto

## MĚŘENÍ POLOHY A HYBNOSTI

experimentu  $p_0 \lambda / B$ . Vidíme, že čím víc zmenšíme  $B$  a přesněji určíme polohu, tím bude difrakční obraz širší. Vzpomeňme si, že čím víc jsme uzavřeli štěrbinu v našem experimentu s mikrovlnami, tím větší byla intenzita ve vzdálených polohách. Takže, čím užší bude štěrbinu, tím víc se celý obraz roztáhne a tím je větší pravděpodobnost, že naměříme příčnou složku hybnosti částice. Neurčitost vertikální hybnosti je tedy nepřímo úměrná neurčitosti  $y$ . Vidíme, že jejich součin je roven  $p_0 \lambda$ . Ale  $\lambda$  je vlnová délka,  $p_0$  je hybnost a podle kvantové mechaniky součin vlnové délky a hybnosti dává Planckovu konstantu  $h$ . Dostali jsme tak pravidlo, že součin neurčitosti vertikální hybnosti a neurčitosti vertikální polohy je řádově roven  $h$ :

$$\Delta y \Delta p_y \approx h. \quad (38.3)$$

Nemůžeme sestavit zařízení, jež by umožnilo ze známé vertikální polohy částice předpovědět i její vertikální pohyb s větší přesností, než je dána pomocí (38.3). Neurčitost vertikální hybnosti musí být větší než  $h/\Delta y$ , kde  $\Delta y$  je neurčitost, s níž známe polohu.

Lidé občas říkají, že celá kvantová mechanika je pochybená. Když částice přilétávala zleva, měla nulovou vertikální hybnost a nyní, když prošla štěrbinou a dopadla na detektor, je její poloha známa. Zdá se, že jak poloha, tak i hybnost jsou známé s libovolnou přesností. Je to tak, po dopadu částice můžeme určit její polohu a hybnost, kterou musela mít, aby dopadla na dané místo. Je to pravda, ale netýká se to relace neurčitosti (38.3). Rovnice (38.3) se vztahuje k možnosti *předpovědět* situaci na základě znalostí z minulosti. Co máme z toho, když řekneme: „Věděl jsem, jaká byla hybnost před průchodem štěrbinou a nyní znám polohu“, když teď nevím nic o hybnosti. Skutečnost, že částice proletěla štěrbinou, nám nedovoluje předpovědět její vertikální hybnost. Mluvíme o prediktivní teorii, nejen o měřeních z minulosti. Musíme mluvit o tom, co dokážeme předpovědět.

Nyní pojďme na celou věc z opačného konce. Provedme si podrobnější kvantitativní analýzu dalšího příkladu téhož jevu. V předcházejícím příkladě jsme měřili hybnost klasickou metodou – uvažovali jsme o směru, rychlosti, úhlech atd., takže hybnost jsme určovali klasicky. Ale protože hybnost souvisí s vlnovým číslem, existuje další možnost, jak změřit hybnost částice (fotonu nebo podobně), jež nemá klasický analog, neboť je založena na rovnici (38.2). Spočívá v měření vlnové délky. Pokusme se hybnost změřit tímto způsobem.

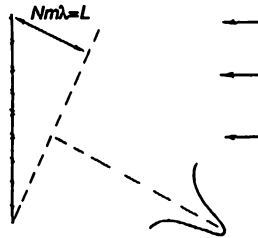
Předpokládejme, že máme difrakční mřížku s velkým počtem vrypů (*obr. 38.3*) a že na ni nasměrujeme svazek částic. O tomto problému jsme mluvili často. Mají-li částice určitou hybnost, v určitém směru dostáváme, díky interferenci, ostré maximum. Mluvili jsme i o tom, jak přesně umíme určit hybnost, tj. jaká je rozlišovací schopnost této mřížky. Místo toho, abychom to znovu odvozovali, můžeme se odvolat na kapitolu 30, kde vidíme, že relativní neurčitost při měření vlnové délky pomocí dané mřížky je  $1/Nm$ , kde  $N$  je počet vrypů na mřížce a  $m$  je řád na difrakčním obraze. Takže

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nm}. \quad (38.4)$$

Vztah (38.4) lze napsat jako

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{Nm\lambda} = \frac{1}{L}, \quad (38.5)$$

SOUVISLOST MEZI VLNOVÝM A KORPUSKULÁRNÍM HLEDISKEM



Obr. 38.3 Určení hybnosti pomocí difrakční mřížky

kde  $L$  je vzdálenost znázorněná na obr. 38.3. Je to rozdíl vzdáleností, jež musí projít vlna nebo cokoliv, když se odrazí od horního okraje mřížky a když se odrazí od dolního okraje. Vlny, které vytvářejí difrakční obraz, přicházejí od různých částí mřížky. První přiletí ta, která přichází od dolního okraje mřížky ze začátku vlnového signálu, další pocházejí od pozdějších částí vlnového signálu a odrážejí se od různých částí mřížky, až nakonec přiletí poslední, jež odpovídá bodu vzdálenému ve vlnovém signálu o vzdálenosti  $L$  od začátku. Proto, abychom dostali v našem spektru ostrou čáru, jež odpovídá pevné dané hybnosti s neurčitostí podle (38.4), musíme mít vlnový balík aspoň o délce  $L$ . Je-li balík kratší, nevyužijeme celou mřížku. Vlny vytvářející spektrum se odrážejí od velmi malé části mřížky a mřížka nepracuje, jak by měla – dostaneme velké úhlové rozložení. Aby bylo rozložení užší, musíme použít celou mřížku, aby se aspoň v některém okamžiku odrazil celý vlnový balík současně od různých částí mřížky. Proto, chceme-li, aby neurčitost vlnové délky byla menší, než udává vztah (38.5), délka balíku musí být  $L$ . Platí

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} = \Delta \left( \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\Delta k}{2\pi}. \quad (38.6)$$

Proto

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}, \quad (38.7)$$

kde  $L$  je délka vlnového balíku.

To znamená, že máme-li vlnový balík, který je kratší než  $L$ , musí být neurčitost ve vlnovém čísle větší než  $2\pi/L$  nebo že součin neurčitosti vlnového čísla a délky balíku – kterou si označíme jako  $\Delta x$  – bude větší než  $2\pi$ . Jako  $\Delta x$  ji značíme proto, protože je to neurčitost v poloze částice. Má-li vlnový balík jen omezenou délku, určuje nám místo, kde můžeme najít částice s nepřesností  $\Delta x$ . Vlastnost vln, že délka vlnového balíku násobená neurčitostí vlnového čísla je rovna nejméně  $2\pi$ , je známa každému, kdo se vlnami zabývá. Nemá nic společného s kvantovou mechanikou. Znamená to jen to, že máme-li konečný vlnový balík, nemůžeme v něm přesně určit počet vln. Pokusme se to pochopit z jiného hlediska.

Předpokládejme, že máme konečný vlnový signál délky  $L$ . Protože na koncích musí zanikat, jak je to na obr. 38.1, neurčitost v počtu vln na délce  $L$  je přibližně  $\pm 1$ . Počet vln na délce  $L$  je  $kL/2\pi$ . Proto  $k$  je neurčitě a opět dostáváme výsledek (38.7); je to jen obyčejná vlastnost vln. Totéž platí o vlnách v prostoru, kde  $k$  je počet radiánů na centimetr a  $L$  je délka balíku, i o vlnách v čase, kde  $\omega$  je počet oscilací za sekundu a  $T$  je „délka“ času trvání signálu. Máme-li tedy vlnový signál, který trvá jenom určitý omezený čas  $T$ , je neurčitost frekvence dána vztahem

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (38.8)$$

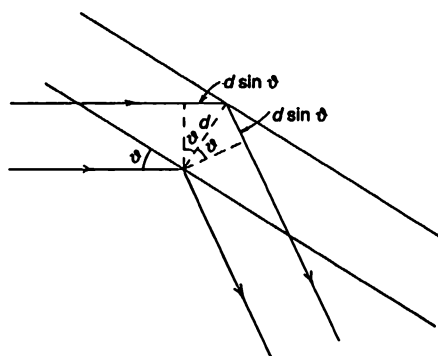
## DIFRAKCE NA KRYSTALECH

Snažili jsme se zdůraznit, že to jsou vlastnosti jen samotných vln, jež jsou dobře známé například v teorii zvuku.

Důležité je to, že v kvantové mechanice interpretujeme vlnové číslo jako mřru hybnosti částice podle pravidla  $p = \hbar k$ , takže ze vztahu (38.7) vyplývá  $\Delta p \approx \hbar / \Delta x$ . Tak je omezena klasická představa hybnosti. (Je zcela přirozené, že musí být nějak omezena, chceme-li částice reprezentovat vlnami!) Podařilo se nám najít jakési pravidlo, které nám pomáhá rozlišit, kde začínají selhávat klasické představy.

### 38.3 DIFRAKCE NA KRYSTALECH

Dále si představme odraz vln na krystalu. Krystal je objemné těleso skládající se z množství pěkně seřazených podobných atomů – některé komplikace zahrneme později. Otázka zní, jak je máme nastavit světlu (rentgenovým paprskům), elektronům, neutronům aj., abychom dostali po odrazu výrazné maximum v daném směru. Abychom dostali silný odraz, musí být na všech atomech rozptyl ve fázi. Nemůže jich být stejný počet ve fázi a v protifázi, neboť by se vlny vrušily. Lze toho dosáhnout tak, že najdeme oblasti konstantní fáze, jak jsme již vysvětlovali; jsou to roviny, jež svírají s počátečním i konečným směrem stejné úhly (obr. 38.4).



Obr. 38.4 Rozptyl vln na krystalových rovinách

Vezmeme-li dvě rovnoběžné roviny, jako na obr. 38.4, vlny, které se od nich odrazily, budou ve fázi za předpokladu, že rozdíl vzdáleností, které překonají čela vln, je roven celému násobku vlnových délek. Je vidět, že tento rozdíl je  $2d \sin \vartheta$ , kde  $d$  je kolmá vzdálenost mezi rovinami. Takže podmínkou pro koherentní odraz je, aby

$$2d \sin \vartheta = n\lambda \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (38.9)$$

Máme-li například krystal, jehož roviny splňují podmínku (38.9) pro  $n = 1$ , bude odraz silný. Na druhé straně, jsou-li v polovině vzdáleností mezi rovinami další atomy (se stejnou hustotou), tyto intermediaální roviny budou také způsobovat stejně silný rozptyl a interference způsobí, že výsledný efekt bude nulový. Proto se  $d$  musí vztahovat na přilehlé roviny; vztah (38.9) nemůžeme použít pro roviny vzdálené o pět vrstev!

Pro zajímavost: Krystaly nejsou ve skutečnosti tak jednoduché, aby se v nich určitým způsobem opakoval stejný druh atomů. Kdybychom chtěli provést jejich dvourozměrné analýzy,

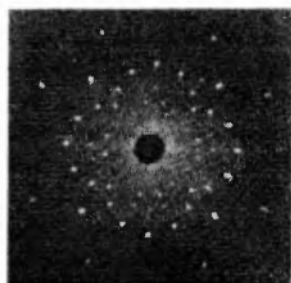


## SOUVISLOST MEZI VLNOVÝM A KORPUSKULÁRNÍM HLEDISKEM

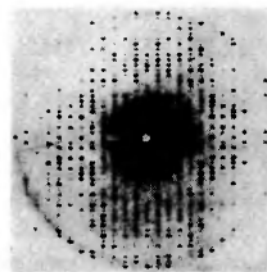
velmi by se podobal tapetě, na níž se pravidelně opakuje nějaký vzor. Vzorem v případě atomů rozumíme nějaké jejich seskupení: – například pro uhlíkatý vápenatý atom vápníku, atom uhlíku a tři atomy kyslíku – kde může být relativně velký počet atomů. Ať je vzor jakýkoliv, vždy se opakuje. Tento základní vzorek se nazývá *jednotkovou buňkou*.

Různé druhy opakování vzorků definují to, čemu říkáme *typ mřížky*. Typ mřížky lze poznat ihned podle toho, jaké symetrické obrazce vytváří odražené světlo. Podle míst, kde dochází k odrazům, určíme typ mřížky, ale abychom zjistili, co je uvnitř každé buňky, musíme vzít v úvahu *intenzitu rozptylu* v různých směrech. *Směr*, v němž dochází k rozptylu, závisí na druhu mřížky, ale *jak silný* je rozptyl v příslušném směru, je určeno tím, co je v každé jednotkové buňce. Tímto způsobem se zjišťuje struktura krystalů.

Na *obrázcích 38.5 a 38.6* jsou dvě fotografie vzorků pomocí rentgenové difrakce. Znárodnují rozptyl na kamenné soli a na myoglobinu (červené barvivo svalů).

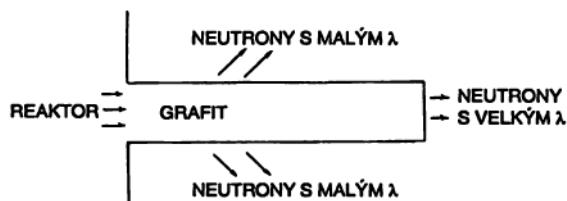


Obr. 38.5



Obr. 38.6

Zajímavá situace nastává, jsou-li sousední krystalové roviny od sebe vzdáleny o méně než  $\lambda/2$ . V tom případě podmínka (38.9) nemůže být splněna. Proto je-li  $\lambda$  větší než dvojnásobek vzdálenosti mezi sousedními rovinami, nevzniká žádný difrakční vzor a světlo (nebo cokoliv) projde materiálem, aniž by se odrazilo nebo ztratilo. Je-li  $\lambda$  v případě světla mnohem větší než vzdálenost mezi rovinami, prochází světlo krystalem, aniž by docházelo k jeho odrazu od rovin krystalu.

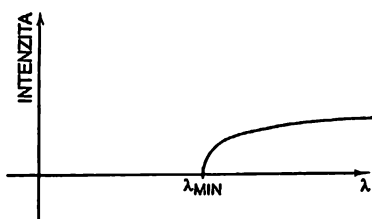


Obr. 38.7 Difúze neutronů z reaktoru grafitovým blokem

To má zajímavý důsledek pro neutrony z reaktoru (jsou to zřejmě částice za všechny peníze!). Postavíme-li jim do cesty blok z grafitu, neutrony difundují a razí si jím cestu (*obr. 38.7*). Difundují, neboť se srážejí s atomy, ale přesně řečeno podle vlnové teorie, odrazí se, neboť dochází k jejich difrakci na krystalových rovinách. Neutrony, jež vylétají z velmi velkého kusu grafitu na druhém konci, mají všechny velkou vlnovou délku! Když si graficky znázorníme jejich intenzitu jako funkci vlnové délky, vidíme, že je různá od nuly jen pro vlnové délky větší než určitá minimální délka (*obr. 38.8*). Znamená to, že tak můžeme získat velmi pomalé neutrony.

## VELIKOST ATOMŮ

Grafitem proletí jen ty nejpomalejší neutrony, které se na krystalových rovinách nedifragují nebo nerozptylují, ale letí přímo skrz jako světlo sklem a nerozptylují se do stran. Je mnoho jiných důkazů existence neutronových vln a vln jiných částic.



Obr. 38.8 Intenzita neutronů vyletujících z grafitového bloku jako funkce vlnové délky

### 38.4 VELIKOST ATOMŮ

Nyní se zamysleme nad jinou aplikací principu neurčitosti vyjádřeného rovnicí (38.3). Tuto aplikaci nesmíme brát příliš vážně. Myšlenka je správná, ale naše analýza nebude moc přesná. Týká se demonstrace rozměrů atomů a toho, že podle klasické teorie by měly elektrony vyzářovat světlo a obíhat po spirále, dokud nespadnou na jádro. To však nemůže být v souladu s kvantovou mechanikou, kde nemůžeme vědět, kde byl každý elektron a jak rychle se pohyboval.

Představme si, že chceme určit polohu elektronu ve vodíkovém atomu. Je nemožné, abychom přesně určili jeho polohu, neboť pak by byla neurčitost jeho hybnosti nekonečná. Kdykoliv se na elektron podíváme, někde se nachází; má však určitou amplitudu pravděpodobnosti, vyskytovat se na různých místech. Tato místa se nemohou nacházet všude v jádře; budeme předpokládat, že jsou rozložena ve vzdálenosti  $a$  od jádra, tj. že vzdálenost elektronu od jádra je obvykle řádově rovna  $a$ . Minimalizací celkové energie atomu určíme  $a$ .

Ze vztahu neurčitosti vyplývá, že neurčitost hybnosti je  $\hbar/a$ , takže kdybychom chtěli nějak změnit hybnost elektronu, například pomocí rozptylu rentgenových paprsků na elektronu a sledováním Dopplerova jevu na pohybujícím se rozptylovém centru, očekávali bychom, že nedostaneme vždy nulu – elektron nebude stát na místě – ale jeho hybnost musí být řádově  $p \approx \hbar/a$ . Kinetická energie je přibližně  $1/2 mv^2 = p^2/2m = \hbar^2/2ma^2$ . (V určitém smyslu provádíme jistý druh rozměrové analýzy, jak závisí kinetická energie na Planckově konstantě, na  $m$  a rozměrech atomu. Naši odpovědi můžeme důvěřovat s přesností na faktory jako 2,  $\pi$  atd. Dokonce ani  $a$  jsme nedefinovali moc přesně.) Potenciální energie je rovna  $e^2$  dělenému vzdáleností od středu,  $-e^2/a$ , kde  $e^2$  (jak si pamatujeme) je rovna druhé mocnině náboje elektronu dělené  $4\pi\epsilon_0$ . Vtip je nyní v tom, že potenciální energie klesá, když se  $a$  zmenšuje, ale čím je menší  $a$ , tím je podle principu neurčitosti větší hybnost a tedy i kinetická energie. Celková energie je

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}. \quad (38.10)$$

Nevíme, čemu je rovno  $a$ , ale víme, že atom se uspořádá tak, aby došlo k určitému kompromisu a aby jeho energie byla tak malá, jak jen může být. Abychom našli minimum  $E$ , zderivujeme ji podle  $a$ , položíme derivaci rovnu nule a z této rovnice najdeme  $a$ . Derivace  $E$  je rovna

SOUVISLOST MEZI VLNOVÝM A KORPUSKULÁRNÍM HLEDISKEM

$$\frac{dE}{da} = -\frac{h^2}{ma^3} + \frac{e^2}{a^2}, \quad (38.11)$$

a když ji položíme rovnu nule, dostaneme pro hodnotu  $a$

$$a_0 = \frac{h^2}{me^2} = 0,528 \cdot 10^{-10} \text{ metrů.} \quad (38.12)$$

Tato vzdálenost se nazývá *Bohrův poloměr* a tak jsme se dozvěděli, že rozměry atomů jsou řádově  $10^{-10}$  m, což je pravda. To je krásné – je to úžasné, neboť do této doby jsme neměli žádnou bázi, na jejímž základě bychom mohli odhadnout rozměry atomů! Přitom z klasického hlediska atomy vlastně nemohou existovat, neboť elektrony by měly spadnout po spirále na jádro.

Dosadíme-li hodnotu pro  $a_0$  z (38.12) do vztahu pro energii (38.10), dostáváme

$$E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{me^4}{2h^2} = -13,6 \text{ eV.} \quad (38.13)$$

Co znamená záporná energie? Znamená, že elektron má v atomu menší energii, než když je volný. Znamená to, že je vázaný. Znamená to, že k uvolnění elektronu je třeba energie. K ionizaci vodíkového atomu musíme dodat energii 13,6 eV. Nemáme důvod, abychom si nemysleli, že má být dvakrát nebo třikrát větší než tato energie – nebo poloviční nebo  $1/\pi$  násobek, když naše argumentace byla taková ledabylá. My jsme však trochu podváděli, použili jsme takové konstanty, aby nám vyšlo správné číslo! Hodnota 13,6 elektronvoltů se nazývá *Rydbergova energie*. Je to ionizační energie vodíkového atomu.

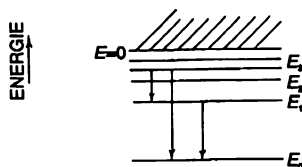
Ted' alespoň chápeme, proč se nepropadneme podlahou. Když jdeme, naše boty tlačí svými atomy na atomy podlahy. Kdybychom stlačili atomy blíže k sobě, musely by elektrony zabírat menší prostor a podle principu neurčitosti by se musely v průměru zvýšit jejich hybnosti, což by znamenalo vyšší energii. Odpor při stlačování atomů je kvantově-mechanický efekt a ne klasický efekt. Klasicky bychom předpokládali, že kdybychom k sobě přiblížili všechny elektrony a protony, energie by se stále zmenšovala. Nejvýhodnější seskupení kladných a záporných atomů v klasické fyzice je, když jsou všechny těsně u sebe. V klasické fyzice to bylo dobře známé a existence atomů byla záhadou. Samozřejmě, vědci tehdy objevili několik způsobů, jak se dostat z těžkostí, ale teprve my jsme našli ten *správný* způsob! (Snad.)

I když nemáme předpoklady, abychom tomu na naší úrovni porozuměli, zmíníme se o tom, že tam, kde je mnoho elektronů, snaží se být od sebe co nejdále. Obsadí-li jeden elektron určitý prostor, druhý elektron ho neobsadí. Přesněji řečeno existují dva případy spinu, takže dva elektrony mohou ještě „sedět“ jeden na druhém, přičemž mají opačné spiny, ale víc jich tam už nemůžeme dát. Ostatní musíme dát na jiná místa a to je skutečný důvod, proč má hmota pevnost. Když bychom mohli umístit všechny elektrony na stejné místo, hmota by se zkondenzovala ještě víc, než nyní. Právě této skutečnosti, že všechny elektrony se nemohou shluknout v jednom místě, vděčíme za to, že stoly a jiné věci jsou pevné.

K pochopení vlastností hmoty budeme muset zřejmě použít kvantovou mechaniku a nemůžeme se spokojit s klasickou mechanikou.

### 38.5 ENERGETICKÉ HLADINY

Mluvili jsme o atomu v nejnižším možném energetickém stavu, ale jak je vidět, elektron dokáže i jiné věci. Může se vrtět a kmitat mnohem energičtěji, takže v atomu existuje mnoho různých pohybů. Podle kvantové mechaniky může mít atom určitou energii jen ve stacionárním stavu. Na obrázku 38.9 máme diagram, kde nanášíme energii na svislou osu a pro každou dovolenou energii máme nakreslenou vodorovnou čáru. Je-li elektron volný, tj. je-li jeho energie kladná, jeho energie může být libovolná, může se tedy pohybovat libovolnou rychlostí. Energie vázaného elektronu však nejsou libovolné. Atomy musí mít některou z dovolených hodnot energie, jako jsou ty na *obr. 38.9*.



Obr. 38.9 Energetické schéma atomu znázorňující několik možných přechodů

Označme dovolené hladiny energie  $E_0, E_1, E_2, E_3$ . Nachází-li se atom v některém z excitovaných/vzbuzených stavů  $E_1, E_2$  atd., nezůstane v něm navždy. Dříve nebo později klesne do nižšího stavu a vyzáří energii ve formě světla. Frekvenci emitovaného světla lze určit pomocí zákona zachování energie a kvantově-mechanického chápání toho, že frekvence světla souvisí s jeho energií podle (38.1). Proto frekvence světla, jež se uvolní při přechodu od energie  $E_3$  k energii  $E_1$  (například), je

$$\omega_{31} = \frac{(E_3 - E_1)}{\hbar}. \quad (38.14)$$

To je pak charakteristická frekvence atomu a definuje jeho spektrální emisní čáru. Další možný přechod by byl od  $E_3$  k  $E_0$ . Ten bude odpovídat frekvenci

$$\omega_{30} = \frac{(E_3 - E_0)}{\hbar}. \quad (38.15)$$

Další možnost je ta, že když byl atom vzbuzen do stavu  $E_1$ , může spadnout do základního stavu  $E_0$ , přičemž vyzáří foton s frekvencí

$$\omega_{10} = \frac{(E_1 - E_0)}{\hbar}. \quad (38.16)$$

Tyto tři přechody jsme vybrali proto, abychom mohli ukázat na zajímavý vztah. Z (38.14), (38.15) a (38.16) je snadno vidět, že

$$\omega_{30} = \omega_{31} + \omega_{10}. \quad (38.17)$$

Obecně platí, že najdeme-li dvě spektrální čáry, můžeme očekávat, že další najdeme na součtu

jejich frekvencí (nebo na rozdílu jejich frekvencí). Tyto čáry můžeme objasnit pomocí série hladin tak, že každá čára odpovídá rozdílu energií nějakého páru energetických hladin. Tato pozoruhodná shoda spektrálních frekvencí byla objevena dříve, než kvantová mechanika a nazývá se *Ritzův kombinační princip*. Z hlediska klasické mechaniky je to opět záhada. Nemusíme se dále snažit zdůrazňovat, že klasická fyzika selhává v oblasti atomů, zdá se, že jsme to dokázali dostatečně jasně.

Již jsme si řekli, že kvantová mechanika je reprezentována pomocí amplitud, jež se chovají jako vlny s určitými frekvencemi a vlnovými čísly. Podívejme se, jak plyne z hlediska amplitud, že atom má určité energetické stavy. Je to něco, co nemůžeme pochopit z toho, co jsme si dosud řekli, ale všichni víme, že stojaté vlny mají určité frekvence. Například zvuk uzavřený ve varhanní přístale však může vibrovat více způsoby, přičemž každému z nich přísluší určitá frekvence. Proto má objekt, v němž jsou vlny uzavřené, určité rezonanční frekvence. To, že vlnění může existovat jen při určitých frekvencích, je vlastnost vln v uzavřeném prostoru. O tom budeme mluvit podrobně včetně vzorců až později. A protože mezi frekvencemi amplitud a energií existuje obecný vztah, nejsme překvapeni, že s elektrony vázanými v atomech souvisí jen určité energie.

### 38.6 FILOZOFICKÉ DŮSLEDKY

Proberme si stručně některé filozofické důsledky vyplývající z kvantové mechaniky. Jako vždy má tento problém dvě stránky: jednou jsou filozofické důsledky pro fyziku a druhou jejich extrapolace do jiných oblastí. Když se filozofické myšlenky, spojené s přírodní vědou, přenáší do jiných oblastí, obvykle se zcela překrouť. Proto naše poznámky omezíme, pokud to bude možné, jen na fyziku.

Nejzajímavějším aspektem je především myšlenka principu neurčitosti; pozorování nějakého jevu ovlivňuje samotný jev. Vždy bylo známo, že pozorování nějakého jevu se tento jev ovlivňuje, ale jde tady o to, že toto ovlivňování nelze zanedbat, minimalizovat nebo libovolně zmenšovat pomocí vhodného uspořádání aparatury. Sledujeme-li nějaký jev, nemůžeme si pomoci, ale musíme ho aspoň minimálním způsobem narušit a *toto narušení je nevyhnutelné pro konzistentnost našeho chápání*. V předkvantové fyzice byl někdy pozorovatel důležitý, ale jen v triviálním smyslu. Byl nastolen takový problém: Když v lese padne strom a není tam nikdo, kdo by to slyšel, vzniká přitom zvuk? Přirozeně, pádem *skutečného* stromu ve *skutečném* lese vzniká zvuk, i když tam nikdo nebyl. I když tam nikdo není, kdo by to slyšel, zůstanou i jiné stopy. Zvuk rozechvěje listy a kdybychom byli dostatečně pozorní, snad bychom zjistili, že se někde nějaký trn oťel o list a jemně ho poškrábal, což nelze vysvětlit bez předpokladu, že se list rozechvěl. Takže v určitém smyslu musíme přiznat, že při tom vzniká zvuk. Můžeme se zeptat: Došlo přitom k *pocitu* zvuku? Ne, pociťování zřejmě souvisí s vědomím. A zda si to uvědomili mravenci, zda byli nějakí mravenci v lese nebo zda si to uvědomil strom, to nevíme. Nechme tento problém tak, jak je.

Další věc, kterou lidé zdůrazňovali před kvantovou mechanikou, je myšlenka, že bychom neměli mluvit o věcech, jež nemůžeme měřit. (Skutečně to tvrdila i teorie relativity.) Nemůžeme-li něco určit měřením, nemá to v teorii co hledat. Protože přesnou hodnotu hybnosti lokalizované částice nelze měřením určit, nemá v teorii místo. Představa, že tak to bylo v klasické teorii, je *falešná*. Je důsledkem nedbalé analýzy situace. Nemožnost přesného *měření* polohy a hybnosti ještě *a priori* neznamená, že o nich nemůžeme mluvit. Znamená to jen tolik, že o nich *nemusíme* mluvit. Ve vědě je taková situace: Pojem nebo představa, kterou nelze měřit nebo nelze přímo odvodit z experimentu, může být, ale nemusí být užitečná. Nemusí existovat v teorii. Jinými slovy, předpokládáme, že porovnáme klasickou teorii světa s kvantovou teorií a předpo-

kládejme, že experimentálně platí fakt, že jak polohu tak i hybnost můžeme měřit jen nepřesně. Vzniká otázka, zda *představa* přesné polohy částice a *představa* přesné hybnosti částice platí nebo ne. Klasická teorie tyto představy připouští, kvantová teorie nepřipouští. To samo o sobě ještě neznamená, že klasická fyzika je chybná. Když byla objevena kvantová mechanika, klasici (to byli všichni kromě Heisenberga, Schrödingera a Borna) říkali: „Podívejte se, vaše teorie nestojí za nic, protože neumíte dát odpovědi na určité otázky jako například: Jaká je přesná poloha částice? Kterým otvorem prošla? atd.“ Heisenbergova odpověď zněla: „Nepotřebujeme odpovědi na tyto otázky, protože vy je nemůžete experimentálně ověřit.“ Vtip je v tom, že nemusíme. Vezmeme si dvě teorie: *a* a *b*. Teorie *a* obsahuje představu, kterou nelze přímo ověřit, ale která se používá při analýze a teorie *b* tuto představu neobsahuje. Když se teorie ve svých předpovědích neshodnou, nelze tvrdit, že *b* je špatná, protože neumí vysvětlit představu, kterou používá *a*, neboť je to představa, jež patří mezi ty, co nelze přímo ověřit. Je vždy dobré, když víme, které představy nelze přímo ověřit, ale ne vždy je nutné je všechny odstranit. Není pravda, že vědu můžeme posunout dále jen pomocí koncepcí, jež přímo souvisí s experimentem.

Kvantová mechanika obsahuje amplitudu vlnové funkce, potenciál a mnoho dalších konstrukcí, jež nelze přímo měřit. Podstata vědy spočívá v její schopnosti *předpovídat*. Předpovídat znamená říci, co se stane v experimentu, který ještě nikdo nikdy neudělal. Jak to můžeme vědět? Nezávisle na experimentu předpokládáme, že víme, co při něm probíhá. Musíme extrapolovat experimenty do oblasti, kde se ještě neděly. Musíme své představy rozšířit na situace, v nichž je ještě nikdo neprovedl. Když to neuděláme, nemáme předpověď. Proto se klasickým fyzikům zdálo rozumné předpokládat, že poloha – jež má jasný smysl v bejsbolu – bude mít smysl i pro elektron. Nebyl to projev hlouposti. Byl to rozumný proces. Dnes říkáme, že zákon relativity platí pro všechny energie, ale jednou může někdo přijít a říci, jací jsme byli hloupi. V čem jsme „hloupi“, nevíme, dokud „nevystříme hlavu ven“. Celá idea spočívá v tom, abychom vystřili ven hlavu. Jediný způsob, jak můžeme zjistit, že se mýlíme, je ten, že se podíváme, jaké jsou naše předpovědi. Je nutné, abychom vymýšleli nové konstrukce.

Už jsme udělali několik poznámek o neurčitosti kvantové mechaniky. O tom, že nejsme schopni předpovědět, co se fyzikálně stane za daných fyzikálních podmínek, jež jsou uspořádány tak pečlivě, jak jen lze. Máme-li atom, který je v excitovaném stavu a který se chystá vyzářit foton, nemůžeme říci, *kdy* ho vyzáří. V každém okamžiku má určitou amplitudu, že foton vyzáří a my umíme předpovědět jen pravděpodobnost emise; nemůžeme předpovědět budoucnost přesně. To dalo podnět ke vzniku všelijakých nesmyslů, k otázkám o smyslu svobodné vůle a k myšlence, že svět je neurčitý.

Musíme zdůraznit, že klasická fyzika je také v určitém smyslu indeterministická. Obyčejně se má za to, že tato vlastnost, tj. že nemůžeme předpovědět budoucnost, je důležitá kvantově-mechanická vlastnost a tím by se mělo vysvětlovat myšlení, city, vůle atd. Kdyby svět *byl* klasický – kdyby byly jen klasické zákony mechaniky – není vůbec zřejmé, že mysl by nepracovala více méně stejně. Je pravda, že kdybychom klasicky znali polohu a rychlost každé částice ve světě nebo v krabici s plynem, mohli bychom exaktně předpovědět, co bude. Proto je klasický svět deterministický. Předpokládejme však, že máme konečnou přesnost a že známe polohu každého atomu dejme tomu s přesností jedné miliardtiny. Pak tento atom narazí do dalšího atomu a když jsme jeho polohu neznali přesněji než na jednu miliardtinu, bude po srážce nepřesnost v jeho poloze ještě větší. Další srážkou se chyba ještě zvětší, takže, když začneme třeba jen s malými chybami, ty rychle narostou na velmi velkou neurčitost. Uvedeme příklad. Voda se při pádu z přehrady třísť a stojíme-li někde blízko, tu a tam nám na nose přistane kapka. Zdá se to být zcela náhodné a přece by se to dalo předpovědět pomocí klasických zákonů. Přesné polohy

## SOUVISLOST MEZI VLNOVÝM A KORPUSKULÁRNÍM HLEDISKEM

kapek závisí na proudění vody dřív než protéká přes přehradu. Jak? Nejmenší nahodilosti se ve vodopádu zesilují, takže dostáváme úplnou nahodilost. Je jasné, že polohy kapek nemůžeme reálně předpovědět, když neznáme pohyb vody *naprosto přesně*.

Přesněji řečeno, při libovolné přesnosti lze najít dostatečně vzdálený čas, pro který nemůžeme udělat platné předpovědi. Vtip je v tom, že tento čas není ani příliš vzdálený. Věc se nemá tak, že by přesnosti na jednu miliardtinu odpovídal čas miliónů roků. Čas se fakticky mění jen logaritmicky ve srovnání s chybou a ukazuje se, že už za velmi krátký čas ztrácíme celou informaci. Je-li přesnost dána na jednu miliardtinu z miliardtiny (můžeme vzít miliardtin kolik chceme, jen když se někde zastavíme), zjistíme, že čas, po němž už nemůžeme předpovědět, co se stane, je kratší, než byl čas, za který jsme si stanovili původní přesnost! Není proto čestné říkat, že na základě zdánlivé svobody a indeterminizmu lidské mysli jsme si měli uvědomit, že klasická „deterministická“ fyzika si nikdy nemohla dělat naději, že to pochopí a vítat kvantovou mechaniku jako osvobození od „úplně mechanistického“ vesmíru, neboť z praktického hlediska už existoval indeterminizmus v klasické mechanice.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 38.1** ■ V kapitole 32 jsme ukázali, že vybuzený atom vyzařuje svou energii po určitých porcích. To má za následek omezení doby života vybuzeného stavu a vzniku konečné šířky příslušné spektrální čáry. Ukažte, že tyto jevy, popisujeme-li je jako neurčitosti energie a doby vyzařování fotonu, jsou v souladu s relacemi neurčitosti.
- 38.2** ■ Odhadněte Bohrov poloměr atomu vodíku pomocí rozměrové analýzy. Na základě relace neurčitosti ukažte, že energie potřebná k odtržení elektronu od protonu v atomu vodíku je řádově několik elektronvoltů.
- 38.3** ■ V ultrafialové oblasti spektra vybuzeného vodíku se nachází série spektrálních čar nazývaná Lymanova série. Tři čáry této série mají vlnové délky 121,6 nm, 102,6 nm, 97,3 nm. Vypočítejte vlnové délky odpovídající třem dalším možným čarám ve spektru vybuzeného vodíku, jež mohou být předpovězeny pouze na základě těchto údajů a Ritzova kombinačního principu. Dvě z nich leží v oblasti viditelného světla (Balmerova série) a jedna v infračervené oblasti (první čára Paschenovy série).



# Kinetická teorie plynů

---

## 39.1 VLASTNOSTI LÁTEK

## 39.2 TLAK PLYNU

## 39.3 STLAČITELNOST ZÁŘENÍ

## 39.4 TEPLOTA A KINETICKÁ ENERGIE

## 39.5 ZÁKON IDEÁLNÍHO PLYNU

### **39.1 VLASTNOSTI LÁTEK**

Touto kapitolou začneme nový předmět, jemuž se budeme poměrně dlouho věnovat. Na začátku našich úvah o vlastnostech látek z fyzikálního hlediska si uvědomíme, že látky se skládají z velkého množství atomů nebo částic, které na sebe působí elektrickými silami a chovají se podle zákonů mechaniky a budeme se snažit pochopit proč se různá seskupení atomů chovají právě určitým způsobem.

Je to bezpochyby těžká úloha a snad bude dobré, když si hned na začátku řekneme, že je to *mimořádně těžký* předmět a budeme k němu muset přistupovat jinak, než jsme přistupovali k problémům, které jsme řešili do této doby. V případě mechaniky a nauky o světle jsme mohli vycházet z přesné formulace některých zákonů jako například Newtonových zákonů nebo vztahu pro pole vytvářené urychlovaným nábojem. Pomocí nich jsme mohli vysvětlit mnoho jevů a staly se pro nás základem pro chápání mechaniky a optiky. S jejich využitím můžeme ve studiu pokračovat, ale už se nenaučíme novou fyziku, jenom se seznámíme s dokonalejšími matematickými metodami řešení jednotlivých problémů.

Takový postup však není vhodný ke studiu vlastností látek. O vlastnostech látek můžeme uvažovat jen velmi elementárním způsobem. Kdybychom naši analýzu začali základními zákony, kterými jsou vlastně zákony mechaniky a elektřiny, byla by příliš složitá. Od těchto zákonů je totiž příliš daleko k vlastnostem, které nás zajímají. Je třeba udělat mnoho kroků, než se od Newtonových zákonů dostaneme k vlastnostem látek a samotné tyto kroky jsou dost složité. My sice nastoupíme tuto cestu a uděláme některé z těchto kroků, ale i když některé z našich analýz budou dost přesné, bude tato přesnost postupně ubývat. Získáme tak jen velmi hrubou představu o vlastnostech látek.

Jednou z příčin, proč budeme v naší analýze tak nedokonalí, je skutečnost, že vyžaduje hluboké vědomosti z teorie pravděpodobnosti. Nebudeme se zajímat o to, jak se každý atom pohybuje, ale spíše o to, jaký je střední počet atomů pohybujících se v tom či onom směru a jaké jsou pravděpodobnosti různých jevů. Tento předmět si tedy vyžaduje poznání teorie pravděpodobnosti, ale naše vědomosti z matematiky nám zatím nestačí a my nechceme své síly přepínat.

Druhou příčinou – z fyzikálního hlediska důležitější – je skutečnost, že atomy se nechovají podle klasické mechaniky, ale podle kvantové, takže tento problém správně pochopíme až tehdy, když budeme znát kvantovou mechaniku. Na rozdíl od kulečnickových koulí a automobilů je nyní rozdíl mezi zákony klasické a kvantové mechaniky velmi důležitý a výrazný, a proto mnohé z věcí, jež odvodíme pomocí klasické fyziky, budou principiálně nesprávné. Některé věci nám proto zůstanou částečně nepochopené, ale na každou nepřesnost vás upozorním, takže budete vědět, kde jsou hranice našeho výkladu. Jedna z příčin, proč jsme v předcházejících kapitolách mluvili o kvantové mechanice, spočívá v tom, že musíme vědět, proč je klasická mechanika v některých směrech nesprávná.

Proč se tímto předmětem nyní vůbec zabýváme? Proč půl roku nebo rok nepočkáme, než budeme lépe znát teorii pravděpodobnosti a něco z kvantové mechaniky a tak se jednodušeji dostaneme k vlastnostem látek? Proto, že je to těžký předmět a nejlepší způsob, jak se ho naučit, je učit se pomalu! Nejprve musíme získat jakousi představu o tom, co by se mělo stát za různých okolností a později, když budeme lépe znát základní zákony, zformulujeme vše přesněji.

Kdo by chtěl analyzovat vlastnosti látek v nějakém konkrétním případě, začal by možná tak, že by zapsal základní rovnice a pak by se je pokusil matematicky řešit. Existují lidé, kteří se pokoušejí postupovat takovým způsobem, ale nejsou úspěšní. Úspěchu dosáhnou ti, kteří začnou problém řešit z *fyzikálního* hlediska, kteří mají hrubou představu o tom, kam směřovat, a pak používají správné aproximace, vědí, co je v dané složité situaci malé a co je velké. Tyto problémy jsou tak složité, že stojí za to dopracovat se i k jejich elementárnímu chápání, i když je nepřesné a neúplné. K takovým problémům se znovu a znovu vracíme a vždy je poznáváme přesněji a přesněji, a tak budeme postupovat i v tomto kurzu fyziky.

Další příčina, proč se touto problematikou budeme zabývat už nyní, spočívá v tom, že s mnoha takovými myšlenkami jste se už setkali například v chemii a o některých jste slyšeli už i na střední škole. Bude zajímavé poznat fyzikální podstatu těchto věcí.

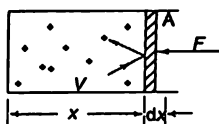
Jako zajímavý příklad vzpomeňme, že stejné objemy plynů obsahují při stejném tlaku a teplotě stejný počet molekul. Zákon násobných poměrů, který říká, že dva plyny, které se slučují v chemické reakci, mají objemy v poměru malých celých čísel, pochopil Avogadro jako zákon vyjadřující skutečnost, že stejné objemy mají stejné počty atomů. *Proč* je ve stejných objemech stejný počet atomů? Vyplývá něco takového z Newtonových zákonů? Otázkám takového charakteru bude věnována tato kapitola. V dalších kapitolách budeme mluvit i o různých jiných jevech zahrnujících tlak, objem, teplotu a teplo.

Zjistíme, že k tomuto předmětu je možné přistupovat nejen z atomistického hlediska, a že existuje mnoho vzájemných vztahů mezi vlastnostmi látek. Například, když nějakou látku stlačíme, ohřeje se; když ji ohřejeme, zvětší svůj objem. Mezi těmito dvěma skutečnostmi existuje vztah, který můžeme odvodit, aniž bychom pochopili vnitřní mechanismus. Odborná disciplína, jež se zabývá takovými vztahy, se nazývá *termodynamika*. Hluboké pochopení termodynamiky však pochází z pochopení vnitřního mechanismu a tím se právě budeme zabývat. Budeme předpokládat, že látky mají atomovou povahu a na základě toho se budeme snažit pochopit jejich různé vlastnosti a zákony termodynamiky.

Začneme tedy zkoumat plyny, a to tak, že budeme vycházet z Newtonových zákonů mechaniky.

### 39.2 TLAK PLYNU

Víme, že plyn vyvolává tlak a naší úlohou bude vysvětlit příčinu tohoto jevu. Kdyby byl náš sluch několikrát citlivější, slyšeli bychom stálý rušivý šum. V průběhu vývoje však ucho nedosáhlo takové citlivosti, protože by to bylo zbytečné – slyšeli bychom totiž stálý hluk. Příčina spočívá v tom, že ušní bubínek je ve styku se vzduchem a vzduch je ohromné množství neustále se pohybujících molekul, které na ušní bubínek narážejí. Tyto nárazy molekul vytvářejí jakési nepravidelné bubnování, ale my ho neslyšíme, neboť atomy jsou příliš malé a naše ucho není dostatečně citlivé. Výsledkem takového neustálého bombardování by mělo být odtlačení bubínku, ale protože i na jeho opačné straně dochází k takovému bombardování, je výsledná síla nulová. Kdybychom z jedné strany odstranili vzduch nebo kdybychom změnili relativní množství vzduchu na stranách bubínku, došlo by k posunutí bubínku na jednu nebo na druhou stranu, protože bombardování z jedné strany by bylo větší než bombardování z druhé strany. Tento nepřijemný jev pocítujeme tehdy, když stoupáme příliš rychle výtahem nebo letadlem a hlavně, když máme silnou rýmu (při rýmě dojde k ucpání trubice, která spojuje vzduch uvnitř bubínku s dutinou ústní s vnějším vzduchem a jejich tlaky se nemohou vyrovnat).



Obr. 39.1 Atomy plynu v nádobě s pístem, jež se pohybuje bez tření

Abychom mohli kvantitativně analyzovat tuto situaci, představme si, že se plyn nachází v nádobě a na jedné straně nádoby je pohyblivý píst (obr. 39.1). Zajímá nás, jaká síla působí na píst v důsledku toho, že v nádobě jsou atomy. Atomy se pohybují v nádobě s objemem  $V$  všemi možnými rychlostmi a narážejí na píst. Předpokládejme, že na druhé straně pístu není nic, jen vakuum. Co se bude dít? Kdyby byl píst ponechán sám sobě a nikdo by ho nepřidržel, po nárazu atomu by vždy získal nepatrnou hybnost a postupně by se vysouval ven z nádoby. Kdybychom chtěli zabránit jeho vysouvání, museli bychom ho přidržovat silou  $F$ . Zajímá nás, jak velká je tato síla. Jeden ze způsobů jak vyjádřit sílu, je udát její velikost připadající na jednotkovou plochu. Je-li  $A$  plocha pístu, pak sílu působící na píst můžeme zapsat jako součin nějakého čísla a plochy. Tímto způsobem definujeme tlak jako sílu působící na píst dělenou plochou pístu

$$p = \frac{F}{A}. \quad (39.1)$$

Abychom lépe pochopili tuto myšlenku (později ji použijeme i k jinému účelu), stanovme infinitezimální práci  $dW$  konanou při stlačení plynu pístem, který se posunul o infinitezimální vzdálenost  $-dx$ . Tato práce bude rovna součinu síly a posunutí, takže podle vztahu (39.1) součinu tlaku, plochy a posunutí. To je záporně vzatý součin tlaku a změny objemu

$$dW = F(-dx) = -pAdx = -pdV \quad (39.2)$$

## TLAK PLYNU

(Součin plochy  $A$  a vzdálenosti  $dx$  je změna objemu.) Záporné znaménko označuje skutečnost, že při stlačování se objem *zmenšuje*, taková volba znaménka vede k tomu, že ke stlačení plynu je třeba *vykonat práci*.

Jakou silou musíme tláčit na píst, abychom vykompenzovali nárazy molekul? Píst získává při každé srážce hybnost. Každou sekundu dostává píst určitou hybnost a začíná se pohybovat. Abychom tomuto pohybu zabránili, musí naše síla odevzdat pístu za sekundu stejně velkou hybnost opačného směru. Síla *představuje* hybnost odevzdanou pístu za sekundu. Můžeme to říci i jinak: Když pístu nebudeme bránit v pohybu, získá v důsledku nárazu molekul rychlost; každá další srážka představuje malý přírůstek rychlosti, takže píst se bude pohybovat se zrychlením. Zrychlení pístu je úměrné síle, jež na něj působí. Síla, o níž jsme řekli, že je součinem tlaku a plochy, je tedy rovna hybnosti odevzdané za sekundu pístu narážejícími molekulami. Vypočítat hybnost za sekundu je snadné – můžeme to udělat ve dvou krocích: Nejprve najdeme hybnost, kterou pístu odevzdá při srážce jeden atom a pak tuto hybnost musíme násobit počtem srážek atomu s pístem za sekundu. Síla bude právě součin těchto dvou faktorů. Všimneme si těchto dvou faktorů blíže. Především předpokládáme, že píst je dokonalým „odrážečem“ atomů. Kdyby nebyl, celá teorie by byla chybná, neboť píst by se začal ohřívat a situace by se změnila. Kdyby se však nakonec dosáhlo rovnováhy, výsledek by byl takový, že srážky by byly efektivně pružné. V průměru by si každá dopadající částice zachovala svou energii. Můžeme si proto představit, že plyn je v ustáleném stavu a pístu neodevzdáme žádnou energii, protože píst je v klidu. Když za těchto podmínek dopadá částice s určitou rychlostí, odráží se stejnou rychlostí a ovšem se stejnou hmotností.

Je-li  $v_x$  rychlost atomu a  $v_x$  velikost  $x$ -ové složky  $v$ , bude  $m v_x$  velikost složky hybnosti ve směru  $x$ . Protože tato složka při odrazu od pístu změní směr na opačný a zachová si svou velikost, bude celková hybnost dodaná pístu částic při jedné srážce rovna  $2 m v_x$ .

Nyní potřebujeme zjistit počet srážek atomů s pístem za sekundu nebo za určitý časový interval  $dt$  a pak ho dělit intervalem  $dt$ . Kolik atomů narazí na píst? Předpokládejme, že v objemu  $V$  se nachází  $N$  atomů, tedy  $n = N/V$  v každém jednotkovém objemu. Abychom určili, kolik atomů narazí na píst, musíme si uvědomit, že za dobu  $t$  nedosáhnou pístu všechny částice, které se proti němu pohybují určitou rychlostí, ale jen ty, které jsou dost blízko. Jsou-li příliš daleko, projdou za dobu  $t$  jen část cesty k pístu, ale nedosáhnou ho. Je jasné, že za dobu  $t$  narazí na píst jen ty částice, které od něho nebudou ve větší vzdálenosti než  $v_x t$ . Proto je počet srážek za čas  $t$  roven počtu atomů nacházejících se ve vzdálenosti ne větší než  $v_x t$  a je-li plocha pístu  $A$ , budou atomy, jež narazí na píst, zaujímat *objem*  $v_x t A$ . Počet atomů, jež narazí na píst, získáme násobením tohoto objemu počtem atomů nacházejících se v jednotkovém objemu tedy  $n v_x t A$ . My však nechceme počet atomů, které narazí za dobu  $t$ , zajímá nás počet atomů, které narazí za sekundu a ten získáme vydělením tohoto výrazu časem  $t$ , dostaneme tedy  $n v_x A$ . (Dobu  $t$  můžeme zvolit velmi malou, pro eleganci ji můžeme označit  $dt$  a pak derivovat. Ale to je vlastně totéž, co jsme dělali.)

Pro sílu tak dostáváme vztah

$$F = n v_x A \cdot 2 m v_x. \quad (39.3)$$

Všimněte si, že síla je úměrná ploše, je-li při změně plochy hustota částic stálá. Pro tlak potom platí vztah

$$p = 2 n m v_x^2. \quad (39.4)$$

Nyní si všimneme některých těžkostí, jež vznikají při takové analýze. Především ne každý atom má stejnou rychlost a ne každý se pohybuje tímž směrem. Veličiny  $v_x^2$  jsou tedy pro každý atom

## KINETICKÁ TEORIE PLYNŮ

různě! Každý atom přispívá jinak, a proto musíme vzít *střední hodnotu* z  $v_x^2$ . Musíme vzít druhou mocninu z  $v_x$  a zprůměrovat ji přes všechny atomy:

$$p = n m \langle v_x^2 \rangle. \quad (39.5)$$

Nezapomněli jsme na koeficient 2? Ne, neboť ze všech atomů směřuje k pístu jen polovina. Ta druhá polovina se pohybuje na opačnou stranu, a když bereme  $\langle v_x^2 \rangle$ , průměrujeme druhé mocniny *záporných* i *kladných*  $v_x$ . Vezmeme-li tedy prostě  $\langle v_x^2 \rangle$  a nerozlišujeme kladné a záporné  $v_x$ , dostaneme dvakrát tolik, než kolik potřebujeme. Střední hodnota z  $v_x^2$  je pro kladná  $v_x$  rovna polovině střední hodnoty z  $v_x^2$  pro všechna  $v_x$ .

„Směr osy  $x$ “ není nijak zvlášť charakteristický a atomy narážejí stejně i v ostatních směrech. Atomy se stejně dobře pohybují nahoru i dolů, dopředu i dozadu, dovnitř i ven. Proto  $\langle v_x^2 \rangle$  bude rovna odpovídajícím středním hodnotám v ostatních dvou směrech, tedy

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle. \quad (39.6)$$

Použitím jednoduchého matematického triku bychom zjistili, že tyto střední hodnoty jsou rovny třetině jejich součtu, což je samozřejmě střední hodnota druhé mocniny z rychlosti

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \langle v^2 \rangle / 3. \quad (39.7)$$

Výhodou takového zápisu je, že se nemusíme starat o nějaký speciální směr a naše formule pro tlak získá tvar

$$p = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{m v^2}{2} \right\rangle. \quad (39.8)$$

Poslední činitel zapisujeme ve tvaru  $\langle m v^2 / 2 \rangle$  proto, že taková je kinetická energie pohybu těžiště molekuly. Tak jsme vlastně dospěli k vztahu

$$pV = N \frac{2}{3} \left\langle \frac{m v^2}{2} \right\rangle. \quad (39.9)$$

Budeme-li znát rychlosti molekul, můžeme pomocí této rovnice vypočítat tlak.

Jako jednoduchý příklad uveďme takové plyny jako je helium, argon, rtuťové páry nebo draslíkové páry při dost vysoké teplotě, které jsou jednoatomovými plyny a můžeme o nich předpokládat, že nemají vnitřní stupně volnosti. Kdybychom měli složitou molekulu, mohl by v ní existovat vnitřní pohyb, různé kmity apod. Předpokládejme, že to vše můžeme ignorovat – ve skutečnosti je to vážný problém a budeme se k němu muset vrátit, ale v našem případě je takové zanedbání možné. Budeme tedy předpokládat, že není třeba uvažovat vnitřní pohyb atomů, a proto pro náš účel kinetická energie pohybu molekuly jako celku představuje úplnou energii. V případě jednoatomového plynu je kinetická energie celkovou energií. Obecně budeme celkovou energii označovat symbolem  $U$  (někdy se nazývá i celkovou *vnitřní* energií – kdoví proč, vždyť plyn nemá vnější energii), tj. půjde o celkovou energii všech molekul plynu nebo jakéhokoliv jiného objektu.

## TLAK PLYNU

V případě jednoatomového plynu budeme předpokládat, že celková energie  $U$  je rovna součinu počtu atomů a střední kinetické energii každého z nich, neboť neuvažujeme možnost excitace nebo vnitřního pohybu atomů. Za těchto okolností můžeme psát

$$pV = \frac{2}{3} U. \quad (39.10)$$

Mimochodem, zde se můžeme na chvíli zastavit a zodpovědět následující otázku: Předpokládejme, že máme určité množství plynu a ten pomalu stlačujeme; jaký tlak potřebujeme ke stlačení tohoto plynu na určitý objem? Je to možno snadno určit, neboť tlak představuje  $2/3$  z energie dělené objemem. Při stlačování plynu konáme práci a zvětšujeme energii  $U$ . Dostaneme proto jakousi diferenciální rovnici: Začneme-li za určitých podmínek, s určitou energií a určitým objemem, známe tlak. Začneme-li plyn stlačovat, energie  $U$  poroste a objem  $V$  se bude zmenšovat a nás zajímá, jak vzrostl tlak.

K tomu musíme vyřešit diferenciální rovnici a ihned to provedeme. Je však třeba zdůraznit, že předpokládáme, že při stlačování plynu jde všechna práce na zvětšení energie atomů plynu. Můžete se zeptat: „Je vůbec nutné o tom mluvit? Vždyť kam jinam by mohla práce přejít?“ Ukazuje se však, že práce by mohla přejít i jinam. Existuje tzv. únik tepla stěnami. Horké (tj. rychle se pohybující) atomy narážejí na stěny a ohřívají je a tak uniká energie. Zatím budeme předpokládat, že k takovým procesům nedochází.

Náš postup trochu zobecníme, i když stále půjde jen o velmi speciální případ, a místo  $pV = 2/3 U$  budeme psát

$$pV = (\gamma - 1) U. \quad (39.11)$$

Koeficientem  $(\gamma - 1)$  násobíme  $U$  proto, protože v budoucnosti budeme pracovat s případy, kdy před  $U$  nebudou  $2/3$ , ale nějaké jiné číslo. Označení  $(\gamma - 1)$  zvolíme proto, protože už téměř sto let používají takové označení fyzici. V našem případě, pro jednoatomový plyn, jako například hélium, je  $\gamma$  rovno  $5/3$ , protože tehdy platí  $\gamma - 1 = 2/3$ .

Už jsme si všimli, že při stlačení plynu se koná práce  $-pdV$ . Stlačení, při němž se nedodává a neodvádí tepelná energie, se nazývá *adiabatické* stlačení. Slovo *adiabatický* pochází z řečtiny: a (ne) + dia (přes) + bainein (jít). (To slovo se používá ve fyzice v různých významech a někdy je dost těžké říct, co mají společné.) Při adiabatickém stlačení přechází všechna vynaložená práce na změnu vnitřní energie. Podstata tedy spočívá v tom, že nedochází k jiným ztrátám energie, a proto máme  $pdV = -dU$ . Platí-li však  $U = pV/(\gamma - 1)$ , můžeme psát

$$dU = (pdV + Vdp)/(\gamma - 1). \quad (39.12)$$

Máme tedy  $pdV = -(pdV + Vdp)/(\gamma - 1)$  nebo po přeskupení členů  $\gamma pdV = -Vdp$ , tedy

$$(\gamma dV/V) + (dp/p) = 0. \quad (39.13)$$

Předpokládáme-li, že  $\gamma$  je konstanta, což je v případech jednoatomových plynů naštěstí oprávněné, můžeme tuto rovnici integrovat a dostaneme  $\gamma \ln V + \ln p = \ln C$ , kde  $C$  je integrační konstanta. Přejdeme-li k exponenciálám, dostaneme zákon

$$pV^\gamma = C \text{ (konstanta)}. \quad (39.14)$$

## KINETICKÁ TEORIE PLYNŮ

Tento zákon říká, že v adiabatických podmínkách, když se teplo neodvádí a teplota při stlačení roste, je součin tlaku a  $5/3$  mocniny objemu pro jednoatomový plyn konstantní. Ačkoli jsme tento zákon odvodili teoreticky, experimenty potvrzují, že jednoatomové plyny se opravdu tak chovají.

### 39.3 STLAČITELNOST ZÁŘENÍ

Uvedeme ještě příklad z kinetické teorie plynů, který se v chemii často nepoužívá, ale setkáme se s ním v astronomii. Mějme v nádobě ohřáté na velmi vysokou teplotu velký počet fotonů. (Může to být plyn nějaké velmi horké hvězdy. Slunce nemá z tohoto hlediska dost vysokou teplotu; i v něm příliš mnoho atomů. Hvězdy mají také mnoho atomů, ale kdyby šlo o velmi horkou hvězdu, bylo by možné atomy zanedbat a předpokládat, že máme pouze fotony.) Foton má určitou hybnost  $p$ . (V kinetické teorii máme vždy problém s označováním:  $p$  je tlak, ale  $p$  je rychlost;  $V$  je objem, ale  $v$  je rychlost;  $T$  je teplota, ale je to i kinetická energie nebo čas nebo moment síly a na to je třeba dávat pozor!) Nyní představuje symbol  $p$  vektorovou veličinu – hybnost. Analýzu provedeme stejně jako předtím. Za nárazy fotonů bude zodpovědná  $x$ -ová složka vektoru  $p$  a dvojnásobek vektoru  $p$  představuje hybnost odevzdanou při srážce. Místo  $2mv_x$  máme tedy  $2p_x$  a při výpočtu počtu srážek je třeba dosadit tak jako předtím  $v_x$ . Takovým způsobem nakonec dostaneme jiné vyjádření vztahu (39.4) pro tlak

$$p = 2 n p_x v_x. \quad (39.15)$$

Pro zprůměrování dostaneme  $n$ -násobek střední hodnoty  $p_x v_x$  (o koeficientu 2 jsme již mluvili) a uvažujeme-li i další dva směry, dostaneme

$$pV = N \langle p \cdot v \rangle / 3. \quad (39.16)$$

to souhlasí se vztahem (39.9), neboť hybnost je rovna  $mv$ ; je to jen trochu obecnější vztah. Součin tlaku a objemu je roven celkovému počtu atomů násobenému střední hodnotou z  $1/3 \langle p \cdot v \rangle$ .

Čemu je rovno  $1/3 \langle p \cdot v \rangle$  v případě fotonů? Hybnost a rychlost mají stejný směr a rychlost je rovna rychlosti světla, takže jde o hybnost fotonu násobenou rychlostí světla. Součin hybnosti a rychlosti světla představuje u každého fotonu jeho energii:  $E = pc$  takže tyto výrazy jsou energie jednotlivých fotonů a my musíme vzít střední hodnotu energie násobenou počtem fotonů. Dostaneme tak  $1/3$  vnitřní energie plynu

$$pV = U/3 \text{ (fotonového plynu)}. \quad (39.17)$$

Uložíme-li před  $U$  faktor  $1/3$ , bude v případě fotonů  $(\gamma - 1)$  ze vztahu (39.11) rovno  $1/3$ , takže  $\gamma = 4/3$ , a proto musí záření v nádobě vyhovovat vztahu

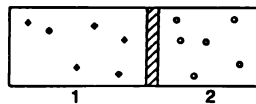
$$pV^{4/3} = C. \quad (39.18)$$

Tak jsme se dozvěděli, jaká je stlačitelnost záření! Tento vztah se používá, když se zajímáme o to, jak ve hvězdě přispívá záření k tlaku. Nyní vidíme, jak se tento příspěvek počítá a jak se mění při stlačení hvězdy. Jaké úžasné věci už dokážeme!

### 39.4 TEPLOTA A KINETICKÁ ENERGIE

Zatím jsme nepřišli do styku s *teplotou*; zcela úmyslně jsme se tomuto pojmu vyhýbali. Víme, že při stlačení plynu energie molekul vzroste a říkáme, že plyn se přitom ohřívá. Bude třeba vysvětlit, jak to souvisí s teplotou. Zajímá nás, co je třeba dělat, aby proces neprobíhal adiabaticky, ale aby se uskutečnil při *konstantní teplotě*. Kdybychom k sobě přiložili dvě nádoby s plynem a ponechali je tak dostatečně dlouho, měly by obě nakonec stejnou teplotu, i když původně to, co nazýváme teplotou, bylo v nádobách různé. Co to znamená? To, že se dostaly do situace, v níž by se octly, kdyby byly dostatečně dlouho ponechány samy sobě! Pod rovností teplot rozumíme právě to, že se dosáhl konečného stavu, kdy jsou už objekty dost dlouho ve vzájemné interakci.

Všimněme si, co se stane, když máme dva plyny v nádobě rozdělené pohyblivým pístem (situaci znázorňuje obr. 39.2 a pro jednoduchost předpokládáme, že jde o jednoatomové plyny, například helium a neon). V části (1) mají atomy hmotnost  $m_1$ , rychlost  $v_1$  a v objemové jednotce je jich  $n_1$  a v druhé části mají atomy hmotnost  $m_2$ , rychlost  $v_2$  a v objemové jednotce je jich  $n_2$ . Jaké jsou podmínky rovnováhy?



Obr. 39.2 Atomy dvou různých jednoatomových plynů oddělených pohyblivým pístem

Je zřejmé, že nárazy zleva způsobují pohyb pístu doprava a stlačování druhého plynu, dokud nevzroste jeho tlak a nenastane opačný pohyb pístu, a takový kyvadlový pohyb pístu neustane do té doby, dokud se nevyrovnají tlaky na obou stranách. Tak lze zařdit rovnost tlaků; znamená to, že vnitřní energie na jednotkový objem jsou si rovny nebo že součin čísla  $n$  a střední kinetické energie je na obou stranách stejný. My však chceme nakonec ukázat, že i samotné počty  $n_1$  a  $n_2$  jsou stejné. Zatím však víme jen to, že součiny takových čísel a kinetických energií jsou stejné:

$$n_1 \left\langle \frac{m_1 v_1^2}{2} \right\rangle = n_2 \left\langle \frac{m_2 v_2^2}{2} \right\rangle.$$

To vyplývá ze vztahu (39.8), neboť tlaky jsou stejné. Musíme si uvědomit, že to z dlouhodobého hlediska není jediná podmínka, ale že musí probíhat i nějaký další, pomalejší proces, než se ustaví úplná rovnováha se stejnými teplotami.

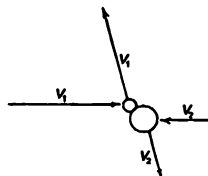
Abychom lépe pochopili oč jde, předpokládejme, že tlak na levé straně je vyvolán velkou hustotou, ale malými rychlostmi atomů. Při velkém  $n$  a malém  $v$  můžeme dosáhnout stejného tlaku jako při malém  $n$  a velkém  $v$ . Atomy se mohou pohybovat pomalu a být víc nahuštěny nebo jich může být méně, ale mohou narážet na píst prudčeji. Zůstane to tak trvale? Na první pohled by se zdálo, že ano, ale když se vážně zamyslíme, zjistíme, že jsme zanedbali jednu velmi důležitou věc. Neuvědomili jsme si, že přehrazovací píst není vystaven trvalému tlaku, ale chvěje se tak jako ušní bubínek, o němž jsme již mluvili. K tomuto chvění dochází proto, že nárazy nejsou zcela pravidelné. Nemáme co dělat s konstantním tlakem, ale s jakýmsi vytrvalým bubnováním – tlak se neustále mění a proto píst poskakuje. Předpokládejme, že atomy na pravé straně narážejí na píst dosti pravidelně, ale atomy na levé straně, i když je jich méně a jejich nárazy jsou



řidčí, mají velkou energii. Proto dostane píst čas od času silný impulz zleva, pohne se proti pomalým atomům na pravé straně a zrychlí je. (Při srážce s pístem každý atom získá nebo ztratí energii podle toho, na kterou stranu se pohybuje píst při srážce s atomem.) V důsledku srážek tedy píst poskakuje a poskakuje a rozechvívá i ostatní plyn – tak odevzdává energii jiným atomům a jejich pohyb se zrychluje, dokud nenastane rovnováha. K určité rovnováze dojde tehdy, když se píst bude pohybovat takovou střední kvadratickou rychlostí, že bude stejně rychle odebrat energii atomům, jako jim odevzdává. Píst tedy získává jakousi nepravidelnost rychlosti a my ji musíme určit. Když se nám to podaří, budeme blíže k vyřešení problému, protože plyny budou měnit rychlosti svých atomů do té doby, dokud nenastane taková situace, že každý plyn bude prostřednictvím pístu získávat tolik energie, kolik ztrácí.

Je velmi obtížné určit pohyb uvažovaného pístu ve všech jeho detailech. I když se tyto věci velmi snadno chápou, dost těžko se analyzují. Dříve, než se do takové analýzy pustíme, všimněme si jiného problému. Uvažujme nádobu s plynem, který je tvořen dvěma druhy molekul s hmotnostmi  $m_1$  a  $m_2$ , rychlostmi  $v_1$  a  $v_2$  atd. Proti předcházejícímu případu máme nyní mnohem těsnější kontakt dvou částí. Kdyby molekuly druhého druhu byly v klidu, netrvalo by to dlouho, protože by do nich narážely molekuly prvního druhu a udělily by jim rychlost. I kdyby se molekuly druhého druhu pohybovaly mnohem rychleji než molekuly prvního druhu, nebyl by tento stav trvalý a nakonec by tyto molekuly odevzdaly molekulám prvního druhu část své energie. Naší úlohou je najít pravidlo, které by určovalo relativní rychlosti molekul obou plynů nacházejících se v jedné nádobě.

I tato úloha je velmi obtížná, ale vyřešíme ji následujícím způsobem. Nejprve se budeme zabývat jedním částečným problémem (opět jde o případ, kdy dostaneme snadno zapamatovatelný výsledek, ale odvození si vyžaduje hodně důvtipu.) Předpokládejme, že se srazí dvě molekuly, které mají různé hmotnosti a že tuto srážku pozorujeme z těžiště těchto dvou molekul, abychom se vyhnuli komplikacím. Ze zákonů pružných srážek při zachování celkové hybnosti a energie už víme, že se molekuly mohou po srážkách pohybovat pouze tak, že každá si zachová velikost své původní rychlosti a změní se jen směr jejich pohybu. Takovou typickou srážku znázorňuje obrázek 39.3. Na chvíli předpokládejme, že pozorujeme všechny srážky v podmínkách, kdy těžiště je v klidu. Dále si představme, že se všechny molekuly pohybují zpočátku horizontálně. Po první srážce se samozřejmě některé z molekul odchýlí o určitý úhel. Jinými slovy, i když se původně všechny pohybovaly horizontálně, budou se později aspoň některé pohybovat vertikálně. Po dalších srážkách se opět změní směr jejich pohybu a budou se pohybovat pod jiným úhlem. I kdyby zpočátku byly dokonale organizovány, rozletí se do různých směrů a tak to půjde dále. Ptáme se k čemu to nakonec povede. Odpověď je taková: *Každá dvojice atomů se bude se stejnou pravděpodobností pohybovat v každém směru prostoru.* Pak už další srážky nemohou změnit rozdělení molekul.



Obr. 39.3 Srážka dvou různých molekul v těžišťové vztažené soustavě

Co máme rozumět tím, že v každém směru se budou molekuly pohybovat se stejnou pravděpodobností? Nemůžeme samozřejmě mluvit o pravděpodobnosti pohybu v určitém směru, neboť

směr je něco velmi úzkého a my musíme vztahovat pravděpodobnost k jednotce „něčeho“. Naši myšlenku však můžeme vyjádřit tak, že danou částí kulové plochy, která má střed v bodě srážky, prochází stejné množství molekul jako kteroukoliv jinou stejně velkou částí této plochy. Výsledek srážek je pak takové rozdělení molekul podle směrů, při kterém stejným částem kulové plochy odpovídá stejná pravděpodobnost.

Mimochodem, kdybychom porovnávali původní směr se směrem odkloněným o úhel  $\vartheta$ , přišli bychom na zajímavou vlastnost: elementární ploška na kouli s jednotkovým poloměrem je rovna  $2\pi$ -násobku výrazu  $\sin \vartheta d\vartheta$ , ale to je stejný výraz jako diferenciál  $\cos \vartheta$ . To znamená, že kosinus úhlu  $\vartheta$  mezi dvěma směry se stejnou pravděpodobností nabývá libovolné hodnoty z intervalu od  $-1$  do  $+1$ .

Nyní musíme věnovat pozornost té skutečnosti, že srážky neprobíhají v těžištové soustavě, ale atomy mají před srážkou rychlosti  $v_1$  a  $v_2$ . Srážku s takovými rychlostmi můžeme pak analyzovat následujícím způsobem. Těžiště soustavy dvou atomů se pohybuje „střední“ rychlostí s váhami úměrnými hmotnostem, takže pro rychlost těžiště  $v_T$  platí:  $v_T = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$ . Pozorujeme-li srážku v těžištové soustavě, vypadá tak, jako na obr. 39.3, kdy se atomy srážejí určitou relativní rychlostí  $w$ . Tou relativní rychlostí je právě  $v_1 - v_2$ . Situace je pak taková, že soustava spojená s těžištěm se pohybuje a v této soustavě se molekuly přibližují relativní rychlostí  $w$ , srazí se a pohybují se v nových směrech. Zatímco se to odehrává, těžiště se pohybuje nerušeně dál.

Jaké je rozdělení molekul, jež získáme takovým způsobem? Argumenty, které jsme uvedli, vedou k závěru: *V rovnováze jsou stejně pravděpodobné všechny směry  $w$  vzhledem ke směru pohybu těžiště.*<sup>47)</sup> Mezi směrem relativní rychlosti a směrem pohybu těžiště nebude nakonec žádná korelace. I kdyby byla, srážky by ji narušovaly, takže by vymizela. Proto je střední hodnota kosinu úhlu mezi  $w$  a  $v_T$  rovna nule. Platí tedy

$$\langle w \cdot v_T \rangle = 0. \quad (39.19)$$

Jenže  $w \cdot v_T$  můžeme vyjádřit pomocí  $v_1$  a  $v_2$

$$w \cdot v_T = \frac{(v_1 - v_2) \cdot (m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2) + (m_2 - m_1)(v_1 \cdot v_2)}{m_1 + m_2}. \quad (39.20)$$

Nejprve si všimněme  $v_1 \cdot v_2$  a zeptejme se, jaká bude střední hodnota  $v_1 \cdot v_2$ . Zajímáme se tedy o to, jaká bude střední složka rychlosti jedné molekuly ve směru pohybu druhé molekuly. Je jasné, že molekula se bude stejně pravděpodobně pohybovat na jednu stranu i na stranu k ní opačnou. *Střední hodnota rychlosti  $v_2$  je v libovolném směru nulová.* Proto je i ve směru  $v_1$  střední hodnota  $v_2$  nulová. Střední hodnota  $v_1 \cdot v_2$  je tedy rovna nule! Tak jsme dospěli k tvrzení, že podle (39.20) musí být střední hodnota  $m_1 v_1^2$  rovna střední hodnotě  $m_2 v_2^2$ . To ale znamená, že *střední kinetické energie obou molekul musí být stejné*

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (39.21)$$

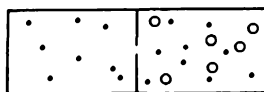
<sup>47)</sup>

Taková argumentace, kterou kdysi použil Maxwell, má hlubší pozadí. I když je závěr správný, bezprostředně nevyplyvá z úvah o symetrii, o které jsme se předtím oprali. Při přechodu ke vztažené soustavě pohybující se plynem by mohlo dojít k narušení rozdělení rychlostí. Jednoduchý důkaz našeho výsledku se nám nepodařilo najít.

## KINETICKÁ TEORIE PLYNŮ

Kdyby se plyn skládal ze dvou druhů atomů, bylo by možné ukázat (předpokládáme, že se nám to podařilo ukázat), že střední hodnota kinetické energie jednoho druhu atomů je stejná jako střední hodnota kinetické energie druhého druhu atomů, pokud se oba druhy atomů nacházejí v jedné nádobě a jsou v rovnováze. To znamená, že těžší atomy se pohybují pomaleji než lehčí. Snadno se o tom můžeme přesvědčit pomocí experimentu s „atomy“ různých hmotností na vzduchové dráze.

Dále se budeme zajímat o dva různé plyny *oddělené* v nádobě a ukážeme, že i takové plyny mají po dosažení rovnováhy stejné střední hodnoty kinetické energie, a to i tehdy, když nejsou v téže části nádoby. Důkaz můžeme provést různými způsoby. Jeden ze způsobů předpokládá pevnou příhrádku mezi plyny, v níž je tak nepatrný otvor (*obr. 39.4*), že jím jeden plyn může procházet, ale druhý ne, protože má příliš velké molekuly. Nastane-li rovnováha, pak se v té části, kde je směs molekul, střední hodnoty energie molekul obou druhů vyrovnají. Menší molekuly však procházejí otvorem beze ztráty kinetické energie, takže střední hodnoty kinetické energie v čistém plynu a směsi musí být stejné. Tento důkaz není dost uspokojivý, neboť takový druh otvoru separující jednotlivé druhy molekul nemusí existovat.



Obr. 39.4 Dva plyny v nádobě s polopropustnou membránou

Vraťme se proto k naší úloze s pístem. Můžeme ukázat, že kinetická energie pístu musí být také rovna  $1/2 m_2 v_2^2$ . Ve skutečnosti jde o kinetickou energii čistě horizontálního pohybu pístu, a proto, když odhlédneme od jeho vertikálního pohybu, dostaneme vlastně  $1/2 m_2 v_2^2$ . Budeme-li vycházet z rovnováhy na druhé straně, můžeme stejným způsobem dokázat, že kinetická energie pístu je rovna  $1/2 m_1 v_1^2$ . I když píst není uprostřed plynu, ale na jedné jeho straně, můžeme opět tvrdit, že střední kinetická energie pístu a molekul plynu jsou v důsledku srážek stejné, i když takový důkaz je trochu obtížnější.

Kdyby nás ani takový postup neuspokojil, můžeme si vymyslet příklad, v němž by se zabezpečovala rovnováha zařízením, na které naráží molekuly každého plynu ze všech stran. Předpokládejme, že máme krátkou tyč, která prochází pístem a na každém konci má kouli. Tato tyč se může pohybovat ložiskem v pístu bez tření. Každá z koulí je vlastně jakoby velká molekula a molekuly plynu na ni mohou narážet ze všech stran. Celý takový objekt má určitou hmotnost  $m$  a opět máme molekuly plynu s hmotnostmi  $m_1, m_2$ . Stejnou analýzou srážek jako dřív bychom zjistili, že kinetická energie objektu s hmotností  $m$  musí být v důsledku nárazů molekul z jedné strany v průměru rovna  $1/2 m_1 v_1^2$ . Podobně v důsledku srážek s molekulami na druhé straně musí být střední kinetická energie rovna  $1/2 m_2 v_2^2$ . Obě strany proto musí mít stejnou kinetickou energii, jsou-li v tepelné rovnováze. Výsledek získaný v případě směsi plynů lze takovým způsobem zobecnit na případ dvou různých, oddělených plynů při stejné teplotě.

*Máme-li tedy dva plyny se stejnou teplotou, budou střední kinetické energie molekul těchto plynů v těžištové soustavě stejné.*

Střední kinetická energie molekul je vlastností pouze „teploty“. Protože závisí na „teplotě“, a ne na samotném plynu, můžeme ji využít k definování teploty. Střední kinetická energie molekuly je tedy určitou funkcí teploty. Jakou stupnici však máme použít k určování teploty? Mohli bychom svévolně definovat teplotní stupnici tak, aby střední energie byla přímo úměrná teplotě. Nejlépe by bylo udělat to tak, že bychom samotnou střední energii nazvali „teplotou“.

## ZÁKON IDEÁLNÍHO PLYNU

To by byla nejjednodušší funkce. Bohužel teplotní stupnice byla zvolena jinak a místo toho, abychom střední energii nazvali přímo teplotou, používáme konstantní koeficient, který dává do souvislosti střední energii molekuly a stupeň absolutní teploty, který nazýváme kelvin. Konstanta úměrnosti je  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  joulu na kelvin.<sup>48)</sup> Při absolutní teplotě  $T$  je střední kinetická energie molekuly rovna  $3/2 kT$ . (Koeficient  $3/2$  jsme zavedli jen z praktických důvodů, abychom se zbavili číselných koeficientů v jiných vztazích.) Je třeba poznamenat, že kinetická energie připadající na jednu složku pohybu v kterémkoliv směru je rovna jen  $1/2 kT$ . Tři nezávislé směry pohybu vedou k hodnotě  $3/2 kT$ .

### 39.5 ZÁKON IDEÁLNÍHO PLYNU

Nyní můžeme aplikovat naši definici teploty v rovnici (39.9) a tak najít zákon závislosti tlaku plynu na teplotě, který zní: Součin tlaku a objemu je roven součinu celkového počtu atomů, univerzální konstanty  $k$  a teploty  $T$

$$pV = NkT. \quad (39.22)$$

Navíc při daných hodnotách teploty, tlaku a objemu je počet atomů přesně určen a také představuje univerzální konstantu! Stejně objemy různých plynů proto mají při stejném tlaku a stejné teplotě stejný počet molekul a to je důsledek Newtonových zákonů. Je to opravdu překvapující důsledek!

V praxi, když máme pracovat s molekulami, musíme používat velmi velká čísla, a proto chemici vybrali jedno velmi velké číslo a dali mu speciální název, a to *mol*. Molem je tedy třeba chápat určité praktické číslo. Zůstává historickou otázkou, proč nevybrali kulaté číslo např.  $10^{24}$ . Za počet objektů, který slouží jako standard, bylo vybráno číslo  $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$ , a toto číslo dostalo název mol. Místo měření počtu molekul v jednotkách se měří tento počet v molech.<sup>49)</sup> Pomocí  $N_0$  můžeme vyjádřit počet molů, násobit ho počtem atomů v molu a dále násobit veličinou  $kT$ . Počet atomů v molu násobený veličinou  $k$  je vlastně molární hodnota  $k$  a používá se pro ni speciální označení  $R$ . Molární hodnota  $k$  je rovna  $8,317$  joulu:  $R = N_0 k = 8,317 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Zákon ideálního plynu tedy můžeme zapsat ve tvaru obsahujícím součin počtu molů (označujeme ho také písmenem  $n$ )<sup>50)</sup> a veličiny  $RT$  nebo součin počtu atomů a veličiny  $kT$ :

$$pV = nRT. \quad (39.23)$$

Je to stejný zákon, ale vyjádřený v jiných jednotkách. My používáme jako jednotku číslo 1, ale chemici číslo  $6 \cdot 10^{23}$ .

Ještě se zmíníme o zákonu ideálního plynu v případě, kdy máme co dělat s objekty, jež jsou odlišné od jednoatomových molekul. Do této doby jsme se zabývali pohybem atomů jednoato-

48) Celsiova stupnice je vlastně Kelvinova stupnice, v níž považujeme za nulu 273,15 stupně, takže platí:  $T = 273,15 + \text{Celsiova teplota}$ .

49) To, co chemici nazvali molekulární vahou, je vlastně hmotnost molu molekul v gramech. Mol je definován tak, že hmotnost molu atomů izotopu uhlíku 12 (jeho jádra se skládají ze 6 protonů a 6 neutronů) je rovna přesně 12 gramů.

50) V češtině se tento základní zákon nazývá stavová rovnice ideálního plynu a zapisuje se ve tvaru  $pV = nRT$ , kde počet molů (látkové množství) je označeno písmenem  $n$ . (Pozn. red.)

## KINETICKÁ TEORIE PLYNŮ

mového plynu v soustavě spojené s těžištěm. Ptáme se, co se stane, když se přidají i síly. Nejprve si všimneme případu, kdy je píst udržován horizontální pružinou, takže na něj působí síly. Pohyb vyvolávající nárazy mezi atomy a pístem nezávisí v žádném časovém okamžiku na tom, kde se právě píst nachází. Rovnovážné podmínky zůstávají stejné. Rychlost pohybu pístu bude nezávisle na jeho poloze právě taková, aby předával molekulám energii jako dřívě. Nezáleží tedy na pružině. *Rychlost, s níž se musí pohybovat píst, je v průměru stejná. Naše poučka, že střední hodnota kinetické energie v jednom směru je rovna  $1/2 kT$ , zůstává v platnosti bez ohledu na to, zda působí či nepůsobí síly.*

Uvažujme jako příklad dvouatomovou molekulu složenou z atomů o hmotnostech  $m_A$  a  $m_B$ . Dokázali jsme, že pohyb částí A a B v těžiškové soustavě je takový, že  $\langle 1/2 m_A v_A^2 \rangle = \langle 1/2 m_B v_B^2 \rangle = 3/2 kT$ . Jak je to ale možné, když jsou tyto části vzájemně spojeny? I když jsou spojeny, výměna energie při vzájemné rotaci a vibraci, při srážkách s jinými molekulami závisí pouze na tom, jak rychle se pohybují. Právě to určuje rychlost výměny energie při srážkách. V daném časovém okamžiku není síla rozhodující. Proto platí stejný princip i tehdy, působí-li síly.

Nakonec bychom měli dokázat, že zákon ideálního plynu je správný i tehdy, zanedbáme-li vnitřní pohyb molekul. Do této doby jsme vlastně s vnitřním pohybem nepočítali, protože jsme zkoumali jednoatomový plyn. Nyní však ukážeme, že rychlost těžiště libovolného objektu, který můžeme považovat za těleso o hmotnosti  $M$ , je taková, že platí

$$\frac{1}{2} M v_T^2 = \frac{3}{2} kT. \quad (39.24)$$

Jinak řečeno, můžeme sledovat buď jednotlivé části nebo těleso jako celek! Podívejme se, proč tomu tak je: Hmotnost dvouatomové molekuly je  $M = m_A + m_B$  a pro rychlost těžiště  $v_T$  platí  $v_T = (m_A v_A + m_B v_B) / M$ . Potřebujeme znát  $\langle v_T^2 \rangle$ . Umocníme-li  $v_T$ , dostaneme

$$v_T^2 = \frac{m_A^2 v_A^2 + 2 m_A m_B v_A \cdot v_B + m_B^2 v_B^2}{M^2}.$$

Násobíme-li tento výraz veličinou  $\frac{1}{2} M$  a najdeme střední hodnotu, dostaneme

$$\frac{1}{2} M v_T^2 = \frac{m_A \frac{3}{2} kT + 2 m_A m_B \langle v_A \cdot v_B \rangle + m_B \frac{3}{2} kT}{M} = \frac{3}{2} kT + \frac{2 m_A m_B \langle v_A \cdot v_B \rangle}{M}.$$

(Využili jsme skutečnost, že  $(m_A + m_B) / M = 1$ .) Čemu je rovna  $\langle v_A \cdot v_B \rangle$ ? (Nejlepší by bylo, kdyby byla rovna 0!) Abychom to zjistili, použijeme náš předpoklad, že relativní rychlost  $w = v_A - v_B$  má v každém směru stejnou pravděpodobnost, takže střední hodnota její složky do kterékoliv směru je rovna nule. Budeme tedy předpokládat, že

$$\langle w \cdot v_T \rangle = 0.$$

## ZÁKON IDEÁLNÍHO PLYNU

Co však představuje  $w \cdot v_T$ ? Je to

$$w \cdot v_T = \frac{(v_A - v_B) \cdot (m_A v_A + m_B v_B)}{M} = \frac{m_A v_A^2 + (m_B - m_A) (v_A \cdot v_B) - m_B v_B^2}{M}.$$

Protože  $\langle m_A v_A^2 \rangle = \langle m_B v_B^2 \rangle$ , vyruší se ve střední hodnotě první a poslední člen a zůstane nám

$$(m_B - m_A) \langle v_A \cdot v_B \rangle = 0.$$

Je-li  $m_B \neq m_A$ , bude  $\langle v_A \cdot v_B \rangle = 0$ , a proto pohyb celé molekuly jako tělesa o hmotnosti  $M$  má kinetickou energii, v průměru rovnou  $3/2 kT$ .

Současně jsme ukázali, že střední kinetická energie *vnitřního* pohybu dvouatomové molekuly, neuvažujeme-li pohyb těžiště, je rovna  $3/2 kT$ . Vždyť celková kinetická energie částí molekuly je  $1/2 m_A v_A^2 + 1/2 m_B v_B^2$  a její střední hodnota je rovna  $3/2 kT + 3/2 kT$ , tedy  $3kT$ . Kinetická energie pohybu těžiště je rovna  $3/2 kT$ , a proto střední kinetická energie rotačního a vibračního pohybu dvou atomů v molekule, kterou dostaneme z rozdílu těchto energií, musí být rovna  $3/2 kT$ .

Věta o střední energii pohybu těžiště má obecný charakter: V případě libovolného objektu, který zkoumáme jako celek v přítomnosti nebo nepřítomnosti sil, je střední kinetická energie každého nezávislého pohybu rovna  $1/2 kT$ . Takové „nezávislé směry pohybu“ nazýváme *stupně volnosti* systému. Počet stupňů volnosti molekuly složené z  $r$  atomů je roven  $3r$ , neboť k určení polohy každého atomu potřebujeme tři souřadnice. Celkovou kinetickou energii molekuly lze vyjádřit buď jako součet kinetických energií jednotlivých atomů nebo jako součet kinetické energie pohybu těžiště a kinetické energie vnitřního pohybu. Vnitřní pohyb je někdy možné vyjádřit jako součet rotační a vibrační energie molekuly, ale takové vyjádření je jen určitou aproximací. Aplikujeme-li naše tvrzení na  $r$ -atomovou molekulu, zjistíme, že molekula má v průměru  $3rkT/2$  joulu kinetické energie, z čeho  $3/2 kT$  joulu připadá na kinetickou energii těžiště celé molekuly a zbytek, tj.  $3/2(r-1)kT$  joulu, připadá na vnitřní vibrační a rotační kinetickou energii.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 39.1 ■ Lze ukázat, že při adiabatickém stlačení ideálního plynu platí vztah  $pV^\gamma = \text{konst}$  (viz rovnici 34.14). Na druhé straně, za všech podmínek platí  $pV/T = \text{konst}$ . Použitím těchto údajů najdete vztahy mezi parametry  $p$  a  $T$  nebo  $V$  a  $T$  pro případ adiabatického stlačení.
- 39.2 ■ Pomocí dvoutaktní hustilky, jež se používá při nahušťování pneumatik u bicyklů lze dosáhnout tlaku 3,5 atmosféry, jestliže výchozí tlak byl normální (1 atmosféra při 20 °C neboli 293 K). Jaká je teplota vzduchu vycházejícího z hustilky ve stupních Celsia, platí-li pro vzduch  $\gamma = 1,40$ ? Zanedbejte tepelné ztráty stěnami hustilky.
- 39.3 ■ Mějme dvě identické, tepelně izolované nádoby. Každá z nádob je napůl přehrazena přepážkou s uzavíratelným otvorem. V jedné polovině každé nádoby je plynné hélium, druhá polovina je odčerpána do úplného vakuu. Uvažte dva pokusy:  
a) Otvor v přepážce jedné nádoby se otevírá a plyn přechází do druhé poloviny nádoby, dokud se neustaví rovnováha. Pak se přepážka začne pomalu přemísťovat k jednomu kraji nádoby.  
b) Přepážku druhé nádoby pomalu přemístíme k okraji té části, v níž je vakuum.  
Porovnejte výsledný stav plynu v těchto dvou nádobách. Tření při přemísťování přepážek zanedbejte.



- 39.4 ■ a) Představte si vysoký svislý válec naplněný plynem nebo kapalinou, jejichž hustota se mění s výškou. Ukažte, že v takovém případě je závislost tlaku na výšce popsána diferenciální rovnicí  $dp/dh = -\rho(h)g$ .  
b) Řešte tuto rovnici pro případ atmosférického vzduchu (jeho molární hmotnost je  $\mu$ ) za předpokladu, že jeho teplota na výšce nezávisí.
- 39.5 ■ Atmosféra se nazývá adiabatickou, platí-li v ní pro tlak a hustotu v závislosti na výšce vztah  $p\rho^{-\gamma} = \text{konst}$ .  
a) Ukažte, že teplota takové atmosféry klesá s výškou lineárně a najdete koeficient úměrnosti. Takový gradient teploty se nazývá adiabatický. Najděte gradient teploty pro zemskou atmosféru.  
b) Na základě energetických úvah dokažte, že atmosféra, jejíž teplotní gradient je menší nebo větší než adiabatický, bude stabilní, resp. nestabilní vůči konvekci.
- 39.6 ■ Válec s hladkou, dokonale nepropustnou přepážkou obsahuje jeden krychlový metr plynu při tlaku jedné atmosféry. Plyn budeme pomalu stlačovat při stálé teplotě až na konečný objem 0,4 m<sup>3</sup>. Jakou práci přitom vykonáme?
- 39.7 ■ Dva plyny, A a B, jež původně zaujímaly týž objem  $V_0$  při témž počátečním tlaku  $P_0$  se začnou náhle adiabaticky stlačovat, každý na polovinu původního objemu. Jaký bude konečný tlak každého plynu ve srovnání s počátečním tlakem, je-li první plyn je jednoatomový ( $\gamma_A = 5/3$ ) a druhý dvouatomový ( $\gamma_B = 7/5$ )?
- 39.8 ■ Najděte poměr prací potřebných ke stlačení plynů v úloze 39.7.

- 39.9 ■ Dvě kulové nádoby o objemech  $200 \text{ cm}^3$  a  $100 \text{ cm}^3$  jsou spojeny krátkou trubicí (viz obrázek), v níž se nachází izolovaná pórovitá přepážka. Ta vyrovnává tlaky v nádobách, ale ne teploty. Soustava má teplotu  $t = 27^\circ\text{C}$  a obsahuje kyslík pod atmosférickým tlakem. Malou kouli umístíme do nádoby s ledem při  $0^\circ\text{C}$  a velkou kouli do nádoby s párou při  $100^\circ\text{C}$ . Jaký se v soustavě ustaví tlak? Zanedbejte teplotní dilataci nádob.



- 39.10 ■ Kontejner o objemu  $50 \text{ l}$  je spojen s jiným kontejnerem o objemu  $15 \text{ l}$  pomocí krátké trubice, v níž je umístěn speciální tlakový ventil. Ten umožňuje plynu pronikat z velkého kontejneru do malého při přetlaku  $116 \text{ kPa}$ . Za teploty  $t = 17^\circ\text{C}$  velký kontejner obsahuje plyn při atmosférickém tlaku a malý kontejner je úplně evakuován. Jaký v něm bude tlak, zahřejeme-li oba kontejnery na teplotu  $162^\circ\text{C}$ ?
- 39.11 ■ Dimer oxidu dusičitého  $\text{N}_2\text{O}_4$  může disociovat na oxid dusičitý podle rovnice  $\text{N}_2\text{O}_4 = 2\text{NO}_2$ . Do evakuované nádoby o objemu  $250 \text{ cm}^3$  zavedeme  $0,90 \text{ g}$  tekutého  $\text{N}_2\text{O}_4$ . Když se kapalina vypaří při  $0^\circ\text{C}$ , tlak v nádobce bude roven atmosférickému. Kolik procent  $\text{N}_2\text{O}_4$  se přitom disociovalo?
- 39.12 ■ V izolované nádobě s posuvným víkem je na počátku  $1 \text{ mol}$  ideálního jednoatomového plynu, který zaujímá objem  $V_1$  při tlaku  $p_1$  a teplotě  $T_1 = 27^\circ\text{C}$ . Potom plyn pomalu zahříváme pomocí ohřívače umístěného uvnitř nádoby a vykonáme práci  $8,31 \text{ W} \cdot \text{h}$ . Plyn se přitom bude rozpínat za stálého tlaku  $p_1$  a dosáhne teploty  $T_2$  a zaujme objem  $V_2$ . Vypočítejte práci, kterou plyn při rozpínání vykonal a energetický obsah plynu. Určete také a)  $T_2$ , b)  $V_2/V_1$ .



# P

# Principy statistické mechaniky

---

- 40.1 EXPONENCIÁLNÍ ATMOSFÉRA
- 40.2 BOLTZMANNŮV ZÁKON
- 40.3 VYPAŘOVÁNÍ KAPALINY
- 40.4 ROZDĚLENÍ MOLEKUL PODLE RYCHLOSTI
- 40.5 MĚRNÁ TEPELNÁ KAPACITA PLYNŮ
- 40.6 SELHÁNÍ KLASICKÉ FYZIKY

## 40.1 EXPONENCIÁLNÍ ATMOSFÉRA

Už jsme mluvili o některých vlastnostech velkého počtu srážejících se atomů. Tímto předmětem se zabývá kinetická teorie. Je to vlastně popis vlastností látek z hlediska srážek mezi atomy. Tvrdíme, že vlastnosti látky jako celku lze vysvětlit na základě pohybu jeho jednotlivých částí.

Zatím se omezíme na podmínky tepelné rovnováhy, budeme tedy zkoumat pouze určitou skupinu přírodních jevů. Zákony mechaniky aplikovatelné v podmínkách tepelné rovnováhy nazýváme *statistickou mechanikou* a v této části se seznámíme s některými základními teorémy této vědní disciplíny.

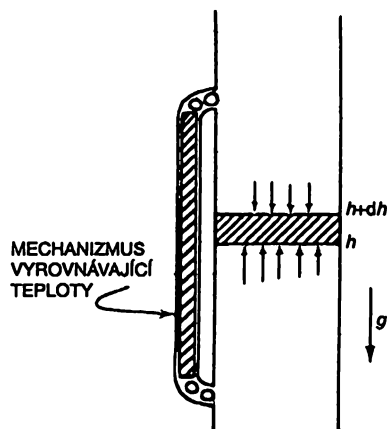
S jedním z poznatků statistické mechaniky jsme se již setkali. Bylo to tvrzení, že na každý nezávislý pohyb, tj. na každý stupeň volnosti, připadá v případě libovolného pohybu při absolutní teplotě  $T$  střední hodnota kinetické energie, která je rovna  $1/2 kT$ . Tak se dozvídáme něco o střední kvadratické rychlosti atomů. Nyní se ještě musíme dozvědět něco víc o polohách atomů, abychom uměli říci, kolik se jich nachází na tom nebo onom místě v podmínkách tepelné rovnováhy a musíme se podrobněji zabývat rozdělením atomů podle rychlostí. Je sice pravda, že známe střední kvadratickou rychlost, ale neumíme odpovědět na otázku, kolik atomů se pohybuje rychlostí, jež je trojnásobkem střední kvadratické rychlosti nebo rychlostí, která je čtvrtinou střední kvadratické rychlosti. Nebo snad mají všechny atomy stejnou rychlost?

Máme tedy dvě otázky, na něž se budeme snažit odpovědět: Jak se seskupí v prostoru molekuly, když na ně působí síly a jaké je jejich rozdělení podle rychlostí?

## EXPONENCIÁLNÍ ATMOSFÉRA

Ukazuje se, že tyto dvě otázky jsou zcela nezávislé a rozdělení podle rychlostí je vždy stejné. Jistý náznak této druhé skutečnosti jsme poznali tehdy, když jsme zjistili, že střední kinetická energie připadající na každý stupeň volnosti je rovna  $1/2 kT$  bez ohledu na to, jaké síly působí na molekuly. Rozdělení podle rychlostí molekul nezávisí na silách, neboť síly neovlivňují frekvenci srážek.

Začněme s příkladem rozdělení molekul v takové atmosféře, jakou je naše, ale za bezvětří a bez jiných poruch. Předpokládejme, že máme sloupec vzduchu plynu sahající do velké výšky a ten se nachází v tepelné rovnováze. Tím se liší od naší atmosféry, protože ta je ve větších výškách chladnější. Poznamenejme, že nerovnováha situace při rozdílnosti teplot v různých výškách je možné demonstrovat propojením tyčí, jež by se na horním i dolním konci dotýkala kuliček (obr. 40.1). Spodní kuličky by od molekul plynu získaly energii  $1/2 kT$  a prostřednictvím tyče by rozkmitaly kuličky nahoře a ty zase molekuly plynu v horní části. Takovým způsobem by se nakonec ustálila teplota a byla by v gravitačním poli v každé výšce stejná.



Obr. 40.1 Tlak ve výšce  $h$  musí převyšovat tlak ve výšce  $h + dh$  o tíhu plynu nacházejícího se v takto ohraničené vrstvě

Naším úkolem je zjistit, podle jakého zákona by řídila atmosféra s rostoucí výškou, kdyby teplota ve všech výškách byla stejná. Je-li  $N$  celkový počet molekul plynu v objemu  $V$  při tlaku  $p$ , pak musí platit  $pV = NkT$ , tedy  $p = nkT$ , kde  $n = N/V$  je počet molekul v jednotkovém objemu. Jinak řečeno, známe-li počet molekul v jednotkovém objemu, známe tlak a naopak. Tyto veličiny jsou navzájem úměrné, protože teplota je v tomto případě konstantní. Tlak však konstantní není, ten musí s poklesem výšky vzrůstat, neboť vlastně musí takřka držet tíhu všeho plynu nad ním. V tom spočívá klíč k určení závislosti změny tlaku s výškou. Uvažujeme-li jednotkovou plochu ve výšce  $h$ , pak vertikální síla, která na tuto jednotkovou plochu působí zespoda, představuje tlak  $p$ . Kdyby nebyla gravitace, musela by být vertikální síla působící směrem dolů na jednotkovou plochu ve výšce  $h + dh$  stejná. Jenže síla působící zdola musí převýšit sílu působící shora právě o tíhu plynu ve vrstvě mezi  $h$  a  $h + dh$ . Víme, že na každou molekulu působí gravitační síla o velikosti  $mg$ , přičemž  $g$  je gravitační zrychlení. Dále víme, že  $n dh$  je celkový počet molekul v uvažované vrstvě. To nám umožňuje sestavit diferenciální rovnici  $p_{h+dh} - p_h = dp = -mgn dh$ . Protože  $p = nkT$ , přičemž  $T$  je konstanta, můžeme vyloučit  $p$  nebo  $n$ . Vyloučíme-li tlak  $P$ , získáme rovnici

PRINCIPY STATISTICKÉ MECHANIKY

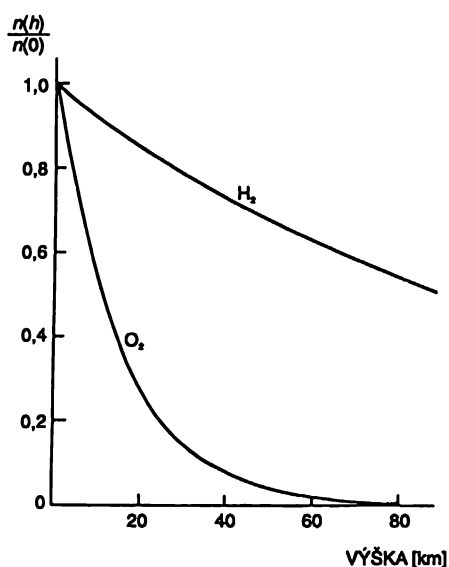
$$\frac{dn}{dh} = -\frac{mg}{kT} n,$$

a tato diferenciální rovnice nám řekne, jak se zmenšuje hustota s rostoucí výškou.

Tak jsme získali rovnici pro hustotu částic  $n$ , která se mění s výškou, a to tak, že derivace této hustoty je úměrná samotné hustotě. Víme však, že funkce s takovou vlastností je exponenciála, takže řešení uvedené diferenciální rovnice má tvar

$$n = n_0 e^{-mgh/kT}. \quad (40.1)$$

Integrační konstanta  $n_0$  je zřejmě hustota ve výšce  $h = 0$  (tu však můžeme zvolit libovolně) a hustota s výškou exponenciálně klesá.



Obr. 40.2 Normovaná hustota jako funkce výšky v gravitačním poli Země – pro kyslík a vodík při konstantní teplotě

Všimněte si, že v případě různých druhů molekul s různými hmotnostmi jsou tyto exponenciály různé. Hustota těžších molekul bude s výškou klesat rychleji než hustota lehčích molekul. Proto by bylo možné očekávat, že kyslík, který je těžší než dusík, bude v atmosféře ubývat s rostoucí výškou rychleji než dusík a relativní podíl dusíku vzhledem ke kyslíku poroste. V průměrných výškách naší atmosféry se to však nestává, neboť různé poruchy a pohyby opět promíchávají tyto plyny. Naše atmosféra není izotermická. Ve velmi velkých výškách však přece jen v atmosféře převládají lehčí plyny, jako je např. vodík, protože molekuly lehkých plynů se mohou vyskytovat i tam, kde ostatní exponenciály klesly k nule (obr. 40.2).

**40.2 BOLTZMANNŮV ZÁKON**

Nyní si všimněme zajímavé skutečnosti, že čítec v exponentu rovnice (40.1) představuje *potenciální energii* atomu. Proto můžeme tento zákon formulovat i takto: Hustota v libovolném bodě je úměrná

$$e^{-(\text{potenciální energie atomu} / kT)}$$

Mohla by to být náhoda, tj. mohlo by to platit jen v našem speciálním případě homogenního gravitačního pole. Můžeme však ukázat, že tento zákon má obecnější platnost. Předpokládejme, že na molekuly plynu působí nějaká jiná síla než gravitace. Molekuly mohou být například elektricky nabitě a může na ně působit elektrické pole nebo jiný náboj, který je přitahuje. I v důsledku vzájemného přitahování atomů nebo přitahování atomů stěnami nádoby, nějakou tuhou látkou nebo čímkoliv jiným může vzniknout přitažlivá síla, která závisí na poloze a která působí na všechny molekuly. Pro jednoduchost předpokládejme, že molekuly jsou stejné a síla působí na každou jednotlivou molekulu, takže celková síla působící na libovolnou část plynu bude prostě součin počtu molekul a síly působící na jednu molekulu. Abychom se vyhnuli zbytečným komplikacím, zvolme souřadnicovou soustavu tak, aby osa  $x$  ležela ve směru síly  $F$ .

Budeme-li v plynu podobně jako v předcházející části uvažovat dvě rovnoběžné roviny vzdálené o  $dx$ , pak síla působící na každý atom násobená počtem atomů  $n$  v  $\text{cm}^3$  (zobecnění dříve uvažovaného výrazu  $nmg$ ) a násobená  $dx$ , musí být kompenzována tlakovou změnou:  $Fn dx = dp = kT dn$ . Tomuto zákonu můžeme dát i jiný tvar, který nám bude užitečný později:

$$F = kT \frac{d}{dx} (\ln n). \quad (40.2)$$

Zatím si uvědomte, že  $-F dx$  je práce potřebná k přemístění molekuly z  $x$  do  $x + dx$ , a je-li síla  $F$  konzervativní, tj. práci můžeme vyjádřit jako rozdíl potenciální energie, pak půjde o změnu potenciální energie (PE). Záporný diferenciál potenciální energie je vykonaná práce  $F dx$ , a proto  $d(\ln n) = -d(\text{PE})/kT$  a po integrování

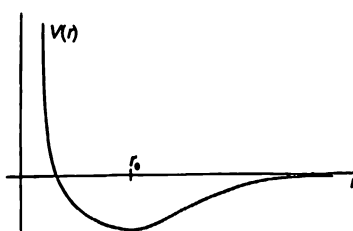
$$n = (\text{konst}) e^{-\text{PE}/kT}. \quad (40.3)$$

Ukazuje se tedy, že to, co jsme zjistili ve speciálním případě, má obecnou platnost. (Co by se stalo tehdy, kdyby  $F$  nebyla konzervativní? Pak by rovnice (40.2) vůbec neměla řešení. V takovém případě by nenastala rovnováha, neboť energie by přibývala nebo ubývala, jak by se atomy pohybovaly po uzavřených křivkách, pro něž není celková práce nulová. Tepelná rovnováha nemůže nastat, nejsou-li vnější síly působící na atomy konzervativní.) Rovnice (40.3), známá jako *Boltzmannův zákon*, je dalším z principů statistické mechaniky. Říká, že pravděpodobnost nalezení molekuly v dané prostorové konfiguraci se mění exponenciálně se zápornou potenciální energií této konfigurace dělenou  $kT$ .

Tak se dozvídáme o rozdělení molekul: Předpokládejme, že v kapalině máme kladný ion, který přitahuje záporné ionty z okolí. Ptáme se, kolik jich bude v různých vzdálenostech od tohoto kladného iontu. Víme-li, jak se mění se vzdáleností potenciální energie, pak poměr počtu iontů v různých vzdálenostech je určen právě tímto zákonem. Aplikací tohoto zákona je opravdu mnoho.

### 40.3 VYPAŘOVÁNÍ KAPALINY

K složitějším úlohám, které se řeší ve statistické mechanice, patří následující důležitý problém. Uvažujme soubor molekul, jež se vzájemně přitahují a předpokládejme, že sly mezi libovolnými molekulami, např.  $i$  a  $j$ , závisí pouze na vzdálenosti  $r_{ij}$  mezi nimi a lze vyjádřit jako derivaci potenciálové funkce  $V(r_{ij})$ . Na obr. 40.3 je znázorněno, jaký tvar může mít taková funkce. Pro  $r > r_0$  energie klesá s přibližováním se molekul, proto se molekuly přitahují. Když se molekuly příliš přiblíží, energie rychle roste a tehdy dochází k jejich silnému odpuzování. Takové je chování molekul v hrubých rysech.



Obr. 40.3 Graf závislosti potenciální energie dvou molekul na jejich vzdálenosti

Nyní předpokládejme, že máme nádobu plnou takových molekul a zajímáme se o to, jak se v průměru uspořádají. Odpověď na tuto otázku dává výraz  $\exp(-pE/kT)$ . Předpokládáme-li, že síly jsou párové (ve složitých problémech se mohou vyskytnout i trojčásticové síly, ale např. elektrické síly jsou párové), pak bude celková potenciální energie součtem přes všechny páry. Proto bude pravděpodobnost toho, že molekuly vytvářejí konfiguraci s určitými kombinacemi vzdáleností  $r_{ij}$ , úměrná

$$\exp\left[-\sum_{i,j} V(r_{ij})/kT\right].$$

Kdyby teplota byla velmi vysoká, takže  $kT \gg |V(r_0)|$ , byl by exponent téměř všude relativně malý a pravděpodobnost výskytu molekuly by téměř nezávisela na poloze molekuly. Všimněme si případu dvou molekul: v takovém případě bude  $\exp(-pE/kT)$  udávat pravděpodobnost toho, že se nacházejí ve vzájemné vzdálenosti  $r$ . Je jasné, že pravděpodobnost je největší tam, kde má potenciál největší zápornou hodnotu a je téměř nulová tam, kde se potenciál blíží k nekonečnu, to se stává při velmi malých vzdálenostech. To ukazuje, že atomy v plynu se nemohou dostat těsně k sobě, protože se silně odpuzují. Vztahujeme-li pravděpodobnost na *jednotkový objem*, můžeme prohlásit, že největší pravděpodobnost nalezení molekuly je v bodě  $r_0$ . Do jaké míry je větší proti ostatním místům, závisí na teplotě. Je-li teplota velmi malá ve srovnání s rozdílem energií mezi  $r = r_0$  a  $r = \infty$ , je exponenciála téměř vždy blízka jedné. V takovém případě, když střední kinetická energie (řádově  $kT$ ) značně převyšuje potenciální energii, nezáleží příliš na silách. S poklesem teploty však pravděpodobnost nalezení molekul ve vzdálenosti  $r_0$  postupně roste ve srovnání s pravděpodobnostmi jejich výskytu na jiných místech, a je-li  $kT$  mnohem menší než  $|V(r_0)|$ , bude v okolí  $r_0$  poměrně velký kladný exponent. Jinak řečeno: V daném objemu budou molekuly s mnohem větší pravděpodobností ve vzdálenosti odpovídající minimu energie než daleko od této vzdálenosti. Při poklesu teploty se atomy přibližují, shlukují se a vytvářejí kapaliny, tuhé látky a molekuly a při zahřátí se vypařují.

Kdybychom chtěli přesně určit, jak se látky vypařují, co se skutečně děje v daných podmínkách, museli bychom postupovat následujícím způsobem. Nejprve bychom museli přesně znát zákon molekulárních sil  $V(r)$ , a to z kvantové mechaniky nebo např. z experimentu. Kdybychom znali zákon mezimolekulárních sil, stačilo by nám jen analyzovat funkci  $\exp(-\sum V_{ij}/kT)$ , abychom zjistili, jak se bude chovat miliarda molekul. Je až překvapující, že přes velkou jednoduchost této funkce i celé myšlenky a po nalezení potenciálu nás čeká *ohromně složitá* úloha a ta složitost spočívá v příliš velkém počtu proměnných.

Přes tyto těžkosti je to vzrušující a zajímavá úloha. Často se uvádí jako příklad „úlohy mnoha částic“ a jde skutečně o zajímavý problém. V jediném vztahu popisujícím tuto úlohu musí být zahrnuty např. všechny podrobnosti o přechodu plynu v tuhou látku nebo o krystalických formách, jichž taková tuhá látka může nabýt. Mnozí se pokoušeli takový vztah získat, ale matematické těžkosti jsou příliš velké, přičemž těžkost nespočívá v zápisu tohoto zákona, ale v práci s velkým počtem proměnných.

A to je vše, co se týká rozdělení částic v prostoru. Je to prakticky konec klasické statistické mechaniky, protože když známe síly, můžeme v principu najít prostorové rozdělení a rozdělení podle rychlostí je něco, co získáme jednou provždy a co se nemění od případu k případu. Největší problém spočívá v získání konkrétní informace z našeho formálního řešení, a to je hlavním předmětem klasické statistické mechaniky.

#### 40.4 ROZDĚLENÍ MOLEKUL PODLE RYCHLOSTI

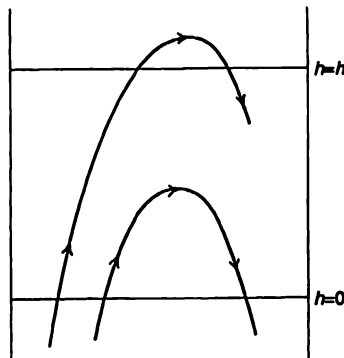
Nyní se budeme věnovat úvahám o rozdělení molekul podle rychlosti, protože je zajímavé a někdy velmi užitečné znát počet molekul, jež se pohybují tou či onou rychlostí. Využijeme přitom poznatky, k nimž jsme dospěli při zkoumání plynu v atmosféře. Plyn budeme považovat za ideální, tak jako jsme to udělali tehdy, když jsme při vyjádření potenciální energie neuvažovali energii vzájemného přitahování atomů. Jedinou potenciální energií, s níž jsme v našem prvním příkladě počítali, byla energie pocházející od gravitace. Kdybychom zahrnuli síly působící mezi atomy, dostali bychom samozřejmě složitější výraz. Předpokládáme tedy, že mezi atomy nepůsobí síly a na chvíli zapomeneme i na srážky; později se vrátíme k odůvodnění takového předpokladu. Viděli jsme, že ve výšce  $h$  je méně molekul než v nulové výšce; podle vztahu (40.1) počet molekul s rostoucí výškou exponenciálně klesá. Proč je ve větší výšce méně molekul? Nedostanou se nakonec do výšky  $h$  všechny molekuly, které se v nulové výšce pohybovaly směrem nahoru? Ne, nedostanou, neboť některé z těch, které se v nulové výšce pohybovaly směrem nahoru, se pohybovaly příliš pomalu a nemohly se dostat na potenciálový vrch do výšky  $h$ . S tímto klíčem k řešení se nám už podaří vypočítat, kolik molekul musí mít tu kterou rychlost, neboť ze vztahu (40.1) už víme, kolik molekul má menší rychlost než je ta, která je potřebná pro výstup na potenciálový vrch do výšky  $h$ . Právě tyto molekuly přispívají k tomu, že hustota ve výšce  $h$  je menší než hustota v nulové výšce.

Zformulujme nyní tuto myšlenku přesněji: vypočítejme, kolik molekul prochází zdola nahoru rovinou  $h = 0$  (tím, že nějakou výšku nazýváme nulovou, nepředpokládáme, že to je dno; je to prostě vhodné označení a v záporných výškách může plyn existovat také). Molekuly plynu se pohybují všemi směry, ale některé z nich procházejí touto rovinou. V každém okamžiku jí prochází zdola nahoru různými rychlostmi určité množství molekul za sekundu. Nyní si všimněme následující skutečnosti. Označíme-li symbolem  $u$  rychlost potřebnou k dosažení výšky  $h$  (kinetická energie  $mu^2/2 = mgh$ ), pak počet molekul procházejících za sekundu nahoru dolní

PRINCIPY STATISTICKÉ MECHANIKY

rovinou ve vertikálním směru se složkou rychlosti větší než  $u$  je stejný jako počet molekul, které procházejí horní rovinou s libovolnou nahoru směřující rychlostí. Molekuly, jejichž vertikální rychlost nepřevyšuje  $u$ , se horní rovinou nedostanou. Je tedy vidět, že

$$\begin{aligned} & \text{počet molekul procházejících rovinou } h=0 \text{ s } v_z > u = \\ & = \text{počet molekul procházejících rovinou } h=h \text{ s } v_z > 0. \end{aligned}$$



Obr. 40.4 Výšky  $h$  dosahují jen ty molekuly, které se ve výšce  $h=0$  pohybovaly dostatečně rychle.

Jenže počet molekul, které procházejí rovinou  $h$  s libovolnou rychlostí větší než 0, je menší než počet molekul procházejících dolní rovinou libovolnou rychlostí větší než 0, protože dole je víc molekul. A to je vše, co potřebujeme. Už víme, že rozdělení molekul podle rychlostí je stejné ve všech výškách, protože teplotu považujeme za konstantní v celé atmosféře. Je-li rozdělení podle rychlostí všude stejné a dole je *víc molekul*, musí být poměr počtu molekul  $n_{>0}(h)$  procházejících s kladnou rychlostí výškou  $h$  k počtu molekul  $n_{>0}(0)$  procházejících s kladnou rychlostí nulovou výškou roven poměru hustot v těchto výškách a ten je roven  $\exp(-mgh/kT)$ . Víme však, že  $n_{>0}(h) = n_{>u}(0)$  a dále  $1/2 mu^2 = mgh$ , a proto můžeme psát

$$\frac{n_{>u}(0)}{n_{>0}(0)} = \exp(-mgh/kT) = \exp(-mu^2/2kT).$$

Jinak řečeno: Počet molekul procházejících za sekundu jednotkovou plochou v nulové výšce se z-ovou složkou rychlosti větší než  $u$  je roven součinu  $\exp(-mu^2/2kT)$  a celkového počtu molekul, které procházejí touto rovinou rychlostí větší než nula.

Platí to nejen pro libovolně zvolenou nulovou výšku, ale samozřejmě pro jakoukoliv výšku, a proto je rozdělení podle rychlosti všude *stejné* (Výsledné tvrzení neříká nic o výšce  $h$ , ta se objevuje jen v průběžných úvahách.) Jako výsledek dostáváme obecné tvrzení o rozdělení podle rychlostí. Kdybychom do plynového potrubí vyvrtali malou dírku, tak malou, aby tam jen zřídka docházelo ke srážkám a vzdálenost mezi dvěma srážkami by byla mnohem větší než průměr dírky, pak by ve shodě s odvozeným tvrzením měly vyletující částice různé rychlosti, ale ta část částic, která by vyletovala s rychlostí větší než  $u$ , by se rovnala  $\exp(-mu^2/2kT)$ .

Vraťme se nyní k otázce zanedbání srážek. Proč jsou srážky nepodstatné? Mohli bychom argumentovat stejně jako předtím, ale místo konečné výšky brát infinitezimální výšku  $h$ , která je tak malá, že srážka mezi 0 a  $h$  nepřichází v úvahu. To však není třeba. Náš důkaz je totiž

VYPAŘOVÁNÍ KAPALINY • ROZDĚLENÍ MOLEKUL PODLE RYCHLOSTI

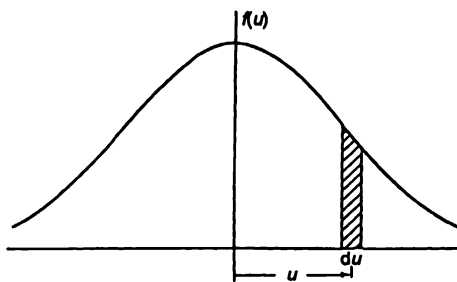
založen na analýze hodnot energie a na zachování energie a při srážkách dochází k výměně energie mezi molekulami. Nemusíme se však starat o to, zda sledujeme stejnou molekulu, neboť k výměně energie dochází pouze s druhou molekulou. Ukazuje se, že i při důkladnější analýze (a ta je přirozeně namáhavější) dostaneme stejný výsledek.

Je zajímavé, že rozdělení podle rychlostí, které jsme našli, má tvar

$$n_{>u} \sim \exp(-\text{kin. energie} / kT). \quad (40.4)$$

Takový způsob popisu rozdělení podle rychlostí, při němž určujeme počty molekul procházejících danou plochou s určitou minimální z-ovou složkou rychlosti, není nejvhodnější. Často nás například zajímá, kolik molekul se v plynu pohybuje rychlostí, jejíž z-ová složka je z intervalu mezi dvěma danými hodnotami, a to přímo vztah (40.4) neudává. I když to, o čem jsme psali, je celkem obecné, chtěli bychom náš výsledek vyjádřit ve vhodnější formě. *Všimněte si, že nemůžeme tvrdit, že kterákoliv molekula má přesně určitou hodnotu rychlosti. Žádná z molekul nemá rychlost, která by byla rovna přesně  $1,796\,289\,9173 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Aby naše tvrzení mělo smysl, musíme se ptát, kolik molekul má rychlost z intervalu od 1,796 do 1,797 apod. Kdybychom se chtěli vyjádřit matematicky, zavedli bychom  $f(u) du$  tak, aby představovala tu část molekul, které mají rychlosti mezi  $u$  a  $u + du$  nebo, což je totéž (je-li  $du$  infinitezimální), mají rychlost  $u$  s přesností na  $du$ . Obr. 40.5 znázorňuje možný tvar funkce  $f(u)$  a vyšrafovaná část šířky  $du$  a střední výšky  $f(u)$  představuje uvažovanou část  $f(u) du$ . Tedy poměr šrafované plochy a celkové plochy pod křivkou je roven relativnímu počtu molekul s rychlostí  $u$  z intervalu šířky  $du$ . Definujeme-li funkci  $f(u)$  tak, že relativní počet molekul s rychlostí z tohoto intervalu je roven přímo vyšrafované ploše, musí celková plocha představovat 100 % molekul, tj.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1. \quad (40.5)$$



Obr. 40.5 Distribuční (rozdělovací) funkce rychlostí. Vyšrafovaná plocha představuje  $f(u) du$ , tj. relativní počet částic s rychlostmi z intervalu šířky  $du$  v okolí  $u$

Nyní nám zbývá pouze určit toto rozdělení porovnáním se vztahem, který jsme odvodili už dříve. Nejprve musíme vědět, jak lze pomocí  $f(u)$  vyjádřit počet molekul procházejících za sekundu danou plochou rychlostí větší než  $u$ . Na první pohled by se zdálo, tento počet je dán integrálem  $\int_u^{\infty} f(u) du$ . To však není pravda, protože se zajímáme o počet molekul procházejících plochou za sekundu. Rychlejší molekuly budou procházet plochou častěji než pomalejší a abychom vyjádřili, kolik jich prošlo, musíme násobit rychlostí. (Už jsme o tom mluvili v před-



cházející kapitole, když jsme diskutovali o počtu srážek.) Celkový počet molekul, které v daném čase  $t$  procházejí povrchem, je dán počtem molekul schopných dosáhnout povrchu a to jsou ty, které přišly ze vzdálenosti  $u$ . Počet molekul dosahujících povrchu vyjadřujeme tedy jako počet molekul, které jsou v jednotkovém objemu, násobený vzdáleností, kterou překonaly na cestě k ploše, jíž mají projít, a ta je úměrná  $u$ . Proto potřebujeme vyjádřit integrál z  $u$  násobeného  $f(u) du$ , integrál přes nekonečnou oblast s dolní mezí  $u$  a až na konstantu úměrnosti musíme dostat to, co v předcházejících úvahách, tedy  $\exp(-mu^2/2kT)$ . Tak máme

$$\int_u^\infty u f(u) du = \text{konst.} \exp(-mu^2/2kT), \quad (40.6)$$

a konstantu úměrnosti určíme později.

Derivujeme-li tento integrál podle  $u$ , dostaneme podintegrální výraz, tj. integrand (se znaménkem minus, protože  $u$  je dolní mez), a když derivujeme pravou stranu, dostaneme stejnou exponenciálu násobenou  $u$  (a nějaké konstanty). Vykrátíme-li na obou stranách  $u$ , dostaneme vztah

$$f(u) du = C \cdot \exp(-mu^2/2kT) du. \quad (40.7)$$

Na obou stranách ponecháme  $du$ , aby nám to připomínalo, že jde o rozdělení. Tato rovnice nám udává relativní počet molekul s rychlostmi z intervalu od  $u$  do  $u + du$ .

Konstantu  $C$  je třeba určit tak, aby integrál vystupující v rovnici (40.5) byl roven jedné. Můžeme ukázat<sup>51)</sup>, že

$$\int_u^\infty \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}.$$

Použijeme-li tento výsledek, snadno zjistíme, že  $C = \sqrt{m/(2\pi kT)}$ .

Protože jsou rychlost a hybnost navzájem úměrné, můžeme prohlásit, že rozdělení molekul podle hybností je také úměrné  $\exp(-\text{kin. energie}/kT)$ , na jednotkový interval hybnosti. Ukazuje se, že tento teorém platí i v teorii relativity, je-li vyjádřen pomocí hybností, ale neplatí v prostoru rychlostí. Proto je výhodné si ho pamatovat ve tvaru vyjádřeném pomocí hybností

$$f(p) dp = C \cdot \exp(-\text{kin. energie} / kT) dp. \quad (40.8)$$

Zjistili jsme, že pravděpodobnosti jsou v případě různých druhů energií – jak kinetické, tak i potenciální – vyjádřeny stejně: pomocí  $\exp(-\text{energie}/kT)$ , a proto si tento krásný poznatek můžeme snadno zapamatovat.

Dosud jsme mluvili jen o „vertikálním“ rozdělení rychlostí. Můžeme se však zajímat i o pravděpodobnost toho, že molekula se pohybuje v jiném směru. Je samozřejmé, že taková rozdělení vzájemně souvisí a úplné rozdělení můžeme získat z rozdělení, které už známe, neboť úplné

<sup>51)</sup> Abychom vypočetli tento integrál, označme.  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx$

Pak platí  $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x^2 + y^2)] dx dy.$

To je však dvojný integrál přes celou rovinu  $xy$  a můžeme ho vyjádřit pomocí polárních souřadnic ve tvaru

$$I^2 = \int_0^\infty \exp(-r^2) 2\pi r dr = \pi \int_0^\infty \exp(-t) dt = \pi.$$

## MĚRNÁ TEPELNÁ KAPACITA PLYNŮ

rozdělení závisí pouze na druhé mocnině absolutní hodnoty rychlosti a ne na  $x$ -ové složce. Musíme dostat něco nezávislého na směru a taková funkce může vyjadřovat jen pravděpodobnost různých velikostí rychlosti. Už známe rozdělení  $x$ -ové složky a z ní můžeme získat rozdělení ostatních složek. Jako výsledek dostaneme, že pravděpodobnost je i nadále úměrná  $\exp(-\text{kin. energie}/kT)$ , ale nyní se kinetická energie skládá ze tří částí:  $m v_x^2/2$ ,  $m v_y^2/2$ ,  $m v_z^2/2$  a v exponentu postupuje součet těchto částí. Můžeme to však vyjádřit i ve tvaru součinu

$$f(v_x, v_y, v_z) d v_x d v_y d v_z \sim \exp(-m v_x^2/2 k T) \cdot \exp(-m v_y^2/2 k T) \cdot \exp(-m v_z^2/2 k T) \cdot d v_x d v_y d v_z. \quad (40.9)$$

O správnosti tohoto vztahu se můžete přesvědčit. Za prvé: Je v souladu s původním požadavkem být funkcí pouze  $v^2$ . A zadruhé, pravděpodobnosti jednotlivých hodnot  $v_z$ , jež dostaneme integrováním přes všechny  $v_x$  a  $v_y$ , jsou právě ty, které vyhovují vztahu (40.7). Funkce (40.9) vyhovuje tedy oběma požadavkům!

### 40.5 MĚRNÁ TEPELNÁ KAPACITA PLYNŮ

Nyní si všimněme některých způsobů ověření teorie a odhadněme, jak úspěšná je klasická teorie plynů. Již dříve jsme poznali, že je-li  $U$  vnitřní energie  $N$  molekul, pak možná v některých případech pro některé plyny platí vztah  $PV = NkT = (\gamma - 1)U$ . Víme i to, že v případě jednoatomového plynu je tento výraz roven  $2/3$  kinetické energie pohybu atomů v těžiškové soustavě. V případě jednoatomového plynu je však kinetická energie rovna vnitřní energii, a proto  $\gamma - 1 = 2/3$ . Předpokládejme však, že jde o složitější molekulu, u níž může dojít k rotaci a vibraci a dále předpokládejme (v klasické mechanice je takový předpoklad správný), že energie vnitřních pohybů jsou také úměrné  $kT$ . Pak má molekula při dané teplotě kromě kinetické energie  $kT$  i vnitřní vibrační nebo rotační energii. Celková energie  $U$  obsahuje nejen vnitřní kinetickou energii, ale i rotační energii, a proto máme jinou hodnotu  $\gamma$ . Technicky nejlepším způsobem měření  $\gamma$  je měření měrné tepelné kapacity představující změnu energie s teplotou. K tomuto způsobu měření se ještě vrátíme. Zatím budeme předpokládat, že  $\gamma$  jsme experimentálně určili z křivky  $pV^\gamma$  odpovídající adiabatickému stlačování.

Vypočítejme nyní  $\gamma$  pro některé speciální případy. Nejprve uvažujeme jednoatomový plyn, který má celkovou energii  $U$  stejnou jako kinetickou energii, a tehdy, jak už víme, je  $\gamma = 5/3$ . Jako příklad dvouatomového plynu bychom mohli vzít kyslík, jodovodík, vodík apod. a přitom předpokládat, že dvouatomový plyn se skládá z dvojic atomů vázaných podobným druhem sil, jaké znázorňuje obr. 40.3. Dále můžeme předpokládat (a to se ukazuje správné), že při teplotách, které nás v případě dvouatomových plynů zajímají, mají dvojice atomů silnou tendenci zakotvit ve vzájemné vzdálenosti  $r_0$ , tj. ve vzdálenosti odpovídající minimu potenciální energie. Kdyby to tak nebylo a pravděpodobnost by se se vzdáleností atomů výrazně neměnila, většina atomů by se nemusela nacházet v blízkosti minima energie. Pak by musel být plynný kyslík směsí  $O_2$  a jednotlivých atomů kyslíku v netriviálním poměru. Víme však, že v kyslíku je jen velmi málo samostatných atomů, což znamená, že minimum potenciální energie je podstatně větší co do velikosti než  $kT$ , a to jsme i předpokládali. Jsou-li atomy molekuly silně vázány na vzdálenost  $r_0$ , budeme z potenciálové křivky potřebovat pouze část blízko minima a tu můžeme aproximovat parabolou. Parabolický potenciál ale odpovídá harmonickému oscilátoru a molekulu kyslíku si opravdu můžeme velmi dobře představit jako dva atomy spojené pružinou.

PRINCIPY STATISTICKÉ MECHANIKY

Čemu je rovna celková energie takové molekuly při teplotě  $T$ ? Víme, že kinetická energie každého z atomů je rovna  $3/2 kT$ , a proto je kinetická energie obou atomů rovna  $3/2 kT + 3/2 kT$ . To však můžeme vyjádřit i jiným způsobem: na tyto  $3/2$  plus  $3/2$  se můžeme dívat jako na kinetickou energii těžiště ( $3/2$ ), kinetickou energii rotace ( $2/2$ ) a kinetickou energii vibrace ( $1/2$ ). Na kinetickou energii vibrace připadá  $1/2$ , neboť jde o jednorozměrný pohyb a víme, že každému stupni volnosti odpovídá energie  $1/2 kT$ . Pokud jde o rotaci, může se uskutečňovat kolem dvou os, takže máme dva nezávislé pohyby. Atomy si představujeme jako jakési body, a proto nepředpokládáme rotaci kolem jejich spojnice. Na to musíme pamatovat, protože objeví-li se rozpory, mohou mít svůj původ právě v takovém předpokladu. Je tady však ještě i *potenciální* energie vibrací a nás zajímá její velikost. V případě harmonického oscilátoru je střední potenciální energie stejná jako střední kinetická energie, tj. rovná se  $1/2 kT$ . Pro celkovou energii molekuly proto platí:  $U = 7/2 kT$  nebo  $kT = 2/7 U$  na atom. To znamená, že  $\gamma$  je rovno  $9/7$ , a ne  $5/3$ , tedy  $\gamma = 1,286$ .

Tyto hodnoty můžeme porovnat se skutečně naměřenými hodnotami  $\gamma$  vyjádřenými v tabulce 40.1. Když si všimneme hélia, které je jednoatomovým plynem, zjistíme hodnotu velmi blízkou  $5/3$  a odchylka od této hodnoty je pravděpodobně experimentální chyba, i když při takové nízké teplotě se mohou objevit síly vzájemného působení mezi atomy. I krypton a argon, oba jednoatomové, dávají hodnoty, jejichž odchylka je v mezích experimentální chyby.

Tab. 40.1 Hodnoty poměru měrných tepelných kapacit  $\gamma$  různých plynů

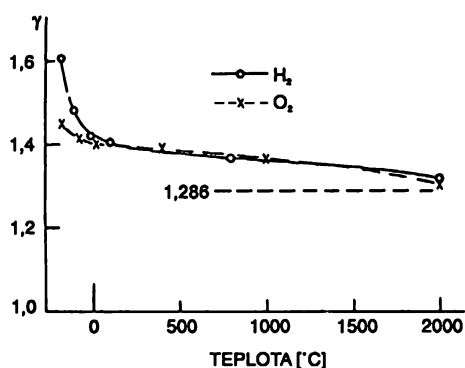
Plyn	$T$ (°C)	$\gamma$
He	-180	1,660
Kr	19	1,680
Ar	15	1,668
H <sub>2</sub>	100	1,404
O <sub>2</sub>	100	1,399
HI	100	1,400
Br <sub>2</sub>	300	1,320
I <sub>2</sub>	185	1,300
NH <sub>3</sub>	15	1,310
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	15	1,220

Přejdeme-li k dvouatomovým plynům a všimneme si vodíku s hodnotou 1,404, musíme konstatovat, že nesouhlasí s teoretickou hodnotou 1,286. Kyslík s hodnotou 1,399 je velmi podobný vodíku a také nesouhlasí s teorií. Podobně je to i s jodovodíkem, jenž má hodnotu 1,40. Vypadá to tak, jakoby  $\gamma$  mělo mít hodnotu 1,40, ale budeme-li v porovnávání pokračovat a všimneme si bromu, zjistíme, že mu odpovídá hodnota 1,32 a dále jód 1,30. Protože hodnota 1,30 je blízká hodnotě 1,286, můžeme v případě jodu mluvit o souhlasu s experimentem, což nebylo možné v případě kyslíku. Stojíme tedy před dilematem. Pro jedny molekuly máme souhlas, pro druhé nesouhlas a bude třeba mnoho důvtipu, abychom tuto situaci vysvětlili.

Všimněme si, jak to bude s ještě složitějšími molekulami, které mají mnoho částí a jako příklad zvolme ethan – C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>. Ethan má osm atomů a ty rotují a kmitají v rozmanitých kombinacích, takže celková vnitřní energie se bude skládat z velkého počtu  $kT$ . Jen kinetická energie musí být aspoň  $12 kT$ , a proto musí být  $\gamma - 1$  velmi blízké nule, tedy  $\gamma$  musí být téměř

## SELHÁNÍ KLASICKÉ FYZIKY

přesně rovno jedné. Tato hodnota je opravdu nižší než v předcházejících případech, ale 1,22 není zase tak málo a je to víc než 11/12, což představuje hodnotu vypočítanou při započítání pouze kinetické energie. To je ale nepochopitelné!



Obr. 40.6 Experimentální hodnoty  $\gamma$  jako funkce teploty pro vodík a kyslík. Klasická teorie předpovídá  $\gamma = 1,286$  nezávisle na teplotě.

Tato záhada má ještě hlubší kořeny, protože dvouatomovou molekulu nemůžeme ani v limitě považovat za tuhou. I kdyby byla vazba mezi atomy nekonečně silná, atomy by nepřestaly úplně kmitat. V molekule by stále zůstávala vibrační energie  $kT$ , protože ta nezávisí na síle vazby. Kdybychom si přece jen představili *absolutně* tuhou molekulu nacházející se ve stavu, kdy přestávají všechny kmity a zbavili se tak jednoho stupně volnosti, pro dvouatomový plyn bychom dostali  $U = 5/2 kT$  a  $\gamma = 1,40$ . Tato hodnota vypadá slibně i pro H<sub>2</sub> a O<sub>2</sub>. Problém by se tím však nevyřešil, neboť v případě kyslíku i vodíku závisí  $\gamma$  na teplotě! Z naměřených hodnot znázorněných na obr. 40.6 je vidět, že v případě H<sub>2</sub> se  $\gamma$  mění z hodnoty přibližně 1,6 při -185°C na hodnotu 1,3 při 2000°C. Tato změna je v případě vodíku výraznější než v případě kyslíku, ale i v případě kyslíku je zřejmé, že  $\gamma$  roste s poklesem teploty.

### 40.6 SELHÁNÍ KLASICKÉ FYZIKY

Musíme tedy přiznat, že máme určité těžkosti. Místo myšlené pružiny působící na atomy bychom mohli zkusit působení nějaké jiné síly, ale to vše by pouze zvětšovalo hodnotu  $\gamma$ . Kdybychom zahrnuli více forem energie,  $\gamma$  by se v rozporu se skutečností více blížilo jedné. Všechny klasické teorie by situaci jen zhoršily. Faktem je, že v každém atomu jsou elektrony a z atomových spekter víme, že jim odpovídá vnitřní pohyb. Každý z elektronů musí mít kinetickou energii aspoň  $1/2 kT$  a ještě i určitou potenciální energii a vezmeme-li je v úvahu bude  $\gamma$  ještě menší. To je absurdní. Určitě je to nesprávné.

První významný článek o dynamické teorii plynů publikoval Maxwell v roce 1859. Na základě myšlenek, o nichž jsme již mluvili, byl Maxwell schopen přesně vysvětlit mnoho známých vztahů, jako například Boyleův zákon, teorii difúze, viskozitu plynů a jevy, o nichž budeme mluvit v následující kapitole. V souhrnu své práce uvádí výčet těchto významných úspěchů a nakonec říká: „Stanovením potřebného vztahu mezi postupným a rotačním pohybem nesesférických částic (měl tím namysli poučku o  $1/2 kT$ ) jsme dokázali, že systém takových částic nesplňuje známý vztah platný mezi dvěma měrnými tepelnými kapacitami.“ Mluví zde o  $\gamma$  (později uvidíme, že

tato veličina souvisí s dvěma způsoby měření měrné tepelné kapacity) a upozorňuje na to, že tento problém neumíme vyřešit.

V přednášce, kterou měl o deset let později, Maxwell řekl: „Nyní jsem vás seznámil s tím, co považuji za největší problém, s nímž se bude muset molekulární teorie vypořádat.“ Tato slova jsou prvním upozorněním na chybnost zákonů klasické fyziky. Byl to první náznak toho, že chyba je v podstatě, neboť správně dokázaná poučka byla v rozporu s experimentem. Kolem roku 1890 se o této záhadě znovu zmínil Jeans. Často slyšíme, že fyzici konce devatenáctého století byli přesvědčeni o tom, že znají všechny podstatné zákony a už jim nezůstává nic jiného, jen upřesňovat výpočty na víc desetinných míst. Možná to někdo jednou řekl a ostatní to po něm opakovali. Jenže důkladné studium literatury té doby ukazuje, že fyzici byli něčím velmi znepokojeni. Jeans o tomto problému mluvil jako o záhadném jevu, z něhož jakoby vyplývalo, že při poklesu teploty „zamrzají“ některé druhy pohybu.

Kdybychom mohli například předpokládat, že kmitavý pohyb neexistuje při nízkých teplotách, ale existuje při vysokých teplotách, pak bychom si uměli představit existenci takového plynu, v němž není při dostatečně nízké teplotě vůbec kmitavý pohyb a  $\gamma = 1,40$ , ale při vyšší teplotě, když se objevují kmity,  $\gamma$  klesá. Totéž můžeme říci o rotaci. Kdyby bylo možné vyloučit rotaci, například protože „zamrzá“ při dostatečně nízkých teplotách, pak by nám byla pochopitelná skutečnost, že  $\gamma$  vodíku při poklesu teploty dosahuje hodnoty 1,66. Čím to však můžeme vysvětlit? Je jasné, že takové „zamrzání“ pohybu nelze vysvětlit klasickou mechanikou. K pochopení takového jevu došlo až po objevení kvantové mechaniky.

Bez důkazu zformulujeme výsledky statistické mechaniky založené na kvantověmechanické teorii. Podle kvantové mechaniky má potenciálem vázaný systém, například oscilátor, diskretní soubor energetických hladin, tj. stavů s různou energií. Vzniká otázka: Jak je třeba modifikovat statistickou mechaniku, aby byla v souladu s kvantověmechanickou teorií? Je skutečně zajímavé, že i když převážná většina problémů je obtížnější v kvantové mechanice než v klasické mechanice, jsou problémy statistické mechaniky při kvantověmechanickém přístupu mnohem jednodušší! Jednoduchý výsledek klasické mechaniky, že  $n = n_0 \cdot \exp(-\text{energie}/kT)$ , se stane v kvantové teorii velmi důležitým poznatkem: Označíme-li energie souboru molekulárních stavů  $E_0, E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ , pak v tepelné rovnováze je pravděpodobnost nalezení molekuly ve stavu s energií  $E_i$  úměrná  $\exp(-E_i/kT)$ . Tak se určují pravděpodobnosti obsazení jednotlivých stavů. Jinými slovy: relativní pravděpodobnost obsazení stavu  $E_1$  proti stavu  $E_0$  je rovna

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{\exp(-E_1/kT)}{\exp(-E_0/kT)}, \quad (40.10)$$

což je totéž jako

$$n_1 = n_0 \cdot \exp[-(E_i - E_0)/kT], \quad (40.11)$$

protože  $P_1 = n_1/N$ ,  $P_0 = n_0/N$ . Obsazení stavu s vyšší energií je tedy méně pravděpodobné než obsazení stavu s nižší energií. Poměr počtu atomů ve vyšším stavu k počtu atomů v nižším stavu je roven mocnině  $e$  (exponent je záporně vzatý rozdíl energií dělený  $kT$ ) – a to je velmi jednoduchý vztah.

Ukazuje se, že v případě harmonického oscilátoru jsou každé dvě sousední hladiny stejně vzdálené. Jestliže nejnižší energetické hladině přisoudíme hodnotu  $E_0 = 0$  (ve skutečnosti se tato hodnota trochu liší od nuly, ale posunem všech energetických hladin o stejnou hodnotu se nestane nic nepřípustného), první hladina bude mít hodnotu  $E_1 = \hbar\omega$ , druhá  $2\hbar\omega$ , třetí  $3\hbar\omega$  atd.

Nyní si všimneme, co se stane. Předpokládejme, že zkoumáme kmity dvouatomové molekuly a aproximujeme je harmonickým oscilátorem. Ptáme se, jaká je relativní pravděpodobnost nalezení molekuly ve stavu  $E_1$  místo ve stavu  $E_0$ . Odpověď na tuto otázku je taková, že pravděpodobnost nalezení molekuly ve stavu  $E_1$  proti pravděpodobnosti nalezení molekuly  $E_0$  klesá jako  $\exp(-\hbar\omega/kT)$ . Nyní předpokládejme, že  $kT$  je mnohem menší než  $\hbar\omega$ , tj. máme co činit s nízkými teplotami. Potom je pravděpodobnost výskytu ve stavu  $E_1$  mimořádně malá. Prakticky všechny atomy jsou ve stavu  $E_0$ . I když změníme teplotu, ale ta zůstane stále malá, bude pravděpodobnost výskytu ve stavu  $E_1 = \hbar\omega$  nekonečně malá – energie oscilátoru zůstane téměř nulová. To se nezmění pokud je teplota mnohem menší než  $\hbar\omega$  – energie oscilátoru se s teplotou nemění. Všechny oscilátory jsou v nejnižším stavu, jejich pohyb je efektivně „zmrazený“ a nepřispívají k měrné tepelné kapacitě. Z tabulky 40.1 můžeme usoudit, že při  $100^\circ\text{C}$ , neboli  $373\text{ K}$ , je  $kT$  mnohem menší než energie kmitavého pohybu kyslíkových a vodíkových molekul, ale ne molekul jódu. Příčina tohoto rozdílu spočívá v tom, že atom jódu je velmi těžký ve srovnání s atomem vodíku, a i když síly působící mezi atomy jódu a atomu vodíku jsou srovnatelné, je molekula jódu příliš těžká a vlastní frekvence jejích kmitů příliš malá ve srovnání s vlastní frekvencí vodíku. Při pokojové teplotě je  $kT$  takové, že  $\hbar\omega$  vodíku je větší než  $kT$  a  $\hbar\omega$  jódu je menší než  $kT$ , a proto se pouze jód vyznačuje klasickou vibrační energií. Zvyšujeme-li teplotu plynu od velmi malých hodnot  $T$ , kdy se téměř všechny molekuly nacházejí v nejnižším stavu, postupně se objevuje nenulová pravděpodobnost jednotlivých vyšších stavů. Pokud máme nenulové pravděpodobnosti mnoha stavů, blíží se chování plynu k tomu, které předpokládá klasická fyzika, neboť kvantové stavy se stávají téměř nerozlišitelnými od energetického kontinua a systém může nabýt téměř libovolnou energii. Při vzrůstu teploty bychom tedy měli opět dostat výsledky klasické fyziky a na to ukazuje obr. 40.6. Stejným způsobem můžeme ukázat, že rotační stavy atomů jsou také kvantovány, ale tyto stavy jsou rozmístěny tak těsně, že za normálních podmínek je  $kT$  mnohem větší než jejich rozestup. Proto je vybudeno mnoho hladin a rotační kinetická energie systému se projevuje klasickým způsobem. Jen vodík se nechová při pokojových teplotách zcela podle tohoto tvrzení.

To je poprvé, co jsme porovnáním teoretických a experimentálních výsledků zjistili, že v klasické fyzice je nějaká chyba a z těžkostí jsme se snažili dostat pomocí kvantové mechaniky způsobem, který se velmi podobal metodě použité v průběhu vývoje fyziky. Až po 30 nebo 40 letech od tohoto problému se objevila další obtíž, jež také souvisela se statistickou mechanikou, ale v tomto případě s mechanikou fotonového plynu. Tento problém vyřešil Planck na začátku našeho století.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 40.1 ■ V radiometru molekuly plynu bombardují tenká lehká křídélka vrtulky, jež jsou z jedné strany začerněna a z druhé pokryta lesklou barvou. Dopadá-li na křídélka záření, je pohlcovaná energie unášena především molekulami, jež bombardují začerněnou stranu křídélek. Tak vzniká nerovnováha sil, která roztáčí vrtulku. Mějme nádobu, jež obsahuje v jednotce objemu  $n$  molekul o hmotnosti  $m$  při absolutní teplotě  $T$ . Tenké křídélko jednotkového plošného obsahu umístěné uvnitř nádoby pohlcuje za jednotku času energii záření  $P$  wattů, přičemž tato energie je unášena izotropně molekulami, jež dopadají jen na jednu stranu křídélka. Odhadněte přibližně velikost síly, která působí na křídélko ve vzduchu za pokojové teploty.
- 40.2 ■ Plyn v nádobě je v tepelné rovnováze. Jaká část jeho molekul, které za jednotku času dopadají na stěnu nádoby má kinetickou energii
- a) větší než střední tepelnou,
  - b) 3krát větší než střední tepelnou?
- 40.3 ■ Molární tepelná kapacita látky při stálém objemu  $C_p$  je množství energie potřebné ke zvýšení teploty 1 molu látky o  $1^\circ\text{C}$  zůstává-li objem stejný. Čemu je rovna molární tepelná kapacita látky při stálém objemu a) ideálního jednoatomového plynu, b) ideálního dvouatomového plynu?
- 40.4 ■ Plyn za normálního tlaku a teploty je nasáván rychlostí  $v$  v trubici s hladkými stěnami a stálém průřezu obsahu  $A$  do reaktivního motoru. Když plyn prochází drátěnou sítkou, jež neklade odpor proudění, zahřívá se a získává výkon  $Q$  wattů. Z trubice vytéká plyn rychlostí  $v'$ . Napište rovnice, které vyjadřují zákony zachování hmotnosti, hybnosti a energie pro případ proudění vzduchu a pak určete
- a)  $v'$ ,
  - b) výslednou teplotu  $T$ ,
  - c) výslednou tažnou sílu  $F$  (základní charakteristika reaktivního motoru).
- 40.5 ■ Posuďte přednosti vzduchového reaktivního motoru na základě výsledků předchozí úlohy, jestliže spotřebovává 100 kg vzduchu a 2,00 kg leteckého benzínu za sekundu. Výhřevnost paliva je asi  $4,65 \cdot 10^7$  J/kg. Jaké okolnosti mohou učinit váš odhad nespolehlivým?
- 40.6 ■ Maxwellův rozdělovací zákon má tvar  $\frac{dN}{N} = Av^2 e^{-bv^2}$ .  
Může být vyjádřen jako  $y = x^2 \exp(-x^2) dx$
- a) Nakreslete graf této funkce pro  $0 \leq x \leq 3,0$  a ukažte, že při růstu  $x$  hraje hlavní úlohu exponenciální člen.
  - b) Najděte maximum  $y$ .
- 40.7 ■ Podle barometrického vzorce platí  $n = n_0 e^{-mgh/kr}$ , kde  $kT/mg$  je charakteristický parametr úlohy. Vypočítejte tento parametr pro zemskou atmosféru a pro prostor v okolí Slunce, jestliže relativní molekulová hmotnost částic v okolí Země je 29,0 a v okolí Slunce 1,5, dále  $T_z = 300$  K,  $T_s = 5500$  K a  $g_z = 9,8$  m  $\cdot$  s $^{-2}$ ,  $g_s = 270$  m  $\cdot$  s $^{-2}$ .

# Brownův pohyb

## 41.1 EKVIPARTIČNOST ENERGIE

## 41.2 TEPELNÁ ROVNOVÁHA ZÁŘENÍ

## 41.3 EKVIPARTIČNOST A KVANTOVÝ OSCILÁTOR

## 41.4 NÁHODNÁ PROCHÁZKA

### 41.1 EKVIPARTIČNOST ENERGIE

V roce 1827 objevil botanik Robert Brown Brownův pohyb. Při sledování mikroskopického života zpozoroval malé částice rostlinného pylu, jak poskakují v tekutině, kterou zkoumal. Byl dost moudrý, aby si uvědomil, že nejde o živé organizmy, ale o drobné částičky nečistoty pohybující se ve vodě. Aby dokázal, že opravdu nejde o živou hmotu, vzal starý kus křemene, v němž bylo zachyceno trochu vody. Ta tam byla uvězněna po milióny let, a přece v ní uviděl stejný pohyb. Pohled, který se nám naskytne, to je nepřetržitý rej drobných částíček.

Později se ukázalo, že jde o jeden z účinků *molekulárního pohybu*, který můžeme kvalitativně pochopit, představíme-li si obrovský mšc na hřišti plném lidí postrkujících ho v nejrozmanitějších směrech a my se na vše díváme z velké vzdálenosti. Lidi nemůžeme vidět, neboť jsou příliš daleko, ale vidíme mšc a pozorujeme, že se pohybuje zcela nepravidelně. Z pouček, o nichž jsme mluvili v předcházejících kapitolách, už víme, že střední kinetická energie malé částice vznášející se v kapalině nebo plynu je rovna  $3/2 kT$ , i když je tato částice mnohem těžší než molekula. Je-li velmi těžká, znamená to, že je relativně pomalá, ale ve skutečnosti její rychlost není příliš malá. Je-li střední kinetická energie takové částice  $3/2 kT$ , dostáváme v případě objektu s průměrem jednoho nebo dvou mikrometrů rychlost kolem milimetru za sekundu. Pozorování pohybu takové částice není snadné ani při použití mikroskopu, protože částice neustále mění směr svého pohybu, a tak se vlastně nikam nedostane. Kam se až dostane, o tom budeme mluvit na konci této kapitoly. Tento problém byl poprvé vyřešen Einsteinem na začátku dvacátého století.

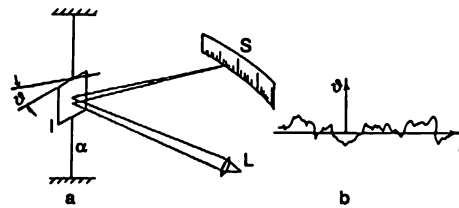
Mimochodem, když říkáme, že střední kinetická energie částice je rovna  $3/2 kT$ , požadujeme odvození tohoto výsledku z kinetické teorie, tj. z Newtonových zákonů. Uvidíme, že z kinetické teorie můžeme odvodit ty nejrozmanitější a nejpozoruhodnější věci, a co je nejzajímavější, to vše získáme z tak mála. Tím samozřejmě nemyslíme, že Newtonovy zákony jsou „málo“ – samy o sobě jsou hluboké – ale máme na mysli že *nám* stačilo udělat málo. Jak se nám daří tak mnoho získat? Odpověď na tuto otázku spočívá v tom, že jsme soustavně vycházeli z jednoho důležitého předpokladu; je-li daný systém při určité teplotě v tepelné rovnováze, pak při této teplotě bude s *čimkoliv* v tepelné rovnováze. Například, když chceme zjistit, jak by se částice pohybovala, kdyby



## BROWNŮV POHYB

se skutečně srážela s vodou, můžeme si představit, že máme plyn složený z částic jiného druhu, droboučkových kuliček, které (podle našeho předpokladu) neinteragují s vodou, ale jenom silně narážejí na uvažovanou částici. Předpokládejme, že z částice vyčnívá osten a naše kuličky ho musí zasáhnout. O tomto představovaném plynu kuliček při teplotě  $T$  víme všechno – je to ideální plyn. Voda je složitá, ale ideální plyn je jednoduchý. *Naše částice musí být v rovnováze s plynem kuliček.* Střední pohyb částice musí být takový, jak to určují srážky s plynem. Kdyby se totiž částice nepohybovala správnou rychlostí vzhledem k vodě, ale byla by například rychlejší, znamenalo by to, že kuličky od ní získávají energii a stávají se teplejší než voda. Jenže my jsme začali při stejné teplotě a předpokládáme, že cokoliv se dostalo do rovnováhy, v rovnováze zůstane. Některé části se samovolně nestanou teplejší a jiné chladnější.

Tento předpoklad je správný a ze zákonů mechaniky ho lze dokázat, ale důkaz je příliš složitý a je možné ho provést jen použitím náročnějších partií mechaniky. Důkaz je mnohem snadnější v kvantové než v klasické mechanice. Poprvé ho provedl Boltzmann a my nyní budeme prostě předpokládat, že platí. Pak můžeme tvrdit, že naše částice musí mít energii  $3/2 kT$ , když se sráží s umělými kuličkami, a proto také musí mít energii  $3/2 kT$ , když naráží na vodu při stejné teplotě, takže můžeme kuličky vypustit a energie je  $3/2 kT$ . Je to divný, ale zcela správný způsob argumentace.



Obr. 41.1 a) citlivý zrcadlový galvanometr. Světlo ze zdroje L se odráží od malého zrcátka na stupnici b) schématický záznam údaje na stupnici jako funkce času

Kromě pohybu koloidních částic, při němž byl Brownův pohyb objeven, existuje řada jiných jevů v laboratorních i jiných podmínkách, kdy můžeme Brownův pohyb pozorovat. Pokusíme-li se zkonstruovat to nejjemnější zařízení, například velmi malé zrcátko na tenkém křemenném vlákně velmi citlivého balistického galvanometru (obr. 41.1), zrcátko nebude stát na místě, ale bude se stále chvět, v každém okamžiku. Dopadne-li na něj světelný paprsek a budeme sledovat jeho odraz, nebudeme mít dokonalé zařízení, protože zrcátko bude stále v pohybu. Proč? Protože střední kinetická energie takového zrcátka je  $1/2 kT$ .

Jaký je střední kvadratický úhel, o nějž se zrcátko odchyluje? Předpokládejme, že jsme zjistili periodu vlastních kmitů zrcátka tím, že jsme klepli na jednu jeho stranu a zjistili, jak dlouho trvá pohyb vpřed a zpět, a známe také jeho moment setrvačnosti  $I$ . Známe vztah pro kinetickou energii rotace – vyjadřuje ho rovnice (19.8):  $T = 1/2 I \omega^2$ . Taková je kinetická energie, příslušná potenciální energie je úměrná druhé mocnině úhlu a je rovna  $V = 1/2 \alpha \vartheta^2$ . Známe-li periodu kmitů  $t_0$  a pomocí ní vypočítáme vlastní frekvenci  $\omega_0 = 2\pi/t_0$ , dostaneme potenciální energii  $V = 1/2 I \omega_0^2 \vartheta^2$ . Víme, že střední kinetická energie je  $1/2 kT$ , ale jde-li o harmonický oscilátor, střední potenciální energie je také  $1/2 kT$ . Proto

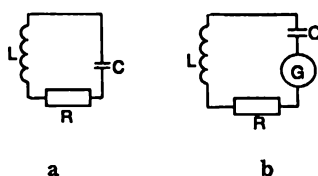
$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 \langle \vartheta^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$$

## EKVIPARTIČNOST ENERGIE

neboli

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \frac{kT}{I\omega_0^2}. \quad (41.1)$$

Tak můžeme vypočítat kmity zrcátka galvanometru a najít hranice přesnosti našeho zařízení. Chceme-li zmenšit kmity, musíme zrcátko ochladit. Můžeme položit zajímavou otázku: *Kde je třeba zrcátko ochladit?* Závisí to na tom, odkud přijímá nárazy. Jestliže od vlákna, ochladíme ho nahoře. Je-li zrcátko obklopeno plynem a do pohybu se dostává hlavně v důsledku srážek s atomy plynu, je lépe ochladit plyn. Ukazuje se, že zdroj *tlumení* kmitů je vždy i *zdrojem fluktuací* a k tomuto problému se ještě vrátíme.



Obr. 41.2 Rezonanční obvod s velkou hodnotou  $Q$ .  
 a) skutečný obvod při teplotě  $T$   
 b) umělý obvod s ideálním bezšumovým odporem a „generátor šumu“  $G$

Dost překvapuje, že tytéž fluktuace působí i v *elektrických obvodech*. Předpokládejme, že stavíme velmi citlivý, přesný zesilovač na určitou frekvenci, a aby byl velmi citlivý na zvolenou frekvenci, používáme na jeho vstupu, podobně jako v radiopřijímači, velmi kvalitní rezonanční obvod (obr. 41.2). Předpokládejme, že se chceme dostat až úplně na dolní hranici citlivosti zařízení, a tak snímáme napětí například z indukčnosti a podáváme ho na zesilovač. V každém takovém obvodu existují, samozřejmě, určité ztráty. Není to dokonalý rezonanční obvod, ale je to přece jen velmi dobrý rezonanční obvod, který má jenom malý odpor (v schématu je zakreslen rezistor, předpokládáme, že má malý odpor). Chtěli bychom zjistit, jaké jsou fluktuace změn napětí na indukčnosti. Odpověď na takovou otázku je následující. Víme, že  $1/2 LI^2$  je „kinetická energie“ – energie, kterou má cívka v rezonančním obvodu (kapitola 25). Proto je střední hodnota  $1/2 LI^2$  rovna  $1/2 kT$ . Tak zjistíme střední kvadratickou hodnotu proudu a z ní můžeme určit střední kvadratickou hodnotu napětí. Vztah pro napětí na indukčnosti je totiž  $\dot{U}_L = i\omega LI$  a střední kvadratická absolutní hodnota napětí na indukčnosti je  $\langle U_L^2 \rangle = L^2 \omega_0^2 \langle I^2 \rangle$ . Po dosazení do  $1/2 L \langle I^2 \rangle = 1/2 kT$  dostaneme

$$\langle U_L^2 \rangle = L \omega_0^2 kT. \quad (41.2)$$

Tak můžeme navrhovat obvody a předpovídat, jaký budou mít *Johnsonův šum*, tj. šum podmíněný tepelnými fluktuacemi. Odkud se nyní vzaly fluktuace? Pocházejí opět z *rezistorů* – jsou důsledkem skutečnosti, že elektrony odporového materiálu se chaoticky pohybují, protože jsou v tepelné rovnováze s látkou rezistoru, a tak vznikají fluktuace elektronové hustoty. Tak vznikají nepatrná elektrická pole, která působí na rezonanční obvod.

Elektrotechničtí inženýři odpovídají na takovou otázku jiným způsobem. Z fyzikálního hlediska je zdrojem šumu rezistor. Skutečný obvod se skutečným fyzikálním rezistorem, který vytváří šum, však můžeme nahradit fiktivním obvodem, který obsahuje malý generátor a ten

## BROWNŮV POHYB

*představuje zdroj šumu. Rezistor bude potom ideální – nebude produkovat šum. Všechn šum pochází z fiktivního generátoru. Kdybychom znali charakteristiky šumu produkovaného rezistorem, a kdybychom je uměli analyticky vyjádřit, mohli bychom vypočítat, jak bude obvod na tento šum reagovat. Potřebujeme tedy znát vztah pro šumové fluktuace.*

Šum generovaný rezistorem obsahuje všechny frekvence, protože samotný rezistor není rezonanční. Samozřejmě, že rezonanční obvod „slyší“ jen tu část fluktuací, která je blízko rezonanční frekvence, ale rezistor má i mnoho jiných frekvencí. Sřlu generátoru můžeme popsat takto: Střední výkon, který by rezistor absorboval, kdyby byl přímo připojen na generátor šumu, by byl  $\langle U_G^2 \rangle / R$ , kde  $U_G$  je napětí generátoru. Chtěli bychom však podrobněji znát, jaký výkon připadá na jednotlivé frekvence. Na každou frekvenci připadá jen velmi malý výkon; jde o rozdělení. Necht  $P(\omega) d\omega$  je výkon, který generátor dodává ve frekvenčním rozsahu  $d\omega$  téměř rezistoru. Pak můžeme dokázat (dokážeme to v jiném případě, ale stejným matematickým postupem), že dodávaný výkon je

$$P(\omega) d\omega = (2/\pi) kT d\omega, \quad (41.3)$$

a v tomto vyjádření *tedy nezávisí na odporu.*

### 41.2 TEPELNÁ ROVNOVÁHA ZÁŘENÍ

Nyní se budeme zabývat složitější, ale velmi zajímavou situací. Předpokládejme, že máme nabitý oscilátor podobný tomu, o němž jsme mluvili při zkoumání světla, řekněme, elektron kmitající v atomu. Když kmitá, vyzařuje světlo. Předpokládejme, že tento oscilátor se nachází ve velmi řídkém plynu jiných atomů a čas od času se s nimi srazí. V rovnováze, po delší době, tento oscilátor shromáždí energii tak, že kinetická energie jeho kmitů bude  $1/2 kT$ , a protože jde o harmonický oscilátor, jeho celková energie pohybu bude  $kT$ . Samozřejmě, zatím je to špatný popis, protože oscilátor nese *elektrický náboj*, a má-li energii  $kT$ , kmitá sem tam a *vyzařuje světlo*. Proto je nemožné dosáhnout rovnováhy jen v látce, jsou-li v ní atomy vyzařující světlo. Je-li vyzařováno světlo, uniká energie, oscilátor v průběhu času ztrácí svou energii  $kT$  a plyn, který s oscilátorem interaguje, postupně chladne. Takovým způsobem chladnou i horká kamna za studené noci. Do okolí vyzařují energii, protože v atomech kmitají náboje, spojitě vyzařují a v důsledku tohoto vyzařování kmitavý pohyb pomalu slábne.

Obklopíme-li však uvažovaný systém jakousi krabicí, takže světlo záření nemůže uniknout do nekonečna, *můžeme* nakonec dosáhnout tepelné rovnováhy. Plyn můžeme umístit v nádobě, v jejíchž stěnách jsou jiné zářiče vysílající světlo nazpět nebo, co je ještě hezčí příklad, můžeme předpokládat, že nádoba má zrcadlové stěny. Bude jednodušší uvažovat právě tento případ. Předpokládáme tedy, že všechno záření oscilátoru se uchovává v nádobě. I v takovém případě začne oscilátor kmitat, ale brzy si bude udržovat hodnotu  $kT$  své kinetické energie přestože vyzařuje. Je vlastně ozařován svým vlastním světlem odraženým od stěn nádoby. Za krátkou dobu bude v nádobě hodně světla, a i když oscilátor určité světlo vyzařuje, světlo přichází zpět a vrací část energie, která byla vyzářena.

Nyní určíme, kolik světla musí být v takové nádobě při teplotě  $T$ , aby dopad světla na oscilátor vytvářel právě takovou energii, jaká je potřebná k udržení záření.

Necht je atomů plynu velmi málo a ať jsou od sebe velmi vzdálené, takže máme ideální oscilátor, který nemá žádný jiný odpor, než radiální. Všimněme si, že v tepelné rovnováze dělá oscilátor současně dvě věci. Za prvé – má střední energii  $kT$ , a tak můžeme vypočítat, kolik záření

## TEPELNÁ ROVNOVÁHA ZÁŘENÍ

emituje. Za druhé – množství tohoto záření musí být přesně stejné jako množství světla, které oscilátor z dopadajícího světla rozptyluje. Když energie nemůže zmizet nikam jinam, toto efektivní záření je skutečně všechno rozptýlené světlo v nádobě.

Nejdříve tedy počítáme energii, kterou oscilátor vyzáří za sekundu, pokud nějakou energii má. (Z kapitoly 32 „O radiačním odporu“ si vypůjčíme některé rovnice aniž bychom se vraceli k jejich odvození.) Poměr energie vyzářené za sekundu a energie oscilátoru se označuje  $1/Q$  (viz (32.8):  $1/Q = (dW/dt)/\omega_0 W$ ). Použitím veličiny  $\gamma$ , konstanty útlumu, můžeme tedy psát vztah ve tvaru  $1/Q = \gamma/\omega_0$ , kde  $\omega_0$  je vlastní frekvence oscilátoru. Předpokládáme, že  $\gamma$  je velmi malé a  $Q$  velmi velké. Energie vyzářená za sekundu je pak

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\omega_0 W}{Q} = \frac{\omega_0 W \gamma}{\omega_0} = W \gamma. \quad (41.4)$$

Energie vyzářená za sekundu je prostě  $\gamma$ -násobek energie oscilátoru. Oscilátor má však mít střední energii  $kT$ , takže  $\gamma kT$  je střední hodnota energie vyzářené za sekundu

$$\langle dW/dt \rangle = \gamma kT. \quad (41.5)$$

Nyní už potřebujeme vědět pouze to, jaké je  $\gamma$ . Tuto veličinu můžeme snadno najít z rovnice (32.12). Je rovna

$$\gamma = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2}{c}, \quad (41.6)$$

kde  $r_0 = e^2/mc^2$  je klasický poloměr elektronu a položili jsme  $\lambda = 2\pi c/\omega_0$ .

Náš konečný výsledek pro střední rychlost vyzařování světla v blízkosti frekvence  $\omega_0$  je tento

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega_0^2 kT}{c}. \quad (41.7)$$

Dále se budeme ptát, kolik světla musí dopadat na oscilátor. Musí ho být tolik, aby oscilátorem absorbovaná energie (která je pak rozptýlena) byla rovna uvedené veličině. Jinak řečeno: emitované světlo je rozptýlené světlo ze světla, které svítí na oscilátor v dutině. Proto nyní musíme vypočítat, kolik světla oscilátor rozptýlí, dopadá-li na něj určité neznámé množství záření. Budiž  $I(\omega)d\omega$  energie světla s frekvencí  $\omega$  z intervalu  $d\omega$  (protože nemáme světlo, jež by mělo přesně danou frekvenci; vždy máme určité spektrum).  $I(\omega)$  je určité *spektrální rozdělení*, které budeme hledat – je to barva pece při teplotě  $T$ , kterou vidíme, díváme-li se otevřenými dvířky dovnitř. Ptáme se, kolik světla se absorbovalo. Už jsme určili množství záření absorbovaného z daného dopadajícího světelného svazku a vyjádřili jsme ho pomocí *účinného průřezu*. Odpovídá to tomu, jako bychom řekli, že všechno světlo dopadající na určitý průřez je absorbováno. Proto celkové množství, které je opětovně vyzářeno (rozptýleno) je součinem dopadající intenzity  $I(\omega)d\omega$  a účinného průřezu  $\sigma$ .

Náš vztah pro účinný průřez (rovnice (31.19)) neobsahoval tlumení. Nebude těžké zopakovat odvození a započítat předtím zanedbaný člen odpovídající odporu. Kdybychom to udělali, dostali bychom pro účinný průřez vyjádření

BROWNŮV POHYB

$$\sigma_s = \frac{8 \pi r_0^2}{3} \left( \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right). \quad (41.8)$$

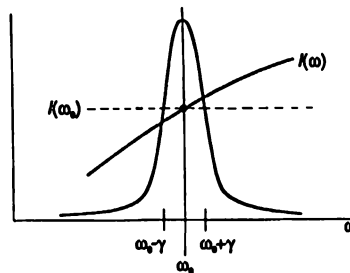
Účinný průřez  $\sigma_s$  má významnou hodnotu jako funkce frekvence jen pro  $\omega$  velmi blízké vlastní frekvenci  $\omega_0$ . (Vzpomeňme si, že v případě vyzářujícího oscilátoru je  $Q$  řádově  $10^8$ .) Oscilátor rozptyluje velmi silně, když je  $\omega$  rovno  $\omega_0$  a velmi slabě při jiných hodnotách  $\omega$ . Proto můžeme nahradit  $\omega$  veličinou  $\omega_0$  a  $\omega^2 - \omega_0^2$  veličinou  $2\omega_0(\omega - \omega_0)$ . Tak dostaneme

$$\sigma_s = \frac{2 \pi r_0^2 \omega_0^2}{3 [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \quad (41.9)$$

Celá křivka je soustředěna v okolí  $\omega = \omega_0$ . (Není nevyhnutné dělat aproximace, ale výpočet integrálů bude mnohem jednodušší, když si rovnici trochu zjednodušíme.) Násobíme-li intenzitu v daném frekvenčním rozsahu účinným průřezem rozptylu, dostaneme množství energie rozptýlené v intervalu  $d\omega$ . Celková rozptýlená energie je pak integrálem tohoto výrazu přes všechna  $\omega$ . Tak dostaneme

$$\frac{dW_s}{dt} = \int_0^\infty I(\omega) \sigma_s(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{2 \pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega) d\omega}{3 [(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4]}. \quad (41.10)$$

Položme nyní  $dW_s/dt = 3\gamma kT$ . Proč je tam koeficient 3? Protože při naší analýze účinného průřezu v kapitole 32 jsme předpokládali takovou polarizaci světla, která umožňovala rozkmitání oscilátoru. Kdybychom použili oscilátor schopný kmitat jen v jednom směru a světlo by bylo nesprávně polarizované, nedošlo by k rozptylu. Musíme proto buď zprůměrovat účinný průřez oscilátoru schopného kmitat pouze v jednom směru přes všechny směry dopadu a polarizace světla, nebo – a to je jednodušší – představit si oscilátor, který bude sledovat pole bez ohledu na to, jakým směrem je orientováno. Takový oscilátor, který může stejně kmitat ve třech směrech, bude mít střední energii  $3kT$ , protože má tři stupně volnosti. Proto máme tedy  $3\gamma kT$ .



Obr. 41.3 Průběh podintegrální funkce (41.10). Rezonanční křivka má strmý průběh. V blízkosti rezonance můžeme  $I(\omega)$  nahradit  $I(\omega_0)$ .

Nyní musíme vypočítat integrál. Předpokládejme, že neznámé spektrální rozdělení světla  $I(\omega)$  je hladkou křivkou a ve velmi úzké frekvenční oblasti, kde má  $\sigma_s$  ostré maximum, se příliš nemění (obr. 41.3). Potom výrazný příspěvek k integrálu bude pocházet jen od těch hodnot  $\omega$ ,

## TEPELNÁ ROVNOVÁHA ZÁŘENÍ

kteřé jsou velmi blízké  $\omega_0$  a od této hodnoty se liší jen o velmi malou veličinu  $\gamma$ . I kdyby  $I(\omega)$  byla neznámá a složitá funkce, bude důležitá pouze oblast blízko  $\omega = \omega_0$  a tam můžeme hladkou křivku nahradit „konstantou“ o stejné výšce. Jinak řečeno, prostě vytkneme  $I(\omega)$  před znak integrálu a nahradíme  $I(\omega_0)$ . I ostatní konstanty můžeme dát před integrál a tak dostaneme

$$\frac{2}{3} \pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega_0) \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} = 3 \gamma kT. \quad (41.11)$$

Integrál by se měl brát od 0 do  $\infty$ , ale 0 je už tak daleko od  $(\omega_0)$ , že křivka je tam nulová, a proto můžeme dolní mez nahradit minus  $\infty$  a takový integrál se počítá mnohem snadněji. Integrál je typu  $\int dx/(x^2 + a^2)$  a vede na funkci arcustangens. V příručce bychom našli, že je roven  $\pi/a$  v našem případě tedy  $2\pi/\gamma$ . Po určitých úpravách bychom dostali

$$I(\omega_0) = \frac{9 \gamma^2 kT}{4 \pi^2 r_0^2 \omega_0^2}. \quad (41.12)$$

Pak dosadíme místo  $\gamma$  vzorec (41.6) (pro stručnost vynecháme označení  $\omega_0$ , protože výraz platí pro jakékoliv  $\omega_0$ , a napíšeme prostě  $\omega$ ) a vztah pro  $I(\omega)$  má tvar

$$I(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^2}. \quad (41.13)$$

Tento vztah nám určuje rozdělení světla v horké peci. Říká se mu *záření černého tělesa*. Černého proto, protože otvor v peci, do něhož hledíme, by byl při nulové teplotě černý.

Vztah (41.13) udává rozložení energie záření uvnitř uzavřené nádoby při teplotě  $T$  podle klasické teorie. Všimněme si nejdřív pozoruhodného charakteru tohoto výrazu. Náboj oscilátoru, hmotnost oscilátoru, všechny jeho charakteristické vlastnosti *vytizely*, protože když jsme se dosáhli rovnováhy s jedním oscilátorem, musíme být v rovnováze s jakýmkoliv jiným oscilátorem s jinou hmotností, jinak bychom se dostali do těžkostí. To je důležitý způsob ověření předpokladu, že rovnováha nezávisí na tom, s čím jsme v rovnováze, ale *závisí jen na teplotě*. Nakreslíme si teď obrázek znázorňující křivku  $I(\omega)$  (*obr. 41.4*). Z něj se dozvíme, kolik světla připadá na jednotlivé frekvence.

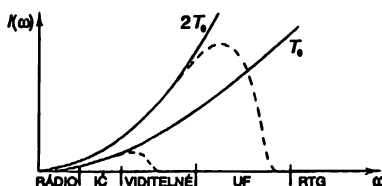
Intenzita v nádobě připadající na jednotkový frekvenční interval se chová jako druhá mocnina frekvence. To znamená, že při libovolné teplotě by z nádoby vycházelo velké množství rentgenového záření!

To, samozřejmě, není pravda. Když otevřeme pec a podíváme se do ní, rentgenové záření nám oči nespálí. Je to tedy nesmysl. Navíc, *celková energie* v nádobě, celková intenzita sečtená přes všechny frekvence, by měla být rovna obsahu plochy pod touto nekonečnou křivkou. V samotné podstatě musí být proto něco naprosto špatně.

Klasická teorie byla proto *úplně neschopná* správně vyjádřit rozložení záření černého tělesa, právě tak jako byla neschopná správně vyjádřit měrnou tepelnou kapacitu plynů. Fyzikové zkoumali toto odvození z mnoha různých hledisek, ale nenacházeli východisko. Je to předpověď klasické fyziky. Vztah (41.13) se nazývá *Rayleighův zákon*, je předpovědí klasické fyziky a je zřejmě absurdní.

### 41.3 EKVIPARTIČNOST A KVANTOVÝ OSCILÁTOR

Uvedená těžkost je jen další část téhož problému klasické fyziky, který se projevil obtížemi souvisejícími s měrnou tepelnou kapacitou plynů a teď se soustředil na rozložení světla v černém tělese. Zatímco teoretici studovali tento problém, bylo provedeno mnoho měření skutečné křivky. Ukázalo se, že správná křivka vypadá tak jako přerušované čáry na obr. 41.4. Tedy žádné rentgenové paprsky. Kdybychom snižovali teplotu, křivka by se snižovala úměrně s teplotou podle klasické teorie, ale měřená křivka se také při nízké teplotě dříve odřízne. Nízkofrekvenční konec teoretické křivky je správný, ale vysokofrekvenční ne. Z jakých důvodů? Když se James Jeans zabýval problémem měrné tepelné kapacity plynů, všiml si, že pohyb s vysokými frekvencemi „zamrzá“ při snižování teploty. Když je teplota příliš nízká a frekvence příliš vysoká, oscilátory *nemají* střední hodnotu energie  $kT$ . Připomeňme si, jak jsme odvodili vztah (41.13). Vše záviselo na energii oscilátoru v tepelné rovnováze. To  $kT$ , které jsme dosadili do (41.5), bylo stejné jako  $kT$  v (41.13), neboli střední energie harmonického oscilátoru s frekvencí  $\omega$  při teplotě  $T$ . V klasické fyzice to je  $kT$ , ale experiment říká něco jiného: při příliš nízkých teplotách nebo při příliš vysokých frekvencích oscilátoru taková závislost neplatí. Důvod proč teoretická křivka nevyhovuje je tedy stejný jako příčina selhání staré teorie měrné tepelné kapacity plynů. Je jednodušší zkoumat křivku záření černého tělesa, než měrné tepelné kapacity plynů, která je příliš složitá. Soustředíme se tedy na určení správné křivky záření černého tělesa, protože z ní se dovíme, jak střední energie harmonického oscilátoru při libovolné frekvenci ve skutečnosti závisí na teplotě.



Obr. 41.4 Rozdělení intenzity záření černého tělesa při dvou teplotách podle klasické fyziky (plné čáry). Přerušované čáry znázorňují skutečné rozdělení.

Zkoumáním této křivky se zabýval Planck. Nejdříve našel řešení empiricky tak, že srovnáním naměřené závislosti a známých funkcí vybral takovou, která výborně vystihovala takovou závislost. Našel tedy empirický vztah pro střední energii oscilátoru jako funkci frekvence. Jinými slovy, získal *správný* vztah místo  $kT$  a pak se mu podařilo tento vztah i odvodit za velice zvláštního předpokladu. Tento předpoklad spočíval v tom, že *harmonický oscilátor může nabývat energii jen v množstvích  $\hbar\omega$* . Představa, že může mít *jakoukoliv* energii, je nesprávná. To byl, samozřejmě, začátek konce klasické mechaniky.

Nyní odvodíme vztah, k němuž se dospělo jako k první správné kvantověmechanické formuli. Předpokládejme, že dovolené energetické hladiny harmonického oscilátoru jsou rovnoměrně rozloženy tak, že sousedící jsou od sebe vzdálené o  $\hbar\omega_0$ , a oscilátor může tedy nabývat energie jen některé z těchto hladin (obr. 41.5). Planck sice použil složitější zdůvodnění než my, protože kvantová mechanika byla ve svých počátcích a musel některé věci dokázat. My prostě přijmeme jako fakt (který Planck na tomto případě demonstroval), že pravděpodobnost obsazení hladiny s energií  $E$  je  $P(E) = \alpha e^{-E/kT}$ . Budeme-li vycházet z této skutečnosti, dospějeme k správnému

EKVIPARTIČNOST A KVANTOVÝ OSCILÁTOR

výsledku.

$N_4$	$E_4=4\hbar\omega$	$P_4=A\exp(-4\hbar\omega/kT)$
$N_3$	$E_3=3\hbar\omega$	$P_3=A\exp(-3\hbar\omega/kT)$
$N_2$	$E_2=2\hbar\omega$	$P_2=A\exp(-2\hbar\omega/kT)$
$N_1$	$E_1=\hbar\omega$	$P_1=A\exp(-\hbar\omega/kT)$
$N_0$	$E_0=0$	$P_0=A$

Obr. 41.5 Energetické hladiny harmonického oscilátoru jsou ekvidistantní:  $E_n = n\hbar\omega$

Předpokládejme, že máme mnoho oscilátorů a každý z nich kmitá s frekvencí  $\omega_0$ . Některé z nich jsou v nejnižším kvantovém stavu, jiné jsou na následující hladině atd. Nás zajímá střední energie těchto oscilátorů. Najdeme ji tak, že spočítáme celkovou energii všech oscilátorů a vydělíme ji počtem oscilátorů. Tak dostaneme střední energii na oscilátor v tepelné rovnováze a je to také energie, která je v rovnováze se zářením černého tělesa. Tu je třeba dosadit do rovnice (41.13) místo  $kT$ . Necht  $N_0$  je počet oscilátorů, které jsou v základním stavu (nejnižším energetickém stavu);  $N_1$  je počet oscilátorů ve stavu  $N_1$ ,  $N_2$  je počet oscilátorů ve stavu  $N_2$  atd. Podle hypotézy (kterou jsme neověřili), nahradíme klasické výrazy pro pravděpodobnosti  $e^{-P.E/kT}$  nebo  $e^{-K.E/kT}$  v kvantové mechanice výrazem  $e^{-\Delta E/kT}$ , kde  $\Delta E$  je přebytek energie. Proto můžeme předpokládat, že počet oscilátorů  $N_1$ , které jsou v prvním stavu, bude roven  $e^{-\hbar\omega/kT}$  krát počet oscilátorů  $N_0$ , které jsou v základním stavu, tj.  $N_1 = N_0 e^{-\hbar\omega/kT}$ . Podobně  $N_2$ , počet oscilátorů v druhém stavu, je roven  $N_2 = N_0 e^{-2\hbar\omega/kT}$ . Pro zjednodušení algebry zavedeme  $x = e^{-\hbar\omega/kT}$ . Pak lze počet oscilátorů jednoduše vyjádřit:  $N_1 = N_0 x$ ,  $N_2 = N_0 x^2$ , ...  $N_n = N_0 x^n$ .

Nejdřív musíme najít celkovou energii všech oscilátorů. V základním stavu má oscilátor nulovou energii. V prvním stavu je jeho energie  $\hbar\omega$  a takových oscilátorů je  $N_1$ . Z těchto oscilátorů můžeme tedy získat  $N_1 \hbar\omega$  nebo  $\hbar\omega N_0 x$  energie. V druhém stavu mají oscilátory energii  $2\hbar\omega$  a je jich  $N_2$ , proto dostáváme energii  $N_2 \cdot 2\hbar\omega = 2\hbar\omega N_0 x^2$  atd. Když to všechno sečteme, dostaneme  $E_{\text{celk}} = N_0 \hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)$ .

Kolik je tam oscilátorů?  $N_0$  je, samozřejmě, počet oscilátorů v základním stavu,  $N_1$  v prvním stavu atd. Když je všechno sečteme dostaneme  $N_{\text{celk}} = N_0 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$ . Pro střední energii proto platí

$$\langle E \rangle = \frac{E_{\text{celk}}}{N_{\text{celk}}} = \frac{N_0 \hbar\omega (0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots)}{N_0 (1 + x + x^2 + \dots)} \quad (41.14)$$

Potěšením pohrát si s takovými dvěma součty ponecháme čtenáři. Kdybychom vše sečetli a za  $x$  dosadili odpovídající výraz – a nedopustili se žádné chyby při sčítání – dostali bychom

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (41.15)$$

To byl vlastně první kvantověmechanický vztah, který byl znám a diskutován, a představoval krásné vyústění celých desetiletí zmatků. Maxwell věděl, že něco není v pořádku a problém byl v tom, že se nevědělo, co je vlastně *správné*. Tady je kvantitativní odpověď na otázku, co je třeba



vzít místo  $kT$ . Samozřejmě by tento výraz měl konvergovat ke  $kT$ , když  $\omega \rightarrow 0$  nebo  $T \rightarrow \infty$ . Zkuste to dokázat – procvičte se tak v matematice.

Výraz pro střední energii představuje slavný odřezávající faktor, po kterém pátral Jeans a dosadíme-li ho místo  $kT$  do vztahu (41.13), pro rozdělení světla v černé skříňce dostaneme vyjádření

$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}. \quad (41.16)$$

Je vidět, že i přestože máme v čitateli  $\omega^3$ , bude při velkých  $\omega$  křivka opět klesat a nevyskočí nahoru, neboť ve jmenovateli bude exponenciální funkce obsahovat velmi velký exponent – a proto se ultrafialové světlo a rentgenové paprsky neobjeví tam, kde je neočekáváme!

Mohli byste namítnout, že při odvození (41.16) jsme použili kvantovou teorii pro energetické hladiny harmonického oscilátoru, ale klasickou teorii pro určení účinného průřezu  $\sigma$ . Jenže kvantová teorie světla interagujícího s harmonickým oscilátorem dává přesně stejný výsledek jako klasická teorie. Proto jsme si mohli dovolit věnovat tolik času určování indexu lomu a rozptylu světla a modelovat přitom atomy malými oscilátory – kvantové výrazy vycházejí v podstatě stejně.

Vraťme se nyní k Johnsonovu šumu rezistorů. Už jsme se zmínili, že teorie šumu je ve skutečnosti stejná jako klasická teorie záření černého tělesa. Dokonce jsme s trochou humoru poznamenali, že když odpor v obvodu není skutečným odporem, ale anténou (anténa se chová jako odpor, neboť vyzařuje energii), radiačním odporem, lze snadno vypočítat vyzařovaný výkon. Je to ten výkon, který anténa dostává od světla, jež ji obklopuje a měli bychom dospět ke stejnému rozdělení až na jeden či dva faktory. Můžeme předpokládat, že rezistor je generátor s neznámým spektrem výkonu  $P(\omega)$ . Spektrum je dáno skutečností, že tento generátor připojený k rezonančnímu obvodu *libovolné frekvence*, jako na *obr. 41.2b*, generuje v indukčnosti napětí, jehož velikost je dána rovnicí (41.2). To nás přivádí ke stejnému integrálu jako v (41.10) a stejný postup vede k rovnici (41.3). Samozřejmě v případě nízkých teplot musíme nahradit  $kT$  v (41.3) výrazem (41.15). Tyto dvě teorie (záření černého tělesa a Johnsonův šum) i fyzikálně úzce souvisí, protože rezonanční obvod můžeme připojit k *anténě*, takže odpor  $R$  je pak čistým *radiačním odporem*. Protože (41.2) nezávisí na fyzikálním původu odporu, bude generátor  $G$  stejný pro skutečný odpor jako pro radiační odpor. Co je zdrojem generovaného výkonu  $P(\omega)$ , je-li odporem  $R$  jen ideální anténa v rovnováze s jejím okolím při teplotě  $T$ ? Je to záření  $I(\omega)$  v prostoru při teplotě  $T$ , jež dopadá na anténu a jako „přijatý signál“ vytváří efektivní generátor. Proto, postupujeme-li od (41.13) k (41.3), můžeme odvodit přímý vztah mezi  $P(\omega)$  a  $I(\omega)$ .

Vše, o čem jsme mluvili – Johnsonův šum a Planckovo rozdělení – a také správná teorie Brownova pohybu, jsou výsledky získané přibližně během prvního desetiletí 20. století. Se získanými poznatky a znalostí historického pozadí se vrátíme k Brownovu pohybu.

#### 41.4 NÁHODNÁ PROCHÁZKA

Zkoumejme, jak se mění s časem poloha chaoticky se pohybující částice, zajímáme-li se o doby, jež jsou velmi velké ve srovnání s dobou mezi nárazy. Uvažujme malou částici Brownova pohybu, která poskakuje, protože je bombardována ze všech stran nepravidelně narážejícími molekulami vody. Ptáme se: Jak daleko od počáteční polohy se dostane částice za určitou dobu? Tento problém vyřešili Einstein a Smoluchovski. Představíme-li si čas rozdělený na malé intervaly, například setiny sekundy, dostane se částice po první setině sekundy na určité místo, v další

## NÁHODNÁ PROCHÁZKA

setině se dostane o kus dál, v další setině zase jinam atd. Vzhledem k frekvenci, jakou je částice bombardována, představuje setina sekundy velmi dlouhou dobu. Čtenář si může snadno ověřit, že počet srážek, kterých se zúčastní jedna molekula vody za sekundu, je kolem  $10^{14}$ , takže za setinu sekundy je to  $10^{12}$  srážek, a to je velmi mnoho! Proto si po setině sekundy částice nepamatuje, co se s ní dělo předtím. Jinými slovy, srážky jsou *náhodné*, takže „krok“ částice nezávisí na předcházejícím „kroku“. Podobá se to známému problému opilého námořníka, který vychází z hospody a udělá řadu kroků, jenže každý krok je náhodný, námořník volí kroky v libovolném úhlu (obr. 41.6). Klademe si otázku: Kam se dostane námořník po dlouhé době? To samozřejmě nevíme! Na tuto otázku nemůžeme odpovědět. Můžeme říci jen tolik, že se kamsi více méně náhodně dostal. Kam se tedy dostal aspoň v průměru? *Jaká je střední vzdálenost od hospody, kam námořník došel?* Na tuto otázku jsme však už odpověděli, neboť jsme zkoumali superpozici světla přicházejícího od množství rozličných zdrojů s různými fázemi a museli jsme sčítat velké množství šipek v rozmanitých směrech (kapitola 32). Tehdy jsme zjistili, že střední hodnota druhé mocniny vzdálenosti mezi konci řetězce náhodných kroků (představující intenzitu světla) je rovna součtu intenzit jednotlivých příspěvků. Použijeme-li tedy stejnou matematiku, můžeme ihned dokázat, že střední kvadratická vzdálenost od počátku je úměrná počtu kroků. Je-li  $R_N$  vektor vzdálenosti od počátku po  $N$  krocích, pak  $\langle R_N^2 \rangle = NL^2$ , kde  $L$  je délka každého kroku. Je-li počet kroků v našem problému úměrný času, je *střední kvadratická vzdálenost úměrná času*

$$\langle R^2 \rangle = \alpha t. \quad (41.17)$$

To neznamena, že *střední vzdálenost* je úměrná času. Kdyby byla střední vzdálenost úměrná času, znamenalo by to, že pohyb probíhá pěkně ustálenou rychlostí. Námořník sice postupuje dopředu, ale jen tak, že jeho *střední kvadratická vzdálenost* je úměrná času. To je charakteristický rys náhodné procházky.



Obr. 41.6 Náhodná procházka 36 kroků délky  $L$ . Jak je daleko  $S_{36}$  od  $B$ ? Odpověď: v průměru asi  $6L$

Lze snadno ukázat, že každý krok zvětšuje střední kvadratickou vzdálenost v průměru o  $L^2$ . Když totiž zapíšeme  $R_N = R_{N-1} + L$ , zjistíme, že pro  $R_N$  platí

$$R_N \cdot R_N = R_N^2 = R_{N-1}^2 + 2 R_{N-1} \cdot L + L^2,$$

a zprůměrováním přes mnoho pokusů dostaneme  $\langle R_N^2 \rangle = \langle R_{N-1}^2 \rangle + L^2$ , protože  $\langle R_{N-1} \cdot L \rangle = 0$ . Indukcí získáme výsledek

$$R_N^2 = NL^2. \quad (41.18)$$

Teď bychom měli vypočítat koeficient  $\alpha$  v (41.17), ale dříve než k tomu přistoupíme, musíme si ještě něco připomenout. Budeme předpokládat, že bude-li na částici působit síla, částice bude reagovat následujícím způsobem (tato síla nesouvisí s Brownovým pohybem – zatím se zabýváme vedlejším problémem). Především se projeví setrvačnost. Nechť  $m$  je koeficient setrvačnosti,

## BROWNŮV POHYB

efektivní hmotnost objektu (nemusí to být skutečná hmotnost skutečné částice, neboť při pohybu částice vodou se bude pohybovat i voda v okolí částice). Mluvíme-li tedy o pohybu částice v jednom směru, máme na jedné straně rovnice výraz typu  $m(d^2 x/dt^2)$ . Dále budeme předpokládat, že při působení stálého tahu na objekt bude objekt brzděn kapalinou a toto brzdění bude úměrné rychlosti objektu. Kromě setrvačnosti kapaliny je zde ještě odpor proti proudění vyvolaný viskozitou a složitostí kapaliny. Pro vznik fluktuací je bezpodmínečně nutná *existence nevratných ztrát*, něčeho, co se podobá odporu. Bez takových ztrát není možné získat  $kT$ . Příčina fluktuací velmi těsně souvisí s těmito ztrátami. Později uvidíme, jaký je mechanismus tohoto brzdění, až budeme mluvit o silách úměrných rychlosti, a o tom, odkud pocházejí. Nyní však předpokládejme, že takový odpor existuje. Potom vztah vyjadřující pohyb pod vlivem vnější síly, působící na částici obvyklým způsobem, vypadá takto:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = F_{ext}. \quad (41.19)$$

Veličinu  $\mu$  můžeme určit přímo z experimentu. Můžeme například pozorovat pád kapky pod vlivem gravitace. Tehdy víme, že síla je  $mg$  a  $\mu$  je  $mg$  dělené rychlostí, které padající kapka nakonec dosáhne. Případně bychom mohli dát kapku do odstředivky a pozorovat rychlost sedimentace. Je-li kapka nabitá, mohli bychom na ni aplikovat elektrické pole. Veličina  $\mu$  je tedy měřitelná veličina, ne jen něco umělého a je známá pro mnoho druhů koloidních částic.

Použijme stejný vztah i v případě, kdy síla není vnější, ale je rovna nepravidelným silám Browanova pohybu. Místo toho, abychom uvažovali vzdálenosti v třírozměrném prostoru, budeme se zajímat pouze o jeden rozměr a abychom se připravili na řešení úlohy, hledáme střední hodnotu  $x^2$ . (Je zřejmé, že střední hodnota  $x^2$  je stejná jako střední hodnota  $y^2$  a střední hodnota  $z^2$ , a proto střední kvadratická vzdálenost je trojnásobek toho, co budeme počítat). Je jasné, že  $x$ -ová složka nepravidelných sil je právě tak nepravidelná jako kterákoliv jiná složka. Jaká je rychlost změny  $x^2$ ? Platí  $d(x^2)/dt = 2x(dx/dt)$ , a tak musíme hledat střední hodnotu součinu polohy a rychlosti. Ukážeme, že je konstantní, a proto bude střední kvadratický poloměr narůstat úměrně s časem. Určíme rychlost nárůstu. Vynásobíme-li rovnici (41.19)  $x$ , získáme  $m x(d^2 x/dt^2) + \mu x(dx/dt) = x F_x$ . Potřebujeme znát časový průměr  $x(dx/dt)$ , a proto zprůměrujeme celou rovnici a budeme zkoumat její tři členy. Co můžeme říci o součinu  $x$  a síly? Když se částice dostala do určité vzdálenosti  $x$ , pak následující impuls může být v libovolném směru vzhledem k  $x$ , neboť působící síla je zcela nahodilá a nerozezná, odkud částice vyšla. Když bude  $x$  kladné, není důvod, proč by střední síla měla být v tomto směru. Se stejnou pravděpodobností může být v jednom i v druhém směru. Bombardující síly ji nepoženu v určitém směru. Proto je střední hodnota součinu  $x$  a  $F$  rovna nule. V případě členu  $m x(d^2 x/dt^2)$  však musíme být trochu vynalézaví a zapsat ho v podobě

$$m x \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d[x(dx/dt)]}{dt} - m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2.$$

Původní výraz jsme vyjádřili pomocí dvou členů a tyto členy musíme zprůměrovat. Všimněme si, jak vypadá součin polohy a rychlosti. Má střední hodnotu, která se nemění s časem, neboť, když se částice dostane do určité polohy, už si nepamatuje, kde byla předtím a veličiny takového druhu se nemění s časem. Časová derivace této veličiny je proto v průměru nulová. Zůstává nám

### NÁHODNÁ PROCHÁZKA

veličina  $mv^2$ , o níž víme jen to, že  $mv^2/2$  má střední hodnotu  $1/2 kT$ . Proto rovnice

$$\left\langle mx \frac{d^2 x}{dt^2} \right\rangle + \mu \left\langle x \frac{dx}{dt} \right\rangle = \left\langle x F_x \right\rangle$$

dává

$$-\langle mv^2 \rangle + \frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 0$$

neboli

$$\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = 2 \frac{kT}{\mu}. \quad (41.20)$$

Proto pro střední kvadratickou vzdálenost  $\langle R^2 \rangle$  částice v čase  $t$  platí

$$\langle R^2 \rangle = 6 kT \frac{t}{\mu}. \quad (41.21)$$

Tak můžeme vlastně určit, *jak daleko* se částice dostanou! Nejprve musíme určit, jak reagují na konstantní sílu, jak rychle putují pod vlivem známé síly (abychom určili  $\mu$ ) a pak můžeme určit, jak daleko se dostanou při svém náhodném pohybu. Tato rovnice má velký historický význam, neboť se na ní zakládal jeden z prvních způsobů určení konstanty  $k$ . Můžeme totiž změřit  $\mu$ , čas, vzdálenost, do které se částice dostanou a určit průměr. Určení  $k$  bylo tak důležité, neboť ve stavové rovnici  $pV = RT$  pro jeden mol můžeme změřit  $R$ , a  $R$  je rovno  $k$ -násobku počtu atomů v jednom molu. Mol byl původně definován jako určitý počet *gramů* nuklidu kyslíku  $^{16}\text{O}$  (dnes se používá uhlík), takže počet *atomů* v jednom molu nebyl původně znám. Je to samozřejmě velmi zajímavý a důležitý problém. Jak velké jsou atomy? Kolik jich je? A tak se jedno z prvních určení počtu atomů zakládalo na určení toho, jak daleko se dostane drobná částice nečistoty, když ji určitý čas trpělivě pozorujeme mikroskopem. Když bylo už změřeno  $R$ , bylo možné určit Boltzmannovu konstantu  $k$  a Avogadrovu konstantu  $N_0$ .

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 41.1 ■ Vypočítejte a zapamatujte si
- teplotu  $T$ , pro níž  $kT = 1$  eV;
  - velikost  $kT$  (v eV) při pokojové teplotě;
  - vlnovou délku fotonu odpovídající kvantovému přechodu s rozdílem energií 1 eV.
- 41.2 ■ Rozdělení záření absolutně černého tělesa má tvar  $I(\omega)d(\omega) = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}$ .  
Přejděte k nové proměnné  $x = \hbar\omega/kT$  a ukažte, že
- celková intenzita záření zintegrováná v celém rozsahu frekvencí je úměrná čtvrté mocnině absolutní teploty.
  - frekvence  $\omega_m$ , při níž má  $I(\omega)$  maximální hodnotu, je úměrná absolutní teplotě.
- 41.3 ■ Najděte relativní intenzity světla o vlnové délce  $0,31 \mu\text{m}$  vyzařovaného dvěma absolutně černými tělesy, jež mají termodynamické teploty 2000 K a 4000 K.

# Aplikace kinetické teorie

---

## 42.1 VYPAŘOVÁNÍ

## 42.2 TERMOEMISE

## 42.3 TERMOIONIZACE

## 42.4 CHEMICKÁ KINETIKA

## 42.5 EINSTEINOVY ZÁKONY ZÁŘENÍ

### 42.1 VYPAŘOVÁNÍ

V této kapitole budeme mluvit o některých dalších aplikacích kinetické teorie. V předcházející kapitole jsme zdůraznili jeden zvláštní rys kinetické teorie, konkrétně, že střední kinetická energie každého stupně volnosti molekuly nebo jiného objektu je rovna  $1/2 kT$ . Hlavním předmětem našich úvah bude nyní skutečnost, že pravděpodobnost nalezení částice v jednotkovém objemu na určitém místě se mění podle závislosti  $\exp(-\text{potenc. energie}/kT)$ . Tuto skutečnost využijeme v řadě případů.

Jevy, které chceme zkoumat jsou poměrně složité: vypařování kapaliny, vyletování elektronů z povrchu kovů nebo chemické reakce zahrnující velký počet atomů. V takových případech už není možné vyvozovat z kinetické teorie jednoduché a přitom přesné závěry, neboť situace je příliš složitá. Proto je tato kapitola poměrně nepřesná, až na případy, na které zvlášť upozorňujeme. Chtěli bychom zdůraznit pouze to, že pomocí kinetické teorie můžeme do určité míry tyto jevy pochopit. Použitím termodynamických argumentů nebo některých měření určitých kritických veličin o nich můžeme získat přesnější představu.

Je však velmi užitečné poznat, i když jen částečně, proč děje probíhají určitým způsobem, protože v nové situaci nebo v situaci, kterou se jen chystáme analyzovat, můžeme přibližně říci, co by se mělo stát. Taková analýza je sice velmi nepřesná, ale v podstatě správná – zakládá se na správné myšlence, jen je trochu zjednodušená, řekněme v některých jemných detailech.

První příklad, který budeme uvažovat, je vypařování kapaliny. Předpokládejme, že máme nádobu s velkým objemem částečně zaplněnou kapalinou, která je v rovnováze s párou při určité teplotě. Budeme předpokládat, že molekuly páry jsou od sebe poměrně vzdálené a molekuly v kapalině jsou natěsnané. Naší úlohou je zjistit, kolik molekul je v plynné fázi ve srovnání

## APLIKACE KINETICKÉ TEORIE

s počtem molekul, jež jsou v kapalině. Jak je hustá pára při dané teplotě a jak závisí tato hustota na teplotě?

Ať  $n$  je počet molekul páry v jednotkovém objemu. Samozřejmě, tento počet se mění s teplotou. Přidáme-li teplo, zvýší se vypařování. Zavedme jinou veličinu  $1/V_a$ , která je rovna počtu atomů v jednotkovém objemu kapaliny. Předpokládáme, že každá molekula kapaliny zaujímá určitý objem. Je-li v kapalině více molekul, obsadí spolu větší objem. Je-li tedy  $V_a$  objem zaujímáný jednou molekulou, počet molekul v jednotkovém objemu bude roven jednotkovému objemu dělenému objemem připadajícím na jednu molekulu. Dále budeme předpokládat, že mezi molekulami působí přitažlivé síly, které je v kapalině drží pohromadě. Jinak bychom nemohli pochopit, proč dochází ke kondenzaci. Předpokládejme tedy, že taková síla existuje a existuje vazbová energie molekul v kapalině, která se ztrácí, když molekuly přecházejí do páry. Budeme tedy předpokládat, že k vytržení molekuly z kapaliny do páry je třeba vynaložit určité množství práce  $W$ . Existuje určitý rozdíl  $W$  mezi energií molekuly v kapalině a její energií v páře, protože ji musíme odtrhnout od ostatních molekul, které ji přitahují!

Nyní využijeme obecný princip, podle něhož je počet atomů v jednotkovém objemu ve dvou různých oblastech roven  $n_2/n_1 = \exp[-(E_2 - E_1)/kT]$ . Tedy počet molekul  $n$  v jednotkovém objemu páry dělený počtem molekul  $1/V_a$  v jednotkovém objemu kapaliny je roven

$$n V_a = \exp[-W/kT]. \quad (42.1)$$

To je vlastně obecné pravidlo. Podobá se to situaci v atmosféře v gravitačním poli, kde je plyn dole hustší než nahoře, protože ke zdvižení molekuly plynu do výšky  $h$  je třeba práce  $mgh$ . V kapalině jsou molekuly hustší než v plynu, protože ven bychom je dostali jen přes energetický val  $W$  a poměr hustot je  $\exp(-W/kT)$ .

To jsme právě chtěli odvodit – že hustota páry se mění jako  $e$  na mínus nějakou energii dělenou  $kT$ . Koeficient před tímto výrazem nás vlastně ani nezajímá, neboť ve většině případů je hustota páry mnohem menší než hustota kapaliny. V podmínkách, kdy nejsme blízko kritického bodu, kde jsou hustoty kapaliny a páry téměř stejné, ale kdy je hustota páry  $n$  mnohem menší než hustota kapaliny  $1/V_a$ , je tato skutečnost vyvolána tím, že v exponentu je  $W$  mnohem větší než  $kT$ . Vztahy typu (42.1) jsou tedy zajímavé jen tehdy, když  $W$  je mnohem větší než  $kT$ , protože umocňujeme  $e$  na velmi velkou zápornou mocninu. Změní-li se  $T$  jen málo, vyvolá to změnu této velké mocniny a hodnota exponenciální funkce bude mnohem významnější než jakýkoli vliv koeficientu stojícího před ní. Proč by se však měly měnit takové veličiny jako  $V_a$ ? Protože naše analýza byla jen přibližná. Koneckonců každá molekula nemá ve skutečnosti vymezen stálý objem; při změně teploty nezůstává objem  $V_a$  stálý, neboť kapalina se roztahuje. Působí i jiné podobné vlivy, takže skutečná situace je mnohem složitější. Všude se vyskytují pomalu se měnící faktory závislé na teplotě. Dokonce i o  $W$  samotném můžeme říci, že v malé míře závisí na teplotě, protože při vyšší teplotě, při jiném molekulárním objemu bude jiné průměrné přitahování atd. Mohli bychom sice myslet, že máme vzorec, v němž se všechno mění neznámým způsobem s teplotou, ale ve skutečnosti bychom žádný vzorec neměli. Uvědomíme-li si, že exponent  $W/kT$  je obecně velmi velký, pochopíme, že největší změna křivky závislosti hustoty páry na teplotě je vyvolána exponenciálním faktorem a budeme-li  $W$  považovat za konstantu a koeficient  $1/V_a$  za přibližně konstantní, dostaneme dobrou aproximaci pro krátké úseky křivky. Jinými slovy: podstatné změny mají obecný průběh  $\exp(-W/kT)$ .

Ukazuje se, že v přírodě je velmi mnoho jevů, jež jsou charakterizovány tím, že se energie v nich odkudsi čerpá a jejich hlavním rysem je teplotní závislost  $e$  na mínus energie  $W$  dělená

## VYPAŘOVÁNÍ

$kT$ . Tento fakt je užitečný jen tehdy, když je energie velká ve srovnání s  $kT$ , takže hlavní část změn je určena změnou  $kT$  a ne změnou konstant a jiných faktorů.

Uvažujme nyní jiný způsob jak dospět k podobnému výsledku pro vypařování, takový, při němž budeme více přihlížet k podrobnostem. Abychom získali (42.1), použili jsme prostě pravidlo platné při rovnováze. Chceme-li lépe chápat podstatu věcí, nebude na škodu se podrobněji podívat na to, co se vlastně při vypařování děje. Můžeme to popsat takovým způsobem: molekuly páry soustavně bombardují povrch kapaliny; při nárazu se mohou odrazit nebo uváznout. Nevíme, s jakou pravděpodobností se realizují tyto možnosti – možná v poměru 50 ku 50, možná 10 ku 90. Předpokládejme, že molekuly páry vždy uváznou v kapalině – později můžeme situaci sledovat za předpokladu, že se také někdy odrazí. V daném časovém okamžiku bude určitý počet molekul kondenzovat na povrchu kapaliny. Počet kondenzujících molekul, počet těch, které prošly jednotkovou plochou, je roven součinu počtu molekul  $n$  v objemové jednotce a rychlosti  $v$ . Tato rychlost závisí na teplotě, protože  $1/2 mv^2$  je v průměru rovno  $3/2 kT$ . Proto  $v$  představuje jakousi střední rychlost. Samozřejmě musíme integrovat přes úhly a udělat určité zprůměrování, ale výsledek je zhruba úměrný střední kvadratické rychlosti až na nějaký koeficient. Tedy

$$N_k = nv \quad (42.2)$$

představuje počet molekul, jež proniknou jednotkovou plochou povrchu kapaliny a zkondenzují.

Současně se však molekuly kapaliny chaoticky pohybují a čas od času některá z nich kapalinu opouští. Naším úkolem je odhadnout, jak často se to stává. Budeme vycházet z toho, že v rovnováze je počet molekul vylétujících z kapaliny za jednu sekundu roven počtu molekul, které do kapaliny za jednu sekundu přicházejí.

Kolik molekul vylétuje z kapaliny? Aby se molekula dostala ven, musí nějakým způsobem získat přebytek energie ve srovnání se svými sousedy – značný přebytek, protože je velmi silně upoutána ostatními molekulami kapaliny. Obvykle kapalinu neopouští, neboť je velmi silně přitahována, ale při srážkách může náhodně takovou energii získat. Je-li  $W \gg kT$ , pravděpodobnost, že získá v našem případě potřebnou energii  $W$ , je velmi malá. Pravděpodobnost toho, že molekula získala větší energii než  $W$ , je vlastně  $\exp(-W/kT)$ . Takový je obecný princip kinetické teorie: Pravděpodobnost získání energie, která je o  $W$  větší než průměr, je rovna takové mocnině  $e$ , jejíž exponent je roven mínus  $W$  dělenému  $kT$ . Předpokládejme, že některé molekuly získaly takovou energii. Musíme určit, kolik takových molekul opouští za jednu sekundu povrch kapaliny. To, že má molekula potřebnou energii ještě neznamená, že se opravdu odpaří, neboť může být příliš hluboko v kapalině, nebo i když je při povrchu, může se pohybovat nevhodným směrem. Počet molekul, které opouštějí jednotkovou plochu za sekundu, bude takový: Počet molekul v blízkosti povrchu připadajících na jednotku plochy dělený časem, který molekula potřebuje k úniku a násobený pravděpodobností  $\exp(-W/kT)$  toho, že molekuly mají dostatečnou energii.

Budeme předpokládat, že každá molekula na povrchu kapaliny zabírá určitou plošku  $A$ . Potom počet molekul připadajících na plochu povrchu kapaliny jednotkového obsahu je roven  $1/A$ . Kolik času potřebuje molekula k opuštění kapaliny? Pohybují-li se molekuly určitou střední rychlostí  $v$  a musí projít, řekněme, vzdálenost odpovídající průměru molekuly  $D$ , tedy tloušťce povrchové vrstvy, potom čas, který potřebují k překonání této vzdálenosti, je čas potřebný k úniku molekuly, jež má dostatečnou energii. Tento čas se bude roven  $D/v$ . Pro počet odpařujících molekul bude přibližně platit



APLIKACE KINETICKÉ TEORIE

$$N_v = (1/A) (v/D) \exp(-W/kT) . \quad (42.3)$$

Plocha zaujímaná molekulou násobená tloušťkou vrstvy je přibližně stejná jako objem  $V_a$ , který molekula zabírá. Aby nastala rovnováha, musí platit  $N_k = N_v$ , tedy

$$nv = (v/V_a) \exp(-W/kT) . \quad (42.4)$$

Rychlosti  $v$  nám z rovnice vypadnou; i když na jedné straně rovnice představuje  $v$  rychlost molekuly v páře a na druhé straně rovnice rychlost odpařujících se molekul. Tyto rychlosti jsou stejné, neboť jejich střední kinetická energie (v jednom směru) je  $1/2 kT$ . Možná bude někdo z vás namítat, že jde o zvlášť rychle se pohybující molekuly – ty, které získaly přebytečnou energii. To však není pravda, neboť v okamžiku, kdy se vydaly na cestu z kapaliny, *ztratily* tento přebytek na úkor potenciální energie. Když opouštějí povrch, jsou už zpomaleny na rychlost  $v$ ! Situace je stejná jako při rozdělení rychlostí molekul v atmosféře. V dolních vrstvách měly molekuly určité rozdělení energie, a ty, které dosáhly horní vrstvy, mají *stejně* rozdělení energie, protože pomalé molekuly tam vůbec nedošly a rychlé byly zpomaleny. Molekuly, které se vypařují, mají stejné rozdělení energie jako vnitřní molekuly – a to je pozoruhodná skutečnost. Nemá však velký význam posuzovat náš vztah přísně, neboť obsahuje i jiné nepřesnosti. Neuvažovali jsme například, pravděpodobnost odrazu molekul od povrchu kapaliny, místo jejich kondenzace atd. Získali jsme hrubou představu o rychlosti vypařování a kondenzace a už víme, že hustota páry  $n$  se mění stejně jako předtím, nyní to však chápeme detailněji a ne pouze jako svévolnou formuli.

Takové hlubší chápání nám dovolí objasnit řadu věcí. Předpokládejme, například, že odsáváme páru tak rychle, že ji odstraníme ihned po vytvoření (máme-li dobrá čerpadla a kapalina se vypařuje velmi pomalu). Ptáme se, jakou rychlostí bude probíhat vypařování, budeme-li udržovat teplotu kapaliny na hodnotě  $T$ . Předpokládejme, že jsme již experimentálně určili rovnovážnou hustotu páry, takže víme, kolik molekul v jednotkovém objemu je v rovnováze s kapalinou při dané teplotě. Zajímá nás, jaká bude *rychlost* vypařování. I když naše analýza vypařování byla jen hrubá, počet přicházejících molekul páry jsme neodhadli špatně, neuvažujeme-li neznámý koeficient odrazu. Můžeme proto využít skutečnost, že v rovnováze je počet odcházejících molekul stejný jako počet přicházejících molekul. Ve skutečnosti je pára odstraňována, a tak molekuly kapalinu jenom opouštějí, ale kdybychom páru ponechali samu sobě, dosáhla by rovnovážné hustoty, při níž se počet odcházejících molekul rovná počtu přicházejících. Proto snadno nahlédneme, že počet molekul, které za sekundu vycházejí z povrchu kapaliny, je roven neznámému koeficientu odrazu  $R$  násobenému počtem molekul, jež by za sekundu vycházely z povrchu, kdybychom páru neodčerpávali. To je totiž počet molekul, který vyrovnává ztráty vypařováním.

$$N_v = n v R = (v R/V_a) \exp(-W/kT) . \quad (42.5)$$

Je samozřejmé, že se snáze vypočítá počet molekul páry dopadajících na kapalinu, protože nemusíme tolik vědět o silách, než když uvažujeme o průniku molekul povrchem kapaliny. Je mnohem jednodušší postupovat naopak.

## 42.2 TERMOEMISE

Můžeme uvést další příklad často se vyskytující situace, která se natolik podobá vypařování kapaliny, že si nevyžaduje zvláštní analýzu. Je to v podstatě týž problém. V elektronce existuje zdroj elektronů, konkrétně žhavené wolframové vlákno, a kladně nabitá destička, která přitahuje elektrony. Každý elektron, který unikl z povrchu wolframu, je ihned unášen k destičce. To je naše ideální „čerpadlo“, které soustavně odvádí elektrony. Ptáme se: Kolik elektronů můžeme dostat za sekundu z kousku wolframu a jak se tento počet mění s teplotou? Odpověď na tuto otázku představuje vztah (42.5), neboť v kousku kovu jsou elektrony přitahovány k iontům nebo atomům kovu. Zhruba řečeno jsou udržovány v kovu. K vytržení elektronu z kovu je třeba určité energie, musíme vykonat určitou práci. Tato práce je pro různé kovy různá. Ve skutečnosti tato práce závisí dokonce i na vlastnostech povrchu daného kovu, ale celková práce představuje jen několik elektronvoltů, což je typická hodnota energie chemických reakcí. V tomto směru je užitečné si připomenout, že napětí galvanických článků využívajících chemické reakce, používaných např. v baterkách, je přibližně jeden volt.

Jak můžeme zjistit, kolik elektronů vychází z vlákna za sekundu? Bylo by dost těžké analyzovat, co se děje s elektrony, které vycházejí z kovu; jednodušší bude opačný postup. V našich úvahách můžeme vycházet z představy, že vylétující elektrony nejsou odváděny pryč, ale jako plyn se mohou vracet zpět do kovu. Bude proto existovat určitá rovnovážná hustota elektronů, kterou bude možno vyjádřit přesně stejným vztahem jako je (42.1), kde  $V_a$  bude zhruba objem připadající na jeden elektron v kovu a  $W$  je rovno  $q_e \varphi$ , kde  $\varphi$  je tzv. *výstupní potenciál*, neboli napětí potřebné k vytržení elektronu z povrchu kovu. Z tohoto vztahu se dovíme, kolik elektronů musí být v okolním prostoru a musí narážet na kov, aby nahradily ty, které povrch opustily. Pak můžeme snadno vypočítat, kolik elektronů opouští povrch kovu, když je všechny odvádíme pryč, neboť počet těch, jež vystupují z povrchu, je přesně stejný jako počet těch, které by pronikly povrchem do kovu při známé hustotě elektronové „páry“. Jinak řečeno, elektrický proud procházející jednotkovou plochou je roven součinu náboje elektronu a počtu elektronů, které procházejí za sekundu touto plochou, přičemž tento počet je roven součinu rychlosti a počtu elektronů v jednotkovém objemu. Proto, tak jak jsme to viděli už mnohokrát, platí

$$I = q_e n v = (q_e v / V_a) \exp(-q_e \varphi / kT). \quad (42.6)$$

Víme, že jeden elektronvolt odpovídá  $kT$  při teplotě 11 600 K. Vlákno elektronky pracuje při teplotě asi 1100 K, takže exponenciální faktor je přibližně  $e^{-10}$ ; změníme-li trochu teplotu, tento faktor se značně změní. Opět máme charakteristickou závislost na teplotě  $\exp(-q_e \varphi / kT)$ . Koeficient před exponentou je vlastně nesprávný – ukazuje se, že chování elektronů v kovu správně vystihuje kvantová a ne klasická mechanika, ale to způsobí jen malou změnu tohoto koeficientu. Dodnes vlastně nikdo tento koeficient přesně nespočítal, i když mnozí se o to snažili a používali přitom prvotřídní kvantověmechanickou teorii. Velký problém spočívá v tom, zda se  $W$  nemění aspoň trochu s teplotou. Mění-li se, pak nemůžeme rozlišit pomalu se měnící  $W$  od pozmeněného koeficientu před exponentou. Kdyby se, například,  $W$  měnilo lineárně s teplotou, takže  $W = W_0 + \alpha kT$ , měli bychom

$$\exp(-W/kT) = \exp[-(W_0 + \alpha kT)/kT] = \exp(-\alpha) \exp(-W_0/kT).$$

Lineární teplotní závislost  $W$  je tedy rovnocenná změně koeficientu. Pokus o přesné určení tohoto koeficientu je tedy těžká a obvykle i bezúspěšná úloha.

### 42.3 TERMOIONIZACE

Všimněme si jiného příkladu, v němž se uplatňuje táž myšlenka. Týká se ionizace. Předpokládejme, že v plynu je velké množství atomů, které jsou původně neutrální, ale po zahřátí plynu se mohou stát ionizovanými. Zajímá nás, kolik je tam iontů v daných podmínkách, tj. při určité hustotě atomů v jednotkovém objemu a při určité teplotě. Opět budeme uvažovat nádobu, v níž je  $N$  atomů a ty si udržují elektrony. (Atom zbavený elektronu se nazývá *iont* a neutrální atom budeme nazývat prostě atomem.) Předpokládejme, že v daném okamžiku je koncentrace neutrálních atomů  $n_a$ , koncentrace iontů je  $n_i$  a koncentrace elektronů je  $n_e$ . Ptáme se, jaký je vztah mezi těmito veličinami?

Především máme dvě podmínky nebo dvě omezení pro tato tři čísla. Například, když měníme různé podmínky, jako teplotu nebo jiné, zůstává  $n_a + n_i$  konstantní, neboť to je počet  $n$  atomových jader v jednotkovém objemu nádoby. Zachováme-li stálý počet jader v jednotkovém objemu a měníme např. teplotu, pak se celkový počet atomů a iontů nemění, tj.  $n_a + n_i = n$ , i když se v důsledku ionizace některé atomy mění na ionty. Další podmínka spočívá v tom, že elektrická neutralita plynu jako celku (při zanedbání dvojnásobné nebo trojnásobné ionizace) si vyžaduje rovnost počtu iontů a počtu elektronů v každém okamžiku, tedy  $n_i = n_e$ . To jsou pomocné rovnice, které vyjadřují zachování náboje a zachování počtu atomů.

Tyto rovnice jsou správné a nakonec je použijeme, až budeme řešit konkrétní problém. Chceme však získat i jiný vztah mezi těmito veličinami, a to můžeme udělat takto. Opět využijeme myšlenku, že k vytržení elektronu z atomu je třeba určité energie, kterou nazýváme *ionizační energie* a budeme jí označovat symbolem  $W$ , aby se všechny vztahy podobaly. Nechtě tedy  $W$  představuje energii potřebnou k vytržení elektronu z atomu a vzniku iontu. Opět tvrdíme, že počet volných elektronů v jednotkovém objemu „páry“ je roven počtu elektronů vázaných na atom v jednotkovém objemu násobenému exponenciálou ze záporně vzatého energetického rozdílu mezi vázaným a volným stavem děleného  $kT$ . To je opět základní rovnice. Jak ji můžeme zapsat? Počet volných elektronů v jednotkovém objemu bude samozřejmě roven  $n_e$ , vždyť taková je definice  $n_e$ . Co můžeme říci o počtu elektronů v jednotkovém objemu, jež jsou vázány na atomy? Celkový počet míst, na která můžeme dát elektrony, je zřejmě roven  $n_a + n_i$ , a budeme předpokládat, že jsou-li elektrony vázané, každému přísluší objem  $V_a$ . Celkový objem, který mají vázané elektrony k dispozici, je roven  $(n_a + n_i) V_a$  a náš vztah můžeme vyjádřit ve tvaru

$$n_e = \frac{n_a}{(n_a + n_i) V_a} \exp(-W/kT).$$

Tento vztah je však z jednoho důležitého hlediska nesprávný. Nachází-li se jeden elektron v atomu, druhý elektron už do tohoto objemu nemůže vstoupit! Jinými slovy: ne všechny objemy, které by elektron mohl obsazovat, jsou pro něj dostupné a při rozhodování, zda zaujme místo v páře nebo v kondenzovaném stavu, se objevuje zvláštní rys spočívající v tom, že elektron nemůže jít tam, kde už je druhý elektron – odtud je vypuzován. Právě proto musíme uvažovat jen tu část objemu, která je pro elektron přístupná. Místa, jež jsou už elektronem obsazena, nepatří k takovému přístupnému objemu. Jediným dovoleným objemem je prostor iontů, kde

## TERMOIONIZACE

se nacházejí nezaplňená místa, která elektron může obsadit. Uvážíme-li tyto okolnosti, dospějeme k přesnějšímu vyjádření našeho vztahu

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{1}{V_a} \exp(-W/kT). \quad (42.7)$$

Tento vztah se nazývá *Sahova ionizační rovnice*. Podívejme se, zda je možné kvalitativně pochopit správnost takové rovnice pomocí argumentů založených na kinetice probíhajících dějů.

Elektron každou chvíli naráží na iont a rekombinuje v atom. Každou chvíli se však i atom zúčastní srážky a rozpadá se na iont a elektron. Četnosti těchto procesů musí být stejné. Jak rychle se najdou elektron a iont? Tato rychlost se určitě zvýší, vzroste-li počet elektronů v jednotkovém objemu. Zvýší se i tehdy, když vzroste počet iontů v jednotkovém objemu. Proto je celková rychlost rekombinace určitě úměrná součinu koncentrace elektronů a iontů. Dále musí celková četnost ionizace v důsledku srážek lineárně záviset na počtu atomů schopných ionizace. Rychlosti obou procesů budou vyvážené, když se ustálí určitý poměr mezi součinem  $n_e n_i$  a počtem atomů  $n_a$ . Skutečnost, že tento vztah je vyjádřen rovnicí, v níž vystupuje ionizační energie  $W$ , dává samozřejmě trochu bohatší informaci, ale snadno lze zjistit, že taková rovnice musí obsahovat koncentrace elektronů, iontů a atomů v kombinaci  $n_e n_i / n_a$ , která může záviset pouze na teplotě, atomových účinných průřezech a jiných konstantách.

Všimněme si také, že rovnice obsahuje počty v *jednotkovém objemu*, a proto ve dvou experimentech s daným celkovým počtem atomů a iontů  $N$ , tedy s určitým pevným počtem jader, jsou při použití nádob s různým objemem počty  $n$  menší ve větší nádobě. Když se poměr  $n_e n_i / n_a$  nemění, bude *celkový počet* elektronů a iontů větší ve větší nádobě. Abychom se o tom přesvědčili, předpokládejme, že máme  $N$  jader v nádobě s objemem  $V$ , a že  $f$  tá část z nich je ionizována. Pak  $n_e = fN/V = n_i$  a dále  $n_a = (1 - f)N/V$ . V takovém případě naše rovnice přejde do tvaru

$$\frac{f^2 N}{1 - f V} = \frac{e^{-W/kT}}{V_a}. \quad (42.8)$$

Jinými slovy, bereme-li stále menší hustotu atomů nebo stále větší a větší objem nádoby, musí relativní počet elektronů a iontů  $f$  vzrůstat. Ionizace pocházející z „expanze“, při níž klesá hustota, je příčinou, proč věříme, že při velmi nízkých hustotách – jaké se vyskytují ve studeném mezihvězdném prostoru – mohou existovat ionty, i když z energetického hlediska je nám to těžko pochopitelné. Přestože k vytvoření iontů je potřebná energie mnohonásobně převyšující  $kT$ , ionty tam přece jsou.

Proč jsou tam ionty přítomné jen tehdy, když je kolem nich tak mnoho místa, zatímco při vzrůstu hustoty projevují snahu vymizet? Uvažujme atom. Čas od času světlo nebo jiný atom nebo iont nebo cokoliv jiného, co udržuje tepelnou rovnováhu, na tento atom naráží. Velmi řídce – neboť si to vyžaduje obrovské množství přebytečné energie – se elektron odtrhne od atomu a zůstane iont. Je-li prostor obrovský, tento elektron putuje a k iontu se možná nepřiblíží celé roky. Jednou za velmi dlouhou dobu se přece jen vrátí a spolu s iontem vytvoří atom. Rychlost, s níž elektrony opouštějí atomy, je velmi malá. Je-li však objem obrovský, elektron, který unikl, potřebuje tak dlouhou dobu než najde jiný iont, s nímž by rekombinoval, že pravděpodobnost rekombinace je příliš malá. Proto i přes velkou přebytečnou energii potřebnou k ionizaci může být počet elektronů značný.

#### 42.4 CHEMICKÁ KINETIKA

S podobným jevem jako je ionizace se setkáváme při chemických reakcích. Například, když se dvě látky  $A$  a  $B$  slučují a vytvářejí látku  $AB$ , pak při kratší úvaze docházíme k tomu, že  $AB$  je to, co jsme nazývali atomem,  $B$  je to, co jsme nazývali elektronem a  $A$  zase to, co jsme nazývali iontem. Po takové záměně rovnice rovnováhy jsou co do formy stejné jako předtím

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = c e^{-W/kT}. \quad (42.9)$$

Samozřejmě tento vztah není přesný, neboť „konstanta“  $c$  závisí na tom, v jakém objemu se mohou  $A$  a  $B$  slučovat atd. Pomocí termodynamiky však můžeme určit význam veličiny  $W$  vystupující v exponentu a ukazuje se, že tato veličina úzce souvisí s energií potřebnou k reakci.

Pokusme se pochopit tento vztah jako výsledek srážek, tedy přibližně tak, jak jsme chápali vzorec pro vypařování, když jsme si všimli počtu elektronů, které odcházely z prostoru a které se do něj vracely za jednotku času. Předpokládejme, že  $A$  a  $B$  se čas od času při srážkách slučují a vytvářejí  $AB$ . Dále předpokládejme, že sloučenina  $AB$  je složitá molekula, která se také pohybuje a na níž narážejí jiné molekuly a občas získá dost energie na to, aby se opět rozpadla na  $A$  a  $B$ .

V chemických reakcích dochází k situaci, kdy přibližující se atomy mají příliš malou energii, a i když se v reakci další energie uvolní, sblížení atomů  $A$  a  $B$  nemusí ještě reakci nastartovat. Obvykle se vyžaduje, aby srážka byla dost tvrdá. Měkká srážka mezi  $A$  a  $B$  nemusí stačit k uskutečnění reakce, i kdyby se během reakce energie uvolnila. Předpokládejme tedy, že obvyklým rysem chemických reakcí je skutečnost, že pro  $A$  a  $B$  nestačí k vytvoření  $AB$  pouhá srážka, ale musí to být srážka s dostatečnou energií. Tato energie se nazývá *aktivační energie* – energie potřebná k aktivování reakce. Nechť  $A^*$  je aktivační energie, tedy přebytek energie potřebný při srážce k uskutečnění reakce. Pak rychlost  $R_f$ , s níž  $A$  a  $B$  vytvářejí  $AB$ , by měla obsahovat součin počtu atomů  $A$  a  $B$  násobený rychlostí, s níž jednotlivý atom naráží na určitou plošku  $\sigma_{AB}$  a násobený faktorem  $e^{-A^*/kT}$ , představujícím pravděpodobnost toho, že atomy mají dostatečnou energii:

$$R_f = n_A n_B v \sigma_{AB} e^{-A^*/kT}. \quad (42.10)$$

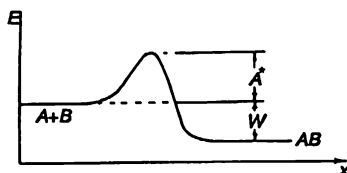
Dále potřebujeme znát rychlost opačného procesu  $R_r$ . Je určitá pravděpodobnost, že  $A$  a  $B$  se rozejdou. Aby se rozešly, nestačí jen energie  $W$  potřebná k jejich samostatné existenci, ale stejně jako v případě slučování musí  $A$  a  $B$  překonat určitou bariéru k tomu, aby se oddělily. Musí mít dost energie nejen k vzájemnému odtržení, ale ještě něco navíc. Připomíná to výstup na kopec, když se chceme dostat do hlubokého údolí. Napřed musely šplhat přes kopec, aby se dostaly do údolí, a pak musí opět přes kopec při zpáteční cestě (obr. 42.1). Proto rychlost přeměny  $AB$  na  $A$  a  $B$  bude úměrná počtu  $n_{AB}$  molekul  $AB$  násobenému faktorem  $\exp[-(W + A^*)/kT]$

$$R_r = \zeta n_{AB} e^{-(W + A^*)/kT}. \quad (42.11)$$

Koeficient  $\zeta$  bude obsahovat objem atomů a pravděpodobnost srážek, kterou bychom získali podobným způsobem jako při vypařování pomocí obsahů ploch, dob a tloušťek – to však dělat nebudeme. To, co nás nyní nejvíc zajímá, je skutečnost, že v případě rovnosti těchto rychlostí bude

## CHEMICKÁ KINETIKA • EINSTEINOVY ZÁKONY ZÁŘENÍ

jejich poměr roven jedné. To znamená, že podobně jako dříve se  $n_A n_B / n_{AB} = c \exp(-W/kT)$ , kde  $c$  obsahuje průřezy, rychlosti a jiné faktory nezávislé na koncentracích  $n$ .



Obr. 42.1 Energetická závislost reakce  $A + B \rightarrow AB$

Je zajímavé, že rychlost reakcí se také mění podle zákona  $\exp(-\text{konst}/kT)$ , když konstanta je nyní jiná než v případě koncentrací. Aktivační energie  $A^*$  je něco zcela jiného než  $W$ . Energie  $W$  určuje poměry  $A$ ,  $B$  a  $AB$  v rovnovážném stavu, ale když chceme vědět, jak rychle se slučuje  $A + B$  na  $AB$ , to už nesouvisí s rovnováhou. V tom případě rychlost reakce určuje prostřednictvím exponenciálního faktoru jiná energie – *aktivační energie*.

Kromě toho  $A^*$  není základní konstantou jako  $W$ . Předpokládejme, že se na povrchu stěny – nebo v nějakém jiném místě – mohou  $A$  a  $B$  nacházet dočasně takovým způsobem, že se snáze slučují. Jinými slovy, bariéra je nižší nebo skrz ní vede tunel. V důsledku platnosti zákona zachování energie nakonec vždy z  $A$  a  $B$  vznikne  $AB$ , takže energetický rozdíl  $W$  bude nezávislý na cestě, jíž se reakce uskutečnila. Ale aktivační energie  $A^*$  na této cestě silně závisí. To je důvod proč jsou rychlosti chemických reakcí velmi citlivé na vnější podmínky. Rychlost reakce můžeme změnit, změníme-li povrchy reagujících látek. Dáme-li látky do jiného prostředí, reakce proběhne jinou rychlostí, ale ta závisí na povaze povrchu. Nebo přidáme-li nakonec třetí látku, můžeme silně změnit rychlost reakce. Některé látky vyvolávají obrovské změny reakčních rychlostí i nepatrnými změnami aktivačních energií  $A^*$  – takové látky nazýváme *katalyzátory*. Například reakce se vůbec nemusí uskutečnit, protože  $A^*$  je příliš velké při dané teplotě, ale přidáním specifické látky – katalyzátoru – se  $A^*$  sníží a reakce velmi rychle proběhne.

Mimochodem, při reakci, kdy  $A$  a  $B$  dávají  $AB$ , jsou určité těžkosti, neboť, když se snažíme dostat dva předměty k sobě tak, aby vznikl jeden, který je stabilnější, nemůžeme zachovat i energii i hybnost. Potřebujeme proto přinejmenším třetí předmět  $C$ , a tak skutečná reakce je mnohem složitější. Rychlost přímé reakce musí obsahovat součin  $n_A n_B n_C$  a mohlo by se proto zdát, že náš vzorec je nesprávný, jenže není to tak! Všimneme-li si rychlosti, s jakou se  $AB$  rozpadá, zjistíme, že i zde je potřebná srážka s  $C$ , a proto je rychlost zpětné reakce úměrná  $n_{AB} n_C$  a  $n_C$  se ve vztahu pro rovnovážné koncentrace vyruší. Rovnovážný zákon (42.9) je zcela správný bez ohledu na to, jaký je mechanismus reakce!

### 42.5 EINSTEINOVY ZÁKONY ZÁŘENÍ

Nyní věnujme pozornost zajímavé situaci, která je obdobou toho, o čem jsme mluvili a která souvisí se zákonem záření černého tělesa. V předcházející kapitole jsme odvodili distribuční zákon záření v dutině takovým způsobem, jak to udělal Planck, který uvažoval záření oscilátoru. Oscilátor měl určitou střední energii, a když kmital, musel vyzařovat. Toto záření se hromadilo v dutině, dokud se neustavila rovnováha mezi emisí a absorpcí. Tak jsme pro intenzitu záření s úhlovou frekvencí  $\omega$  našli vztah

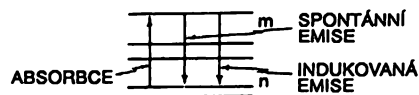
$$I(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)} \quad (42.12)$$

Tento výsledek předpokládá, že oscilátor produkující záření má určité od sebe stejně vzdálené energetické hladiny. Nic jsme neřekli o tom, že světlo jsou fotony nebo něco podobného. Nemluvili jsme ani o tom, jakým způsobem se při přechodu atomu z jedné hladiny na druhou přenáší kvantum energie  $\hbar\omega$  ve formě světla. Původní Planckova myšlenka spočívala v tom, že látka je kvantována, ale světlo ne: oscilátory látky nemohou přijímat libovolnou energii, ale jen určité dávky energie. Další těžkost spočívala v tom, že odvození bylo částečně klasické. Počítali jsme intenzitu záření oscilátoru podle klasické fyziky a pak jsme změnili názor a prohlásili jsme: „Ne, tento oscilátor má mnoho energetických hladin.“ Abychom dospěli ke správnému výsledku, důsledně kvantověmechanickému, byl zapotřebí pomalý postupný vývoj, který kulminoval v roce 1927 završením kvantové mechaniky. Mezitím se však Einstein pokusil pozměnit Planckův názor, že pouze látkové oscilátory jsou kvantovány a přišel s myšlenkou, že světlo jsou skutečně fotony a můžeme je v určitém smyslu chápat jako částice s energií  $\hbar\omega$ . Dále Bohr poukázal na to, že *jakýkoliv* systém atomů má energetické hladiny, které však nejsou od sebe nezbytně stejně vzdáleny jako v případě Planckova oscilátoru. Tak vznikla potřeba nového odvození nebo alespoň prodiskutování zákona záření z úplnějšího kvantověmechanického hlediska.

Einstein předpokládal, že Planckův výsledný vztah je správný a použil ho k získání nového, předtím neznámého poznatku o interakci záření s látkou. Uvažoval takto: Mějme dvě z mnoha energetických hladin atomu, například  $m$ -tou a  $n$ -tou hladinu (*obr. 42.2*), a ať na takový atom dopadá světlo vhodné frekvence. Pak takový atom může světelný foton absorbovat a přejít ze stavu  $n$  do stavu  $m$ . Pravděpodobnost realizace tohoto děje samozřejmě závisí na těchto dvou energetických hladinách, ale je úměrná *intenzitě dopadajícího světla*. Označme konstantu úměrnosti  $B_{nm}$ , aby nám připomínala, že nejde o univerzální konstantu přírody, ale že závisí na příslušném páru hladin; některé hladiny se vybudí obtížně, jiné snadno. Jaký bude výraz pro pravděpodobnost emise při přechodu z  $m$  do  $n$ ? Einstein předpokládal, že se musí skládat ze dvou částí. Není-li světlo, existuje určitá pravděpodobnost, že se atom z vybuděného stavu dostane do nižšího stavu a vyžáří foton; tento úkaz nazýváme *spontánní emise*. Takový předpoklad je obdobou představy, že oscilátor s určitou energií, dokonce i v klasické fyzice, nemůže tuto energii udržet, ale ztrácí ji zářením. Obdobou spontánního záření klasického systému je tedy skutečnost, že atom má ve vybuděném stavu určitou pravděpodobnost  $A_{mn}$  přechodu ze stavu  $m$  do nižšího stavu  $n$  a tato pravděpodobnost opět závisí na energetických hladinách, ale nezávisí na tom, zda na atom dopadá nebo nedopadá světlo. Einstein však šel dále a porovnáním s klasickou fyzikou a pomocí dalších argumentů dospěl k závěru, že emise záření je ovlivňována i přítomností světla – dopadá-li na atom světlo vhodné frekvence, vzrůstá pravděpodobnost vyzáření fotonu úměrně s intenzitou světla s konstantou úměrnosti  $B_{nm}$ . Kdyby se nám později podařilo dokázat, že tento koeficient je nulový, dokázali bychom, že se Einstein mýlil. My se však přesvědčíme o tom, že měl pravdu.

Einstein předpokládal, že existují tři druhy procesů: absorpce úměrná intenzitě světla, emise úměrná intenzitě světla (nazývaná *indukovaná emise* nebo *stimulovaná emise*) a spontánní emise, která nezávisí na světle.

Nyní předpokládejme, že při teplotě  $T$  se ustálila rovnováha a ve stavu  $n$  se nachází určitý počet atomů  $N_n$  a ve stavu  $m$  zase  $N_m$ . Pak je celkový počet atomů, které přecházejí za sekundu z  $n$  do  $m$ , roven součinu počtu atomů ve stavu  $n$  a pravděpodobností přechodu atomu ze stavu  $n$  do stavu  $m$



Obr. 42.2 Přechody mezi dvěma energetickými hladinami atomu

$$R_{n \rightarrow m} = N_n B_{nm} I(\omega) . \quad (42.13)$$

Počet atomů přecházejících z  $m$  do  $n$  vyjádříme stejným způsobem, tj. jako součin počtu atomů  $N_m$ , které jsou ve stavu  $m$  a pravděpodobnosti, že atom přejde za sekundu do stavu  $n$ . Tak dostaneme vyjádření

$$R_{m \rightarrow n} = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)] . \quad (42.14)$$

Nyní předpokládejme, že v tepelné rovnováze je počet atomů postupujících do vyššího stavu stejný jako počet atomů přecházejících do nižšího stavu. Alespoň je to jeden ze způsobů zachování stálého počtu atomů na každé hladině.<sup>52)</sup>

Proto považujeme v rovnováze rychlosti přechodů za stejné. Máme však ještě jednu informaci: víme, jak velké je  $N_m$  ve srovnání s  $N_n$  – poměr těchto dvou veličin je  $\exp[-(E_m - E_n)/kT]$ . Dále Einstein předpokládal, že pro přechody ze stavu  $n$  do stavu  $m$ , je účinné jen to světlo, jehož frekvence odpovídá energetickému rozdílu, tedy ve všech našich vztazích je  $E_m - E_n = \hbar\omega$ . Proto

$$N_m = N_n \exp(-\hbar\omega/kT) . \quad (42.15)$$

Považujeme-li tedy výše uvedené rychlosti přechodů za stejné, pak  $N_n B_{nm} I(\omega) = N_m [A_{mn} + B_{mn} I(\omega)]$ , a když tento vztah dělíme výrazem  $N_m$ , dostaneme

$$B_{nm} I(\omega) \exp(\hbar\omega/kT) = A_{mn} + B_{mn} I(\omega) . \quad (42.16)$$

Z této rovnice můžeme vypočítat  $I(\omega)$ . Snadno zjistíme, že

$$I(\omega) = \frac{A_{mn}}{B_{nm} \exp(\hbar\omega/kT) - B_{mn}} . \quad (42.17)$$

Jenže podle Plancka musí mít tento vztah tvar (42.12). Z toho můžeme na něco usoudit. Především, že  $B_{nm}$  musí být rovno  $B_{mn}$ , protože jinak bychom nezískali  $[\exp(\hbar\omega/kT) - 1]$ . Tak Einstein objevil některé vztahy, jejichž přímé odvození neznal, konkrétně, že *pravděpodobnosti indukované emise a absorpce musí být stejné*. To je zajímavé. Dále, aby (42.17) a (42.12) souhlasily, musí být

$$A_{mn}/B_{mn} = \hbar\omega^3/\pi^2 c^2 . \quad (42.18)$$

<sup>52)</sup>

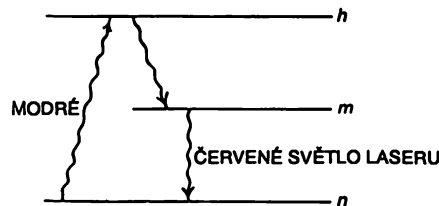
Není to jediný způsob, jak zachovat stálé počty atomů na jednotlivých hladinách, ale je to právě ten způsob, jímž se toto zachování skutečně realizuje. Skutečnost, že v tepelné rovnováze musí být každý proces vyvážen k němu opačným procesem, se nazývá *princip detailní rovnováhy*.



## APLIKACE KINETICKÉ TEORIE

Známe-li například pravděpodobnost absorpce pro danou hladinu, můžeme určit pravděpodobnost spontánní emise a pravděpodobnost indukované emise nebo jakoukoliv jejich kombinaci.

To je vše, na co mohl Einstein nebo kdokoliv jiný přijít použitím takových argumentů. Ke skutečnému výpočtu pravděpodobnosti spontánní emise nebo jiných atomových přechodů je třeba znát vlastnosti atomu, jimiž se zabývá kvantová elektrodynamika. Ta však byla zformulována až o jedenáct let později. Einsteinova práce, o níž byla řeč, pochází z roku 1916.



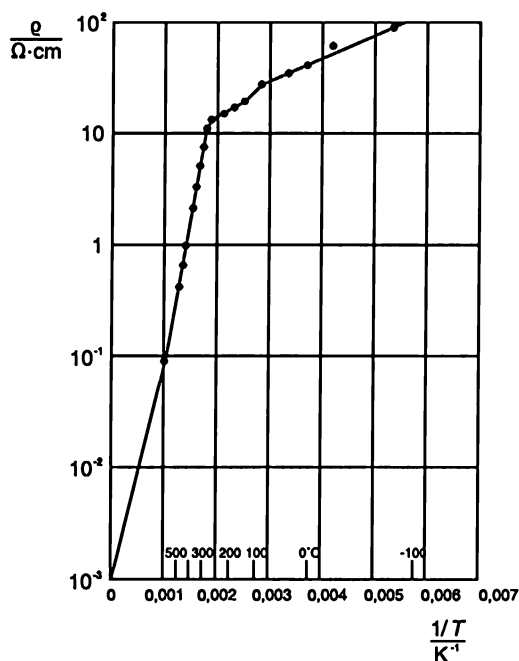
Obr. 42.3 Při vybuzení např. modrým světlem se atom dostává do vyššího stavu  $h$  a emisí fotonu přejde do stavu  $m$ . Bude-li počet atomů ve stavu  $m$  dostatečně velký, může nastartovat činnost laseru.

Možnost indukované emise našla dnes zajímavé uplatnění. Dopadající světlo má snahu vyvolat přechody atomů směrem dolů. Takový přechod zvětší světelnou energii o  $\hbar\omega$ , existují-li atomy, které obsadily vyšší stav. Dodáváním energie nějakým jiným způsobem než zahříváním můžeme připravit takový plyn, v němž je počet atomů ve stavu  $m$  mnohem větší než počet ve stavu  $n$ . Taková situace se velmi liší od rovnovážné a nemůžeme pro ni použít vzorec  $\exp(-\hbar\omega/kT)$  platný pro případ rovnováhy. Dokonce můžeme dosáhnout to, že počet atomů v horním stavu bude velmi velký, zatímco v dolním stavu bude prakticky nulový. Pak světlo s frekvencí odpovídající energetickému rozdílu  $E_m - E_n$  bude jen velmi slabě absorbováno, neboť atomů, jež se nacházejí ve stavu  $n$  a jež jsou schopny toto světlo absorbovat, je velmi málo. Na druhé straně, dopadající světlo bude indukovat emisi z horního stavu! Máme-li mnoho atomů v horním stavu, nastane jakási řetězová reakce. Začnou-li atomy vyzařovat, přinutí vyzařovat i další, takže všechny se náhle ocitnou v dolním stavu. Takový zdroj záření nazýváme *laser* nebo v případě mikrovlnné oblasti *maser*.

K získání atomů ve stavu  $m$  se používají různé triky. Mohou existovat výše položené hladiny, na které se atomy dostanou, ozáříme-li je silným světelným paprskem vysoké frekvence. Z těchto vysoce položených hladin se mohou atomy dostávat na nižší hladiny při současném vyzařování fotonů dokud nezůstanou na hladině  $m$ . Setrvávají-li na této hladině delší dobu bez vyzařování, nazýváme tento stav *metastabilní*. Z takového stavu se pak všechny dostávají dolů najednou indukovanou emisí. Ještě jeden technický detail – vložíme-li takový systém do obyčejné nádoby, budou atomy zářit spontánně všemi směry a to nám komplikuje situaci, zajímáme-li se o indukované záření. Naštěstí můžeme indukovaný jev zesílit zvýšením jeho účinnosti tak, že umístíme téměř dokonalá zrcadla na koncích nádoby. Emitované světlo se odráží od zrcadel, prochází plynem znovu a znovu a indukuje emisi dalších atomů. I když jsou zrcadla téměř stoprocentně odrazivá, mají přece jen nepatrnou propustnost a malá část světla se přece jen dostane ven. Nakonec však, podle zákona zachování energie, všechno indukované záření vyrazí ven v podobě krásného soustředěného paprsku a tak se dnes v laserech generují intenzivní světelné svazky.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 42.1 ■ Aktivační energie, molární skupenské teplo vypařování, rekombinace a disociace se obvykle vyjadřují v joulech na mol nebo v elektronvoltech na atom. Jaký je vztah mezi těmito jednotkami?
- 42.2 ■ a) Sestrojte graf závislosti hustoty rtuťových par na  $1/T$  v semilogaritmické stupnici (potřebné číselné údaje vyhledejte v literatuře). Pomocí tohoto grafu určete skupenské výparné teplo rtuťi a porovnejte s hodnotami v tabulkách.  
b) Proveďte totéž pro případ vody.
- 42.3 ■ Výparné teplo rtuťi se v teplotním intervalu  $0-300^\circ\text{C}$  mění jen o 3 % (v průměru je rovno  $0,61\text{ eV/atom}$ ). Jaké chyby se dopustíte při výpočtu hustoty rtuťových par při  $0^\circ\text{C}$ , použijete-li hodnotu výparného tepla pro  $300^\circ\text{C}$  místo správné hodnoty odpovídající  $0^\circ\text{C}$ . Všimněte si, že malý relativní rozdíl v exponentu může přivést ke značné chybě.
- 42.4 ■ Na připojeném grafu je znázorněna závislost měrného elektrického odporu téměř čistého křemíku na teplotě. Co můžete na základě tohoto grafu usoudit o povaze vodivostního proudu v této látce při teplotách vyšších a nižších než  $300^\circ\text{C}$ ?



# 43

# Difuze

---

## 43.1 SRÁŽKY MOLEKUL

## 43.2 STŘEDNÍ VOLNÁ DRÁHA

## 43.3 DRIFTOVÁ RYCHLOST

## 43.4 IONTOVÁ VODIVOST

## 43.5 MOLEKULOVÁ DIFUZE

## 43.6 TEPELNÁ VODIVOST

### 43.1 SRÁŽKY MOLEKUL

Dosud jsme uvažovali pohyb molekul jen v takovém plynu, který je v tepelné rovnováze. Nyní se pustíme do zkoumání situace, kdy plyn není v rovnováze, ale má k ní velmi blízko. Kdyby se plyn odchýlil hodně od rovnováhy, nastaly by pro nás velké komplikace, ale v blízkosti rovnováhy se nám podaří snadno určit, co se děje. Musíme se vrátit ke kinetické teorii. Statistická mechanika a termodynamika se týkají rovnovážné situace. Chceme-li však zjistit, co se děje mimo rovnováhu, musíme si všimnout takřka každému atomu za atomem.

Jako jednoduchý příklad nerovnovážné situace uvažujme difuzi iontů v plynu. Předpokládejme, že v plynu se nachází poměrně málo iontů – elektricky nabitých molekul. Působí-li na plyn elektrické pole, bude na každý iont působit síla, jež se liší od síly působící na neutrální molekulu plynu. Kdyby nebyly jiné molekuly, iont by měl konstantní zrychlení, dokud by nedosáhl stěny nádoby. Přítomnost ostatních molekul však způsobuje, že se bude chovat jinak; jeho rychlost bude vzrůstat jen do té doby, dokud se nesrazí s nějakou molekulou a neztratí svou hybnost. Pak znovu začne nabírat rychlost, ale opět ztratí svou hybnost. Výsledek je takový, že iont se pohybuje po nepravidelné dráze, ale přitom se posouvá ve směru elektrického pole. Pozorujeme, že iont driftuje střední rychlostí, která je úměrná elektrickému poli – čím je pole silnější, tím se iont pohybuje rychleji. Zatímco pole působí a iont se podél něho pohybuje, samozřejmě *nenastala* tepelná rovnováha, ale systém se snaží dostat do rovnováhy, v níž se ionty rozloží na koncích nádoby. Pomocí kinetické teorie můžeme vypočítat driftovou rychlost.

Ukazuje se, že naše současné matematické schopnosti nestačí. K *přesnému* výpočtu toho, co se stane, ale můžeme získat přibližné výsledky, které nám ukáží všechny podstatné rysy problému. Můžeme určit, jak se bude měnit situace s tlakem, teplotou atd., ale nemůžeme přesně vypočítat číselné koeficienty před takovými výrazy. Proto se při našem odvození nebudeme starat

## SRÁŽKY MOLEKUL

o přesné hodnoty číselných koeficientů. Ty je možné získat jen velmi důmyslným matematickým postupem.

Dříve než budeme uvažovat, co se stane v nerovnovážných situacích, musíme si pozorněji všimnout, co se odehrává v plynu, který je v tepelné rovnováze. Například musíme znát průměrnou dobu mezi po sobě následujícími srážkami molekuly.

Každá molekula projde posloupností srážek s jinými molekulami – to se samozřejmě děje náhodně. Vybraná molekula narazí za dlouhý časový interval  $T$   $N$ -krát. Zdvojnásobíme-li časový interval, zdvojnásobí se počet nárazů. Počet srážek je tedy úměrný času  $T$ . Můžeme ho vyjádřit následujícím způsobem

$$N = \frac{T}{\tau}. \quad (43.1)$$

Koeficient úměrnosti jsme napsali jako  $1/\tau$ , kde  $\tau$  má rozměr času. Konstanta  $\tau$  je *střední doba* mezi dvěma srážkami. Například předpokládáme-li, že za hodinu se uskuteční 60 srážek, potom  $\tau$  je jedna minuta. Řekáme, že  $\tau$  (jedna minuta) je *střední doba* mezi srážkami.

Často máme odpovědět na takovou otázku: „Jaká je *pravděpodobnost*, že molekula podstoupí srážku v průběhu *krátkého časového intervalu*  $dt$ “ Dovtípíme se, že odpověď je  $dt/\tau$ . Pokusme se uvést přesvědčivější argument. Předpokládejme, že máme velmi velký počet molekul  $N$ . Kolik z nich se srazí v průběhu časového intervalu  $dt$ ? Existuje-li rovnováha, pak se v *průměru* s časem nic nemění. Proto se  $N$  molekul srazí za dobu  $dt$  právě tolikrát jako jedna molekula za dobu  $Ndt$ . O tomto počtu však víme, že je roven  $N dt/\tau$ . Počet nárazů  $N$  molekul za dobu  $t$  je  $N dt/\tau$  a pravděpodobnost srážky nějaké molekuly je  $1/N$ -tá část této veličiny, tedy  $(1/N)(Ndt/\tau) = dt/\tau$ , ve shodě s naším původním tvrzením. Můžeme to říci i tak, že ze všech molekul podstoupí srážku za čas  $dt$  část, která je rovna  $dt/\tau$ . Pro ilustraci předpokládejme, že  $\tau$  je rovno jedné minutě; pak se za sekundu srazí jedna šedesátina všech molekul. To znamená, že když se 1/60 molekul dostala do dostatečné blízkosti těch, s nimiž se má srazit, uskuteční se jejich srážky v následující minutě.

Řekáme-li, že  $\tau$  (střední doba mezi srážkami) je jedna minuta, nemyslíme tím, že srážky jsou navzájem odděleny přesně minutovými intervaly. Určitá částice může po srážce čekat i déle než minutu, dokud se nezúčastní další srážky. Intervaly mezi následujícími srážkami se dost mění. I když to nebudeme potřebovat k našim dalším úvahám, trochu odbočíme a položíme si otázku: „Jaké jsou časové intervaly mezi srážkami?“ Už víme, že v uvedeném případě je *střední doba* rovna jedné minutě, ale může nás například zajímat, jaká je pravděpodobnost, že se v průběhu *dvou* minut neuskuteční žádná srážka.

Odpovíme na obecnější otázku: „Jaká je pravděpodobnost toho, že se molekula nesrazí za dobu  $t$  ani jednou?“ V určitém libovolném okamžiku – nazveme ho  $t = 0$  – začneme pozorovat určitou molekulu. Jaká je pravděpodobnost, že vydrží až do okamžiku  $t$ , aniž by se srazila s jinou molekulou? Abychom mohli tuto pravděpodobnost vypočítat, pozorujme, co se stane se všemi  $N_0$  molekulami v nádobě. Po čase  $t$  se některé z nich srazí. Nechť  $N(t)$  je počet těch molekul, které se *nesrazily* až do okamžiku  $t$ .  $N(t)$  musí být samozřejmě menší než  $N_0$  a my ho umíme určit, neboť víme, jak se mění s časem. Víme-li, že za dobu  $t$  zůstalo bez srážek  $N(t)$  molekul, potom  $N(t + dt)$  je počet molekul, jež zůstaly bez srážek až do okamžiku  $t + dt$ . Tento počet je *menší* než  $N(t)$  o ty molekuly, jež se srazily v intervalu  $dt$ .

Počet molekul, které se srazily v intervalu  $dt$ , jsme vyjádřili již dříve pomocí střední doby  $\tau$  ve tvaru:  $dN = N(t) dt/\tau$ . Tak přicházíme k rovnici

$$N(t + dt) = N(t) - N(t) \frac{dt}{\tau}. \quad (43.2)$$

## DIFUZE

Veličinu, která je na levé straně této rovnice,  $N(t + dt)$ , můžeme ve shodě s pravidly diferenciálního počtu vyjádřit jako  $N(t) + (dN/dt) dt$ . Takovou substitucí přechází rovnice (43.2) na tvar

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau}. \quad (43.3)$$

Počet molekul, které se srážejí v intervalu  $dt$ , je úměrný počtu molekul, které se dosud nesrazily a nepřímo úměrný střední době života  $\tau$ . Rovnici (43.3) můžeme snadno integrovat, přepíšeme-li ji do podoby

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\frac{dt}{\tau}. \quad (43.4)$$

Obě strany rovnice jsou úplnými diferenciály, a proto integrálem této rovnice je

$$\ln N(t) = -\frac{t}{\tau} + \text{konstanta}, \quad (43.5)$$

neboli

$$N(t) = \text{konstanta} e^{-t/\tau}. \quad (43.6)$$

Víme, že konstanta se musí rovnat  $N_0$ , celkovému počtu molekul, protože v počátečním okamžiku  $t=0$  všechny čekají na „následující“ srážku. Získaný výsledek můžeme napsat ve tvaru

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}. \quad (43.7)$$

Chceme-li určit pravděpodobnost  $P(t)$  toho, že se molekula nesrazí, musíme  $N(t)$  dělit veličinou  $N_0$ , a tak dostaneme

$$P(t) = e^{-t/\tau}. \quad (43.8)$$

Dospěli jsme tedy k výsledku: Pravděpodobnost toho, že určitá molekula přežije čas  $t$  beze srážky, je rovna  $e^{-t/\tau}$ , kde  $\tau$  je střední doba mezi srážkami. Pravděpodobnost je na počátku, pro  $t=0$ , rovna jedné (jistota) a klesá s růstem  $t$ . Pravděpodobnost, že se molekula nesrazí během doby  $\tau$ , je rovna  $e^{-1}$ , tedy 0,37 ... Pravděpodobnost toho, že mezi dvěma srážkami uplyne delší doba než  $\tau$ , je menší než jedna polovina. To je v pořádku, neboť existuje dost takových molekul, které se nesrazí za *mnohem delší dobu*, než je střední doba *mezi* srážkami, takže průměr může stále být roven  $\tau$ .

Původně jsme definovali  $\tau$  jako střední dobu *mezi* srážkami. Výsledek, který jsme získali v rovnici (43.7) nám říká, že střední doba od *libovolného časového okamžiku* po další srážku je také rovna  $\tau$ . Tuto do určité míry překvapující skutečnost můžeme demonstrovat následujícím způsobem. Počet molekul, které absolvují *následující* srážku v intervalu  $dt$  v čase  $t$  od libovolně zvoleného časového počátku, je roven  $N(t) dt/\tau$ . Jejich „doba do následující srážky“ je právě  $t$ . „Střední dobu do následující srážky“ získáme standardním způsobem

$$\text{střední doba do následující srážky} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \frac{N(t) dt}{\tau}.$$

Dosadíme-li za  $N(t)$  výsledek, který dává vztah (43.7) a vypočítáme integrál, skutečně zjistíme, že  $\tau$  je střední doba od libovolného okamžiku po následující srážku.

## 43.2 STŘEDNÍ VOLNÁ DRÁHA

Jiný způsob popisu srážek je takový, že nemluvíme o době mezi srážkami, ale o tom, jak daleko se částice dostane mezi srážkami. Víme-li, že střední doba mezi srážkami je  $\tau$  a molekuly mají střední rychlost  $v$ , pak střední vzdálenost mezi srážkami, kterou označíme  $l$ , bude součin  $\tau$  a  $v$ . Tuto vzdálenost mezi srážkami obvykle nazýváme *střední volnou dráhou*

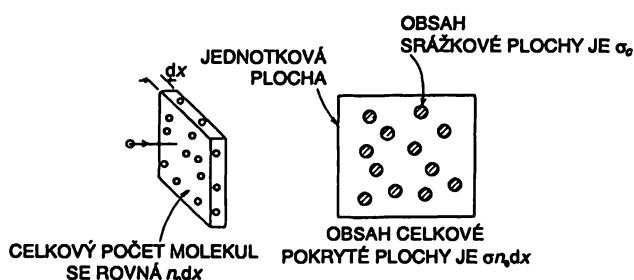
$$\text{střední volná dráha } l = \tau v. \quad (43.9)$$

V této kapitole se nebudeme příliš trápit tím, jaký průměr máme v jednotlivých případech na mysli. Různé druhy průměrů – střední hodnota, střední kvadratická hodnota atd. – jsou ve skutečnosti téměř stejné a liší se pouze koeficienty, které jsou blízké jedné. Protože k získání přesných numerických koeficientů by bylo třeba provést podrobnou analýzu, nemá smysl se znepokojovat tím, jaký máme třeba v jednotlivých případech brát průměr. Chtěli bychom také upozornit čtenáře, že symboly, jež používáme pro některé fyzikální veličiny (např.  $l$  pro střední volnou dráhu), nejsou obecně přijaty prostě proto, že v tomto směru neexistuje obecná dohoda.

Protože je pravděpodobnost toho, že se molekula srazí v krátkém časovém intervalu  $dt$ , rovna  $dt/\tau$ , bude pravděpodobnost toho, že se srazí při průletu vzdálenosti  $dx$ , rovna  $dx/l$ . Pomocí těchto argumentů, které už byly použity dříve, může čtenář sám dokázat, že molekula projde vzdálenost  $x$  bez absolvování další srážky s pravděpodobností  $e^{-x/l}$ .

Střední vzdálenost, kterou molekula projde dřív než se srazí s jinou molekulou – střední volná dráha  $l$  – bude záviset na tom, kolik molekul je v jejím okolí a na „velikosti“ molekul, tj. na tom, jak velký představují cíl. Účinnou „velikost“ terče při srážce obvykle popisujeme pomocí „srážkového průřezu“, tedy stejně jako v jaderné fyzice nebo v úlohách o rozptylu světla.

Uvažujme pohybující se částici, jež prochází vzdálenost  $dx$  plynem obsahujícím  $n_0$  rozptylujících center (molekul) v jednotkovém objemu (obr. 43.1). Na každé jednotkové ploše kolmé ke směru pohybu naší vybrané částice bychom našli  $n_0 dx$  molekul. Představuje-li každá účinnou srážkovou plochu, nebo jak se obvykle říká „účinný srážkový průřez“  $\sigma_c$ , pak je obsah celkové plochy pokryté rozptylujícími centry roven  $\sigma_c n_0 dx$ .



Obr. 43.1 Srážkový průřez

„Srážkovým průřezem“ rozumíme plochu, v níž se musí nacházet střed naší částice, má-li se tato srazit s určitou molekulou. Kdyby molekuly byly malé kuličky (klasická představa), mohli bychom očekávat, že  $\sigma_c = \pi (r_1 + r_2)^2$ , kde  $r_1$  a  $r_2$  jsou poloměry srážejících se objektů. Pravděpodobnost, že se naše částice srazí, je poměr plochy pokryté rozptylujícími molekulami k celkové

## DIFUZE

ploše, již jsme si zvolili jako jednotkovou. Pravděpodobnost srážky při projití vzdálenosti  $dx$  je proto rovna  $\sigma_c n_0 dx$ :

$$\text{pravděpodobnost srážky na vzdálenosti } dx = \sigma_c n_0 dx. \quad (43.10)$$

Uvedli jsme, že pravděpodobnost srážky na vzdálenosti  $dx$  můžeme vyjádřit pomocí střední volné dráhy jako  $dx/L$ . Porovnáme-li tento výraz s výrazem (43.10), dostaneme vztah mezi střední volnou dráhou a účinným srážkovým průřezem

$$\frac{1}{l} = \sigma_c n_0. \quad (43.11)$$

Lépe si ho zapamatujeme, když ho napíšeme ve tvaru

$$\sigma_c n_0 l = 1. \quad (43.12)$$

Tento vztah vlastně říká, že prochází-li částice vzdálenost  $l$ , na níž rozptylující molekuly pokrývají celou plochu, vyskytne se v průměru jedna srážka. Ve válcovém objemu délky  $l$  a základně, kterou je jednotková plocha, se nachází  $n_0 l$  rozptylujících objektů; má-li každý z nich plochu  $\sigma_c$ , je celková pokrytá plocha rovna  $n_0 l \sigma_c$ , což je právě jednotková plocha. Samozřejmě, celá plocha není pokryta, neboť některé molekuly jsou částečně skryté za jinými. Proto se některé molekuly dostanou před srážkou do větší vzdálenosti než  $l$ . Jen v průměru se molekuly srazí během doby, za níž projdou vzdálenost  $l$ . Z měření střední volné dráhy  $l$  můžeme určit účinný průřez rozptylu  $\sigma_c$  a porovnat výsledky s výpočty využívajícími podrobnou teorii atomové struktury. To už je však jiné téma! Proto se vrátíme k problému nerovnovážných vztahů.

### 43.3 DRIFTOVÁ RYCHLOST

Chceme popsat, co se stane s molekulou nebo několika molekulami, které se určitým způsobem liší od převážné většiny molekul plynu. O „většině“ molekul budeme mluvit jako o molekulách „pozadí“ a o molekulách, které se liší od molekul pozadí, jako o „zvláštních“ molekulách nebo v krátkosti o  $Z$ -molekulách. Molekula může být zvláštní z mnoha důvodů. Může být těžší než molekuly pozadí. Může být chemicky odlišná. Může mít elektrický náboj – tj. být iontem na pozadí nenabitých molekul. V důsledku jiných hmotností nebo nábojů mohou na  $Z$ -molekuly působit jiné síly než na molekuly pozadí. Zjistíme-li, co se děje s takovými  $Z$ -molekulami, pochopíme základní jevy, které se podobným způsobem uplatňují v rozmanitých situacích. Vzpomeňme alespoň některé z nich: difuze plynů, elektrický proud v bateriích, sedimentace, separace pomocí odstředivky atd.

Zpočátku se soustředíme na základní proces: na  $Z$ -molekulu na pozadí plynu působí určitá specifická síla  $F$  (může to být např. gravitační nebo elektrická síla) a *navíc* síly v důsledku srážek s molekulami pozadí. Chceme určit *obecný* charakter chování  $Z$ -molekuly. Detailní pohled na  $Z$ -molekulu by ukázal, jak se pod vlivem neustálých srážek s jinými molekulami pohybuje sem a tam. Při pozornějším sledování bychom zjistili, že vykazuje určitý výsledný pohyb ve směru síly  $F$ . Současně s neuspořádaným pohybem je molekula unášena určitým směrem; tento unášivý pohyb nazýváme drift. Zajímá nás jaká je *rychlost driftu* způsobovaného silou  $F$ .

## DRIFTOVÁ RYCHLOST

Začneme-li si v určitém časovém okamžiku všimnout  $Z$ -molekuly, můžeme očekávat, že se nachází někde mezi dvěma srážkami. Kromě rychlosti, jež molekule zůstala po poslední srážce, získává molekula určitou složku rychlosti v důsledku působení síly  $F$ . Za krátkou dobu (v průměru za dobu  $\tau$ ) se molekula srazí a začne se pohybovat na novém úseku své dráhy. Bude mít novou startovací rychlost, ale stejné zrychlení vyvolané silou  $F$ .

Abychom si zjednodušili situaci, zatím předpokládáme, že po každé srážce bude naše  $Z$ -molekula startovat úplně od začátku. Tím myslíme to, že molekula si už nepamatuje své předcházející urychlování silou  $F$ . Takový předpoklad bude opodstatněný tehdy, bude-li naše molekula mnohem lehčí než molekuly pozadí, ale nemůžeme očekávat jeho obecnou platnost. Později tento předpoklad upřesníme.

Zatím tedy předpokládáme, že všechny směry rychlosti  $Z$ -molekuly jsou po srážce stejně pravděpodobné. Startovací rychlost směřuje molekulu do libovolného směru s úplně stejnou pravděpodobností, nepřispívá k uspořádanému pohybu, a proto se nemusíme starat o počáteční rychlost po každé srážce... Kromě náhodného pohybu bude mít každá  $Z$ -molekula v každém okamžiku ještě rychlost ve směru síly  $F$ , jež narůstá od poslední srážky. Jaká je *střední* hodnota této části rychlosti? Je to právě součin zrychlení  $F/m$  (kde  $m$  je hmotnost  $Z$ -molekuly) a střední doby od poslední srážky. Jenže střední doba *od poslední srážky* musí být stejná jako střední doba *před poslední srážkou* a tu jsme už označili  $\tau$ . Střední rychlost pocházející od síly  $F$  je vlastně driftová rychlost, a tak máme vztah

$$v_{\text{dr}} = \frac{F\tau}{m}. \quad (43.13)$$

Tento základní vztah je jádrem našeho předmětu. Při určování  $\tau$  můžeme narazit na komplikace, ale základní proces je definován rovnicí (43.13).

Všimněte si, že driftová rychlost je *úměrná* síle. Bohužel neexistuje obecně používaný název pro koeficient úměrnosti. Pro různé síly má tento koeficient různé názvy. Je-li v případě elektrického pole síla vyjádřena jako součin náboje a intenzity pole  $F = qE$ , pak koeficient úměrnosti mezi rychlostí a elektrickým polem  $E$  nazýváme obvykle „pohyblivostí“. Přes možnost určitých nedorozumění *nazveme pohyblivostí* poměr driftové rychlosti k síle v případě *libovolných* sil. Budeme obecně psát

$$v_{\text{dr}} = \mu F \quad (43.14)$$

a  $\mu$  budeme nazývat pohyblivostí. Z rovnice (43.13) vyplývá, že

$$\mu = \frac{\tau}{m}. \quad (43.15)$$

Pohyblivost je přímo úměrná střední době mezi srážkami (jsou-li srážky méně časté, budou molekuly méně brzděny) a nepřímo úměrná hmotnosti (větší setrvačnost znamená menší zrychlení získané mezi srážkami).

Abychom v rovnici (43.13), která je nepochybně správná, našli správný číselný koeficient, musíme být dost opatrní. Nemáme v úmyslu vnášet do problému pochybnosti, ale chceme upozornit, že jen svědomitým a podrobným studiem můžeme pochopit, že používané argumenty mají hluboký podtón. K ilustraci toho, s jakými těžkostmi se můžeme setkat i přes zdánlivou



samozřejmost, použijeme zdánlivě rozumným, ale v podstatě chybným způsobem argument, který vedl k rovnici (43.13) (a s tím se bohužel setkáte v mnoha učebnicích!).

Mohli bychom uvažovat takto: Střední doba mezi srážkami je  $\tau$ . Po srážce částice startuje s náhodnou rychlostí, ale získává dodatečnou rychlost mezi srážkami a ta je rovna součinu zrychlení a času. Když se dostane k *další* srážce za dobu  $\tau$ , dosáhne rychlost  $(F/m)\tau$ . V okamžiku srážky má nulovou rychlost. Proto mezi dvěma srážkami má v průměru rychlost rovnající se polovině výsledné rychlosti a střední driftová rychlost unášená je  $1/2 F\tau/m$ . (Nesprávně!) Tento výsledek je nesprávný, ale rovnice (43.13) je správná, i když argumenty vypadají rovnocenné. Nesprávnost našeho druhého postupu má hlubší příčinu, která souvisí s následujícím. Argumentujeme tak, jakoby všechny srážky byly navzájem časově vzdálené o hodnotu  $\tau$ . Jenže některé doby mezi srážkami jsou kratší než střední doby a některé zase delší. Krátké doby se vyskytují *častěji*, ale *méně* přispívají k driftové rychlosti, neboť v takových případech je menší pravděpodobnost skutečného postupu vpřed. Kdybychom vzali v úvahu rozdělení dob mezi srážkami, mohli bychom ukázat, že faktor  $1/2$  vystupující v naší druhé argumentaci se neobjeví. Chyby jsme se dopustili tím, že jsme se příliš zjednodušeně pokusili dát do souvislosti *střední konečnou rychlost* se samotnou střední rychlostí. Tato souvislost vůbec není jednoduchá, a proto je lépe soustředit pozornost na to, co je v našem případě potřebné, a tím je právě střední rychlost. Náš první argument určuje střední rychlost přímo – a správně! Po tom, co jsme řekli, bude snad jasné, proč jsme se při našem jednoduchém odvozování nepokusili o přesné určení všech číselných koeficientů!

Vraťme se nyní k našemu zjednodušujícímu předpokladu, že každá srážka vymaže informaci o předcházejícím pohybu – že po každé srážce nastupuje částice k novému startu. Předpokládejme, že naše *Z*-molekula je těžký objekt na pozadí lehčích molekul. Potom *Z*-molekula neztratí při každé srážce celkovou hybnost svého uspořádaného pohybu. K tomu, aby se její pohyb stal opět náhodným, bude potřeba několika srážek. Místo toho budeme předpokládat, že při každé srážce – v průměru za dobu  $\tau$  – ztrácí určitou část své hybnosti. Nebudeme se zabývat podrobnostmi takového postupu. Uvedeme jen, že výsledek je rovnocenný záměně střední srážkové doby  $\tau$  novou – a delší – dobou  $\tau$ , jež odpovídá střední „době zapomínání“, tj. střední době potřebné k zapomenutí směru hybnosti. Při takové interpretaci  $\tau$  můžeme použít vztah (43.15) i v situacích, které nejsou tak jednoduché, jak jsme původně předpokládali.

#### 43.4 IONTOVÁ VODIVOST

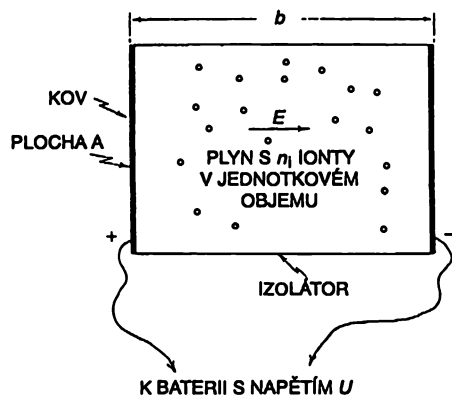
Aplikujme naše výsledky na speciální případ. Předpokládejme, že v nádobě s plynem se nacházejí i některé ionty – atomy nebo molekuly s nadbytečným elektrickým nábojem. Situace je schematicky znázorněna na *obr. 43.2*. Jsou-li dvě protilehlé stěny nádoby kovové desky, můžeme je připojit k pólům baterie a vytvořit tak v plynu elektrické pole. Elektrické pole se projeví silou působící na ionty, které tak budou driftovat k jedné nebo k druhé desce. Vytvoří se elektrický proud a plyn se svými ionty se bude chovat jako rezistor. Pomocí driftové rychlosti můžeme vypočítat iontový proud a odpor. Zajímá nás hlavně závislost elektrického proudu na rozdílu potenciálů  $U$  na kovových deskách.

Nechť má naše nádoba tvar kvádrů, který má délku  $b$  a obsah průřezu  $A$  (*obr. 43.2*). Je-li rozdíl potenciálů, tedy napětí mezi deskami,  $U$ , pak je elektrické pole  $E$  mezi deskami rovno  $U/b$ . (Elektrický potenciál je práce potřebná k přenesení jednotkového náboje z jedné desky na druhou. Síla působící na jednotkový náboj je  $E$ . Je-li  $E$  stejné všude mezi deskami, což můžeme

## IONTOVÁ VODIVOST

v našem případě předpokládat, pak je práce připadající na jednotkový náboj rovna  $Eb$ , takže  $U = Eb$ .) Síla působící na iont plynu je rovna  $qE$ , kde  $q$  je náboj iontu. Driftová rychlost iontu je součin  $\mu$  a této síly, tedy

$$v_{\text{dr}} = \mu F = \mu q E = \mu q \frac{U}{b}. \quad (43.16)$$



Obr. 43.2 Elektrický proud v ionizovaném plynu

Elektrický proud  $I$  je tok náboje za jednotku času. Elektrický proud k jedné z desek je roven celkovému náboji iontů, jež dopadly na desku za jednotku času. Jsou-li ionty unášeny k desce rychlostí  $v_{\text{dr}}$ , pak ty, které nejsou od desky dále než  $(v_{\text{dr}} \cdot T)$ , dosáhnou desky v čase  $T$ . Je-li v jednotkovém objemu  $n_i$  iontů, pak počet těch, které dopadnou na desku za dobu  $T$ , je roven  $n_i \cdot A \cdot v_{\text{dr}} \cdot T$ . Každý iont nese náboj  $q$ , a proto

$$\text{náboj dopadající za dobu } T = q n_i A v_{\text{dr}} T. \quad (43.17)$$

Proud  $I$  představuje takový náboj dělený časem  $T$ , tedy

$$I = q n_i A v_{\text{dr}}. \quad (43.18)$$

Dosadíme-li za  $v_{\text{dr}}$  výraz (43.16), dostaneme

$$I = \mu q^2 n_i \frac{A}{b} U. \quad (43.19)$$

Zjistili jsme, že proud je přímo úměrný napětí, což vlastně představuje Ohmův zákon. Odpor  $R$  je reciprokou hodnotou konstanty úměrnosti

$$\frac{1}{R} = \mu q^2 n_i \frac{A}{b}. \quad (43.20)$$

Našli jsme vztah mezi odporem a molekulárními vlastnostmi  $n_i$ ,  $q$ ,  $\mu$ , které opět závisí na  $m$  a  $\tau$ . Najdeme-li  $n_i$  a  $q$  z atomových měření, potom změřením odporu  $R$  nám umožňuje určit  $\mu$  a pomocí  $\mu$  také  $\tau$ .

### 43.5 MOLEKULOVÁ DIFUZE

Nyní přejdeme k jinému problému, který vyžaduje jiný způsob analýzy. Takovým problémem je teorie difuze. Předpokládejme, že máme nádobu s plynem, jenž se nachází v tepelné rovnováze, a do takového plynu zavedeme v některém místě nádoby malé množství jiného plynu. Původní plyn budeme nazývat plynem „pozadí“ a nový plyn „zvláštním“ plynem. Zvláštní plyn se začne šířit do celé nádoby, ale toto šíření bude pomalé, neboť v nádobě je už přítomný plyn pozadí. Tento proces pomalého šíření se nazývá difuze. Difuze je ovlivňována hlavně srážkami molekul zvláštního plynu s molekulami plynu pozadí. Po velkém počtu srážek se zvláštní molekuly víceméně rovnoměrně rozšíří po celé nádobě. Musíme však být opatrní, abychom nezaměňovali difuzi plynu s přenosem větších hmot v důsledku konvexních proudů. Obecně probíhá mísení dvou plynů jako kombinace konvece a difuze. My se nyní zajímáme jen o takový případ, kdy nedochází k proudění. Plyn se šíří jen v důsledku molekulového pohybu, difuzí. Chceme určit, jak rychle difuze probíhá.

Vypočítejme čistý výsledný tok molekul zvláštního plynu způsobovaný molekulovým pohybem. Čistý výsledný tok bude existovat jen tehdy, je-li rozdělení molekul nehomogenní, neboť v opačném případě dá molekulový pohyb v průměru nulový čistý výsledný tok. Uvažujme nejdříve tok ve směru osy  $x$ . Abychom ho určili, představme si rovinu kolmou k ose  $x$  a počítejme zvláštní molekuly, které projdou napříč touto rovinou. Abychom získali čistý výsledný tok, budeme považovat za kladné ty molekuly, které přicházejí do oblasti kladných hodnot  $x$  a od nich odečítáme ty, které přicházejí do oblasti záporných hodnot  $x$ . Jak jsme už mnohokrát viděli, počet molekul, které procházejí plochou za dobu  $\Delta T$ , je roven počtu molekul, které se na začátku intervalu  $\Delta T$  nacházely v objemu ohraničeném uvažovanou plochou a plochou, která je od ní vzdálena o  $v\Delta T$ . (Musíme si uvědomit, že  $v$  je zde skutečně molekulová rychlost a ne rychlost driftová.)

Výpočty si zjednodušíme, zvolíme-li si naši plochu jednotkovou. Počet zvláštních molekul, které přicházejí zleva doprava (za kladný směr osy  $x$  považujeme směr doprava), je pak roven  $n_- v\Delta T$ , kde  $n_-$  je počet zvláštních molekul v jednotkovém objemu na levé straně (až na nějaký koeficient, jako třeba 2, ale takové koeficienty ignorujeme!). Počet těch molekul, které přecházejí zprava doleva je zase  $n_+ v\Delta T$ , kde  $n_+$  je koncentrace zvláštních molekul na pravé straně roviny. Označíme-li molekulový proud symbolem  $J$  a budeme jím rozumět čistý výsledný tok molekul jednotkovou plochou za jednotku času, můžeme psát

$$J = \frac{n_- v\Delta T - n_+ v\Delta T}{\Delta T}, \quad (43.21)$$

nebo

$$J = (n_- - n_+)v. \quad (43.22)$$

Co je třeba rozumět pod  $n_-$  a  $n_+$ ? Když říkáme „koncentrace na levé straně“, jak daleko nalevo máme na mysli? Musíme vybrat koncentraci v tom místě, odkud molekula zahájila svůj „let“, neboť počet molekul, které nastoupily tuto cestu je dán počtem molekul, které byly ve výchozím místě. Pod  $n_-$  tedy musíme rozumět koncentraci v takové vzdálenosti vlevo od námi uvažované roviny, která je rovna střední volné dráze  $l$  a pod  $n_+$  koncentraci ve vzdálenosti  $l$  vpravo.

Rozdělení našich zvláštních molekul v prostoru je vhodné popisovat spojitou funkcí  $x$ ,  $y$ , a  $z$ , kterou označíme  $n_a$ . Pod  $n_a(x, y, z)$  rozumíme koncentraci zvláštních molekul v malém

## MOLEKULOVÁ DIFUZE

objemovém elementu v okolí bodu  $(x, y, z)$ . Pomocí  $n_a$  můžeme vyjádřit rozdíl  $(n_+ - n_-)$  takto

$$(n_+ - n_-) = \frac{dn_a}{dx} \Delta x = \frac{dn_a}{dx} \cdot 2l. \quad (43.23)$$

Dosadíme-li tento výsledek do rovnice (43.22) a zanedbáme koeficient 2, dostaneme

$$J_x = -lv \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.24)$$

Zjistili jsme, že tok zvláštních molekul je přímo úměrný derivaci koncentrace, kterou někdy nazýváme „gradientem“ koncentrace.

Je jasné, že jsme použili několik hrubých přiblížení. Kromě některých číselných koeficientů, jež jsme vynechali, jsme používali  $v$  tam, kde mělo být  $v_x$ , a předpokládali jsme, že  $n_+$  a  $n_-$  se vztahují k místům, jež jsou v kolmé vzdálenosti  $l$  od zvolené plochy, zatímco v případě molekul, které neletí kolmo k ploše, odpovídá  $l$  šikmé vzdálenosti. Tyto nepřesnosti však můžeme odstranit; jako výsledek pečlivější analýzy bychom dostali korekci pravé strany rovnice (43.24), která spočívá v jejím násobení koeficientem  $1/3$ . Přesnější rovnice má tvar

$$J_x = -\frac{lv}{3} \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.25)$$

Podobné rovnice můžeme napsat pro proudy ve směru os  $y$  a  $z$ .

Proud  $J_x$  a gradient koncentrace  $dn_a/dx$  můžeme měřit makroskopickými pozorováními. Jejich poměr určený experimentem se nazývá „difuzní koeficient“  $D$ . Platí tedy vztah

$$J_x = -D \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.26)$$

Podařilo se nám ukázat, že v případě plynu můžeme očekávat

$$D_x = \frac{1}{3} lv. \quad (43.27)$$

V této kapitole jsme zatím uvažovali dva rozdílné procesy: *pohyblivost*, drift molekul v důsledku „vnějších“ sil, a *difuzi*, šíření molekul určené jen vnitřními silami, náhodnými srážkami. Mezi nimi však existuje souvislost, neboť oba tyto procesy podstatně závisí na tepelném pohybu a v obou výpočtech vystupuje střední volná dráha  $l$ .

Dosadíme-li v rovnici (43.25)  $l = v \tau$ ,  $\tau = \mu m$ , dostaneme

$$J_x = -\frac{1}{3} m v^2 \mu \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.28)$$

Jenže veličina  $m v^2$  závisí pouze na teplotě. Připomeňme si, že

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} kT, \quad (43.29)$$

## DIFUZE

takže

$$J_x = -\mu kT \frac{dn_a}{dx}. \quad (43.30)$$

Zjistili jsme, že koeficient difuze je roven  $kT$ -násobku koeficientu *pohyblivosti*  $\mu$

$$D = \mu kT. \quad (43.31)$$

Ukazuje se, že číselný koeficient v (43.31) je správný a není třeba žádná korekce našich hrubých předpokladů. Lze ukázat, že vztah (43.31) je *obecně* správný – tedy i ve velmi složitých situacích (například jde-li o suspenzi v kapalině), v případech, kdy naše jednoduché výpočty nemůžeme vůbec použít.

Abychom ukázali, že vztah (43.31) má obecnou platnost, odvodíme ho nyní jinak – tak, že použijeme jen základní principy statistické mechaniky. Představme si situaci, kdy existuje gradient „zvláštních“ molekul a vzniká difuzní proud úměrný gradientu hustoty ve shodě se vztahem (43.26). Aplikujme silové pole ve směru osy  $x$  tak, že na každou zvláštní molekulu působí síla  $F$ . Podle *definice* pohyblivosti  $\mu$  bude driftová rychlost vyjádřena vztahem

$$v_{dr} = \mu F. \quad (43.32)$$

Použijeme-li obvyklé argumenty, dostaneme pro *proud unášení* (čistý výsledný počet molekul, které projdou jednotkovou plochu za jednotku času) vyjádření

$$J_{dr} = n_a v_{dr}, \quad (43.33)$$

nebo

$$J_{dr} = n_a \mu F. \quad (43.34)$$

*Nastavme* nyní sílu  $F$  tak, aby jí podmíněný driftový proud právě *vyvážil* difuzi, takže nebude existovat *čistý výsledný tok* zvláštních molekul. Pak máme  $J_x + J_{dr} = 0$ , a tedy

$$D \frac{dn_a}{dx} = n_a \mu F. \quad (43.35)$$

Za podmínky vyváženosti existuje stálý (v čase) gradient koncentrace vyjádřený vztahem

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a \mu F}{D}. \quad (43.36)$$

Uvažujme dále! Popisujeme *rovnovážnou* situaci, takže na ni můžeme aplikovat *rovnovážné* zákony statistické mechaniky. Podle těchto zákonů je pravděpodobnost nalezení molekuly v bodě se souřadnicí  $x$  úměrná  $\exp(-U/kT)$ , kde  $U$  je potenciální energie. Zajímáme-li se o koncentraci  $n_a$ , znamená to, že

$$n_a = n_0 \exp(-U/kT). \quad (43.37)$$

## TEPELNÁ VODIVOST

Derivujeme-li (43.37) podle  $x$ , dostaneme

$$\frac{dn_a}{dx} = -n_0 \exp(-U/kT) \frac{1}{kT} \frac{dU}{dx}, \quad (43.38)$$

neboli

$$\frac{dn_a}{dx} = -\frac{n_a}{kT} \frac{dU}{dx}. \quad (43.39)$$

V našem případě, kdy síla  $F$  působí ve směru osy  $x$ , bude potenciální energie  $U$  rovna  $-Fx$  a  $-dU/dx = F$ . Rovnice (43.39) proto nabývá tvaru

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a F}{kT}. \quad (43.40)$$

(To je právě rovnice (40.2), z níž jsme původně odvodili  $\exp(-U/kT)$ , a tak se vlastně uzavřel kruh.)

Porovnáme-li (43.40) s (43.36), dostaneme právě rovnici (43.31). Ukázali jsme, že rovnice (43.31), která dává do souvislosti difuzní proud a pohyblivost, má správný koeficient a je velmi obecná. Pohyblivost a difuze navzájem úzce souvisí. Tento vztah poprvé odvodil Einstein.

### 43.6 TEPELNÁ VODIVOST

Metody kinetické teorie, jež jsme používali, nám umožní vypočítat i *tepelnou vodivost* plynu. Je-li plyn v nádobě nahoře teplejší než dole, objeví se tepelný tok shora dolů. (Předpokládáme, že plyn je teplejší *nahoře*, neboť jinak by tekly konvexní proudy a nešlo by už o *tepelnou vodivost*.) Přenos tepla z teplejšího do chladnějšího plynu je difuzí „horkých“ molekul – těch, které mají větší energii – směrem dolů a difuzí „chladných“ molekul nahoru. K tomu, abychom určili tok tepelné energie, musíme znát energii přenášenou molekulami procházejícími elementem plochy směrem dolů a energii molekul pohybujícími se směrem nahoru. Rozdíl nám dá čistý výsledný tok energie směrem dolů.

Tepelná vodivost  $\kappa$  je definována jako poměr rychlosti přenosu tepelné energie jednotkovou plochou a gradientu teploty

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = -\kappa \frac{dT}{dz}. \quad (43.41)$$

Výpočet je velmi podobný tomu, který jsme prováděli, když jsme uvažovali elektrický proud v ionizovaném plynu, proto ponecháme čtenáři jako cvičení ukázat, že platí

$$\kappa = \frac{knlv}{\gamma - 1}, \quad (43.42)$$

kde  $(\gamma - 1)kT$  je střední energie molekuly při teplotě  $T$ . Využijeme-li náš vztah  $nl\sigma_c = 1$ , budeme moci tepelnou vodivost vyjádřit ve tvaru

$$\kappa = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{kv}{\sigma_c}. \quad (43.43)$$

## DIFUZE

Dostali jsme dost překvapující výsledek. Víme, že střední rychlost molekul plynu závisí na teplotě, ale *nezávisí na hustotě*. Můžeme čekat, že  $\sigma_c$  závisí jen na velikosti molekul. Náš jednoduchý výsledek tedy říká, že tepelná vodivost  $\kappa$  (a proto i rychlost toku tepla za libovolných podmínek) *nezávisí na hustotě* plynu. Změna počtu „nosičů“ energie při změně hustoty je právě kompenzována větší vzdáleností, kterou „nosiče“ projdou mezi srážkami.

Můžete se ptát: „Bude tepelný tok nezávislý na hustotě plynu i v limitě, kdy se hustota bude blížit k nule? Když v nádobě nebude žádný plyn?“ Určitě ne! Vztah (43.3), právě tak jako ostatní vztahy této kapitoly, byl odvozen za předpokladu, že střední volná dráha mezi srážkami je mnohem menší než kterýkoliv z rozměrů nádoby. Je-li hustota plynu tak malá, že molekula má značnou pravděpodobnost proletět nádobu z jedné strany k druhé bez srážky, výsledky této kapitoly nemůžeme použít. V takových případech se musíme vrátit ke kinetické teorii a opět všechno podrobně vypočítat.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 43.1 ■ „Průměr“ molekuly kyslíku je přibližně roven  $d = 0,3$  nm. Vypočítejte střední volnou dráhu a střední dobu života mezi dvěma srážkami molekul kyslíku za normálního tlaku a teploty.
- 43.2 ■ Nádoba obsahuje  $10^{24}$  molekul plynu, přičemž střední volná dráha jedné molekuly je rovna  $l$ . Pro jakou délku dráhy  $L$  je pravděpodobnost toho, že alespoň některá z molekul proběhne v nádobě beze srážky dráhu delší než  $L$ , menší než 50 %?
- 43.3 ■ Je-li v látce přítomen teplotní gradient, dochází k přenosu tepla. Přitom energie přenesená za jednotku času je tomuto gradientu úměrná (neuvažujeme-li konvekci). Koeficient úměrnosti vztahovaný k jednotce plochy a jednotkovému teplotnímu gradientu se nazývá *součinitel tepelné vodivosti*  $\chi$ . Je tedy  $\frac{dQ}{dt} = \chi A \frac{dT}{dx}$ .
- Ukažte, že bez konvekce je součinitel tepelné vodivosti plynu roven  $\chi = knv \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{kv}{\sigma_c}$ , kde  $k$  je Boltzmannova konstanta,  $n$  koncentrace molekul,  $v$  střední tepelná rychlost,  $l$  střední volná dráha,  $\gamma$  exponent v rovnici adiabaty a  $\sigma_c = 1/nl$ . Návod: interpretujte tepelnou vodivost jako přenos vnitřní (tepelné) energie  $U$  plochou uvnitř látky tak, jak jsme to dělali při zkoumání procesu difuze.
- 43.4 ■ Existuje-li v tekutině gradient rychlosti, při čemž se rychlost mění se vzdáleností ve směru kolmém ke směru proudění, dochází k brzdění pohybu, které nazýváme *vazkostí (viskozitou, vnitřním třením)*. V plynu lze vazkost vysvětlit jako přenos hybnosti. Myslíme-li si v prostoru nějakou plošku, potom přenos hybnosti touto ploškou zprostředkují molekuly, které se nacházejí na obou stranách od ní ve vzdálenosti menší než střední volná dráha. Proudí-li plyn ve směru osy  $x$  a existuje-li gradient rychlosti  $v_x$  ve směru osy  $y$ , potom vazká síla vztahovaná k jednotce obsahu plochy kolmé k ose  $y$ , je rovna  $F/A = \eta dv_x/dy$ . Ukažte, že koeficient vazkosti plynu  $\eta$  je přibližně roven  $\eta = nvm l = \frac{vm}{\sigma_c}$ , kde  $n$  je koncentrace molekul,  $v$  střední tepelná rychlost,  $m$  hmotnost molekuly,  $l$  střední volná dráha a  $\sigma_c = 1/nl$ .
- 43.5 ■ Podotkněme, že tepelná vodivost a vazkost plynu nezávisí na tlaku. (Ovšem při velmi malých tlacích procesy přenosu energie a hybnosti v plynu už nemůžeme popisovat pomocí výše odvozených koeficientů tepelné vodivosti a vazkosti.) Upravte nyní vzorec pro energii přenášenou mezi dvěma plochami při teplotách  $T$  a  $T + \Delta T$  nacházejících se v pevné vzájemné vzdálenosti  $D \ll l$ . Totéž proveďte pro případ přenosu hybnosti mezi dvěma takovými plochami, které se pohybují rychlostmi  $v$  a  $v + \Delta v$ .
- 43.6 ■ Dva plyny  $A$  a  $B$  o koncentracích částic  $n_A$  a  $n_B$  mají určitou teplotu  $T_0$ . Jednotlivý iont, jehož pohyb sledujeme, má pohyblivost  $\mu_A$  v plynu  $A$  a pohyblivost  $\mu_B$  v plynu  $B$ . Jaká je pohyblivost iontu ve směsi těchto plynů o koncentraci  $n_A + n_B$  při téže teplotě  $T_0$ ?



# 44 Zákony termodynamiky

---

## 44.1 TEPELNÉ STROJE; PRVNÍ ZÁKON

## 44.2 DRUHÝ ZÁKON

## 44.3 VRATNÉ STROJE

## 44.4 ÚČINNOST IDEÁLNÍHO STROJE

## 44.5 TERMODYNAMICKÁ TEPLOTA

## 44.6 ENTROPIE

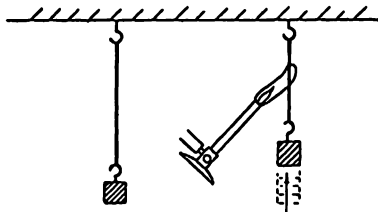
### 44.1 TEPELNÉ STROJE; PRVNÍ ZÁKON

Dosud jsme mluvili o vlastnostech hmoty z atomového hlediska a snažili jsme se aspoň zhruba pochopit, co se bude dít, předpokládáme-li, že hmota se skládá z atomů podléhajících určitým zákonům. Existuje však mnoho vztahů mezi vlastnostmi látek, k nimž můžeme dospět bez podrobné znalosti jejich struktury. Určování vztahů mezi různými vlastnostmi látek, bez poznání jejich vnitřní struktury je předmětem *termodynamiky*. Termodynamika vznikla dříve, než byla známa vnitřní struktura hmoty.

Uvedeme příklad: Z kinetické teorie víme, že tlak plynu je způsobován nárazy molekul a víme i to, že když plyn zahřejeme, nárazy molekul zesílí, a proto musí tlak vzrůst. Naopak, pohybuje-li se píst v nádobě s plynem proti síle těchto nárazů, energie molekul narážejících na píst vzroste, a proto vzroste i teplota. Zvýšíme-li tedy při daném objemu teplotu, zvýšíme tlak. Na druhé straně, stlačíme-li plyn, zjistíme, že jeho teplota vzrostla. Z kinetické teorie můžeme odvodit kvantitativní vztah mezi těmito dvěma jevy, ale instinktivně tušíme, že mezi nimi musí existovat nějaká souvislost, která nezávisí na konkrétním průběhu srážek.

Všimněme si jiného příkladu. Mnozí znáte zajímavou vlastnost gumy: Když roztáhneme pásek gumy, zahřeje se. Vložte-li si takový pásek mezi rty a natáhnete ho, pocítíte, že se zahřál a toto zahřátí je vratné v tom smyslu, že při rychlém uvolnění pásku pocítíte na rtech ochlazení. To znamená, že při napínání pásek gumy hřeje a při uvolňování pásek chladí. Náš instinkt nám napoví, že zahřátá guma může tahat: skutečnost, že při napnutí se pásek zahřál, nás přivede k závěru, že zahřátí pásku vyvolá jeho smrštění. A skutečně, ohřejeme-li plynovým kahanem

pásek gumy držící závaží, upozorujeme, že se pásek náhle stáhl (*obr. 44.1*). Je tedy pravda, že při zahřívání se guma smršťuje a tato skutečnost je ve shodě s tím, že při uvolňování jejího napětí guma chladne.



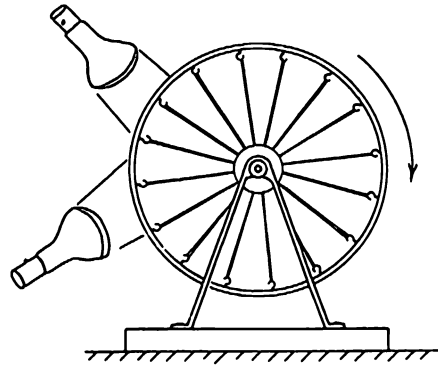
Obr. 44.1 Zahřátý pásek gumy

Vnitřní mechanismus gumy způsobující tyto jevy je velmi složitý. Popíšeme ho do určité míry z molekulového hlediska, i když hlavním cílem této kapitoly je pochopit vztahy mezi takovými jevy nezávisle na molekulovém modelu. Na základě molekulového modelu můžeme ukázat, že tyto jevy úzce souvisí. Jeden ze způsobů, jak můžeme pochopit chování gumy, spočívá v představení, že guma se skládá z ohromného svazku dlouhých molekulových řetězců, jakýchsi „molekulových špaget“ s jednou dodatečnou komplikací: řetězce jsou vzájemně propojeny – jakoby se některé křížem procházející špagety svařily a vytvořily tak velké klubko. Natahujeme-li takové klubko, některé z řetězců se snaží seřadit do směru tahu. Řetězce jsou zároveň v tepelném pohybu a neustále do sebe narážejí. Řetězec nezůstane sám od sebe natažen, neboť ze stran do něho narážejí jiné řetězce a jiné molekuly a přinutí ho opět se stáhnout. Skutečná příčina toho, že gumový pásek se snaží smrštít, spočívá v následujícím: když ho natáhneme, řetězce se prodlouží, ale tepelné působení molekul ze stran se snaží řetězce zkroutit, a tak je zkrátit. K příznivé situaci dochází tehdy, když jsou řetězce napnuty a zvýšíme teplotu; tehdy zesílí i bombardování řetězců ze stran, řetězce mají snahu se stáhnout a jsou proto při zahřátí schopny zdvihnout těžší závaží. Dovolíme-li pásku gumy po určitém čase napnutí se uvolnit, stane se každý řetězec měkčím a molekuly narážející do uvolněných řetězců ztrácejí energii. Proto teplota klesá.

Viděli jsme, jak kinetická teorie uvádí do souvislosti tyto dva procesy, smrštění při zahřívání a ochlazení během uvolňování, ale bylo by úžasně složité určit přesný vztah mezi nimi z teorie. Museli bychom znát počet srážek za sekundu a tvar řetězců a vzít v úvahu všechny možné komplikace. Podrobnosti mechanismu jsou tak složité, že pomocí kinetické teorie opravdu nemůžeme přesně určit, co se odehrává; můžeme však odvodit určité vztahy mezi těmito pozorovanými jevy aniž bychom něco věděli o vnitřním mechanismu.

Celá termodynamika spočívá na úvahách následujícího druhu: protože pásek gumy je při vysokých teplotách „silnější“ než při nízkých, mělo by být možné zdvihnout závaží a přemísťovat je a konat tak práci pomocí tepla. Už jsme se vlastně experimentálně přesvědčili, že zahřátý pásek gumy může zdvihnout závaží. Rozvoj termodynamiky začal studiem toho, jak můžeme pomocí tepla konat práci. Můžeme sestavit zařízení, jež by ke konání práce využívalo vliv tepla na gumový pásek? Ano, takové zařízení můžeme sestavit, i když bude vypadat hloupě. Skládá se z kola bicyklu, které má místo drátů gumové pásky (*obr. 44.2*). Zahříváme-li gumové pásky na jedné straně kola dvojicí výhřevných lamp, stanou se „silnější“ než gumové pásky na druhé straně kola. Těžiště kola se posune na stranu, mimo ložisko, a kolo se pootočí. Tak se chladné gumové pásky dostanou k teplu, teplé se vzdálí a ochladí a kolo se bude pomalu otáčet, dokud budou lampy hřát.

## ZÁKONY TERMODYNAMIKY



Obr. 44.2 Tepelný stroj s pásky gumy

Účinnost takového stroje je mimořádně nízká. Výkon 400 wattů potřebný k ohřívání lamp stačí právě tak na zdvihnutí mouchy! Nabízí se proto zajímavá otázka, zda teplo může konat práci s podstatně vyšší účinností.

Zrod termodynamiky se vlastně váže na analýzu slavného inženýra Sadi Carnota, kterého zaujal problém konstrukce nejlepšího a neúčinnějšího stroje. Byl to jeden z mála pozoruhodných případů, kdy technika přispěla podstatným způsobem k fyzikální teorii. Jiným případem, který mě napadá, je analýza informační teorie podaná Claudem Shannonem. Mimochodem, tyto problémy úzce souvisí.

Parní stroj pracuje obvykle tak, že teplo ohně uvádí do varu vodu, a takto vytvořená pára se rozpíná, tlačí na píst a ten uvádí do chodu kolo. Takže pára zatlačí píst – a co potom s ním? Načatou činností je třeba dokončit a bylo by hloupé skončit cyklus tím, že necháme páru uniknout do vzduchu, vždyť bychom museli stále dodávat vodu. Je levnější – účinnější – nechat proudit páru do jiné nádrže, kde ji zkondenzujeme studenou vodou a pak ji opět přečerpáme do kotle a zajistíme tak nepřetržitý oběh. Stroji tedy dodáváme teplo a to se přeměňuje na práci. Nebylo by lepší místo vody použít alkohol? Jakou vlastnost by mělo mít pracovní médium, aby se získal ten nejlepší stroj? Takovou otázku si položil Carnot a jedním z výsledků jeho bádání bylo objevení vztahů, o nichž jsme již mluvili.

Výsledky termodynamiky můžeme shrnout do určitých jednoduše vypadajících tvrzení, která nazýváme *termodynamické zákony*. Když žil Carnot, nebyl znám první zákon termodynamiky – zákon zachování energie. Carnot však své argumenty formuloval tak pečlivě, že jsou správné i přesto, že v jeho době nebyl první zákon znám! O něco později podal Clausius jednodušší odvození, jež bylo možné pochopit snáze než velmi precizní Carnotova argumentace. Clausius nepředpokládal obecně platnost zákona zachování energie, ale zákon zachování tepla podle teorie kalorika, která se později ukázala jako nesprávná. Proto se často Carnotovo uvažování pokládalo za nesprávné. Jeho logika však byla naprosto v pořádku, jen Clausiova zjednodušená verze, kterou každý četl, byla špatná.

Takzvaný druhý zákon termodynamiky byl tedy objeven Carnotem dříve než první zákon! Bylo by určitě zajímavé použít Carnotovy argumenty a neopírat se o první termodynamický zákon, ale nás zajímá především fyzika a ne historie, a proto budeme postupovat jinak. Hned zpočátku využijeme první zákon přesto, že mnoho by bylo možno udělat bez něho.

Začneme tím, že zformulujeme první zákon, zákon zachování energie: Máme-li nějaký systém, dodáváme mu teplo a konáme na něm práci, pak jeho energie vzroste o dodané teplo a vynaloženou práci. Můžeme to zapsat takto: teplo  $Q$  dodané systému plus vynaložená práce  $W$

## DRUHÝ ZÁKON

zvyšují energii systému  $U$  (tuto energii často nazýváme vnitřní energií)

$$\text{změna } U = Q + W. \quad (44.1)$$

Změnu  $U$  můžeme vyjádřit jako dodání malého množství tepla  $\Delta Q$  a malého množství práce  $\Delta W$

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W, \quad (44.2)$$

což je diferenciální forma tohoto zákona. To však velmi dobře víme z předcházející kapitoly.

### 44.2 DRUHÝ ZÁKON

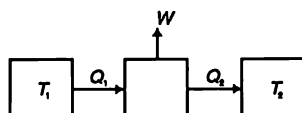
Co říká druhý termodynamický zákon? Víme, že když konáme práci například proti tření, bude práce, kterou takto ztrácíme, rovna vytvořenému teplu. Konáme-li práci v místnosti s teplotou  $T$  a konáme ji dostatečně pomalu, teplota místnosti se příliš nezmění a nám se podařilo přeměnit práci v teplo při dané teplotě. Je možný i obrácený proces? Můžeme zpátky přeměnit teplo v práci při dané teplotě? Druhý zákon termodynamiky nás ubezpečuje, že to není možné! Bylo by velmi výhodné, kdyby se dalo teplo přeměnit v práci pouhým obrácením takového procesu, jakým je tření. Kdybychom uvažovali jen zákon zachování energie, mohli bychom si myslet, že tepelná energie – taková jakou představují kmitavé pohyby molekul – by mohla být dobrým zdrojem užitečné energie. Carnot však vycházel z toho, že není možné získat energii z tepla při konstantní teplotě. Jinak řečeno, kdyby měl celý svět stejnou teplotu, nemohli bychom vůbec využít jeho tepelnou energii ke konání práce: proces proměny práce v teplo se může uskutečnit i při konstantní teplotě, avšak tento proces nemůžeme obrátit tak, abychom nazpět získali práci. Carnot konkrétně předpokládal, že při určité teplotě nemůžeme odebrat teplo a přeměnit ho v práci *bez nějaké jiné změny* v systému nebo v okolí.

Poslední výrok je velmi důležitý. Předpokládejme, že při určité teplotě máme v nádobě stlačený vzduch a ten necháme expandovat. Takový vzduch může konat práci; může například uvést do chodu sbíječku. Při expanzi se trochu ochladí, ale kdybychom měli velmi velký tepelný rezervoár s danou teplotou, třeba oceán, mohli bychom vzduch opět zahřát. Tak by se stalo, že z oceánu odebereme teplo a konáme práci se stlačeným vzduchem. Jenže Carnot se nedopustil chyby, vždyť *my jsme neponechali všechno v původním stavu*. Kdybychom znovu stlačili expandovaný vzduch, zjistili bychom, že konáme práci navíc, a po ukončení bychom pochopili, že jsme nejen nezískali žádnou práci ze systému při teplotě  $T$ , ale do systému jsme museli určitou práci vložit. Musíme mluvit jen o takových případech, kdy *čistým výsledkem* celého procesu je odebrání tepla a jeho přeměna v práci, tak jako při překonávání tření je čistým výsledkem přeměna práce v teplo. Kdybychom se pohybovali v kruhu, dostali bychom systém opět do výchozího stavu, ale s čistým výsledkem, že naše práce proti silám tření se přeměnila v teplo. Můžeme takový proces obrátit? Zkusme otočit vypínačem tak, aby vše probíhalo naopak a tření konalo práci proti nám a ochlazovalo oceán.

Podle Carnota to není možné! Tak tedy předpokládejme, že to není možné. Kdyby to bylo možné, znamenalo by to mezi jiným, že bychom mohli prostě odebrat teplo z chladného tělesa a beze všeho ho předat teplému tělesu. My však víme, že teplá tělesa ohřívají studená tělesa; kdybychom jen přiložili teplé těleso ke studenému a nic jiného bychom nezměnili, ze zkušenosti víme, že teplé těleso se nestane teplejším a chladné chladnějším! Kdybychom však mohli konat práci odebráním tepla oceánu nebo něčeho jiného při konstantní teplotě, tuto práci bychom

## ZÁKONY TERMODYNAMIKY

mohli přeměnit v teplo pomocí tření při nějaké jiné teplotě. Například, druhé rameno našeho stroje by se třelo o něco, co už je teplé. Čistým výsledkem by byl zisk tepla zchladlého tělesa, oceánu, a jeho odevzdání teplému tělesu. Carnotovu hypotézu, druhý zákon termodynamiky, můžeme formulovat i následovně: teplo samo od sebe nemůže přecházet z chladného na teplý předmět. Přesvědčili jsme se, že taková dvě tvrzení jsou ekvivalentní: První, že nemůžeme uskutečnit proces, jehož jediným výsledkem by byla přeměna tepla v práci při konstantní teplotě a druhé, že teplo nemůže samo od sebe přejít z chladnějšího na teplejší místo. Nejčastěji budeme používat první tvrzení.



Obr. 44.3 Tepelný stroj

Carnotova analýza tepelných strojů se docela podobá argumentaci, kterou jsme používali u zdvižných zařízení ve 4. kapitole o zákonu zachování energie. Tehdy jsme vlastně postupovali podle Carnotova vzoru, a proto nám další úvahy budou velmi blízké.

Předpokládejme, že jsme sestrojili tepelný stroj, jehož kotl má teplotu  $T_1$ . Z kotle odebíráme určité teplo  $Q_1$ , parní stroj vykoná určitou práci  $W$  a pára odvede určité teplo  $Q_2$  do chladiče s teplotou  $T_2$  (obr. 44.3). Carnot neřekl, jaké je to teplo, neboť neznal první zákon termodynamiky, ale ani netvrdil, že  $Q_2$  je rovno  $Q_1$ , protože tomu nevěřil. I když ti, kteří byli ovlivněni teorií kalorika, předpokládali, že tepla  $Q_1$  a  $Q_2$  jsou stejná, Carnot to netvrdil a i v tom byla bystrost jeho argumentace. Použitím prvního termodynamického zákona bychom zjistili, že odevzdané teplo  $Q_2$  je rovno dodanému teplu  $Q_1$ , od něhož musíme odečíst vykonanou práci  $W$ :

$$Q_2 = Q_1 - W. \quad (44.3)$$

(Kdybychom měli nějaký cyklický proces, v němž by byla zkondenzovaná voda přečerpána zpět do kotle, řekli bychom, že během každého cyklu bylo absorbováno teplo  $Q_1$  a vykonána práce  $W$  pro dané množství vody zúčastňující se cyklu.)

Sestrojme nyní jiný stroj a zkoumejme, zda můžeme vykonat více práce při stejném dodaném teplu při teplotě  $T_1$  a s chladičem při teplotě  $T_2$ . Budeme využívat stejné množství tepla  $Q_1$  z kotle a pokusíme se vykonat víc práce než v případě parního stroje, třeba tak, že použijeme jinou kapalinu, například alkohol.

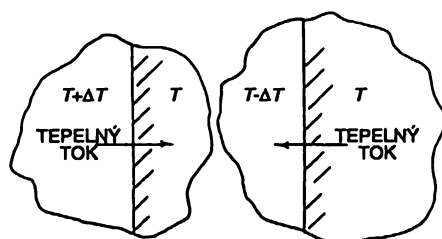
### 44.3 VRATNÉ STROJE

Nyní budeme analyzovat naše stroje. Jedno je jasné, obsahuje-li stroj části, v nichž dochází ke tření, nevyhneme se ztrátám. Proto se uchýlíme ke stejné idealizaci jako v případě úvah o zákonu zachování energie – budeme předpokládat, že ve stroji vůbec nedochází ke tření.

Musíme se zabývat i obdobou pohybu bez tření, kterou je tepelný přenos „bez tření“. Přiložíme-li horký předmět při vysoké teplotě ke studenému a vznikne tok tepla, pak není možné směr tohoto toku obrátit jen malou změnou teploty těchto předmětů. Máme-li však stroj bez tření a zapůsobíme na něj nepatrnou silou jedním směrem, bude se tím směrem pohybovat, a když na něj zapůsobíme nepatrnou silou v opačném směru, bude se pohybovat opačným

## VRATNÉ STROJE

směrem. Potřebujeme najít obdobu pohybu bez tření: přenos tepla, jehož směr můžeme obrátit i nepatrnou změnou. Je-li rozdíl teplot konečný, není to možné. Kdybychom však uskutečnili tepelný tok mezi dvěma předměty, které mají prakticky stejné teploty lišící se jen o infinitezimální hodnotu zabezpečující tok v požadovaném směru, mohli bychom mluvit o vratném toku (obr. 44.4). Zahřejeme-li mírně levou polovinu předmětu, poteče teplo doprava; když ji mírně ochladíme poteče teplo doleva. Zjistili jsme tedy, že ideálním strojem je *vratný stroj*, v němž je každý proces vratný v tom smyslu, že nepatrnými infinitezimálními změnami přinutíme stroj jít opačným směrem. Znamená to, že nikde ve stroji nesmí být tření ani takové místo, kde by teplo rezervoáru nebo plamene kotle bylo v přímém styku s něčím podstatně chladnějším nebo teplejším.

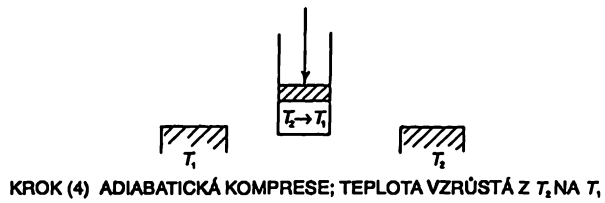
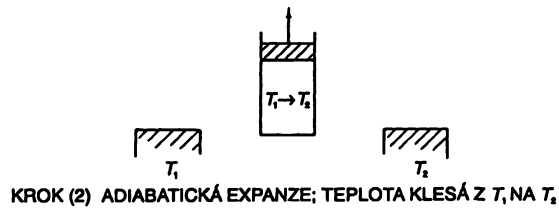


Obr. 44.4 Vratný přenos tepla

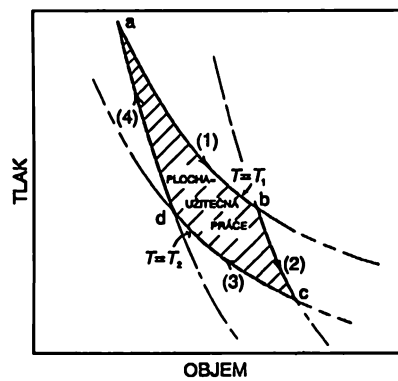
Zabývejme se nyní idealizovaným strojem, v němž jsou všechny procesy vratné. Abychom ukázali, že takový idealizovaný stroj je v principu možný, uvedeme příklad strojového cyklu, který může, ale nemusí být praktický, ale který je vratný ve smyslu Carnotovy představy. Předpokládejme, že se ve válci s pístem pohybujícím se bez tření nachází plyn, který nemusí být ideálním plynem. Nemusel by to dokonce ani být plyn, ale pro konkrétnost předpokládejme, že máme ideální plyn. Předpokládáme také, že máme dva tepelné polštáře,  $T_1$  a  $T_2$  – velká tělesa s určitými teplotami  $T_1$  a  $T_2$  (obr. 44.5). Nechť třeba  $T_1$  je vyšší než  $T_2$ . Nejprve ohřejeme plyn za současné expanze a necháme ho ve styku s tepelným polštářem  $T_1$ . Zatímco probíhá přívod tepla do plynu, musíme velmi pomalu zvedat píst, abychom zabezpečili, že teplota plynu se nikdy příliš neodchýlí od  $T_1$ . Kdybychom vyťahovali píst příliš rychle, teplota plynu by silně klesla pod  $T_1$  a proces by nebyl úplně vratný. Pohybujeme-li pístem dostatečně pomalu, teplota plynu se nikdy příliš neodchýlí od  $T_1$ . Vrátíme-li pak píst pomalu zpět, teplota bude jen nepatrně vyšší než  $T_1$  a teplo poteče obráceným směrem. Je tedy vidět, že takové izotermické rozpínání (tj. probíhající při stálé teplotě), je-li prováděno dostatečně pomalu a jemně, je vratný proces.

Abychom lépe pochopili, co se děje, nakreslíme graf závislosti tlaku plynu na jeho objemu (obr. 44.6). Když se plyn rozpíná, tlak klesá. Křivka označená symbolem (1) nám ukazuje, jak se mění objem a tlak, když se teplota udržuje na hodnotě  $T_1$ . V případě ideálního plynu by tato křivka vyjadřovala rovnici  $pV = NkT_1$ . Po dobu izotermické expanze tlak se vzrůstem objemu klesá, dokud se nedostaneme do bodu  $b$ . Současně musíme do plynu přivádět z rezervoáru určité teplo  $Q_1$ , neboť, jak už víme, jinak by se plyn rozpínáním ochlazoval. Když jsme dokončili izotermickou expanzi a dostali se do bodu  $b$ , přerušíme kontakt válce s rezervoárem a budeme pokračovat v expanzi. Tentokrát znemožníme jakýkoliv přísun tepla k válci. Expanzi budeme provádět pomalu, a opět předpokládáme nepřítomnost tření, takže nebude důvod, proč bychom proces nemohli obrátit. Plyn pokračuje v rozpínání a teplota klesá, neboť do válce už nepřichází teplo.

## ZÁKONY TERMODYNAMIKY



Obr. 44.5 Kroky Carnotova cyklu



Obr. 44.6 Carnotův cyklus

## VRATNÉ STROJE

Nechme plyn rozpínat podle křivky označené (2), dokud teplota neklesne na hodnotu  $T_2$  v bodě označeném  $c$ . Tento druh expanze bez dodání tepla se nazývá *adiabatická* expanze. Už víme, že v případě ideálního plynu má křivka (2) tvar  $pV^\gamma = \text{konst.}$ , kde  $\gamma$  je konstanta větší než 1, takže adiabatická křivka má rychlejší spád než izotermická křivka. Plyn ve válci dosáhl teploty  $T_2$ , takže když ho uvedeme do kontaktu s tepelným polštářem s teplotou  $T_2$ , nenastanou nevratné změny. Nyní plyn pomalu stlačíme, přičemž ho ponecháváme ve styku s rezervoárem při teplotě  $T_2$ ; toto stlačování proběhne podle křivky označené (3). Protože válec je ve styku s rezervoárem, teplota nevzroste, ale teplo  $Q_2$  proteče z válce do rezervoáru při teplotě  $T_2$ . Po izotermickém stlačení plynu podle křivky (3) až k bodu  $d$  odvedeme válec z tepelného polštáře s teplotou  $T_2$  a budeme ho dále stlačovat, přičemž nedovolíme teplu uniknout. Teplota vzroste a tlak se bude měnit podle křivky označené (4). Kdybychom provedli každý krok pečlivě, vrátíme se do bodu  $a$  při teplotě  $T_1$ , z něhož jsme vyšli a celý cyklus můžeme zopakovat znovu.

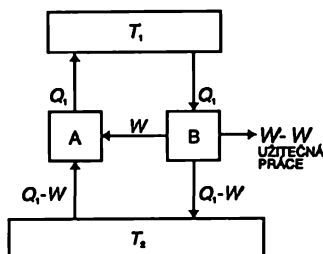
Podle diagramu vykonal plyn úplný cyklus, v jehož průběhu jsme dodali teplo  $Q_1$  při teplotě  $T_1$  a odebrali teplo  $Q_2$  při teplotě  $T_2$ . Důležité je, že cyklus je vratný, takže všechny kroky můžeme provést opačným směrem. Mohli bychom jít nazpět a ne dopředu: mohli bychom začít v bodě  $a$  při teplotě  $T_1$ , nechat expandovat plyn podle křivky (4), dále expandovat při teplotě  $T_2$ , absorbovat teplo  $Q_2$  atd., tedy uskutečnit obrácený cyklus. Probíhá-li cyklus jedním směrem, musíme vykonat práci, probíhá-li cyklus opačně, koná práci plyn.

Mimochodem, celkovou práci lze snadno vypočítat, protože po dobu jakékoliv expanze je práce rovna součinu tlaku a změny objemu, tj.  $\int p dV$ . Na našem diagramu jsme vynášeli na svislou osu  $p$  a na vodorovnou osu  $V$ . Označíme-li vertikální vzdálenost  $y$  a horizontální  $x$  dostaneme  $\int y dx$ , tedy plochu pod křivkou. Proto plocha pod každou z očíslovaných křivek je mírou práce vykonané plynem nebo námi v odpovídajícím kroku. Snadno lze zjistit, že čistá výsledná práce je rovna obsahu vyšrafované plochy na obrázku.

Nyní, když jsme ukázali jednoduchý příklad vratného stroje, budeme předpokládat, že existují i jiné takové stroje. Předpokládejme, že máme vratný stroj  $A$ , který odebírá teplo  $Q_1$  při  $T_1$ , koná práci  $W_a$  odevzdává určité teplo při teplotě  $T_2$ . Dále předpokládejme, že máme nějaký jiný, člověkem zkonstruovaný, stroj  $B$ , už existující nebo ještě nevy vynalezený, využívající gumové pásy, páru nebo cokoliv jiného, vratný nebo nevratný, který je navržen tak, že odebírá stejné množství tepla  $Q_1$  při  $T_1$  a odevzdává teplo při nižší teplotě  $T_2$  (obr. 44.7). Předpokládejme, že stroj  $B$  koná práci  $W'$ . Ukážeme, že práce  $W'$  není větší než  $W$  – že žádný stroj nevykonává víc práce než vratný stroj. Proč je tomu tak? Předpokládejme, že by  $W'$  bylo větší než  $W$ . Pak můžeme vzít teplo  $Q_1$  z rezervoáru při teplotě  $T_1$  a pomocí stroje  $B$  konat práci  $W'$  a určité teplo odevzdat rezervoáru při teplotě  $T_2$ ; nezajímá nás, jaké teplo. Když to uděláme, můžeme ušetřit určitou část práce  $W'$ , o níž předpokládáme, že je větší než  $W$ . Odebereme jen její část  $W_a$  zbytek  $W' - W$  využijeme k užitečné práci. S prací  $W$  necháme stroj  $A$  běžet opačně, *protože je to vratný stroj*. Tento stroj spotřebuje určité teplo z rezervoáru při  $T_2$  a odevzdá rezervoáru  $Q_1$  při  $T_1$ . Při tomto dvojitém cyklu bude čistý výsledek takový, že se vše vrátí do původního stavu a vykonala se práce navíc, konkrétně  $W' - W$ . Při tom vše, jsme udělali, bylo odebrání energie z rezervoáru při teplotě  $T_2$ ! Teplo  $Q_1$  jsme pečlivě vrátili rezervoáru při teplotě  $T_1$ . Proto může být rezervoár malý a může být uvnitř našeho složeného stroje  $A + B$ , který nedělá nic jiného, než že odebírá množství tepla odpovídající  $W' - W$  z rezervoáru při teplotě  $T_2$  a mění ho v práci. Jenže získání užitečné práce z rezervoáru při konstantní teplotě *bez jiných změn* je podle Carnotova postulátu nemožné. Proto nemůže existovat stroj, který by odebíral určité množství tepla při vyšší teplotě  $T_1$ , odevzdával jeho část při teplotě  $T_2$  a konal větší práci než vratný stroj pracující při stejných teplotních podmínkách.



## ZÁKONY TERMODYNAMIKY



Obr. 44.7 Vratný stroj A poháněný zpětně strojem B

Nyní předpokládejme, že stroj B je také vratný. Potom, samozřejmě, nejenže  $W'$  nesmí být větší než  $W$ , ale důkaz můžeme obrátit a ukázat, že  $W$  nemůže být větší než  $W'$ . Jsou-li oba stroje vratné, musí konat stejnou práci a přicházíme k vynikajícímu Carnotovu závěru: je-li stroj vratný, nezáleží na tom, jak konkrétně je zkonstruován a práce, kterou stroj vykoná, absorbuje-li určité množství tepla při teplotě  $T_1$  a odevzdá určité teplo při teplotě  $T_2$ , je u všech takových strojů stejné. Jde o vlastnost našeho světa, a ne o vlastnost konkrétního stroje.

Kdyby se nám podařilo najít zákon určující, kolik práce získáme absorbováním tepla  $Q_1$  při teplotě  $T_1$  a odevzdáním určitého tepla při  $T_2$ , našli bychom univerzální veličinu nezávislou na vlastnostech látky. Kdybychom však znali vlastnosti konkrétní látky, mohli bychom je využít k určení takové veličiny a pak by všechny ostatní látky musely dávat ve vratném stroji stejné množství práce. To je klíčová myšlenka, návod, pomocí něhož můžeme určit například smrštění gumy, když ji ohříváme a ochlazení gumy, když ji dovolíme smrstit se. Představme si, že pracovní látkou vratného stroje bude gumový pás a stroj necháme projít celým vratným cyklem. Čistý výsledek, celková vykonaná práce, je univerzální funkcí, úžasnou funkcí, nezávislou na vlastnostech látky. Tak přicházíme k přesvědčení, že existuje určité omezení vlastností látek; nemůžeme sestrojít, co se nám zachce, neboť jinak bychom byli schopni vymyslet látku, která by poskytovala víc než maximum možné práce ve vratném cyklu. Tento princip, toto omezení je jediným skutečným pravidlem vyplývajícím z termodynamiky.

### 44.4 ÚČINNOST IDEÁLNÍHO STROJE

Nyní se pokusíme najít zákon určující práci  $W$  jako funkci  $Q_1$ ,  $T_1$  a  $T_2$ . Je jasné, že  $W$  je úměrné  $Q_1$ , neboť uvažujeme-li dva vratné stroje pracující paralelně, pak takový zdvojený stroj je také vratný. Absorbuje-li každý teplo  $Q_1$ , pak dva spřažené stroje spotřebují teplo  $2Q_1$  a vykonají práci  $2W$  atd. Je proto rozumné předpokládat, že práce  $W$  je úměrná  $Q_1$ .

Dalším důležitým krokem bude nalezení tohoto univerzálního zákona. Budeme ho moci odvodit, když prozkoumáme vratný stroj s pracovní látkou, jejíž zákony známe. Takovou látkou je ideální plyn. K tomuto univerzálnímu zákonu bychom mohli dospět i čistě logickým uvažováním, bez použití nějaké konkrétní látky. Je to překrásná ukázka fyzikálního myšlení a bylo by škoda, kdybychom ji nemohli přednést, takže pro ty, kteří by takový důkaz rádi poznali, se o něm ještě zmíníme. Teď však použijeme méně abstraktní a jednodušší metodu přímého výpočtu v případě ideálního plynu.

Potřebujeme znát pouze vztahy pro  $Q_1$  a  $Q_2$  (neboť  $W$  je  $Q_1 - Q_2$ ), tedy pro tepla, která si stroj vyměňuje s rezervoáry po dobu izotermického rozpínání nebo stlačování. Například, kolik tepla  $Q_1$  se absorbuje z rezervoáru při teplotě  $T_1$  po dobu izotermického rozpínání (křivka (1)

## ÚČINNOST IDEÁLNÍHO STROJE

na obr. 44.6) z bodu  $a$  při tlaku  $p_a$ , objemu  $V_a$ , teplotě  $T_1$  do bodu  $b$  s tlakem  $p_b$ , objemem  $V_b$  a stejnou teplotou  $T_1$ ? V případě ideálního plynu má každá molekula energii, jež závisí jen na teplotě, a protože jsou teplota i počet molekul stejné v  $a$  i  $b$ , bude vnitřní energie stejná. *Energie  $U$  se nemění; práce, kterou koná plyn po dobu expanze*

$$W = \int_a^b p \, dV$$

je rovna energii  $Q_1$  odebrané z rezervoáru. Po dobu rozpínání  $pV = NkT_1$ , neboli

$$p = \frac{NkT_1}{V},$$

takže

$$Q_1 = \int_a^b p \, dV = \int_a^b NkT_1 \frac{dV}{V} = NkT_1 \ln \frac{V_b}{V_a}. \quad (44.4)$$

Tento výraz představuje teplo odebrané z rezervoáru při teplotě  $T_1$ . Stejným způsobem můžeme určit teplo odevzdané při teplotě  $T_2$  (křivka (3) obr. 44.6) rezervoáru po dobu stlačování. Tak dostaneme

$$Q_2 = NkT_2 \ln \frac{V_c}{V_d}. \quad (44.5)$$

K ukončení našeho rozboru potřebujeme ještě najít vztah mezi  $V_c/V_d$  a  $V_b/V_a$ . Tento vztah najdeme, když si uvědomíme, že (2) představuje adiabatické rozpínání z  $b$  do  $c$ , po dobu kterého je  $pV^\gamma$  konstantní. Když  $pV = NkT$ , můžeme psát  $(pV) V^{\gamma-1} = \text{konst}$  nebo to vyjádřit pomocí  $T$  a  $V$  ve tvaru  $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$ , tedy

$$T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}. \quad (44.6)$$

Podobně (4) také představuje adiabatické rozpínání, a to z  $d$  do  $a$ , takže můžeme psát

$$T_1 V_a^{\gamma-1} = T_2 V_d^{\gamma-1}. \quad (44.6a)$$

Vydělíme-li tuto rovnici předcházející, dostaneme rovnost výrazů  $V_b/V_a$  a  $V_c/V_d$ . Proto logaritmy v (44.4) a (44.5) musí být stejné a máme

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.7)$$

To je vztah, který jsme hledali. I když jsme ho dokázali pouze pro stroj pracující s ideálním plynem, musí být správný *pro jakýkoliv vratný stroj*.

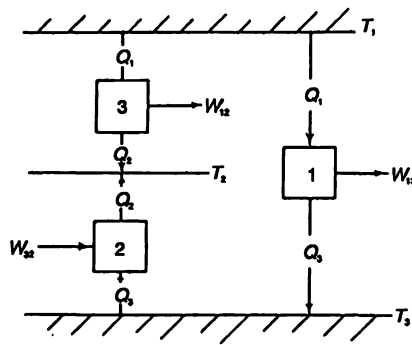
Nyní ukážeme, jak můžeme k tomuto univerzálnímu zákonu dospět logickou cestou bez znalosti vlastností nějaké konkrétní látky. Předpokládejme, že máme tři stroje a tři teploty, např.  $T_1$ ,  $T_2$  a  $T_3$ . Nechť jeden stroj absorbuje teplo  $Q_1$  při teplotě  $T_1$ , vykoná určité množství práce

## ZÁKONY TERMODYNAMIKY

$W_{13}$  a odevzdá teplo  $Q_3$  při teplotě  $T_3$  (obr. 44.8). Nechť druhý stroj pracuje opačným způsobem mezi teplotami  $T_2$  a  $T_3$ . Předpokládejme, že tento druhý stroj je tak velký, že absorbuje právě teplo  $Q_3$  a odevzdá teplo  $Q_2$ . Musíme na něj vynaložit určité množství práce  $W_{32}$  – tato práce bude záporná, neboť stroj pracuje v obráceném cyklu. Když první stroj ukončí cyklus, absorbuje teplo  $Q_1$  a odevzdá teplo  $Q_3$  při teplotě  $T_3$ ; druhý stroj odebere stejné teplo  $Q_3$  při teplotě  $T_3$  z rezervoáru a odevzdá ho rezervoáru při teplotě  $T_2$ . Proto čistý výsledek takových spřažených strojů je odebrání tepla  $Q_1$  při teplotě  $T_1$  a odevzdání tepla  $Q_2$  při teplotě  $T_2$ . Tyto dva stroje jsou proto ekvivalentní třetímu, který absorbuje  $Q_1$  při teplotě  $T_1$ , koná práci  $W_{12}$  a odevzdává teplo  $Q_2$  při  $T_2$ . Přitom  $W_{12} = W_{13} - W_{32}$ , jak vyplývá z prvního zákona

$$W_{13} - W_{32} = (Q_1 - Q_3) - (Q_2 - Q_3) = Q_1 - Q_2 = W_{12}. \quad (44.8)$$

Nyní můžeme získat zákony dávající do vzájemného vztahu účinnosti strojů; vždyť je jasné, že musí existovat určitý druh závislosti mezi účinnostmi strojů pracujících mezi teplotami  $T_1$  a  $T_3$ , mezi  $T_2$  a  $T_3$  a mezi  $T_1$  a  $T_2$ .



Obr. 44.8 Spojení strojů 1 a 2 je ekvivalentní stroji 3

Naše argumenty budou velmi jasné, budeme-li postupovat následujícím způsobem: Zjistili jsme, že teplo absorbované při  $T_1$  můžeme vždy dát do souvislosti s teplem odevzdaným při  $T_2$ , určíme-li teplo odevzdané při nějaké jiné teplotě  $T_3$ . Proto budeme moci popsat všechny vlastnosti stroje, zavedeme-li určitou standardní teplotu a naši analýzu provedeme právě při této standardní teplotě. Jinak řečeno, známe-li účinnost stroje pracujícího mezi určitou teplotou  $T$  a jakousi standardní teplotou, budeme moci vypočítat účinnost pro jakýkoliv jiný rozdíl teplot. Protože předpokládáme pouze použití vratných strojů můžeme přejít od počáteční teploty dolů ke standardní teplotě a pak přejít zpět k výsledné teplotě. Standardní teplotu můžeme vybrat libovolně a zvolíme za ni *jeden stupeň*. Pro teplo, jež se odevzdává při této standardní teplotě, zavedeme zvláštní symbol  $Q$ . Jinými slovy: absorbuje-li vratný stroj při teplotě  $T_1$  teplo  $Q_1$ , pak při jednotkové teplotě odevzdá teplo  $Q$ . Odevzdá-li nějaký stroj absorbující teplo  $Q_1$  při teplotě  $T_1$  teplo  $Q$  při teplotě jednoho stupně a odevzdá-li druhý stroj absorbující teplo  $Q_2$  při teplotě  $T_2$  také teplo  $Q$  při teplotě jednoho stupně, pak podle našeho důkazu týkajícího se strojů pracujících mezi třemi teplotami *musí stroj, který absorbuje teplo  $Q_1$  při teplotě  $T_1$ , odevzdat teplo  $Q_2$ , pracuje-li mezi teplotami  $T_1$  a  $T_2$* . Už nám zbývá jen najít, kolik tepla  $Q_1$  musíme dodat při teplotě  $T_1$ , abychom odevzdali určité množství tepla  $Q$  při jednotkové teplotě. Jakmile to zjistíme, máme vyhráno. Samozřejmě teplo  $Q$  je funkcí teploty  $T$ . Snadno se zjistí, že se vzrůstem teploty musí vzrůstat i teplo, protože

## TERMODYNAMICKÁ TEPLOTA

víme, že na zpětný chod stroje a odevzdání tepla při vyšší teplotě se spotřebuje práce. Není těžké pochopit, že teplo  $Q_1$  musí být úměrné  $Q_2$ . Potom náš velký zákon musí vypadat takto: Danému množství tepla  $Q_2$  odevzdanému při jednom stupni odpovídá množství tepla  $Q_1$  absorbované strojem při teplotě  $T_1$  a toto množství je rovno součinu  $Q_2$  a určité rostoucí funkce teploty

$$Q_1 = Q_2 f(T_1). \quad (44.9)$$

### 44.5 TERMODYNAMICKÁ TEPLOTA

Zatím se nepokusíme najít vztah pro zmíněnou rostoucí funkci teploty vyjádřenou pomocí stupnice známého rtuťového teploměru, ale místo toho *definujeme novou teplotní stupnici*. Kdyby byla „teplota“ definována libovolně rozdělením objemu vody roztahující se teplem na stejné stupně určité velikosti. Když se však teplota měřila rtuťovým teploměrem, zjistilo se, že stupňům už neodpovídají stejné vzdálenosti na stupnici. Nyní však *můžeme definovat teplotu, která nezávisí na vlastnostech látky*. Můžeme k tomu využít uvedenou funkci  $f(T)$ , která nezávisí na použitém zařízení, protože účinnost vratných strojů nezávisí na jejich pracovních látkách. Protože tato funkce s růstem teploty roste, můžeme *ji samotnou považovat za teplotu měřenou v standardních jednotkách* takto:

$$Q = ST, \quad (44.10)$$

kde

$$Q = S \cdot 1^\circ. \quad (44.11)$$

To znamená, že teplotu tělesa určíme tak, že zjistíme, kolik tepla absorboval vratný stroj pracující mezi teplotou tělesa a jednotkovou teplotou (*obr. 44.9*). Když se z kotle odebere sedmkrát víc tepla, než se odevzdá jedностupňovému chladiči, říkáme, že tento kotel má teplotu sedm stupňů atd.<sup>53)</sup> Měřením množství tepla absorbovaného při různých teplotách určíme teplotu. Takto definovanou teplotu nazýváme *absolutní termodynamickou teplotou* a tato teplota nezávisí na pracovní látce. Dále budeme výlučně používat tuto definici teploty.<sup>54)</sup>

Nyní je nám jasné, že v případě dvou strojů, z nichž jeden pracuje mezi  $T_1$  a jedním stupněm a druhý mezi  $T_2$  a jedním stupněm a oba odevzdávají stejné teplo při jednotkové teplotě, musí pro absorbovaná tepla platit vztah

$$\frac{Q_1}{T_1} = S = \frac{Q_2}{T_2}. \quad (44.12)$$

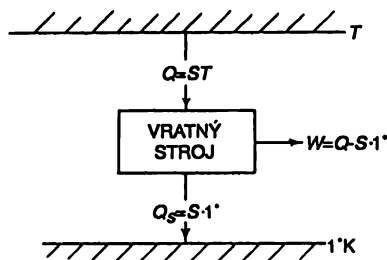
Kdybychom tedy měli jednoduchý stroj pracující mezi  $T_1$  a  $T_2$ , pak by výsledek naší analýzy, to velké finále, spočíval v tom, že poměr  $Q_1/T_1$  je stejný jako poměr  $Q_2/T_2$ , absorbuje-li stroj energii  $Q_1$  při teplotě  $T_1$  a odevzdá teplo  $Q_2$  při teplotě  $T_2$ . Tento vztah musí platit pro

53) Termodynamickou teplotu dnes udáváme v jednotkách zvaných kelvin (*pozn. red.*).

54) Předtím jsme naši teplotní stupnici definovali jiným způsobem, konkrétně tak, že jsme střední kinetickou energii molekuly ideálního plynu považovali za úměrou teplotě, tedy ve shodě se zákonem ideálního plynu jsme považovali  $pV$  úměrné  $T$ . Je taková definice ekvivalentní naší nové definici? Na tuto otázku můžeme odpovědět kladně, neboť konečný výsledek (44.7), odvozený ze zákona ideálního plynu, je stejný jako zde odvozený výsledek. V další kapitole se ještě k tomuto problému vrátíme.

## ZÁKONY TERMODYNAMIKY

libovolný vratný stroj. K tomu je třeba dodat už jen tolik, že jde o nejdůležitější výrok celé termodynamiky.



Obr. 44.9 Absolutní termodynamická teplota

Představuje-li však toto vlastně celou termodynamiku, proč bývá považována za náročný předmět? Máte-li danou hmotnost látky, můžete stav této látky v kterémkoliv okamžiku popsat udáním její teploty a objemu. Známe-li teplotu a objem látky a víme, že tlak je určitou funkcí teploty a objemu, budeme znát vnitřní energii. Jenže někdo si řekne: „Já to tak nebudu dělat! Řekněte mi, jaká je teplota a jaký je tlak a já vám řeknu, jaký je objem. Objem můžu považovat za funkci teploty a tlaku a vnitřní energii za funkci teploty a tlaku atd.“ Příčina náročnosti termodynamiky spočívá právě v tom, že každý používá jiný přístup. Kdybychom se však uměli dohodnout na našich proměnných a tuto dohodu i dodržovali, termodynamika by byla docela snadná.

Nyní se pustíme do dedukování. Tak jako  $F = ma$  představovalo ústřední rovnici celé mechaniky a vše jsme z ní odvozovali, bude právě nalezený princip představovat základ celé termodynamiky. A my se ptáme, jaké závěry z něho můžeme udělat.

Abychom mohli udělat první závěr, zkombinujeme oba zákony – zákon zachování energie a zákon dávající do souvislosti tepla  $Q_2$  a  $Q_1$  – a dospějeme k účinnosti vratného stroje. Z prvního zákona máme  $W = Q_1 - Q_2$ . Podle našeho nového principu

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1$$

a pro práci dostáváme vztah

$$W = Q_1 \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (44.13)$$

který určuje účinnost stroje – říká, kolik práce získáme z určitého množství tepla. Účinnost stroje je úměrná rozdílu teplot, mezi nimiž stroj pracuje, dělenému vyšší teplotou

$$\text{účinnost} = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (44.14)$$

Účinnost nemůže být větší než jedna a absolutní teplota nemůže být menší než nula, absolutní nula. Protože  $T_2$  musí být kladné, účinnost je vždy menší než jedna. To je náš první výsledek.

## 44.6 ENTROPIE

Rovnici (44.7) nebo (44.12) můžeme interpretovat zvláštním způsobem. Pracujeme-li s vratnými stroji, je teplo  $Q_1$  při teplotě  $T_1$  „ekvivalentní“  $Q_2$  při  $T_2$  neboli  $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$  v tom smyslu, že je-li jedno z tepel absorbováno, je druhé odevzdáno. Kdybychom tedy nějak nazvali veličinu  $Q/T$ , mohli bychom prohlásit: ve vratných procesech je absorbováno tolik  $Q/T$ , kolik je uvolněno;  $Q/T$  se ani nezískává, ani neztrácí. Poměr  $Q/T$  nazýváme *entropie* a říkáme, že „ve vratném cyklu je změna entropie nulová“. Když  $T$  je  $1^\circ$ , pak je entropie  $Q/1^\circ$ , nebo, jak jsme již označili,  $Q/1^\circ = S$ . Opravdu  $S$  je písmeno, které nejčastěji používáme pro entropii a ta je číselně rovna teplu (které jsme označili  $Q$ ) dodanému rezervoáru při jednotkové teplotě (samotná entropie není teplo, ale představuje teplo dělené teplotou a měří se v joulech na stupeň).<sup>55)</sup>

Je zajímavé, že kromě tlaku, který je funkcí teploty, objemu a vnitřní energie, jež je také funkcí teploty a objemu, jsme našli jinou veličinu, která je funkcí stavu a tou je entropie látky. Pokusme se vysvětlit, jak se tato veličina počítá a co rozumíme tím, když říkáme, že je „funkcí stavu“. Uvažujme systém ve dvou různých stavech, například takových, jaké jsme měli v experimentu s adiabatickou a izotermickou expanzí. (Mimochodem, stroj nemusí mít nezbytně dva rezervoáry; můžou být tři nebo čtyři různé teploty, při nichž odebírá a odevzdává teplo.) Můžeme se pohybovat po celém  $pV$ -diagramu a přecházet z jednoho stavu do druhého. Jinak řečeno, plyn můžeme převádět z určitého stavu  $a$  do jiného stavu  $b$  a přitom požadovat, aby tento přechod z  $a$  do  $b$  byl vratný. Nyní předpokládejme, že podél dráhy z  $a$  do  $b$  máme malé rezervoáry s různými teplotami, takže teplo  $dQ$  odebrané látce při každém drobném kroku je odevzdáno každému rezervoáru při teplotě odpovídající příslušnému bodu dráhy. Pak připojme všechny tyto rezervoáry vratnými tepelnými stroji k jednomu rezervoáru při jednotkové teplotě. Když ukončíme převod látky z  $a$  do  $b$ , vraťme všechny rezervoáry do jejich původního stavu. Každé teplo  $dQ$ , které bylo odebráno látce při teplotě  $T$ , jsme takto přeměnili vratným strojem a při jednotkové teplotě bylo odevzdáno určité množství entropie  $dS$ , jmenovitě

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (44.15)$$

Vypočítejme celkové množství odevzdané entropie. Rozdíl entropií neboli entropie potřebná k přechodu z  $a$  do  $b$  při takové vratné transformaci představuje celkovou entropii – celkovou entropii odebranou z malých rezervoárů a odevzdanou při jednotkové teplotě:

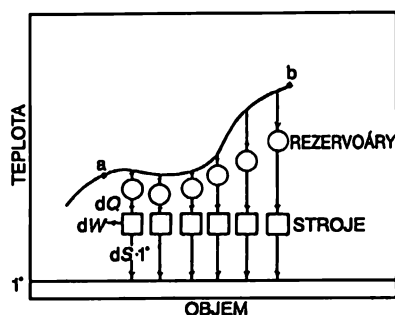
$$S_b - S_a = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad (44.16)$$

Nyní se ptáme, zda rozdíl entropií závisí na zvolené dráze. Existuje totiž víc způsobů, jak se dostat z  $a$  do  $b$ . Vzpomeňme si, že při Carnotově cyklu jsme podle obr. 44.6 mohli přejít z  $a$  do  $c$  nejprve izotermickou expanzí a pak adiabaticky nebo nejprve adiabatickou expanzí a pak izotermicky. Zajímá nás proto, zda je změna entropie, která nastává, když přecházíme z  $a$  do  $b$  podle obr. 44.10, pro každou dráhu stejná. *Must být stejná*, neboť kdybychom završili celý cyklus jednou dráhou tam a druhou zpět, měli bychom vratný stroj a nemohly by nastat ztráty tepla do

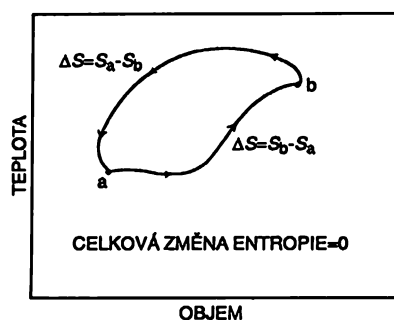
<sup>55)</sup> joulech na kelvin (pozn. red.)

## ZÁKONY TERMODYNAMIKY

rezervoáru při jednotkové teplotě. Ve zcela vratném cyklu nesmí být odebráno žádné teplo z rezervoáru při jednotkové teplotě, a tak je entropie potřebná k přechodu z  $a$  do  $b$  pro kteroukoliv dráhu stejná. *Nezávisí na samotné dráze, závisí jen na koncových bodech.* Proto můžeme tvrdit, že existuje určitá funkce, kterou nazýváme entropie látky a která závisí pouze na stavu, tj. jen na objemu a teplotě.



Obr. 44.10 Změna entropie při vratném přechodu



Obr. 44.11 Změna entropie při úplném vratném cyklu

Můžeme najít funkci  $S(V, T)$ , jež má tu vlastnost, že při vratných změnách látky má změna entropie vyjádřená pomocí tepla odevzdaného při jednotkové teplotě následující tvar

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}, \quad (44.17)$$

kde  $dQ$  je teplo odebrané látce při teplotě  $T$ . Tato celková změna entropie je rozdíl entropie vypočítané v koncovém a počátečním bodě dráhy

$$\Delta S = S(V_b, T_b) - S(V_a, T_a) = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad (44.18)$$

Tento výraz nedefinuje entropii úplně. Definuje vlastně jen rozdíl entropie ve dvou různých stavech. Jen tehdy, když umíme vypočítat entropii jednoho konkrétního stavu, můžeme definovat entropii  $S$  absolutně.

## ENTROPIE

Dlouho se předpokládalo, že absolutní entropie neznamená nic a že je možné definovat pouze rozdíly entropie. Nakonec však přišel Nernst s velmi jednoduchým tvrzením, které nazval „věta o teple“ a kterému dnes říkáme třetí zákon termodynamiky. Povíme si, co tento zákon říká, ale nebudeme vysvětlovat, proč platí. Nernstův postulát prostě tvrdí, že každý objekt má při absolutní nule nulovou entropii. Nyní už víme, při kterém  $T$  a  $V$  je  $S$  nulové (konkrétně při  $T = 0$ ), a proto můžeme entropii určit v libovolném jiném bodě.

Abychom ilustrovali tyto myšlenky, vypočítejme entropii ideálního plynu. Při izotermické (a tedy i vratné) expanzi je  $\int dQ/T$  rovno  $Q/T$ , protože  $T$  je konstanta. Proto (v soulase se vztahem 44.4) platí pro změnu entropie

$$S(V_a, T) - S(V_b, T) = Nk \ln \frac{V_a}{V_b},$$

takže  $S(V, T) = Nk \ln V$  plus nějaká funkce jen teploty  $T$ . Jak  $S$  závisí na  $T$ ? Víme, že v případě vratné adiabatické expanze *nedochází k výměně tepla*. Proto se entropie nemění, i když se mění  $V$ , ale aby platilo  $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$ , musí se měnit i teplota  $T$ . Chápete, že musí být

$$S(V, T) = Nk \left[ \ln V + \frac{1}{\gamma-1} \ln T \right] + a,$$

kde  $a$  je nějaká konstanta, která nezávisí na  $V$ , ani na  $T$  (Konstanta  $a$  se nazývá chemická konstanta. Závisí na zkoumaném plynu a můžeme ji experimentálně určit z Nernstovy věty měřením tepla uvolňovaného při ochlazení a kondenzaci plynu až po jeho přeměnu na tuhou látku (v případě hélia kapalnou) při nulové teplotě; přitom je třeba vypočítat integrál  $\int dQ/T$ . Konstantu  $a$  můžeme určit i teoreticky pomocí Planckovy konstanty a kvantové mechaniky, ale v tomto kurzu se tím nebudeme zabývat.)

Nyní si všimněme některých vlastností entropie. Vzpomeňme si, že na úseku vratného cyklu od  $a$  do  $b$  se entropie látky mění o  $S_b - S_a$ . Dále si vzpomeňme, že při takovém postupu entropie – teplo odevzdané při jednotkové teplotě – vzrůstá podle zákona  $dS = dQ/T$ , kde  $dQ$  je teplo, které odebereme látce při teplotě  $T$ .

Už víme, že při vratném cyklu se celková entropie všeho nemění, neboť teplo  $Q_1$  absorbované při  $T_1$  a teplo  $Q_2$  odevzdané při  $T_2$  odpovídají stejně velkým, ale opačným změnám entropie, takže výsledná změna entropie je nulová. Proto se při vratném cyklu nemění entropie žádné části, ani rezervoárů. Toto pravidlo se podobá zákonu zachování energie, ale tím není; platí totiž pouze pro vratné cykly. Kdybychom uvažovali i nevratné cykly, žádný zákon zachování entropie neplatí.

Uvedeme dva příklady. Nejprve předpokládáme, že nevratnou práci koná objekt, v němž existuje tření a který produkuje teplo  $Q$  při teplotě  $T$ . Entropie vzroste o  $Q/T$ . Teplo  $Q$  je rovno práci, a proto, když konáme nějakou práci třením předmětu, jehož teplota je  $T$ , vzrůstá entropie o  $W/T$ .

Další příklad nevratnosti spočívá v následujícím: Spojíme-li dva předměty s různými teplotami  $T_1$  a  $T_2$ , přejde určité množství tepla samovolně z jednoho předmětu na druhý. Například předpokládejme, že jsme do studené vody vložili horký kámen. Jak se změní entropie horkého kamene, když odevzdá teplo  $\Delta Q$  z  $T_1$  na  $T_2$ ? Poklesne o  $\Delta Q/T_1$ . Jak se změní entropie vody? Vzroste o  $\Delta Q/T_2$ . Teplo však poteče jen od vyšší teploty  $T_1$  k nižší teplotě  $T_2$ , takže  $\Delta Q$  je kladné, je-li teplota  $T_1$  je vyšší než teplota  $T_2$ . Proto je změna entropie celého světa kladná a je rovna se rozdílu dvou zlomků

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}. \quad (44.19)$$



## ZÁKONY TERMODYNAMIKY

Platí tedy toto tvrzení: V každém nevratném procesu entropie všeho na světě vzrůstá. Jen ve vratných procesech zůstává entropie konstantní. Protože však žádný proces není absolutně vratný, entropie vždy aspoň o málo vzroste; vratný proces je idealizace s minimálním přírůstkem entropie.

Bohužel, v termodynamice nepůjdeme do hloubky. Naším cílem je jen ilustrace základních myšlenek a vysvětlení používané argumentace, ale termodynamikou se příliš zabývat nebudeme. Termodynamiku velmi často používají technici a hlavně chemici, proto musíme učit termodynamiku v chemické nebo technické praxi. Není vhodné všechno opakovat, omezujeme se pouze na diskuzi o povaze této teorie a nevěnujeme se detailům speciálních aplikací.

Dva zákony termodynamiky jsou často formulovány takto:

*První zákon:* energie vesmíru je vždy konstantní.

*Druhý zákon:* entropie vesmíru vždy vzrůstá.

Formulace druhého zákona není právě nejvhodnější, protože například nevyjadřuje, že ve vratném cyklu se entropie nemění a přesně neříká, co vlastně entropie je. Je to jen způsob vhodný k zapamatování těchto zákonů, ale ve skutečnosti nám přesně neříká, na čem jsme. Zákony diskutované v této kapitole jsou shrnuty v *tabulce 44.1*. V další kapitole využijeme tyto zákony k získání vztahu mezi teplem generovaným při rozpínání pásku gumy a dodatečným vnitřním napětím při jeho zahřívání.

Tabulka 44.1

### Shrnutí termodynamických zákonů

*První zákon:*

teplo dodané systému + práce konaná na systému = vzrůst vnitřní energie systému

$$dQ + dW = dU.$$

*Druhý zákon:*

Proces, jehož jediným čistým výsledkem by bylo odebrání tepla z rezervoáru a jeho přeměna na práci je nemožná. Žádný tepelný stroj odebírající teplo  $Q_1$  při  $T_1$  a odevzdávající teplo  $Q_2$  při  $T_2$  nemůže vykonat víc práce než vratný stroj, pro nějž platí

$$W = Q_1 - Q_2 = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

*Definice entropie systému:*

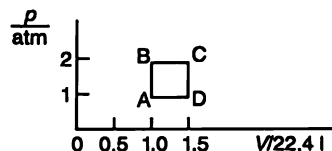
- Je-li teplo  $\Delta Q$  vratně dodáno systému při teplotě  $T$ , vzroste entropie systému o  $\Delta S = \Delta Q / T$ .
- Při  $T = 0$ ,  $S = 0$  (třetí zákon).

Při *vratné změně* se celková entropie všech částí systému (včetně rezervoárů) nemění.

Při *nevratné změně* celková entropie systému vždy vzrůstá.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 44.1 ■ Ideální plyn s exponentem adiabaty  $\gamma = 4/3$  postupně přechází ze stavu *A* (tlak  $p = 1$  atm, objem  $V = 22,4$  l, teplota  $t = 273$  K) do stavu *C* ( $p = 2$  atm,  $V = 33,6$  l) buď po dráze *ABC* nebo po dráze *ADC*. a) Ukažte, že změna entropie je v obou případech stejná. b) Vypočítejte tuto změnu.



- 44.2 ■ Převedte ideální Carnotův cyklus *abcd* na obr. 44.6 na  $p$ - $V$  diagramu mezi stavy charakterizovanými parametry  $T_1$  a  $T_2$  a  $(P_a, V_a)$ ,  $(P_c, V_c)$  na cyklus *abcd* na diagramu teplota – entropie.
- 44.3 ■ Teplota parogenerátoru na moderní tepelné elektrárně, která pracuje s přehřátou párou, je  $600$  °C. Do chladiče je přiváděna říční voda o teplotě  $20$  °C. Jaké maximální účinnosti může být na takové elektrárně dosaženo?
- 44.4 ■ V ideálním vratném tepelném stroji, který využívá jako pracovní látku  $28$  g dusíku ( $\gamma = 7/5$ ) probíhá pracovní cyklus *abcd* bez použití ventilu. Teplota ohříváče je  $400$  K, teplota chladiče  $300$  K. Původní objem plynu v bodě *a* je  $6,0$  l, objem v bodě *c* je  $18,0$  l.
- Při jakém objemu  $V_b$  je třeba zastavit přísun tepla (izotermická expanze) a po tepelné izolaci stroje pokračovat v adiabatické expanzi od  $V_b$  k  $V_c$ ? Při jakém objemu  $V_d$  začne adiabatická komprese?
  - Jaké množství tepla vstupuje do soustavy na úseku cyklu *ab*?
  - Jaké množství tepla opouští soustavu na úseku cyklu *cd*?
  - Jaká je účinnost cyklu?
  - Čemu je rovna změna entropie na  $1$  g pracovní látky na úsecích *ab* a *cd*?
  - Ověřte, že u Carnotova cyklu s ideálním plynem jsou si poměry  $V_b/V_a$  a  $V_c/V_d$  rovny.
- 44.5 ■ Nedbalý experimentátor nechal ve spěchu ventil kontejneru naplněného héliem pootevřený. Plyn, původně pod tlakem  $200$  atm začal opouštět kontejner pomalu, izotermicky, při teplotě  $20$  °C. Určete změnu entropie na  $1$  kg plynu.

# 45

# Iustrace termodynamiky

---

## 45.1 VNITŘNÍ ENERGIE

## 45.2 APLIKACE

## 45.3 CLAUSIOVA – CLAPEYRONOVA ROVNICE

### 45.1 VNITŘNÍ ENERGIE

Termodynamika je poměrně těžká a složitá ve svých aplikacích a bylo by nepřiměřené, kdybychom se v tomto kurzu pouštěli při těchto aplikacích příliš do hloubky. Je velmi důležitá pro inženýry a chemiky, zájemci se o ní mohou poučit ve fyzikální chemii nebo inženýrské termodynamice. Existuje mnoho dobrých příruček, jako např. Zemanskyho „Teplota a termodynamika“, v nichž se o termodynamice dozvíte hodně. V čtrnáctém vydání Encyclopaedia Britannica jsou výborné články o termodynamice a termochemii a v článku o chemii se dočtete o fyzikální chemii, vypařování, zkapalňování plynů apod.

Termodynamika je tak složitá, protože jednu věc můžeme popsat mnoha způsoby. Chceme-li popsat chování plynu, můžeme vycházet z toho, že tlak závisí na teplotě a na objemu nebo z toho, že objem závisí na teplotě a tlaku. Zajímáme-li se o vnitřní energii  $U$ , můžeme vycházet z toho, že závisí na teplotě a objemu, ale proměnné si můžeme zvolit i jinak a pak můžeme vycházet z toho, že závisí na teplotě a tlaku nebo na tlaku a objemu apod. V poslední kapitole jsme mluvili i jiné funkci teploty a objemu, kterou jsme nazývali entropie a můžeme sestavit ještě mnoho jiných funkcí těchto proměnných: například  $U - TS$  je funkcí teploty a objemu. Máme tedy mnoho různých veličin, jež mohou být funkcemi rozmanitých kombinací proměnných.

Abychom nekomplikovali situaci, budeme v této kapitole uvažovat jako nezávislé proměnné *teplotu a objem*. Chemici používají jako nezávislé proměnné teplotu a tlak, protože se snáze měří a ovládají v chemických experimentech, ale my budeme v celé kapitole používat teplotu a objem až na jednu výjimku, když budeme vysvětlovat, jak se uskutečňuje transformace na chemický systém proměnných.

Budeme tedy uvažovat jen jeden systém nezávislých proměnných: teplotu a objem. Dalším omezením bude to, že se budeme zabývat jen o dvě závislé funkce: o vnitřní energii a tlak. O ostatních funkcích nebudeme mluvit, neboť je lze odvodit z uvedených dvou funkcí. I přes tato omezení je termodynamika stále dost obtížný předmět, i když už ne tolik.

## VNITŘNÍ ENERGIE

Nejdříve si zopakujeme něco z matematiky. Je-li veličina funkcí dvou proměnných, musíme být opatrnější při jejím derivování než v případě jedné proměnné. Co rozumíme derivací tlaku podle teploty? Změny tlaku provázející teplotní změny částečně závisí na tom, co se děje s objemem, když se mění teplota  $T$ . Dříve než pojem derivace podle  $T$  nabude přesný smysl, musíme říci něco o změnách objemu. Například se můžeme ptát, jaká je rychlost změny  $p$  vzhledem k  $T$ , je-li  $V$  konstantní. Tato rychlost je právě obyčejnou derivací, kterou jsme zvyklí psát jako  $dp/dT$ . Abychom si připomněli skutečnost, že  $p$  kromě toho, že závisí na  $T$ , závisí i na jiné proměnné a tuto proměnnou považujeme za konstantu  $V$ , obvykle používáme speciální symbol  $\partial p/\partial T$ . Na upozornění, že druhá proměnná se nemění, používáme nejen symbol  $\partial$ , ale i index označující proměnnou, kterou považujeme za konstantu, tedy píšeme  $(\partial p/\partial T)_V$ . Máme-li jen dvě proměnné, je takové označení zbytečné, ale pomůže nám lépe se orientovat v džungli parciálních derivací termodynamiky.

Předpokládejme, že funkce  $f(x, y)$  závisí na dvou nezávislých proměnných  $x$  a  $y$ . Pod  $(\partial f/\partial x)_y$  rozumíme obyčejnou derivaci získanou obvyklým způsobem, považujeme-li  $y$  za konstantu:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Podobně definujeme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Například, je-li  $f(x, y) = x^2 + yx$ , pak  $(\partial f/\partial x)_y = 2x + y$  a  $(\partial f/\partial y)_x = x$ . Tuto myšlenku můžeme zobecnit i na vyšší derivace:  $\partial^2 f/\partial y^2$  nebo  $\partial^2 f/\partial y \partial x$ . Poslední symbol znamená, že nejdříve derivujeme  $f$  podle  $x$  a přitom považujeme  $x$  za konstantu a pak derivujeme výsledek podle  $y$  a považujeme  $x$  za konstantu. Skutečné pořadí derivování není podstatné:  $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$ .

Budeme potřebovat vypočítat změnu  $\Delta f$  funkce  $f(x, y)$ , když  $x$  se mění na  $x + \Delta x$  a  $y$  se mění na  $y + \Delta y$ . Předpokládejme, že  $\Delta x$  a  $\Delta y$  jsou infinitezimálně malé

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= \underbrace{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}_{\Delta x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y} + \underbrace{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}_{\Delta y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x} = \end{aligned} \quad (45.1)$$

Poslední rovnice je základním vztahem, jenž vyjadřuje  $\Delta f$  pomocí  $\Delta x$  a  $\Delta y$ .

Jako příklad použití tohoto vztahu vypočítejme změnu vnitřní energie  $U(T, V)$  při změně teploty z  $T$  na  $T + \Delta T$  a změně objemu z  $V$  na  $V + \Delta V$ . Použijeme-li rovnici (45.1), můžeme psát

$$\Delta U = \Delta T \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \Delta V \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T. \quad (45.2)$$

V předcházející kapitole jsme našli jiné vyjádření změny  $\Delta U$  vnitřní energie při dodání tepla  $\Delta Q$  plynu

$$\Delta U = \Delta Q - p \Delta V.$$

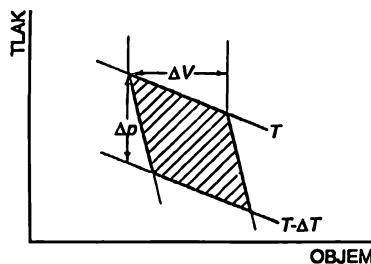
## ILUSTRACE TERMODYNAMIKY

Porovnání rovnic (45.2) a (45.3) by nás mohlo přivést na myšlenku, že  $p = (\partial U / \partial V)_T$ , jenže taková představa není správná. Abychom získali správný vztah, nejdříve předpokládejme, že plynu dodáme teplo  $\Delta Q$ , zatímco objem zůstane stejný, tedy  $\Delta V = 0$ . Když  $\Delta V = 0$ , rovnice (45.3) nám říká, že  $\Delta U = \Delta Q$  a z rovnice (45.2) dostaneme  $\Delta U = (\partial U / \partial T)_V \Delta T$ , takže  $(\partial U / \partial T)_V = \Delta Q / \Delta T$ . Poměr  $\Delta Q / \Delta T$  představuje množství tepla, které musíme dodat látce, aby se při konstantním objemu změnila její teplota o jeden stupeň, nazývá se *měrná tepelná kapacita při konstantním objemu* a označuje se symbolem  $C_V$ . Takovým způsobem jsme ukázali, že

$$\left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_V \quad (45.4)$$

Nyní dodejme plynu opět množství tepla  $\Delta Q$ , ale při stálé teplotě  $T$  a objem ať se změní o  $\Delta V$ . V takovém případě je analýza složitější, ale  $\Delta U$  můžeme počítat s použitím Carnotových argumentů a k tomu nám poslouží Carnotův cyklus, o němž jsme mluvili v předcházející kapitole.

Diagram tlak – objem pro Carnotův cyklus je znázorněn na obr. 45.1. Už dříve jsme ukázali, že celkové množství práce konané plynem při vratném cyklu je rovno  $\Delta Q (\Delta T / T)$ , kde  $\Delta Q$  je množství tepelné energie dodané plynu při izotermické expanzi při teplotě  $T$  z objemu  $V$  na  $V + \Delta V$  a  $T - \Delta T$  je výsledná teplota, které plyn dosáhne při adiabatické expanzi v druhé části cyklu. Nyní ukážeme, že tato vykonaná práce je rovna vyšrafované ploše na obr. 45.1. Práce plynu je rovna ve všech případech  $\int p dV$  a je kladná, když se plyn rozpíná a záporná, když je stlačován. Nakreslíme-li  $p$  v závislosti na  $V$ , pak změny  $p$  a  $V$  vystihuje křivka, která každé hodnotě  $V$  přiřazuje určitou hodnotu  $p$ . Mění-li se objem z jedné hodnoty na druhou, práce konaná plynem, tedy integrál  $\int p dV$ , je plocha pod křivkou spojující počáteční a konečnou hodnotu  $V$ . Aplikujeme-li tuto myšlenku na Carnotův cyklus a dáme pozor na znaménko práce plynu, opravdu zjistíme, že čistá práce plynu je právě vyšrafovaná plocha na obr. 45.1.

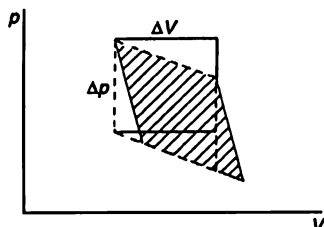


Obr. 45.1  $p$ - $V$  diagram Carnotova cyklu. Křivky označené  $T$  a  $T - \Delta T$  jsou izotermy, strmější křivky jsou adiabaty.  $\Delta V$  je objemová změna plynu, jež bylo při konstantní teplotě dodáno teplo  $\Delta Q$ .  $\Delta p$  je změna tlaku plynu, když se při konstantním objemu změnila teplota z hodnoty  $T$  na hodnotu  $T - \Delta T$

Nyní vyjádříme vyšrafovanou plochu geometricky. Cyklus znázorněný na obr. 45.1 se liší od cyklu z předcházející kapitoly v tom, že nyní  $\Delta T$  a  $\Delta Q$  jsou infinitesimálně malé. Pracujeme mezi adiabatickými a izotermickými čarami, které jsou velmi těsně u sebe, a proto se obrazec, nakreslený na obr. 45.1 silnými čarami bude blížit rovnoběžníku, když  $\Delta T$  a  $\Delta Q$  půjdou k nule. Plocha tohoto rovnoběžníku je právě  $\Delta V \Delta p$ , kde  $\Delta V$  je změna objemu plynu při dodání energie  $\Delta Q$  při konstantní teplotě a  $\Delta p$  je změna tlaku při změně teploty o  $\Delta T$  při stálém objemu. To, že je vyšrafovaná plocha na obr. 45.1 rovna  $\Delta V \Delta p$ , snadno nahlédneme, uvažíme-li,

## VNITŘNÍ ENERGIE

že taková plocha je rovna ploše ohraničené přerušovanou čarou na obr. 45.2, která se od pravouhelníku ohraničeného  $\Delta p$  a  $\Delta V$  liší jen přidáním a odebráním stejných trojúhelníkových ploch.



Obr. 45.2 Vyšrafovaná plocha = plocha ohraničená přerušovanými čarami = plocha pravouhelníku =  $\Delta p \Delta V$

Shrňme naše dosavadní úvahy:

$$\begin{array}{l}
 \text{Práce konaná plynem} = \text{vyšrafovaná plocha} = \Delta V \Delta p = \Delta Q \left( \frac{\Delta T}{T} \right) \\
 \text{nebo} \\
 \frac{\Delta T}{T} \cdot (\text{teplo potřebné ke změně } V \text{ o } \Delta V)_{T \text{ konstantní}} = \\
 = \Delta V \cdot (\text{změna } p \text{ při změně } T \text{ o } \Delta T)_{V \text{ konstantní}} \\
 \text{nebo} \\
 \frac{1}{\Delta V} \cdot (\text{teplo potřebné ke změně } V \text{ o } \Delta V)_{T} = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V .
 \end{array} \quad (45.5)$$

Vztah (45.5) vyjadřuje to podstatné, co vyplývá z Carnotových úvah. Celou termodynamiku můžeme odvodit ze vztahu (45.5) a prvního zákona, který je vyjádřen rovnicí (45.3). Vztah (45.5) je vlastně druhým zákonem, i když ten byl původně odvozen Carnotem v trochu jiném tvaru, protože Carnot nepoužil naši definici teploty.

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu  $(\partial U / \partial V)_T$ . O kolik se změní vnitřní energie  $U$ , změníme-li objem o  $\Delta V$ ? Vnitřní energie se mění, protože je dodáváno teplo a protože se koná práce. Dodané teplo je podle vztahu (45.5) rovno

$$\Delta Q = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V$$

a s látkou konaná práce je rovna  $-p \Delta V$ . Proto změna vnitřní energie  $\Delta U$  se skládá ze dvou částí

$$\Delta U = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \Delta V - p \Delta V. \quad (45.6)$$

Dělíme-li obě strany rovnice  $\Delta V$ , najdeme rychlost změny  $U$  v závislosti na  $V$  při konstantní teplotě  $T$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p. \quad (45.7)$$

V naší termodynamice, kde  $T$  a  $V$  jsou jediné proměnné a  $p$  a  $U$  jsou jediné funkce, představují rovnice (45.3) a (45.7) základní vztahy, z nichž můžeme získat všechny výsledky.

## 45.2 APLIKACE

Nyní se zamyslíme nad významem rovnice (45.7) a všimneme si, proč dává odpověď na otázku, které jsme položili v předcházející kapitole. Uvažovali jsme následující problém: v kinetické teorii je zřejmé, že růst teploty vede k růstu tlaku v důsledku nárazů atomů na píst. Ze stejného fyzikálního důvodu je při zpětném pohybu pístu z plynu odváděno teplo a abychom udrželi konstantní teplotu, musíme teplo dodat. Při expanzi se plyn ochlazuje a při ohřívání plynu tlak roste. Mezi těmito dvěma jevy musí existovat určitá souvislost a tato souvislost je explicitně dána rovnicí (45.7). Kdybychom zachovali objem a zvýšili teplotu, tlak by vzrostl rychlostí  $(\partial p / \partial T)_V$ . S touto skutečností souvisí i následující. Zvýšíme-li objem, plyn se ochladí, pokud nedodáme určité teplo k udržování konstantní teploty a veličina  $(\partial U / \partial V)_T$  nám říká, kolik tepla je třeba k udržení teploty dodat. Rovnice (45.7) vyjadřuje základní vztah mezi těmito dvěma jevy a to je věc, kterou jsme slíbili zjistit, když jsme se dostali až k termodynamickým zákonům. Aniž bychom znali vnitřní mechanismus plynu a za pomoci jediného poznatku, že nelze sestavit perpetuum mobile druhého druhu, jsme odvodili vztah mezi množstvím tepla potřebným k udržení konstantní teploty při rozpínání plynu a změnou tlaku při ohřátí plynu!

Nyní, když jsme si poradili s plynem uvažujme pásek gumy. Když takový pásek napínáme, zjišťujeme, že jeho teplota klesá a když ho ohříváme, vidíme, že se smršťuje. Jak vypadá rovnice, která by poskytovala pro pásek gumy stejný vztah, jako dává rovnice (45.3) pro plyn? V případě pásku gumy bude situace asi taková: když dodáme teplo  $\Delta Q$ , změní se vnitřní energie o  $\Delta U$  a vykoná se určitá práce. Jediný rozdíl je v tom, že práce konaná páskem gumy je  $-F\Delta L$  místo  $p\Delta V$ , přičemž  $F$  je síla působící na pásek a  $L$  je délka pásku. Síla  $F$  je funkcí teploty a délky pásku. Nahradíme-li  $p\Delta V$  v rovnici (45.3) výrazem  $-F\Delta L$ , dostaneme

$$\Delta U = \Delta Q + F\Delta L. \quad (45.8)$$

Porovnáním rovnic (45.3) a (45.8) zjistíme, že rovnici pro gumový pásek získáme pouhou záměnou písmen. Zaměníme-li  $L$  za  $V$  a  $-F$  za  $p$ , můžeme naše úvahy o Carnotově cyklu aplikovat na pásek gumy. Pak okamžitě zjistíme, že například teplo  $\Delta Q$ , potřebné ke změně délky o  $\Delta L$ , je dáno analogem rovnice (45.5):  $\Delta Q = -T(\partial F / \partial T)_L \Delta L$ . Udržujeme-li konstantní délku pásku a ohříváme ho, umožní nám tato rovnice vypočítat vzrůst síly vyjádřený pomocí tepla potřebného k udržování konstantní teploty při malém natažení pásku. Vidíme tedy, že stejné rovnice můžeme aplikovat na plyn i na pásek gumy. Když můžeme psát  $\Delta U = \Delta Q + A\Delta B$ , kde  $A$  a  $B$  představují různé veličiny, sílu a délku, tlak a objem apod., pak výsledky pro plyn získáme tak, že místo  $A$  a  $B$  dosadíme  $p$  a  $V$ . Jako příklad uvažujme rozdíl elektrických potenciálů nebo napětí  $E$  baterie a náboj  $\Delta Z$ , který prochází baterií. Víme, že práce konaná vratnou elektrickou baterií, takovou jako je např. akumulátor, je rovna  $E\Delta Z$ . (Neuvažujeme-li ve vyjádření pro práci člen  $p\Delta V$ , předpokládáme, že baterie má konstantní objem.) Podívejme se, co nám řekne termodynamika o činnosti baterie. Dosadíme-li hodnotu  $E$  místo  $p$  a hodnotu  $Z$  místo  $V$ , dostaneme z rovnice (45.6)

$$\frac{\Delta U}{\Delta Z} = -T \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_Z - E. \quad (45.9)$$

Rovnice (45.9) říká, když baterií prochází náboj  $\Delta Z$ , změní se vnitřní energie  $U$ . Proč se  $\Delta U / \Delta Z$  nerovná prostě napětí  $E$  baterie? Důvod je ten, že skutečná baterie se zahřívá, prochází-li jí proud.

## APLIKACE

Vnitřní energie baterie se mění jednak proto, že baterie koná určitou práci ve vnějším obvodu a jednak proto, že se baterie ohřeje. Pozoruhodné je to, že tu druhou část změny vnitřní energie můžeme opět určit pomocí změny napětí baterie s teplotou. Mimochodem, když baterii prochází náboj, dochází k chemické reakci a rovnice (45.9) poskytuje elegantní způsob měření energie potřebné k uskutečnění chemické reakce. Potřebujeme jen zhotovit baterii využívající takovou reakci, změřit napětí a změřit, jak se mění napětí s teplotou, když z baterie neodebíráme náboj!

Předpokládali jsme, že objem baterie zůstává stálý a při vyjádření práce konané baterií jsme vynechali člen  $p \Delta V$ , takže nám zůstalo jen  $E \Delta Z$ . Ukazuje se však, že je technicky dost složité udržovat konstantní objem. Mnohem jednodušší je udržovat baterii při stálém atmosférickém tlaku. Právě proto nemají chemici rádi rovnice, které jsme odvodili a dávají přednost rovnicím, jež jsou vhodné pro podmínky konstantního tlaku. Na začátku této kapitoly jsme se rozhodli používat  $V$  a  $T$  jako nezávislé proměnné. Chemici dávají přednost  $p$  a  $T$  a nyní ukážeme, jak můžeme naše výsledky přetransformovat do chemického systému proměnných. Musíme však dát pozor, aby v dalším postupu nedošlo ke zmatku, neboť přecházíme od  $T$  a  $V$  k  $T$  a  $p$ .

Vyšli jsme z rovnice (45.3), v níž  $\Delta U = \Delta Q - p \Delta V$ ; člen  $p \Delta V$  můžeme nahradit výrazem  $E \Delta Z$  nebo  $A \Delta B$ . Kdybychom mohli nějakým způsobem nahradit člen  $p \Delta V$  výrazem  $V \Delta p$ , vyměnily by si  $p$  a  $V$  úlohy a chemici by mohli být spokojeni. S trochou důvtipu můžeme využít to, že diferenciál součinu  $pV$  je  $d(pV) = p dV + V dp$ , a když přičteme tuto veličinu k rovnici (45.3), dostaneme

$$\frac{\Delta(pV) = p \Delta V + V \Delta p}{\Delta U = \Delta Q - p \Delta V}.$$

$$\Delta(U + pV) = \Delta Q + V \Delta p$$

Aby se náš výsledek podobal rovnici (45.3), definujeme  $U + pV$  jako novou funkci, nazveme ji *entalpie*  $H$  a bude pro ni platit  $\Delta H = \Delta Q + V \Delta p$ .

Nyní jsme už připraveni transformovat naše výsledky do chemické řeči, budeme-li dodržovat tato pravidla:  $U \rightarrow H$ ,  $p \rightarrow -V$ ,  $V \rightarrow p$ . Například základní vztah, který chemici používají místo rovnice (45.7), má tvar

$$\left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V.$$

Nyní už by nám mělo být jasné, jak se přechází k chemickým proměnným  $T$  a  $p$ . Vraťme se však k našim původním proměnným: ve zbytku této kapitoly budou nezávislé proměnné  $T$  a  $V$ .

Aplikujme nyní získané výsledky na některé fyzikální situace. Nejdříve uvažujme ideální plyn. Z kinetické teorie víme, že vnitřní energie plynu závisí jen na pohybu molekul a počtu molekul. Vnitřní energie závisí na  $T$ , ale ne na  $V$ . Změníme-li  $V$ , ale  $T$  zachováme konstantní,  $U$  se nezmění. Proto  $(\partial U / \partial V)_T = 0$  a rovnice (45.7) nám říká, že pro ideální plyn

$$T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p = 0. \quad (45.10)$$

Rovnice (45.10) je diferenciální rovnice, která nám může něco říci o  $p$ . S parciální derivací se vypořádáme takto: Je-li parciální derivace při konstantním  $V$ , nahradíme ji obyčejnou derivací



## ILUSTRACE TERMODYNAMIKY

a abychom na to nezapomněli, explicitně zapíšeme „konstantní  $V$ “. Rovnice (45.10) pak nabývá tvaru

$$T \frac{\Delta p}{\Delta T} - p = 0; V \text{ konstantní}; \quad (45.11)$$

a když tuto rovnici integrujeme, dostaneme

$$\begin{aligned} \ln p &= \ln T + \text{konst}; V \text{ konstantní}; \\ p &= \text{konst} \times T; V \text{ konstantní}. \end{aligned} \quad (45.12)$$

Víme, že pro tlak ideálního plynu platí

$$p = \frac{RT}{V} \quad (45.13)$$

a tento vztah je v souladu s (45.12), protože  $V$  a  $R$  jsou konstanty. Proč jsme se unavovali tímto výpočtem, když jsme už znali výsledek? Protože jsme používali *dvě nezávislé definice teploty!*

Jednou jsme předpokládali, že kinetická energie molekul je úměrná teplotě a tento předpoklad definoval jednu teplotní stupnici, kterou budeme nazývat stupnicí ideálního plynu.  $T$  v rovnici (45.13) se zakládá na této stupnici. Teploty měřené v plynové stupnici nazýváme i *kinetickými* teplotami. Později jsme definovali teplotu jiným způsobem, který nezávisel na žádné látce. Vycházeli jsme z druhého zákona termodynamiky a definovali to, co můžeme nazvat „absolutní termodynamickou teplotou“  $T$  a tato teplota vystupuje v rovnici (45.12). Zde jsme dokázali, že tlak ideálního plynu (definovaného jako něco, co má vnitřní energii nezávislou na objemu) je úměrný absolutní termodynamické teplotě. Víme i to, že tlak je úměrný teplotě měřené v plynové stupnici. Z toho můžeme usoudit, že kinetická teplota je úměrná „absolutní termodynamické teplotě“. To samozřejmě znamená, že je rozumné tyto dvě stupnice ztotožnit. A opravdu, tyto stupnice byly nakonec zvoleny tak, že se ztotožňují, konstanta úměrnosti je rovna jedné. Lidé si většinou sami dělají těžkosti, ale v tomto případě si situaci zjednodušili.

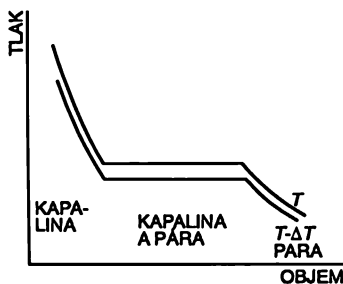
### 45.3 CLAUSIOVA – CLAPEYRONOVA ROVNICE

Vypařování kapaliny je dalším procesem, na který můžeme aplikovat výsledky, jež jsme odvodili. Předpokládejme, že máme nějakou kapalinu ve válci a můžeme ji stlačovat pístem. Ptáme se, jak se bude měnit tlak v závislosti na objemu, budeme-li udržovat stálou teplotu. Jinak řečeno, chceme nakreslit izotermu na  $p$ - $V$  diagramu. Látka ve válci už není ideální plyn, který jsme uvažovali předtím; může to být látka v kapalném nebo plynném stavu, případně může obsahovat obě tyto fáze. Stlačíme-li dostatečně látku, z kondenzuje na kapalinu. Budeme-li tlak dále zvětšovat, objem se bude měnit už jen velmi málo a naše izoterma bude s poklesem objemu rychle stoupat, jak to ukazuje levá strana *obrázku 45.3*.

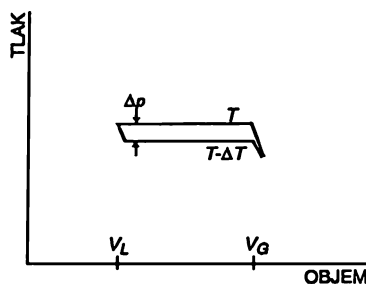
Zvětšíme-li objem vytáhnutím pístu, tlak poklesne, dokud nedosáhne bodu, při němž začne kapalina vřít a vytvářet se pára. Když píst ještě víc vytáhneme, bude se ještě více kapaliny vypařovat. Je-li válec částečně zaplněný kapalinou a částečně plynem, jsou tyto fáze v rovnováze – kapalina se vypařuje a pára kondenzuje stejnou rychlostí. Poskytneme-li páře více prostoru, bude k udržení tlaku potřebné větší množství páry, a tak se vypaří více kapaliny, ale tlak zůstane stálý. Na vodorovné části křivky z *obr. 45.3* se tlak nemění a jeho hodnota se nazývá *tlak páry při teplotě*

### CLAUSIOVA-CLAPEYRONOVA ROVNICE

$T$ . Kdybychom pokračovali ve zvětšování objemu, dospěli bychom k situaci, kdy už nezbývá žádná kapalina na vypařování. Tehdy při dalším zvětšování objemu poklesne tlak tak, jako v případě obyčejného plynu a tuto situaci znázorňuje pravá strana  $P$ - $V$ diagramu. Dolní křivka na obrázku 45.3 je izotermická křivka při mírně snížené teplotě  $T - \Delta T$ . Tlak kapalné fáze mírně klesl, neboť kapalina se při vyšší teplotě roztáhla (většina látek se tak chová, jen voda v blízkosti teploty tání ne) a samozřejmě tlak páry je při nižší teplotě nižší.



Obr. 45.3 Izotermie páry kondenzující ve válci. Vlevo je látka v kapalném stavu, vpravo je látka ve stavu páry. Uprostřed je situace, kdy se ve válci nachází kapalina i pára.



Obr. 45.4  $p$ - $V$ diagram Carnotova cyklus párou, která kondenzuje ve válci. Vlevo je látka v kapalném stavu. Při teplotě  $T$  je dodané množství tepla  $L$ , potřebné k vypaření kapaliny. Pára adiabaticky expanduje při změně  $T$  na  $T - \Delta T$

Ze dvou izoterm sestojíme cyklus tak, že je spojíme (například adiabatami) na koncích vodorovných částí, jak je to znázorněno na obr. 45.4. Malý výčnělek v pravém dolním rohu obrázku není podstatný a zanedbáme ho. Použijeme Carnotovy argumenty, které říkají, že teplo, jež je dodáváno látce a jež ji mění z kapaliny v páru, souvisí s prací, kterou látka koná při průchodu cyklem. Nechť  $L$  je teplo potřebné k vypaření látky ve válci. Stejně jako při argumentaci bezprostředně předcházející rovnici (45.5) víme, že  $L(\Delta T/T) =$  práci konané látkou. Tak jako předtím představuje práci konanou látkou vyšrafovaná plocha, která je přibližně rovna  $\Delta p(V_G - V_L)$ , kde  $\Delta p$  je rozdíl tlaků páry při dvou teplotách  $T$  a  $T - \Delta T$ ,  $V_G$  je objem plynu a  $V_L$  je objem kapaliny; oba objemy jsou měřeny při tlaku páry. Vyjádříme-li rovnost těchto výrazů pro stejné obsahy ploch, dostaneme  $L \Delta T/T = \Delta p(V_G - V_L)$  neboli

$$\frac{L}{T(V_G - V_L)} = \frac{\partial p_{\text{páry}}}{\partial T}. \quad (45.14)$$

## ILUSTRACE TERMODYNAMIKY

Rovnice (45.14) poskytuje vztah mezi rychlostí změny tlaku páry s teplotou a množstvím tepla potřebného k vypaření kapaliny. Tento vztah odvodil Carnot, ale nazývá se Clausiova – Clapeyronova rovnice.

Nyní porovnejme rovnici (45.14) s výsledky odvozenými z kinetické teorie.  $V_G$  je obvykle mnohem větší než  $V_L$ . Proto  $V_G - V_L \approx V_G = RT/p$  na mol. Předpokládáme-li dále, že  $L$  je konstantní, nezávislé na teplotě – což není příliš dobré přiblížení – dostaneme  $\partial p / \partial T = L / (RT^2 p)$ . Řešení této diferenciální rovnice je

$$p = \text{konst } e^{-L/RT}. \quad (45.15)$$

Porovnejme to s teplotní změnou tlaku, kterou jsme odvodili už dříve z kinetické teorie. Kinetická teorie říká, že aspoň zhruba je počet molekul páry nad kapalinou roven

$$n = \frac{1}{V_A} e^{(U_G - U_L)/RT}, \quad (45.16)$$

kde  $U_G - U_L$  je vnitřní energie na mol v plynu mínus vnitřní energie na mol v kapalině, tj. energie potřebná k vypaření jednoho molu kapaliny. Rovnice (45.15) z termodynamiky a rovnice (45.16) z kinetické teorie velmi těsně souvisí, protože tlak je  $nkT$ , ale nejsou přesně stejné. Můžeme však zařadit, aby byly stejné, předpokládáme-li, že  $L - U_G = \text{konst}$  místo  $L = \text{konst}$ . Předpokládáme-li, že  $L - U_G = \text{konst}$ , která nezávisí na teplotě, pak argumenty, které předtím vedly k rovnici (45.14), povedou k rovnici (45.16).

Toto porovnání ukazuje výhody a nevýhody termodynamiky proti kinetické teorii. *Za prvé*. Rovnice (45.14) získaná v termodynamice je přesná, zatímco rovnice (45.16) je jen přiblížení; vždyť například vyžaduje, aby  $U$  bylo téměř konstantní a i použitý model musí odpovídat skutečnosti. *Za druhé*. Nemusíme přesně vědět, jak se plyn mění na kapalinu a rovnice (45.14) je přece jen přesná, zatímco rovnice (45.16) je jen přibližná. *Za třetí*. I když jsme náš postup aplikovali na plyn, který kondenzuje na kapalinu, naše argumenty jsou správné pro jakoukoliv změnu stavu. Například přechod tuhé fáze na kapalnou má stejnou křivku, jako je na obr. 45.3 a 45.4. Zavedeme-li latentní teplo tání  $M$ /mol, dostaneme vztah podobný rovnici (45.14):  $(\partial p_{\text{tání}} / \partial T)_V = M / [T(V_{\text{kap}} - V_{\text{tuh}})]$ . I když nebudeme rozumět kinetické teorii procesu tání, dostaneme správnou rovnici. Když však porozumíme kinetické teorii, budeme mít další výhodu. Rovnice (45.14) je diferenciální rovnicí a my nevíme, jak určit integrační konstanty. V kinetické teorii můžeme získat i tyto konstanty, pracujeme-li s dobrým modelem, který úplně popisuje daný jev. Každý z přístupů má tedy výhody i nevýhody. Jsou-li naše znalosti slabé a situace složitá, termodynamické vztahy jsou skutečně neúčinnější. Je-li situace jednoduchá a lze provést teoretickou analýzu, je lepší se pokusit získat takovou analýzou víc informací.

Uvažujme ještě jeden příklad – záření černého tělesa. Už jsme mluvili o nádobě obsahující záření a nic jiného. Mluvili jsme o rovnováze mezi oscilátorem a zářením. Zjistili jsme, že fotony narážející na stěny nádoby vytvářejí tlak  $p$  a ukázali jsme, že  $pV = U/3$ , kde  $U$  je celková energie fotonů a  $V$  je objem nádoby. Dosadíme-li  $U = 3pV$  do základní rovnice (45.7), dostaneme

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 3p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p. \quad (45.17)$$

Protože objem naší nádoby je konstantní, můžeme nahradit  $(\partial p / \partial T)_V$  výrazem  $dp / dT$ . Tak

CLAUSIOVA-CLAPEYRONOVA ROVNICE

získáme obyčejnou diferenciální rovnici a její integrací dostaneme:  $\ln p = 4 \ln T + \text{konst}$  nebo  $p = \text{konst} \times T^4$ . Tlak záření se mění se čtvrtou mocninou teploty a energetický obsah záření  $U/V = p/3$  se také mění jako  $T^4$ . Bývá zvykem psát  $U/V = (4\sigma/c) T^4$ , kde  $c$  je rychlost světla a  $\sigma$  je konstanta. Tuto konstantu nemůžeme získat ze samotné termodynamiky. To je názorný příklad její slabé a silné stránky. Poznání toho, že  $U/V$  se chová jako  $T^4$ , je velkou věcí, avšak abychom věděli, jak velké je ve skutečnosti  $U/V$  při libovolné teplotě, museli bychom proniknout až k detailům, a to nám může poskytnout pouze úplnější teorie. Pro záření černého tělesa takovou teorii máme, a proto můžeme odvodit výraz pro konstantu  $\sigma$  následujícím způsobem.

Nechť  $I(\omega) d\omega$  je rozdělení intenzity tok energie plochou  $1 \text{ m}^2$  za sekundu s frekvencí z intervalu od  $\omega$  po  $\omega + d\omega$ . Pro rozdělení hustoty energie = energie / objem =  $I(\omega) d\omega/c$  můžeme psát

$$\frac{U}{V} = \text{celková hustota energie} = \int_{\omega=0}^{\infty} \text{hustota energie mezi } \omega \text{ a } \omega + d\omega = \int_0^{\infty} \frac{I(\omega) d\omega}{c}.$$

Z předcházejících úvah už víme, že

$$I(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1)}.$$

Dosadíme-li do naší rovnice pro  $U/V$  tento výraz za  $I(\omega)$ , dostaneme

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

Zavedením nové proměnné  $x = \hbar\omega/kT$  nabude tento výraz tvar

$$\frac{U}{V} = \frac{(kT)^4}{\hbar^3 \pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Integrál, který zde vystupuje, je nějaké číslo a my ho můžeme vypočítat přibližným způsobem tak, že si nakreslíme graf integrované funkce a určíme plochu pod ní. Tak dostaneme zhruba 6,5. Matematici by uměli dokázat, že tento integrál je roven přesně  $\pi^4/15$ .<sup>56)</sup>

Porovnáním tohoto výrazu s výrazem  $U/V = (4\sigma/c) T^4$  dostaneme

$$\sigma = \frac{k^4 \pi^2}{60 \hbar^3 c^2} = 5,67 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

(tzv. Stefanova-Boltzmannova konstanta).

<sup>56)</sup> Protože  $(e^x - 1)^{-1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots$ , integrál je roven  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^3 dx$ .

Ale  $\int_0^{\infty} e^{-nx} dx = 1/n$  a trojnásobným derivováním podle  $n$  dostaneme  $\int_0^{\infty} x^3 e^{-nx} dx = 6/n^4$ , takže integrál je roven  $6 \left( 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots \right)$  a dobré přiblížení získáme, vezmeme-li jen několik prvních členů. V kapitole 50 najdeme způsob, jímž lze dá ukázat, že součet převrácených čtvrtých mocnin celých čísel je skutečně  $\pi^4/90$ .

#### ILUSTRACE TERMODYNAMIKY

Zajímá nás, kolik energie projde za jednotku času otvorem jednotkového průřezu, který jsme udělali ve stěně naší nádoby. Abychom přešli od hustoty energie k toku energie, musíme hustotu energie  $U/V$  násobit veličinou  $c$ . Dále musíme násobit koeficientem  $1/4$ . To má dvě příčiny. Především musíme zahrnout jen energii, která proniká otvorem *ven*, tedy  $1/2$  celkového toku. Musíme také vzít v úvahu, že energie, která se přibližuje k otvoru, přichází z různých směrů, a proto musíme násobit dalším koeficientem  $1/2$ , tj. střední hodnotou funkce kosinus na druhou. Nyní je jasné, proč píšeme  $U/V = (4\sigma/c) T^4$ , a tak můžeme nakonec říci, že tok energie jednotkovou plochou malého otvoru je roven  $\sigma T^4$ .

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 45.1 ■ Slunce vyzařuje přibližně jako absolutně černé těleso o teplotě 5 700 K. Budeme-li slunečním světlem ozařovat absolutně černou měděnou kouli umístěnou ve vzdálenosti 1 AU od Slunce, jaká se na ní ustaví rovnovážná teplota? (Průměr Slunce je ze Země pozorován pod úhlem  $30'$ .)
- 45.2 ■ Sluneční světlo dopadá kolmo k povrchu Země někde v rovníkové Africe. Bude-li povrch vyzařovat jako absolutně černé těleso, jaká bude maximální teplota v této oblasti? (Sluneční konstanta je rovna  $1395 \text{ W/m}^2$ .)
- 45.3 ■ Absolutně černé těleso o poloměru  $r$  a teploty  $T$  je obklopeno oboustranně začerněnou obálkou poloměru  $R$ . Zjistěte, jak bude takové radiační stínění zpomalovat ochlazování tělesa. V prostoru mezi tělesem a obálkou je vakuum, takže nedochází ke ztrátám tepelnou vodivostí.
- 45.4 ■ V centru Slunce je hustota přibližně  $80 \text{ g/cm}^3$  a teplota  $\sim 13 \cdot 10^6 \text{ K}$ . Sluneční látka je tvořena převážně protony a elektrony. Najděte tlak plynu a radiační tlak v centru Slunce.
- 45.5 ■ Latentní výparné teplo vody je přibližně  $2,44 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3$  a hustota páry při  $100^\circ\text{C}$  je  $0,598 \text{ kg/m}^3$ . Pomocí Clausiovy – Clapeyronovy rovnice najděte rychlost změny bodu varu vody s výškou ve stupních na kilometr na úrovni moře. Teplotu vzduchu položte rovnou  $300 \text{ K}$ .
- 45.6 ■ Ukažte, že pro ideální plyn, jehož vnitřní energie závisí pouze na teplotě, rozdíl mezi molárními tepelnými kapacitami při stálém tlaku a stálém objemu je roven plynové konstantě  $R$ :  
 $C_p - C_v = R$ .
- 45.7 ■ Při  $0^\circ\text{C}$  je měrný objem nasycené vodní páry  $206 \text{ m}^3/\text{kg}$ . Jaké bude latentní výparné teplo vody v  $\text{J/kg}$  při této teplotě? Návod: Určete podle tabulek  $dp/dT$ , vypočítejte  $L$  a porovnejte s tabulkovou hodnotou.
- 45.8 ■ Těleso pohlcuje stálý podíl  $A$  celkového záření dopadajícího na jeho povrch a zbytek odráží. Ukažte, že při teplotě  $T$  vyzařuje energii  $A\sigma T^4$ .
- 45.9 ■ a) Na základě termodynamických úvah dokažte, že jestliže látka při zamrznání zvětšuje svůj objem, její teplota tání musí klesat s rostoucím tlakem.  
b) Je rozšířen názor, že bruslení je umožněno tím, že led pod bruslí taje. Přijmete-li tuto hypotézu, vypočítejte nejnižší teplotu ledu na kluzišti, při níž se ještě dá bruslit.

# 46

# Rohatka se západkou

---

- 46.1 JAK PRACUJE ROHATKA
- 46.2 ROHATKA JAKO STROJ
- 46.3 VRATNOST V MECHANICE
- 46.4 NEVRATNOST
- 46.5 USPOŘÁDÁNÍ A ENTROPIE

## 46.1 JAK PRACUJE ROHATKA

V této kapitole budeme mluvit o rohatce (ozubené kolo se šikmými zuby) se západkou, která představuje velmi jednoduché zařízení, dovolující hřídeli otáčet se pouze v jednom směru. To že máme zařízení, které se bude otáčet jen jedním směrem si vyžaduje důkladný rozbor, z něhož vyplynou některé zajímavé důsledky.

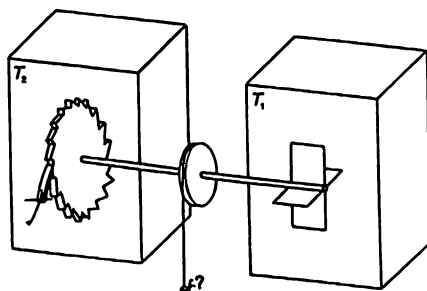
K takové diskuzi nás přivedla snaha o elementární vysvětlení skutečnosti z molekulárního nebo kinetického hlediska, že existuje určité maximum práce, které lze získat z tepelného stroje. Samozřejmě, my už známe podstatu Carnotových argumentů, ale bylo by krásné najít vysvětlení, které by bylo elementární v tom smyslu, že by ukazovalo, co se vlastně fyzikálně děje. Existují složité matematické důkazy, vyplývající z Newtonových zákonů, potvrzující, že při toku tepla z jednoho místa na druhé můžeme získat jen určité množství práce; tyto důkazy nám však nedávají elementární představu. Stručně řečeno, nevidíme do nich, i když rozumíme matematické stránce.

Skutečnost, že při přechodu od jedné teploty k druhé nemůžeme získat víc než určité množství práce, vyplývá podle Carnotovy argumentace z jiného axiómu, který říká, že v cyklickém procesu nemůžeme přeměnit teplo na práci, je-li vše při stejné teplotě. Pokusme se proto nejdříve aspoň na jednom elementárním příkladě ukázat, proč platí toto jednoduché tvrzení.

Pokusme se vymyslet zařízení, jež by porušovalo druhý zákon termodynamiky, tedy přístroj, který by získával práci z tepelného rezervoáru a přitom by se vůbec nezměnila teplota. Mějme řekněme nádobu s plynem při určité teplotě a v ní osičku s větrníčkem (viz. obr. 46.1, pro  $T_1 = T_2 = T$ ). Větrníček bude v důsledku nárazů molekul kmitat a poskakovat. Teď už nám jen zbývá připevnit na druhý konec osičky kolo, které se může otáčet jen jedním směrem – rohatku

## JAK PRACUJE ROHATKA

se západkou. Pootočení větrníčku jedním směrem bude možné, ale pootočení opačným směrem bude vyloučeno. Rohatka se proto bude pomalu otáčet, a kdybychom na konec vlákna navěsili něco se na buben upevněný na osičce zavěsili blechu, vytáhne ji nahoru! Je to vůbec možné? Podle Carnotovy hypotézy to není možné. Na první pohled se však zdá, že by to mělo být možné. Proto si toho budeme muset všimnout podrobněji. A opravdu, když si všimneme rohatky se západkou, objevíme řadu komplikací.



Obr. 46.1 Stroj na základě rohatky a západky

Především: Naše idealizovaná rohatka je sice co nejjednodušší, ale je zde západka a u ní musí být pružina. Když západka opustí zub, musí se vrátit a k tomu je potřebná pružina.

Je ještě jeden charakteristický rys rohatky se západkou, který není ukázán na obrázku, ale který je velmi důležitý. Předpokládejme, že zařízení je sestaveno z dokonale pružných částí. Když západka přejede konec zubu a je vrácena pružinou, narazí na rohatku, odrazí se a tak to půjde dál. Při další fluktuaci se rohatka může pootočit i nazpět, protože zub se může dostat pod západku, pokud ta byla nahoře. Podstatnou částí nevratnosti rohatky je tlumící mechanismus, který zastavuje odrazy. Jenže při takovém tlumení energie západky přechází na rohatku a projevuje se jako teplo. Rohatka se proto stává teplejší a teplejší. Abychom situaci zjednodušili, umísťme rohatku v nádobě s plynem, abychom mohli odvést určité teplo. Můžeme tedy říci, že při růstu teploty rohatky, roste i teplota plynu. Bude se to dít stále? Ne! Západka a rohatka, nacházející se při teplotě  $T$ , mají také Brownův pohyb. Tento pohyb se projevuje tak, že čas od času se západka náhodně zdvihá nad zub právě tehdy, když Brownův pohyb větrníčku se snaží otočit osičku nazpět. Čím je teplota vyšší, tím se to stává častěji.

V tom je příčina, proč takové zařízení nebude pracovat v neustálém pohybu. Když větrníček dostane náraz, někdy nadzdvihne západku a pootočí se. Jenže někdy, když se snaží pootočit na druhou stranu, je už západka nadzdvihnutá v důsledku fluktuací pohybu osy na straně rohatky a rohatka se pootočí nazpět! Oba pohyby se tak vyruší. Není těžké ukázat, že v případě, kdy je teplota na obou stranách stejná, bude střední výsledný pohyb rohatky nulový. Rohatka sice bude kmitat na jednu i druhou stranu, ale nebude se otáčet tak, jak bychom si přáli, tedy jedním směrem.

Všimněme si příčiny takového chování. Abychom zdvihli západku na vrchol zubu, musíme konat práci proti síle pružiny. Označme tuto energii symbolem  $\varepsilon$  a symbolem  $\vartheta$  označme úhel mezi zuby. Pravděpodobnost, že systém nashromáždí dost energie  $\varepsilon$  ke zdvihnutí západky na vrchol zubu, je rovna  $e^{-\varepsilon/kT}$ . Ale pravděpodobnost, že se západka dostane náhodně nahoru, je také rovna  $e^{-\varepsilon/kT}$ . Proto počet případů, kdy je západka nahoře a rohatka se může volně pootočit v opačném směru, je stejný jako počet případů, kdy je dost energie k pootočení rohatky v přímém směru při spuštění západce. Tak dostáváme „rovnováhu“ a rohatka se nebude otáčet.



## 46.2 ROHATKA JAKO STROJ

Pojďme dále. Uvažujme příklad, kdy má větrník teplotu  $T_1$  a rohatka se západkou teplotu  $T_2$ , přičemž  $T_2$  je menší než  $T_1$ . Protože rohatka je chladná a fluktuace západky jsou poměrně řídké, bude pro západku velmi těžké dosáhnout energie  $\varepsilon$ . Protože teplota  $T_1$  je vysoká, větrníček často získá energii  $\varepsilon$  a naše zařízení půjde tak, jak si přejeme, tedy v jednom směru.

Rádi bychom se dozvěděli, zda naše zařízení může zdvihat závaží. K bubnu uprostřed našeho zařízení přivážeme nit a zavěsíme na ni závaží, například zmiňovanou blechu. Necht  $L$  je moment síly vytvořený závažím. Není-li  $L$  příliš velké, náš stroj zdvihne závaží, neboť fluktuace Brownova pohybu jím pohnou častěji jedním směrem než druhým. Chtěli bychom vědět, jakou tíhu může zdvihnout, jak rychle se bude točit atd.

Nejdříve budeme uvažovat pohyb vpřed, pro nějž je vlastně rohatkové ústrojí přizpůsobeno. Kolik energie je třeba vzít z větrníkového konce, aby se uskutečnil jeden krok dopředu? Musíme vzít energii  $\varepsilon$  na zdvihnutí západky. Aby se rohatka otočila o úhel  $\vartheta$  proti momentu  $L$ , je třeba energie  $L\vartheta$ . Celkové množství energie, které musíme vzít, je tedy rovno  $\varepsilon + L\vartheta$ . Pravděpodobnost, že ji dostaneme, je rovna  $e^{-(\varepsilon + L\vartheta)/kT_1}$ . Ve skutečnosti nám nejde jen o získání této energie, ale i o to, kolikrát za sekundu se to stane. Pravděpodobnost za sekundu je úměrná  $e^{-(\varepsilon + L\vartheta)/kT_1}$  a konstantu úměrnosti označíme  $1/\tau$ . Tato konstanta se nakonec stejně vyruší. Při jednom kroku dopředu je práce konaná na závaží rovna  $L\vartheta$ . Energie odebraná z větrníku je rovna  $\varepsilon + L\vartheta$ . Vlákno se namotává s energií  $\varepsilon$ , potom to zaskřípe, klapne a tato energie se přemění v teplo. Všechna odebraná energie se spotřebuje ke zdvihnutí závaží a západky a západka pak zaskočí a odevzdá teplo druhé straně.

Nyní si všimněme případu, kdy jde o opačný pohyb. Co se tu děje? Má-li se rohatka točit nazpět, stačí nám dodat tolik energie, aby se západka dostatečně zdvihla a rohatka proklouzla. Tato energie je také rovna  $\varepsilon$ . Pravděpodobnost za sekundu, že se západka dostatečně zdvihne, je rovna  $(1/\tau) e^{-(\varepsilon/kT_2)}$ . Konstanta úměrnosti je stejná, ale v exponentu je nyní  $kT_2$ , protože teplota je jiná. Když západka proklouzne, ztratí se práce, neboť rohatka proklouzne nazpět. Proklouzl jeden zub a tak se ztratila práce  $L\vartheta$ . Energie odebraná z rohatkového ústrojí je rovna  $\varepsilon$  a energie odevzdaná plynu při teplotě  $T_1$  na straně větrníku je rovna  $L\vartheta + \varepsilon$ . Není těžké to pochopit. Předpokládejme, že západka se sama zdvihla v důsledku fluktuace. Zapadne-li potom nazpět a pružina ji zatlačí proti zubu, máme sílu, která se snaží pootočit rohatku, protože zub tlačí na nakloněnou rovinu. Tato síla koná práci, a stejně i síla pocházející od závaží. Celková síla je součtem těchto sil a všechna energie, která se pomalu uvolňuje, se objeví na straně větrníku v podobě tepla. (Musí to tak být v důsledku platnosti zákona zachování energie, ale je to třeba dobře promyslet!) Vidíme, že všechny tyto energie jsou přesně stejné jako předtím, jen působí v opačném směru. Proto podle toho, který z těchto procesů je rychlejší, závaží pomalu stoupá nebo klesá. Samozřejmě závaží stále poskakuje, kousek nahoru a kousek dolů, ale my máme na mysli průměrné chování.

Předpokládejme, že při určitém závaží jsou rychlosti těchto procesů stejné. Pak přidejme na konec vlákna nekonečně malé závaží. Závaží bude pomalu klesat a stroj bude konat práci. Energie bude odebírána rohatce a odevzdávána větrníku. Když ale trochu závaží ubereme, bude mít nerovnováha opačný charakter. Závaží stoupá a teplo je odebíráno z větrníku a odevzdáváno rohatce. Tak máme podmínky Carnotova vratného cyklu za předpokladu, že závaží je takové, že rychlosti jsou stejné. Tuto podmínku zřejmě vyjadřuje rovnost  $(\varepsilon + L\vartheta)/T_1 = \varepsilon/T_2$ . Necht stroj pomalu zdvihá závaží. Energie  $Q_1$  je odebírána větrníku a energie  $Q_2$  je dodávána rohatce a tyto

## ROHATKA JAKO STROJ

energie jsou v poměru  $(\varepsilon + L\dot{\vartheta})/\varepsilon$ . Spouštíme-li závaží, máme také  $Q_1/Q_2 = (\varepsilon + L\dot{\vartheta})/\varepsilon$ . Proto máme (viz tab. 46.1)

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Tabulka 46.1 Shrnutí pohybů rohatky se západkou

<i>Dopředu:</i> Potřebná energie	$\varepsilon + L\dot{\vartheta}$ z větrníku rychlost procesu = $\frac{1}{\tau} e^{-(L\dot{\vartheta} + \varepsilon)/kT_1}$
Odebráno z větrníku	$L\dot{\vartheta} + \varepsilon$
Vykonaná práce	$L\dot{\vartheta}$
Odevzdáno rohatce	$\varepsilon$
<i>Dozadu:</i> Potřebná energie	$\varepsilon$ pro západku rychlost procesu = $\frac{1}{\tau} e^{-\varepsilon/kT_2}$
Odebráno rohatce	$\varepsilon$
Ztracená práce	$L\dot{\vartheta}$
Odevzdáno větrníku	$L\dot{\vartheta} + \varepsilon$
Je-li systém vratný, rychlosti procesů jsou stejné a tedy $\frac{\varepsilon + L\dot{\vartheta}}{T_1} = \frac{\varepsilon}{T_2}$ .	
$\frac{\text{Teplo k rohatce}}{\text{Teplo z větrníku}} = \frac{\varepsilon}{L\dot{\vartheta} + \varepsilon}$ .	Tedy $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$ .

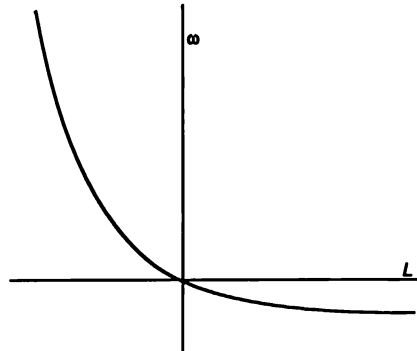
Dále, práce, kterou získáváme, je k energii odebrané z větrníku v takovém poměru jako  $L\dot{\vartheta}$  k  $L\dot{\vartheta} + \varepsilon$ , tedy v poměru  $(T_1 - T_2)/T_1$ . Vidíme, že naše vratně pracující zařízení nemůže vytěžit víc práce, než dovoluje tento vztah. To je hlavní výsledek tohoto článku a na základě Carnotova důkazu jsme tento výsledek i čekali. Naše zařízení však můžeme využít k pochopení některých jiných jevů, dokonce i v nerozváženém stavu, a tedy mimo oblast termodynamiky.

Vypočítejme, jak *rychle* se bude naše jednosměrné zařízení otáčet, bude-li vše při stejné teplotě a na buben zavěsíme závaží. Zatáhneme-li velmi, velmi silně, nastanou samozřejmě rozličné komplikace. Západka prokluzuje přes zuby rohatky, zlomí se pružina nebo se přihodí něco jiného. Předpokládejme však, že zatáhneme dostatečně jemně a vše bude krásně pracovat. Tehdy je výše provedená analýza pro pravděpodobnosti přímého a zpětného pohybu rohatky správná, musíme však zabezpečit rovnost teplot. Při každém kroku získáváme úhel  $\dot{\vartheta}$ , takže úhlová rychlost je  $\dot{\vartheta}$ -násobkem pravděpodobnosti jednoho takového skoku za sekundu. Zařízení se pootočí dopředu s pravděpodobností  $(1/\tau) e^{-(\varepsilon + L\dot{\vartheta})/kT}$  a dozadu s pravděpodobností  $(1/\tau) e^{-\varepsilon/kT}$ , takže pro úhlovou rychlost dostaneme

$$\omega = \frac{\dot{\vartheta}}{\tau} e^{-(\varepsilon + L\dot{\vartheta})/kT} - e^{-\varepsilon/kT} = \frac{\dot{\vartheta}}{\tau} e^{-\varepsilon/kT} (e^{-L\dot{\vartheta}/kT} - 1). \quad (46.1)$$

## ROHATKA SE ZÁPADKOU

Kdybychom nakreslili závislost  $\omega$  na  $L$ , dostali bychom křivku jako na *obrázku 46.2*. Je vidět že je velký rozdíl mezi tím, když  $L$  je kladné, a když  $L$  je záporné. Vyrůstá-li  $L$  v kladné oblasti, což nastává tehdy, snažíme-li se o zpětný chod rohatky, pak se zpětná rychlost blíží konstantě. Stává-li se  $L$  záporným,  $\omega$  prudce roste, protože  $e$  na velkého mocnitele je ohromně velký



Obr. 46.2 Úhlová rychlost rohatky jako funkce momentu síly

Úhlová rychlost vyvolaná různými silami je tedy velmi nesymetrická. Pohyb jedním směrem je snadný: už malá síla vyvolává velkou úhlovou rychlost. Při pohybu opačným směrem můžeme vynaložit velikou sílu a rohatka se sotva točí.

S podobnou situací se setkáme u elektrického usměrňovače. Místo síly máme elektrické pole a místo úhlové rychlosti máme elektrický proud. V případě usměrňovače není napětí úměrné odporu a situace je nesymetrická. Analýza, kterou jsme provedli v případě mechanického usměrňovače, se hodí pro elektrický usměrňovač. Vztah, který jsme získali, je typický i pro závislost propustnosti usměrňovače na působícím napětí.

Odložme nyní všechna závaží a všimněme si původního stroje. Kdyby  $T_2$  bylo menší než  $T_1$ , rohatka by se pohybovala dopředu, tomu každý uvěří. Opačnému případu je však těžší na první pohled uvěřit. Je-li  $T_2$  větší než  $T_1$ , rohatka se otáčí opačným směrem! Silně zahřátá dynamická rohatka se bude otáčet nazpět, protože její západka odskakuje. Je-li západka v určitém okamžiku na nakloněné rovině, odtlačuje tuto rovinu na stranu. Na nakloněnou rovinu však západka tlačí vždy, neboť i když se zdvihne dost vysoko a přejde přes okraj zubu, nakloněná rovina sklouzne a západka je opět na nakloněné rovině. Horká rohatka se západkou je tedy ideálně přizpůsobena pro chod v přesně opačném směru, než je směr, pro který byla původně navržena!

Přes všechnu naši šikovnost při konstrukci jednostranného mechanismu při rovnosti teplot mizí dispozice otáčet se spíše jedním než druhým směrem. V okamžiku, kdy se na zařízení díváme, může se otáčet na jednu nebo na druhou stranu, ale z hlediska dlouhodobého režimu se nikam nedostane. Tato skutečnost je základním, hlubokým principem, na němž spočívá celá termodynamika.

### 46.3 VRATNOST V MECHANICE

Co je to za hluboký mechanický princip, který nám říká, že při rovnosti teplot se naše zařízení neotočí ani doprava, ani doleva, pracuje-li dostatečně dlouho? Jde zřejmě o základní tvrzení, že nemůžeme zkonstruovat stroj, který by se ponechán sám sobě dostatečně dlouhou dobu

pohyboval s větší pravděpodobností jedním směrem než druhým. Pokusme se vysvětlit, jak toto tvrzení vyplývá ze zákonů mechaniky.

Zákony mechaniky vypadají asi takto: součin hmotnosti a zrychlení je roven síle působící na částici a síla působící na částici je nějakou složitou funkcí polohy všech ostatních částic. Existují i takové případy, kdy síly závisí na rychlosti jako v magnetizmu, ale takové případy teď nebudeme uvažovat. Všimneme si jednoduššího případu, jakým je gravitace, a v takovém případě síly závisí jen na poloze. Předpokládejme, že jsme už vyřešili náš systém rovnic a našli jsme nějaký zákon pohybu  $x(t)$  pro každou částici. Je-li systém dost složitý, řešení jsou velmi složitá, a to, co se děje v průběhu času, je velmi překvapující. Vymyslíme-li si totiž libovolnou konfiguraci částic, tato konfigurace se skutečně vyskytne, jen musíme dostatečně dlouho čekat! Sledujeme-li naše řešení dostatečně dlouho, vidíme, že projde vlastně všemi možnými situacemi. V případě nejjednodušších zařízení to není absolutně nevyhnutné, ale je-li systém dost složitý, s velkým množstvím atomů, pak se to stává.

Je ještě jedna věc, která plyne z našeho řešení. Vyřešíme-li pohybové rovnice, dostaneme určité funkce času, například  $t + t^2 + t^3$ . Tvrdíme, že druhým řešením bude  $-t + t^2 - t^3$ . Jinými slovy, dosadíme-li v řešení všude  $-t$  místo  $t$ , opět dostaneme řešení téže rovnice. Tato skutečnost je důsledkem toho, že při dosazení  $-t$  místo  $t$  do původní diferenciální rovnice se nic nezmění, neboť v rovnici vystupují pouze druhé derivace podle  $t$ . To znamená, že při určitém pohybu je možný i přesně opačný pohyb. V úplném chaosu, k němuž dochází, čekáme-li dostatečně dlouho, se pohyb uskuteční občas v jednom a občas v druhém směru. Určitý pohyb není o nic hezčí než pohyb opačný. Proto je nemožné zkonstruovat stroj, který by v dlouhodobém režimu dával přednost chodu v jednom směru před chodem v opačném směru, je-li tento stroj dostatečně složitý!

Můžeme vymyslet příklad, v němž toto naše tvrzení zřejmě neplatí. Například vezmeme-li kolo a v prázdném prostoru ho roztočíme, bude se neustále otáčet stejným směrem. Existují tedy určité podmínky, jako zachování momentu hybnosti, které nevyhovují našemu tvrzení. Naše tvrzení proto musíme formulovat opatrněji. Moment hybnosti mohou odebrat stěny nebo jiná tělesa, a proto už neplatí zákony zachování pro náš speciální pohyb. Proto je při dostatečné složitosti systému naše tvrzení správné. Zakládá se na skutečnosti, že zákony jsou vratné.

Z historických důvodů připomeneme zařízení vymyšlené Maxwellem, který jako první vypracoval dynamickou teorii plynů. Maxwell si představil takovou situaci: Dvě nádoby s plynem jsou spojené malým otvorem a mají stejnou teplotu. U otvoru sedí maličký démon (může to být samozřejmě stroj!). Otvor má dvířka, která démon může otevřít nebo zavřít. Pozoruje molekuly přicházející zleva. Když uvidí rychlou molekulu, otevře dvířka. Když uvidí pomalou molekulu, nechá dvířka zavřená. Kdybychom chtěli, aby to byl zvláště dokonalý démon, mohli bychom požadovat, aby měl oči i vzadu a dělal opačné úkony s molekulami přicházejícími z opačné strany. Pomalé molekuly by nechal procházet doleva a rychlé doprava. A nyní řekněte, jsou zákony termodynamiky narušeny existencí takového démona?

Ukazuje se, že démon konečných rozměrů by se sám tak zahřál, že by po chvíli už dobře neviděl. Příkladem takového nejjednoduššího démona by byla dvířka s pružinou, která by zakrývala otvor. Rychlá molekula jimi projde, neboť je schopná dvířka pootevřít. Pomalá molekula však projít nemůže a odrazí se nazpět. Jenže to není nic jiného než jiná forma našeho rohatkového ústrojí a my už víme, že takový mechanismus se musí zahřívát. Je v něm jen konečný počet vnitřních součástí, takže se nemůže zbavit přebytku tepla, které získal pozorováním molekul. V důsledku Brownova pohybu se začne brzo chvět tak, že nebude moci rozhodnout, zda se molekuly přibližují nebo vzdalují, a tak nebude schopen činnosti.

## 46.4 NEVRATNOST

Jsou všechny fyzikální zákony vratné? Zřejmě ne! Zkuste udělat ze smaženice vejce! Promítnete-li film obráceným směrem, budou se všichni smát. Nejpřirozenějším rysem všech jevů je jejich zjevná nevratnost.

Odkud nevratnost pochází? Z Newtonových zákonů ne. Žádáme-li, aby chování všech věcí v konečném důsledku vysvětlit pomocí fyzikálních zákonů, a ukáže-li se, že všechny rovnice mají tu fantastickou vlastnost, že při  $t = -t$  máme další řešení, pak musí být všechny jevy vratné. Čím to potom je, že v přírodě ve velkém měřítku nejsou děje vratné? Zřejmě musí existovat určitý zákon, nějaká skrytá základní rovnice, snad z oblasti elektrických jevů nebo fyziky neutrina, u níž záleží na tom, kterým směrem plyne čas.

Nyní se zabýváme tímto problémem. Jeden z takových zákonů už známe a ten říká, že entropie vždy roste. Máme-li teplý a chladný předmět, přechází teplo z teplého předmětu na chladný. Zákon entropie je tedy jedním takovým zákonem. Jenže my bychom chtěli pochopit zákon růstu entropie z hlediska mechaniky. Už se nám podařilo jen pomocí mechanických argumentů odvodit důsledky toho, že teplo samo nemůže procházet nazpět, a tak pochopit druhý zákon termodynamiky. Zřejmě tedy můžeme dostat nevratnost z vratných rovnic. Ale využili jsme při tom opravdu pouze zákony mechaniky? Podívejme se na to podrobněji.

Pokusme se najít mikroskopický popis entropie. Když říkáme, že někde (například v plynu) je určité množství energie, pak mikroskopický obraz získáme tehdy, když určíme, kolik energie má každý atom. Sečtáním energií jednotlivých atomů dostaneme celkovou energii. Podobně můžeme čekat, že každý atom má určitou entropii. Když tyto entropie sečteme, měli bychom dostat celkovou entropii. V tomto případě to už není tak jednoduché, ale uvažme, co se stane.

Jako příklad vypočítejme rozdíl entropií plynu při určité teplotě v jednom objemu a téhož plynu při stejné teplotě, ale v jiném objemu. Vzpomeňme si, že v 44. kapitole jsme pro rozdíl entropií měli vztah

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}.$$

V našem případě je energie plynu před expanzí a po expanzi stejná, protože teplota se nemění. Musíme tedy dodat dostatek tepla k vyrovnání práce konané plynem, tedy pro každou malou změnu objemu

$$dQ = p dV.$$

Dosadíme-li za  $dQ$ , dostaneme

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} p \frac{dV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{V} \frac{dV}{T} = Nk \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

To je výsledek, který jsme získali už v 44. kapitole. Zvětšíme-li například objem dvojnásobně, změna entropie bude  $Nk \ln 2$ .

Uvažujme nyní jiný zajímavý případ. Předpokládejme, že máme nádobu s přepážkou uprostřed. Na jedné straně je neon („černé“ molekuly) a na druhé argon („bílé“ molekuly). Pak přepážku odstraníme a molekuly necháme smísit. Jak se mění entropie? Můžeme si představit, že místo přepážky máme píšť s otvory, jímž mohou procházet bílé molekuly, ale černé ne a potom

máme jiný píst, který má opačné vlastnosti. Pohybujeme-li pístem z jednoho konce nádoby na druhý, máme pro každý plyn právě takový problém, jaký jsme už vyřešili. Entropie se tedy mění o hodnotu  $Nk \ln 2$ , to znamená, že entropie připadající na jednu molekulu vzrostla o  $k \ln 2$ . Číslo 2 tam vystupuje, neboť molekula má prostor navíc, což je dost zvláštní. Není to vlastnost samotné molekuly, ale *volného prostoru* kolem ní. Vzniká neobvyklá situace, kdy entropie roste, ale všechno má stejnou teplotu a stejnou energii. Jediná změna nastala v tom, že molekuly jsou jinak rozloženy.

Velmi dobře víme, že po odstranění přepážky by se po dlouhém čase vše promísilo v důsledku srážek, kmitů, nárazů apod. V průběhu času se stává, že se bílá a černá molekula pohybují proti sobě a mohou se minout. Postupně náhodně vnikají bílé molekuly mezi černé a naopak. Bude-li dost dlouho čekat, dostaneme směs. Je to bezpochyby nevratný proces reálného světa a musí vést k růstu entropie.

Setkali jsme se s jednoduchým příkladem nevratného procesu, který je celý složen z vratných událostí. Každou chvíli dochází ke srážce mezi dvěma molekulami a ty se rozletí do určitých směrů. Kdybychom promítli filmový záznam srážek v opačném sledu, diváci by neshledali na filmu nic neobvyklého. Opravdu, vždyť jeden druh srážky je stejně pravděpodobný jako druhý. Mísení je úplně vratné, a přece i nevratné. Každý ví, že kdybychom začali s oddělenými černými a bílými molekulami, dostali bychom za několik málo minut směs. Kdybychom si sedli a dívali se na směs ještě několik minut, molekuly by se neoddělily, ale zůstaly by smísené. Máme tedy nevratnost, která spočívá na vratných situacích. Nyní však vidíme i *příčinu*. Začali jsme se seskupením, jež je v určitém smyslu *uspořádané*. V důsledku chaotičnosti srážek se stalo neuspořádaným. *Zdrojem nevratnosti je právě přechod od uspořádaného seskupení k neuspořádanému.*

Kdybychom nafilmovali takový proces a promítli ho v obráceném sledu, viděli bychom jak postupně dochází k uspořádání. Někdo by však mohl říci: „Vždyť je to proti fyzikálním zákonům!“ Znovu bychom promítli film a sledovali bychom každou srážku. Každá by byla dokonalá a každá by vyhovovala fyzikálním zákonům. Příčina spočívá v tom, že rychlosti všech molekul jsou správné, takže sledujeme-li dráhy nazpět, dostaneme se k počátečním podmínkám. Taková situace je však velmi málo pravděpodobná. Kdybychom začali s plynem, v němž není nějaké zvláštní seskupení molekul, ale jsou tam prostě bílé a černé molekuly, nikdy by se nevrátily do původní situace a neoddělily by se.

## 46.5 USPOŘÁDÁNÍ A ENTROPIE

Nyní si musíme říci něco o tom, co rozumíme uspořádáním a co neuspořádáním. Nejde o to, zda je uspořádání hezké a neuspořádání ošklivé. Naše smísené a nesmísené plyny se liší v následujícím: Předpokládejme, že jsme prostor rozdělili na malé objemové elementy. Kolika způsoby můžeme rozmístit do objemových elementů bílé a černé molekuly tak, že bílá molekula bude na jedné straně a černá molekula na druhé straně? A kolika způsoby je můžeme rozmístit, když neklademe žádnou podmínku na jejich uložení? Je jasné, že v druhém případě máme mnohem více možností. „Neuspořádání“ měříme počtem způsobů, jimiž můžeme přeskupovat vnitřek aniž by se změnil vnější vzhled. *Logaritmus tohoto počtu způsobů je entropie.* V případě, kdy bílé a černé molekuly jsou odděleny, je počet těchto způsobů menší, a proto je menší entropie, resp. menší je „neuspořádání“.

S takovou technickou definicí neuspořádání můžeme pochopit naše tvrzení. Především, entropie měří neuspořádání. Dále vesměr vždy přechází od „uspořádání“ k „neuspořádání“, takže entropie vždy roste. Uspořádání není pořádkem v tom smyslu, že se nám takové seskupení líbí,

ale v tom smyslu, že počet různých seskupení, která si můžeme vymyslet tak, aby systém zvenku vypadal stejně, je poměrně omezený. V případě, kdy jsme promítli filmový záznam mísení plynů v opačném sledu, neměli jsme tak velké neuspořádání, jak bychom se mohli domnívat. Každý jednotlivý atom měl přesně takovou rychlost a takový směr, aby se dostal na správné místo! I když se to nezdálo, entropie nebyla vůbec veliká.

Co můžeme říci o vratnosti jiných fyzikálních zákonů? Když jsme mluvili o elektrickém poli pocházejícím od náboje pohybujícího se se zrychlením, řekli jsme, že musíme uvažovat retardované pole. V okamžiku  $t$  a ve vzdálenosti  $r$  od náboje bereme pole náboje se zrychlením při  $t - r/c$ , ne  $t + r/c$ . Na první pohled to vypadá tak, jakoby zákony elektřiny nebyly vratné. To je však velmi divné, neboť tyto zákony vyplývají ze soustavy Maxwellových rovnic, které jsou vratné. Můžeme také dokázat, že kdybychom brali jen avansované pole, tedy pole odpovídající událostem v čase  $t + r/c$  a provedli bychom to velmi důsledně ve zcela uzavřeném prostoru, vše by probíhalo přesně tak, jako v případě retardovaných polí! Tato zdánlivá nevratnost v elektřině, alespoň v uzavřeném prostoru není vůbec nevratností. To jsme vlastně už mohli tušit, neboť víme, že když kmitající náboj generuje pole, které se odráží od stěn nádoby, dojde nakonec k rovnováze, v níž není jednostrannost. Použití retardovaného pole je jen vhodnou metodou řešení.

Pokud víme, všechny základní fyzikální zákony, tak jako Newtonovy rovnice, jsou vratné. Odkud potom pochází nevratnost? Pochází z přechodu od uspořádání k neuspořádání, ale to nepochopíme, dokud nepoznáme důvod uspořádání. Čím to je, že situace, s nimiž se setkáváme v každodenním životě jsou vždy nerovnovážné? Jedno možné vysvětlení je toto. Všimněme si opět naší nádoby se směsí bílých a černých molekul. Je možné, že při dost dlouhém čekání by čirou náhodou, velmi nepravděpodobně, ale přece jen možná vzniklo takové rozdělení molekul, že na jedné straně by byly většinou bílé a na druhé straně většinou černé molekuly. Pak, postupem času a vývojem událostí by se molekuly opět promísily.

Jedním z možných vysvětlení vysokého stupně uspořádání v současném světě je prostě šťastná náhoda. V našem vesmíru možná v minulosti došlo ke vzniku určitého druhu fluktuace, kdy se věci poněkud oddělily a nyní se vrací k původnímu stavu. Taková teorie není nesymetrická, protože si můžeme položit otázku, jak budou oddělené plyny vypadat v blízké budoucnosti a jak vypadaly v nedávné minulosti. V obou případech bychom viděli šedivou skvrnu na rozhraní, protože molekuly se opět mísí. Plyny by se mísily bez ohledu na to, kterým směrem by plynul čas. Taková teorie by nevratnost vysvětlovala jako jednu z náhod života.

Vynasnažíme se ukázat, že věci se mají jinak. Předpokládejme, že nevidíme celou nádobu najednou, ale pouze její část a v určitém okamžiku objevíme v této části určitou míru uspořádání. V této malé části jsou bílé a černé molekuly odděleny. Co můžeme soudit o podmínkách v místech, kam jsme se ještě nepodívali? Věřme-li opravdu, že uspořádání vzniklo z úplného neuspořádání jako fluktuace, musíme vzít nejpravděpodobnější fluktuaci z těch, které mohou v pozorované části nastolit uspořádání. Ta však neodpovídá podmínce, že v ostatních částech panuje uspořádání. Z hypotézy, že svět je fluktuace, by vyplývalo, že podíváme-li se na tu část světa, kterou jsme nikdy předtím neviděli, musí být neuspořádaná, a ne taková, jako je ta část, kterou již známe. Kdyby bylo naše uspořádání důsledkem fluktuace, nemohli bychom očekávat uspořádání v jiných místech, než jsou ta, na nichž jsme ho už objevili.

Nyní předpokládejme, že rozdělení je důsledkem toho, že v minulosti byl vesmír skutečně uspořádaný. Nejde tedy o důsledek fluktuace, ale původně vypadalo všechno tak, že bílé a černé bylo odděleno. Taková teorie předpovídá, že uspořádání bude i na jiných místech, která jsme zatím ještě neviděli. Například astronomové zatím pozorovali jen některé z hvězd. Každý den obracejí své teleskopy k jiným hvězdám a nové hvězdy se chovají jako ostatní. Z toho usuzujeme,

že vesmír není fluktuace a uspořádání je památkou na ty podmínky, kdy vše začínalo. To však neznamená, že chápeme logiku tohoto děje. Z nějakých důvodů měl vesmír v určitém okamžiku velmi malou entropii vzhledem ke svému energetickému obsahu a od té doby entropie roste. Taková je cesta do budoucna. Takový je původ vši nevratnosti procesů růstu a zániku, proto si pamatujeme věci, které jsou blíže k tomu okamžiku v historii vesmíru, kdy bylo uspořádání vyšší, než je nyní, a proto si nemůžeme pamatovat věci, kdy je neuspořádání vyšší než teď, což nazýváme budoucností. Jak jsme poznamenali v jedné z předcházejících kapitol, v poháru vína vidíme celý vesmír, podíváme-li se na něj pozorně. Pohár vína je opravdu složitá věc, vždyť je tam víno a sklo, světlo a mnoho jiných věcí.

Další půvab fyziky spočívá v tom, že i takové jednoduché a idealizované věci, jako je rohatkové ústrojí, pracují jen proto, že jsou částí vesmíru. Rohatka a západka se pohybují jedním směrem, neboť jsou v kontaktu s ostatními částmi vesmíru. Kdyby byly v uzavřeném prostoru a dostatečně dlouho izolovány, ozubené kolo by už nedávalo přednost jednomu směru otáčení před druhým. Jenže tak jako k nám po vytažení žaluzií pronikne světlo, jako nás zem chladí a slunce hřeje, tak se i rohatka pohybuje jedním směrem. Tato jednosměrnost souvisí se skutečností, že rohatka je částí vesmíru, a to nejen v tom smyslu, že podléhá fyzikálním zákonům vesmíru, ale i proto, že celý vesmír má jednostranné chování. Nemůžeme to plně pochopit, pokud se v záhadě historie počátků vesmíru nedostaneme od pochybných spekulací k vědeckému poznání.



# Zvuk. Vlnová rovnice

---

## 47.1 VLNY

## 47.2 ŠÍŘENÍ ZVUKU

## 47.3 VLNOVÁ ROVNICE

## 47.4 ŘEŠENÍ VLNOVÉ ROVNICE

## 47.5 RYCHLOST ZVUKU

### 47.1 VLNY

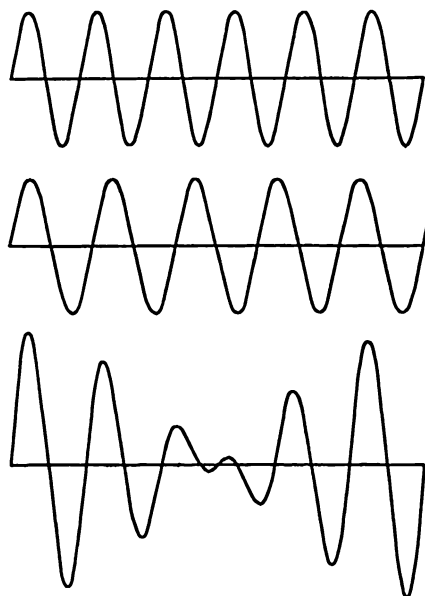
V této kapitole budeme mluvit o novém jevu – o vlnách. Je to jev, který se ve fyzice objevuje v mnoha souvislostech a budeme mu věnovat pozornost nejen proto, že se zajímáme o speciální případ vlnění, kterým je zvuk, ale také proto, že tyto myšlenky nacházejí široké uplatnění ve všech odvětvích fyziky.

Při studiu harmonického oscilátoru jsme ukázali, že vedle mechanických oscilujících systémů existují i elektrické. Vlny souvisí s kmitáním systémů, ale vlnění není jen kmitání na jednom místě závislé na čase, ale je to i šíření prostorem.

Vlny jsme už opravdu zkoumali. Když jsme mluvili o světle a učili se o vlastnostech světelných vln, věnovali jsme zvláštní pozornost prostorové interferenci vln stejné frekvence pocházejících z různých zdrojů nacházejících se v různých místech. Existují ještě dva důležité vlnové jevy, které jsme zatím ještě nestudovali a které se vyskytují v případě světla, tj. elektromagnetického vlnění, právě tak jako v případě kterýchkoliv jiných vln. Prvním z nich je *interference*, jenže ne v prostoru, ale v čase. Máme-li dva zdroje zvuku s nepatrně odlišnými frekvencemi a oba je současně slyšíme, pak k nám někdy přicházejí naráz vrchy obou vln a někdy vrch jedné s dolem druhé (viz *obr. 47.1*). Výsledkem je zesílení a zeslabení zvuku a tento jev nazýváme *rázy* (zázněje) nebo interference v čase. Druhý jev nastává, když je vlnění omezeno na určitý objem a odráží se od stěn takového prostoru.

O těchto jevech jsme, samozřejmě, mohli mluvit i v případě, kdy jsme zkoumali elektromagnetické vlny. Neudělali jsme to proto, abychom nevzbudili pocit, že se najednou učíme o mnoha odlišných věcech. Abychom zdůraznili obecný charakter vlnění, které se neomezuje pouze na elektrodynamiku, budeme nyní uvažovat jiný příklad vln, konkrétně zvukové vlny.

## VLNY



**Obr. 47.1** Interference zvuku od dvou zdrojů s mírně rozdílnými frekvencemi vede k rázům

Jinými příklady vln jsou vlny na vodní hladině skládající se z dlouhých hřebenů, které vidíme přicházet ke břehu nebo malé vlnky na zčeřené hladině způsobené povrchovým napětím. Dalším příkladem vlnění jsou dva druhy pružných vln v pevných látkách. Vlny stlačené (podélné vlny), v nichž částice pevné látky kmitají podél směru šíření vlny (takovými jsou i zvukové vlny v plynu) a příčné vlny, v nichž částice pevné látky kmitají ve směru kolmém ke směru šíření. Seismické vlny obsahují vlnění obou druhů a vznikají pohybem některého místa zemské kůry.

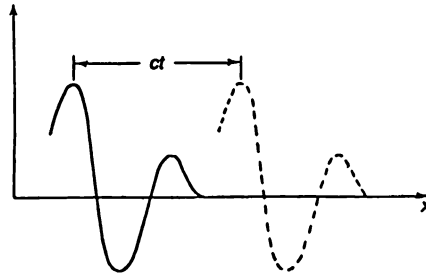
Moderní fyzika objevila další příklad vln. Jsou to vlny určující amplitudu pravděpodobnosti nalezení částice v daném místě – de Broglieovy „vlny hmoty“, o nichž jsme již mluvili. Jejich frekvence je úměrná energii a jejich vlnové číslo je úměrné hybnosti. Jsou to vlny kvantové mechaniky.

V této kapitole budeme uvažovat jen takové vlny, jejichž rychlost nezávisí na vlnové délce. Příkladem takových vln je šíření světla ve vakuu. Rychlost světla je v takovém případě stejná pro rádiové vlny, modré nebo zelené světlo nebo kteroukoliv vlnovou délku. Právě proto jsme si hned zpočátku při popisu vlnových jevů neřekli, že máme šíření vlny. Místo toho jsme říkali, že při pohybu náboje v jednom místě je elektrické pole ve vzdálenosti  $x$  úměrné ne zrychlení v čase  $t$ , ale v pozdějším čase  $t - x/c$ . Změna průběhu elektrického pole v prostoru je znázorněna na obr. 47.2, kde je vidět, že v pozdějším čase  $t$  se průběh pole posune o vzdálenost  $ct$ . Matematicky to pro jednorozměrný případ, o který se zajímáme, můžeme vyjádřit tak, že elektrické pole je funkcí  $x - ct$ . Je vidět, že při  $t = 0$  je určitou funkcí  $x$ . Budeme-li uvažovat pozdější okamžik, dostaneme stejnou hodnotu elektrického pole při větším  $x$ . Například, když bylo maximum pole v nulovém okamžiku při  $x = 3$ , určíme novou polohu maxima pole v okamžiku  $t$  takto

$$x - ct = 3, \text{ resp. } x = 3 + ct.$$

Vidíme, že taková funkce odpovídá šíření vlny.

## ZVUK. VLNOVÁ ROVNICE



Obr. 47.2 Průběh elektrického pole v určitém časovém okamžiku (plná čára) a v okamžiku, který je o dobu  $t$  zpožděn (přerušovaná čára)

Funkce  $f(x - ct)$  tedy představuje vlnu. Tento popis vlny můžeme shrnout do tvrzení, že

$$f(x - ct) = f(x + \Delta x - c(t + \Delta t)),$$

když  $\Delta x = c\Delta t$ . Samozřejmě existuje i jiná možnost, kdy místo zdroje na levé straně (obr. 47.2) máme zdroj na pravé straně a vlna se šíří v záporném směru  $x$ . V takovém případě bude vlnu popisovat funkce  $g(x + ct)$ .

Existuje i taková možnost, že v prostoru je současně více vln, takže elektrické pole je například součtem dvou polí a každé se šíří nezávisle. Takové chování elektrických polí můžeme charakterizovat tvrzením, že když  $f_1(x - ct)$  je vlna a  $f_2(x - ct)$  je jiná vlna, jejich součet je také vlna. Toto tvrzení nazýváme principem superpozice. Tento princip platí i v případě zvuku.

Dobře známe skutečnost, že při zvukové reprodukci slyšíme dokonale věrně stejnou posloupnost zvuků, jaká byla generována. Kdyby se vyšší frekvence šířily rychleji než nižší, slyšeli bychom místo hudby krátký, ostrý a nepřijemný zvuk. Podobně, kdyby se červené světlo šířilo rychleji než modré, záblesk bílého světla by nejprve vypadal červeně, pak bíle a nakonec modře. My však velmi dobře víme, že to tak není. I zvuk, i světlo se šíří vzduchem rychlostí, která téměř nezávisí na frekvenci. Příklady šíření vln, kdy není tato nezávislost splněna, budou uvažovány v kapitole 48.

V případě světla (elektromagnetických vln) jsme měli pravidlo, které určovalo elektrické pole v daném bodě jako důsledek zrychlení náboje. Dalo by se očekávat, že by bylo potřeba najít pravidlo, podle něhož by byla některá vlastnost vzduchu, řekněme tlak, určena v dané vzdálenosti od zdroje pomocí pohybu zdroje s přihlédnutím ke zpoždění při šíření zvuku. V případě světla bylo možné takový postup použít, neboť vše, co jsme věděli, spočívalo v tom, že náboj v jednom místě působí silou na druhý náboj v jiném místě. Podrobnosti šíření z jednoho místa na druhé nebyly vůbec podstatné. V případě zvuku však víme, že se šíří vzduchem mezi zdrojem a posluchačem a je jistě přirozené se ptát, jaký je tlak vzduchu v daném okamžiku. Chtěli bychom vědět i to, jak se vzduch skutečně pohybuje. V případě elektřiny jsme mohli akceptovat určité pravidlo, neboť jsme ještě neznali její zákony, ale v případě zvuku je už situace jiná. Už by nás neuspokojilo pravidlo o šíření zvukového tlaku, protože takový proces musí být možné vysvětlit jako důsledek zákonů mechaniky. Zkrátka zvuk je částí mechaniky, a proto ho musí být možné vysvětlit pomocí Newtonových zákonů. Šíření zvuku z jednoho místa na druhé je pouhým důsledkem mechaniky a vlastností plynů, jde-li o šíření v plynu, nebo vlastností kapalin či pevných látek, jde-li o šíření v takovém prostředí. Později odvodíme vlastnosti světla a jeho vlnového šíření podobným způsobem ze zákonů elektrodynamiky.

## 47.2 ŠÍŘENÍ ZVUKU

Nyní odvodíme vlastnosti šíření zvuku mezi zdrojem a přijímačem jako důsledek Newtonových zákonů, interakci zdroje a přijímače nebudeme uvažovat. Obvykle klademe důraz spíše na výsledek než na jeho odvození. V této kapitole zaujmeme opačný postoj. Zde bude v určitém smyslu hlavním právě odvození. Způsob vysvětlení nového jevu pomocí starých jevů, jejichž zákony už známe, je snad největším uměním matematické fyziky. Matematický fyzik má dva problémy: jedním je nalezení řešení dané rovnice a druhým je nalezení rovnic, které popisují nový jev. Odvození, které zde podáme, patří k druhému typu problémů.

Budeme uvažovat ten nejjednodušší problém – šíření zvuku v jednom směru. Abychom mohli takové odvození uskutečnit, musíme mít nejprve určitou představu o tom, co se děje. Základem tohoto jevu je, že při pohybu tělesa ve vzduchu vzniká rozruch, jenž se šíří vzduchem. Na otázku, o jaký rozruch jde, bychom mohli odpovědět, že pohyb předmětu vyvolává změny tlaku. Samozřejmě, když se předmět pohybuje pomalu, vzduch ho jen obtéká, ale nás zajímá rychlý pohyb, když vzduch nestihne obtéct těleso. Při takovém pohybu je vzduch stlačován, vzniká změna tlaku, která ovlivňuje sousedící vzduch. Stlačení tohoto vzduchu vede opět k dodatečnému tlaku, a tak se šíří vlna.

Takový proces chceme vyjádřit matematicky. Musíme se rozhodnout, jaké proměnné potřebujeme. V našem speciálním případě potřebujeme vědět, jak se vzduch přemístil, takže *posunutí* vzduchu ve zvukové vlně bude určitě důležitou proměnnou. Navíc bychom chtěli popsat, jak se mění *hustota* vzduchu při jeho posunutí. I *tlak* vzduchu se mění, takže bude další proměnnou, která nás zajímá. Vzduch má, samozřejmě, *rychlost*, a proto musíme popsat rychlost částic vzduchu. Částice vzduchu mají i *zrychlení* – ale při vyjmenovávání těchto mnoha proměnných snadno pochopíme, že rychlost i zrychlení budeme znát, budeme-li vědět, jak se mění posunutí vzduchu s časem.

Jak jsme již uvedli, budeme uvažovat vlnu v jednom rozměru. Tak můžeme uvažovat, jsme-li dostatečně daleko od zdroje a to, co nazýváme *čelem vlny*, se jen velmi málo liší od roviny. Naše úvahy se zjednoduší tím, že bereme ten nejjednodušší příklad. Tak budeme moci říci, že posunutí  $\chi$  závisí pouze na  $x$ ,  $t$  a ne na  $y$ ,  $z$ . Chování vzduchu proto charakterizujeme funkcí  $\chi(x, t)$ .

Je takový popis úplný? Zdálo by se, že zdaleka není úplný, neboť neznáme podrobnosti pohybu molekul vzduchu. Ty se pohybují všemi směry a takový stav určitě není popsán funkcí  $\chi(x, t)$ . Z hlediska kinetické teorie, máme-li větší hustotu molekul v jednom místě a menší v sousedním místě, by molekuly měly odcházet z oblasti větší hustoty a přicházet do místa s menší hustotou, aby se tento rozdíl vyrovnal. Zřejmě bychom nedostali oscilace a neměli bychom ani zvuk.

Abychom dostali zvukovou vlnu, musí nastat následující situace: když molekuly vyletují z oblasti větší hustoty a většího tlaku, odevzdávají hybnost molekulám v přilehlé oblasti menší hustoty. Aby zvuk vznikl, musí být oblast, v níž se mění hustota a tlak, mnohem větší než vzdálenost, kterou projde molekula dříve než se srazí s jinou molekulou. Touto vzdáleností je střední volná dráha a musí být mnohem menší než vzdálenost mezi vrchem a dolem tlaku. V opačném případě se molekuly volně přemístí z vrchu do dolu vlny a okamžitě ji vyhladí.

Chování plynu budeme popisovat v měřítku, které je velké ve srovnání se střední volnou dráhou, a proto je jasné, že vlastnosti plynu nebudeme charakterizovat chováním jednotlivých molekul. Například posunutí bude posunutím těžiště malého objemu plynu a tlak nebo hustota budou tlakem nebo hustotou v tomto objemu. Tlak označíme symbolem  $p$ , hustotu  $\rho$  a tyto veličiny budou funkcemi  $x$  a  $t$ . Musíme však mít na zřeteli, že takový popis je přibližným, které je vhodné jen tehdy, když se vlastnosti plynu nemění příliš rychle se vzdáleností.

**47.3 VLNOVÁ ROVNICE**

Fyzika jevu, který nazýváme zvukovou vlnou, zkoumá tři charakteristické vztahy;

I. Plyn se pohybuje a mění se jeho hustota.

II. Změně hustoty odpovídá změna tlaku.

III. Nerovnoměrné rozdělení tlaku vyvolává pohyb plynu.

Nejdříve uvažujme druhý vztah. Jak v případě plynu, tak i v případě kapaliny nebo pevné látky je tlak určitou funkcí hustoty. Do přechodu zvukové vlny máme rovnováhu s tlakem  $p_0$  a odpovídající hustotou  $\rho_0$ . Tlak v prostředí souvisí s hustotou prostřednictvím určitého charakteristického vztahu  $p = f(\rho)$  a konkrétně rovnovážný tlak  $p_0$  je dán vztahem  $p_0 = f(\rho_0)$ . V případě zvuku jsou změny tlaku vzhledem k rovnovážné hodnotě mimořádně malé. Vhodnou jednotkou měření tlaku je 1 bar, přičemž 1 bar =  $10^5 \text{ N/m}^2$ .<sup>57)</sup> Tlak jedné standardní atmosféry je přibližně 1 bar. Platí 1 atm = 1,0133 bar. V případě zvuku používáme logaritmickou stupnici intenzit, neboť citlivost ucha je přibližně logaritmická. Je to decibelová stupnice, v níž je hladina akustického tlaku, odpovídající amplitudě tlaku  $p$ , definována jako

$$I(\text{hladina akustického tlaku}) = 20 \log_{10} (p/p_{\text{ref}}) \text{ v dB}, \quad (47.1)$$

kde referenční tlak  $p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-10}$  bar. Amplituda tlaku  $p = 10^3 p_{\text{ref}} = 2 \cdot 10^{-7}$  bar<sup>58)</sup> odpovídá mírně silnému zvuku 60 decibelů. Je vidět, že tlakové změny zvuku jsou mimořádně malé ve srovnání s rovnovážným nebo středním tlakem jedné atmosféry. Posunutí a změny hustoty jsou také mimořádně malé. Při výbuších však změny nejsou už tak malé a vytvořený dodatečný tlak může být větší než 1 atm. Takové velké tlakové změny vedou k novým jevům, které budeme uvažovat později. V případě zvuku často neuvažujeme hladiny akustické intenzity převyšující 100 dB; vždyť při hladině 120 dB již pociťujeme bolest ucha. Proto v případě zvuku, když píšeme

$$p = p_0 + p_e \quad \rho = \rho_0 + \rho_e \quad (47.2)$$

budeme mít vždy změnu tlaku  $p_e$  velmi malou ve srovnání s  $p_0$  a změnu hustoty  $\rho_e$  velmi malou ve srovnání s  $\rho_0$ . Proto

$$p_0 + p_e = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e f'(\rho_0), \quad (47.3)$$

kde  $p_0 = f(\rho_0)$  a  $f'(\rho_0)$  představuje derivaci  $f(\rho)$  v bodě  $\rho = \rho_0$ . Pravá strana tohoto vztahu platí jen tehdy, když  $\rho_e$  je velmi malé. Tak zjišťujeme, že dodatečný tlak  $p_e$  je úměrný dodatečné hustotě  $\rho_e$  a koeficient úměrnosti označíme symbolem  $\kappa$ :

$$p_e = \kappa \rho_e, \text{ kde } \kappa = f'(\rho_0) = (dp/d\rho)_0 \quad (\text{II}). \quad (47.4)$$

57) Vlastně  $10^3 \text{ hPa}$ . (pozn. red.)

58) Při takové volbě  $p_{\text{ref}}$  nepředstavuje tlak  $p$  maximum tlaku zvukové vlny, ale „střední kvadratický“ tlak, který je  $(2)^{-1/2}$ -násobkem maximálního tlaku.

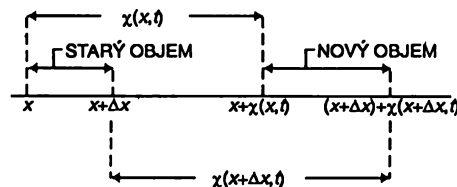
59) Indexem  $e$  jsme označili dodatečný „excesivní“ tlak spojený se zvukovou vlnou. (pozn. red.)

## VLNOVÁ ROVNICE

To je právě vyjádření vztahu II v tom jednoduchém případě.

Nyní uvažujeme vztah I. Předpokládejme, že poloha objemového elementu vzduchu neporušeného zvukovou vlnou je  $x$  a posunutí v čase  $t$  způsobené zvukem je  $\chi(x, t)$ , takže nová poloha je  $x + \chi(x, t)$ , jak je to znázorněno na obr. 47.3. Neporušená poloha sousedního objemového elementu vzduchu je  $x + \Delta x$  a jeho nová poloha je  $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ . Změny hustoty můžeme najít následujícím způsobem. Omezujeme-li se na rovinné vlny, můžeme vzít jednotkovou plochu kolmou na směr osy  $x$ , který je směrem šíření zvukové vlny. Množství vzduchu připadajícího na jednotkovou plochu v intervalu  $\Delta x$  je  $\rho_0 \Delta x$ , přičemž  $\rho_0$  je neporušená nebo rovnovážná hustota vzduchu. Tento vzduch se po posunutí zvukovou vlnou nachází mezi  $x + \chi(x, t)$  a  $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ , takže v tomto intervalu máme stejné množství vzduchu jako v intervalu  $\Delta x$  dříve, než působila porucha. Je-li  $\rho$  nová hustota, pak

$$\rho \Delta x = \rho [x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)]. \quad (47.5)$$



Obr. 47.3 Posunutí vzduchu v bodě  $x$  je rovno  $\chi(x, t)$  a v bodě  $x + \Delta x$  je rovno  $\chi(x + \Delta x, t)$ . Původní objem připadající na jednotku plochy v rovinné zvukové vlně je roven  $\Delta x$  a nový objem  $\Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t)$ .

Protože  $\Delta x$  je malé, můžeme psát  $\chi(x + \Delta x, t) - \chi(x, t) = (\partial \chi / \partial x) \Delta x$ . Zde vystupuje parciální derivace, neboť  $\chi$  závisí na  $x$  i na čase. Naše rovnice pak získá tvar

$$\rho_0 \Delta x = \rho \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \Delta x + \Delta x \right), \quad (47.6)$$

neboli

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho) \frac{\partial \chi}{\partial x} + \rho_0 + \rho. \quad (47.7)$$

Ve zvukové vlně jsou všechny změny malé, a proto jsou malé  $\rho$ ,  $\chi$  i  $\partial \chi / \partial x$ . Ve vztahu, který jsme právě získali

$$\rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x} - \rho \frac{\partial \chi}{\partial x}; \quad (47.8)$$

proto můžeme zanedbat  $\rho \partial \chi / \partial x$  vzhledem k  $\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}$ . Tak dostaneme vztah I:

$$\rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (I) \quad (47.9)$$

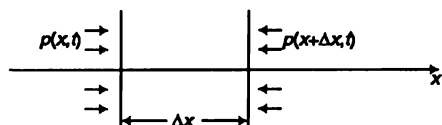
Takovou rovnici by bylo možné z fyzikálního hlediska očekávat. Mění-li se posunutí při změně

ZVUK. VLNOVÁ ROVNICE

$x$ , musí existovat změny hustoty. Znaménko je také správné; roste-li posunutí  $\chi$  s rostoucím  $x$ , vzduch se rozpíná a hustota musí klesat.

Nyní musíme najít třetí rovnici, která by byla rovnicí pohybu vyvolaného tlakem. Známe-li vztah mezi silou a tlakem, můžeme získat pohybovou rovnici. Vezmeme-li tenkou vrstvu vzduchu s délkou  $\Delta x$  a jednotkovou plochu kolmou na  $x$ , pak hmotnost vzduchu v tomto objemu je  $\rho_0 \Delta x$  a má zrychlení  $\partial^2 \chi / \partial t^2$ , takže součin hmotnosti a zrychlení je v takovém objemu roven  $\rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$ . (Pro malé  $\Delta x$  nezáleží na tom, zda zrychlení  $\partial^2 \chi / \partial t^2$  počítáme na kraji objemu nebo někde uvnitř.) Chceme-li určit sílu působící na jednotkovou plochu takové vrstvy kolmou na  $x$ , bude rovna  $\rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$ . V bodě  $x$  máme sílu velikosti  $p(x, t)$  působící na jednotkovou plochu ve směru  $+x$  a v bodě  $x + \Delta x$  máme sílu velikosti  $p(x + \Delta x, t)$  působící na jednotkovou plochu v opačném směru (obr. 47.4), takže výsledná síla na jednotku plochy je

$$p(x, t) - p(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial p_e}{\partial x} \Delta x. \quad (47.10)$$



Obr. 47.4 Výsledná síla v kladném směru osy  $x$  vyvířená tlakem působícím na jednotkovou plochu kolmá na  $x$  je rovna  $-(\partial p / \partial x) \Delta x$ .

Přitom jsme využili to, že  $\Delta x$  je malé a jedinou částí  $p$ , která se mění, je dodatečný tlak  $p_e$ . Tak dostáváme vyjádření vztahu III

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_e}{\partial x}, \quad (III) \quad (47.11)$$

a máme dostatek rovnic k tomu, abychom využitím vzájemných souvislostí zredukovali počet proměnných na jedinou, řekněme  $x$ . Ze vztahu III vyloučíme  $p_e$  použitím vztahu (II), takže dostaneme

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\kappa \frac{\partial \rho_e}{\partial x}, \quad (III) \quad (47.12)$$

a pak použijeme vztah I k vyloučení  $\rho_e$ . Při takovém postupu nám  $\rho_0$  vypadne a zůstane nám

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}. \quad (47.13)$$

Zavedeme označení  $c_z^2 = \kappa$  a můžeme psát

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_z^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}. \quad (47.14)$$

To je vlnová rovnice, která popisuje šíření zvuku v látce.

#### 47.4 ŘEŠENÍ VLNOVÉ ROVNICE

Nyní si všimneme, zda vlnová rovnice skutečně popisuje podstatné vlastnosti zvukových vln v látce. Chtěli bychom odvodit, že zvukový pulz nebo rozruch se pohybuje konstantní rychlostí. Chtěli bychom ověřit, že dva zvukové pulzy mohou procházet jeden druhým – to je zákon superpozice. Chtěli bychom ověřit i to, že zvuk se může šířit vpravo i vlevo. Všechny tyto vlastnosti musí obsahovat tato jediná rovnice.

Už jsme poznamenali, že každá porucha v podobě rovinné vlny, která se pohybuje konstantní rychlostí  $v$ , má tvar  $f(x - vt)$ . Nyní musíme zjistit, zda  $\chi(x, t) = f(x - vt)$  je řešením vlnové rovnice. Počítáme-li  $\partial\chi/\partial x$ , dostaneme derivaci funkce,  $\partial\chi/\partial x = f'(x - vt)$ . Derivujeme-li ještě jednou, dostaneme

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = f''(x - vt). \quad (47.15)$$

Derivováním téže funkce podle  $t$  dostaneme –  $v$ -násobek derivace funkce, tedy  $\partial\chi/\partial t = -vf'(x - vt)$  a dalším derivováním dostaneme

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt). \quad (47.16)$$

Je zřejmé, že  $f(x - vt)$  bude vyhovovat vlnové rovnici, bude-li rychlost vlny rovna  $c_z$ .

Ze zákonů mechaniky jsme tedy odvodili, že zvukový rozruch se šíří rychlostí  $c_z$  a navíc jsme zjistili, že

$$c_z = \kappa^{1/2} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0^{1/2}.$$

Takže jsme dali rychlost vlny do souvislosti s vlastností prostředí.

Kdybychom uvažovali vlnu postupující opačným směrem, takže  $\chi(x, t) = g(x + vt)$ , snadno bychom zjistili, že takový rozruch vyhovuje vlnové rovnici také. Jediný rozdíl mezi takovou vlnou a vlnou postupující opačným směrem je ve znaménku u  $v$ . To, zda máme  $x + vt$  nebo  $x - vt$  jako proměnnou ve funkci, znaménko před  $\partial^2\chi/\partial t^2$  neovlivní, neboť tato derivace obsahuje pouze  $v^2$ . Proto řešení rovnice popisuje vlny šířící se v obou směrech rychlostí  $c_z$ .

Mimořádně zajímavá je otázka superpozice. Předpokládejme, že jsme našli jedno řešení vlnové rovnice a označme ho  $\chi_1$ . To znamená, že druhá derivace  $\chi_1$  podle  $x$  je rovna  $1/c_z^2$ -násobku druhé derivace  $\chi_1$  podle  $t$ . Předpokládejme, že máme i jiné řešení  $\chi_2$  a to musí mít stejnou vlastnost. Superponujeme-li tato dvě řešení, dostaneme

$$\chi(x, t) = \chi_1(x, t) + \chi_2(x, t), \quad (47.17)$$

a proto musíme prověřit, zda  $\chi(x, t)$  je také vlnou, tj. zda vyhovuje vlnové rovnici. To snadno dokážeme, neboť

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x^2} \quad (47.18)$$



## ZVUK. VLNOVÁ ROVNICE

a dále

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2}. \quad (47.19)$$

Proto musí platit  $\partial^2 \chi / \partial x^2 = (1/c_z^2) \partial^2 \chi / \partial t^2$  a princip superpozice je ověřen. Důkaz principu superpozice je důsledkem skutečnosti, že vlnová rovnice je lineární v  $\chi$ .

Nyní můžeme očekávat, že rovinná světelná vlna šířící se ve směru osy  $x$  a polarizovaná tak, že elektrické pole je ve směru osy  $y$ , bude splňovat vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (47.20)$$

v níž  $c$  představuje rychlost světla. Tato vlnová rovnice je jedním z důsledků Maxwellových rovnic. Rovnice elektrodynamiky povedou k vlnové rovnici pro světlo právě tak, jako rovnice mechaniky vedly k vlnové rovnici pro zvuk.

### 47.5 RYCHLOST ZVUKU

Odvození vlnové rovnice pro zvuk nás přivedlo ke vztahu, který dával při normálním tlaku do následující souvislosti rychlost vlny a rychlost změny tlaku s hustotou

$$c_z^2 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0. \quad (47.21)$$

Při výpočtu této rychlosti změny je důležité znát, jak se mění teplota. V případě zvukové vlny můžeme čekat, že v oblasti stlačení vzroste teplota a v oblasti zředění teplota poklesne. Newton, který první počítal rychlost změny tlaku s hustotou, předpokládal, že teplota se nemění. Odůvodňoval to tak, že teplo je vedeno z jedné oblasti do druhé tak rychle, že teplota nestačí vzrůst nebo poklesnout. Takový postup však vede k izotermické rychlosti zvuku a to není správné. Správné odůvodnění podal později Laplace, který na rozdíl od Newtona předpokládal, že tlak a teplota se ve zvukové vlně mění adiabaticky. Tepelný tok ze zhuštěné do zředěné oblasti je zanedbatelný, je-li vlnová délka velká ve srovnání se střední vlnou dráhou. Za těchto podmínek nepatrný tepelný tok neovlivňuje rychlost zvukové vlny, i když způsobuje malou absorpci zvukové energie. Je správné očekávat, že tato absorpce vzroste, přiblíží-li se vlnová délka střední vlné dráze, ale takové vlnové délky jsou přibližně milionkrát menší, než je vlnová délka slyšitelného zvuku.

Skutečnou změnou tlaku s hustotou ve zvukové vlně je taková změna, při níž neteče teplo. To odpovídá adiabatické změně, pro níž platí  $pV^\gamma = \text{konst}$ , kde  $V$  je objem. Mění-li se hustota  $\rho$  nepřímo úměrně objemu  $V$ , adiabatický vztah mezi  $p$  a  $\rho$  má tvar

$$p = \text{konst} \cdot \rho^\gamma, \quad (47.22)$$

odkud dostaneme  $dp/d\rho = \gamma p/\rho$ . Pro rychlost zvuku pak máme vztah

$$c_z^2 = \frac{\gamma p}{\rho}. \quad (47.23)$$

## RYCHLOST ZVUKU

Tento vztah lze napsat i ve tvaru  $c_z^2 = \gamma pV / \rho V$ , v němž můžeme využít toho, že  $pV = NkT$ . Dále je vidět, že  $\rho V$  je hmotnost plynu, kterou lze vyjádřit jako  $Nm$  nebo  $\mu$ , kde  $m$  je hmotnost molekuly a  $\mu$  je molekulární hmotnost. Tak dospějeme ke vztahu

$$c_z^2 = \frac{\gamma kT}{m} = \frac{\gamma RT}{\mu}, \quad (47.24)$$

z něhož je zřejmé, že rychlost zvuku závisí jen na teplotě plynu, a ne na tlaku nebo hustotě. Už víme, že

$$kT = \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle, \quad (47.25)$$

kde  $\langle v^2 \rangle$  je druhá mocnina střední kvadratické rychlosti molekul. Proto  $c_z^2 = (\gamma/3) \langle v^2 \rangle$  neboli

$$c_z = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{3}\right) \langle v \rangle}. \quad (47.26)$$

Tento vztah vyjadřuje skutečnost, že rychlost zvuku je součin střední kvadratické rychlosti molekul a určitého čísla, které je přibližně rovno  $1/(3)^{1/2}$ . Jinými slovy: rychlost zvuku je stejného řádu velikosti jako rychlost molekul a je ve skutečnosti o něco menší než střední rychlost molekul.

Tento výsledek jsme, samozřejmě, mohli očekávat, neboť taková porucha, jakou je změna tlaku, se vlastně šíří pohybem molekul. Jenže takový argument by nám ještě neurčil přesnou rychlost šíření; mohlo by se ukázat, že zvuk přenáší především nejrychlejší nebo nejpomalejší molekuly. Je rozumné a uspokojivé, že rychlost zvuku je zhruba 1/2 střední molekulové rychlosti.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 47.1 ■ Najděte poměr rychlostí zvuku v heliu a vodíku při téže teplotě.
- 47.2 ■ Do dvou stejně dlouhých píšťal foukáme jednak vzduch ochlazený na  $-180^\circ\text{C}$  (teplota blízká teplotě varu vzduchu), jednak teplý vzduch. Jedna píšťala přitom vydává tón o oktávu vyšší než druhá. Jaká musí být teplota vzduchu, který foukáme do druhé píšťaly?
- 47.3 ■ Nadýchnete-li se helia a začnete mluvit, bude váš hlas nepřírozně vysoký. Kdyby všechny rezonanční dutiny ve vaší hlavě byly zaplněny heliem místo vzduchem, jak by vzrostla jejich rezonanční frekvence? Budete-li přitom zpívat, jak to ovlivní tóninu vašeho zpěvu?
- 47.4 ■ Uvažte rovinnou zvukovou vlnu o frekvenci 1 kHz, u níž se maximální a minimální hodnoty tlaku odlišují o 0,0001 % od normálního atmosférického tlaku. Rychlost zvuku berte rovnou 340 m/s.  
a) Jak se mění hustota vzduchu při šíření takové vlny?  
b) Jaké bude maximální posunutí částic  $\chi_m$ ?  
c) Čemu bude rovna intenzita vlny?
- 47.5 ■ Prsty obou rukou uchopíte konce gumového pásku asi 5 cm dlouhého a požádejte kolegu, aby lehce bmnul o pásek. Ozve se zvuk. Pak roztahujte pásek na 2, 3, 4, 5 násobnou délku tak, aby hmotnost pásku mezi vašimi rukama zůstala stejná a pokus opakujte. Porovnejte zvuk v těchto případech. Proč něco podobného nenastává u houslové struny?
- 47.6 ■ Stejnorodá, dokonale ohebná struna o lineární hustotě  $\tau$  je natažena napětíovou silou  $T$ . Sestavte vlnovou rovnici popisující šíření vlny příčného posunutí  $y$  podél struny a najděte rychlost této vlny. Využijte předpoklad o tom, že ve všech bodech struny v každém okamžiku platí  $\partial y/\partial x \ll 1$  a uvažujte pouze rovinné kmity struny. Podotkněme, že složka síly napětí struny v příčném směru je velmi blízká k  $T \partial y/\partial x$ .
- 47.7 ■ Ukažte, že výraz  $u = A e^{i(\omega t - kx)}$  vyhovuje vlnové rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

za podmínky, že  $\omega$  a  $k$  jsou vázány vztahem  $\omega = vk$ .

# 48

# Rázy

---

## 48.1 SKLÁDÁNÍ DVOU VLN

## 48.2 ZÁZNĚJOVÉ TÓNY A MODULACE

## 48.3 POSTRANNÍ PÁSY

## 48.4 LOKALIZOVANÉ VLNOVÉ BALÍKY

## 48.5 AMPLITUDY PRAVDĚPODOBNOTI PRO ČÁSTICE

## 48.6 VLNY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

## 48.7 NORMÁLNÍ MODY

### 48.1 SKLÁDÁNÍ DVOU VLN

Nedávno jsme dost podrobně mluvili o vlastnostech světelných vln a jejich interferenci, tj. superpozici dvou vln z různých zdrojů. V těchto úvahách jsme předpokládali, že frekvence zdrojů jsou stejné. V této kapitole budeme mluvit o některých jevech, jež jsou důsledkem interference dvou zdrojů s *různými* frekvencemi.

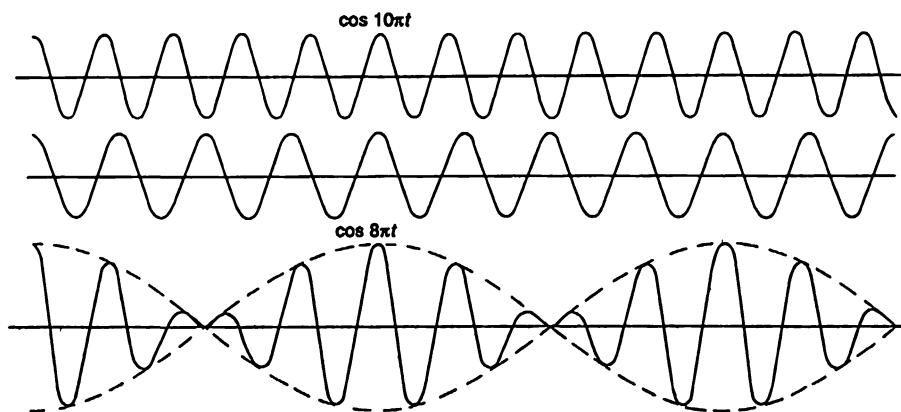
Snadno se dovzpíme, co se stane. Postupujme tak jako dříve a předpokládejme, že máme dva stejné zdroje kmitající se stejnou frekvencí, jejichž fáze jsou nastaveny tak, že do určitého bodu  $P$  přicházejí signály se stejnou fází. Jde-li o světlo, bude v tomto bodě velmi jasné, je-li to zvuk, bude velmi hlasitý, pokud jde o elektrony, bude jich tam hodně. Budou-li přicházející signály posunuty o  $180^\circ$ , nebudeme mít v bodě  $P$  signál, neboť výsledná amplituda zde má minimum. Nyní předpokládejme, že někdo otáčí „regulátorem fáze“ jednoho ze zdrojů a mění tak fázi v bodě  $P$  a tím i fázový rozdíl na tu či onu stranu, například tak, že nejprve je  $0^\circ$ , potom  $180^\circ$  atd. Pak se bude samozřejmě měnit i síla výsledného signálu. Bude-li se fáze jednoho signálu měnit vzhledem k fázi druhého signálu tak, že začne u nuly a bude postupovat k deseti, dvaceti, třiceti, čtyřiceti stupňům atd., naměříme v bodě  $P$  posloupnost silných a slabých „pulzací“, protože při  $360^\circ$  fázovém posunu se amplituda opět změní na maximální. Samozřejmě tvrzení, že jeden ze zdrojů posouvá svou fázi vzhledem k druhému zdroji konstantní rychlostí, je rovnocenné tvrzení, že počet kmitů za sekundu se u těchto zdrojů mírně liší.

Nyní už známe odpověď: máme-li dva zdroje s málo odlišnými frekvencemi, dostaneme výsledné oscilace s pomalu pulzující intenzitou. To je vlastně celá podstata rázů.

## RÁZY

Získaný výsledek lze snadno formulovat i matematicky. Předpokládejme například, že máme dvě vlny a na chvíli zapomeneme na všechny prostorové vztahy a budeme se prostě zajímat o to, co přichází do bodu  $P$ . Nechť z jednoho zdroje přichází  $\omega_1 t$  a z druhého  $\omega_2 t$ , přičemž omegy nejsou přesně stejné. Ani amplitudy by nemusely být stejné, ale takový obecný případ budeme řešit až později; nejprve budeme amplitudy považovat za stejné. Celková amplituda v bodě  $P$  je součtem zmíněných dvou kosinů.

Kdybychom si nakreslili závislost amplitudy vlnění na čase, jako je to na *obr. 48.1*, viděli bychom, že tam, kde se setkají hřebeny vln, dostaneme silné vlnění; kde se setká hřeben a brázda, dostaneme prakticky nulu a kde se znovu setkají hřebeny, opět dostaneme silné vlnění.



Obr. 48.1 Superpozice dvou kosinových vln s frekvencemi v poměru 8:10. Přesné opakování obrazce v každém rázu není typické pro obecný případ

Z matematické stránky musíme pouze vypočítat součet dvou kosinů a výsledek určitým způsobem přeskupit. Mezi kosiny existuje řada vztahů, které není těžké odvodit. Víme, že

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib} \quad (48.1)$$

a reálnou částí  $e^{ia}$  je  $\cos a$ , imaginární částí  $\sin a$ . Vezmeme-li reálnou část z  $e^{i(a+b)}$ , dostaneme  $\cos(a+b)$ . Vynásobením dostaneme

$$e^{ia} e^{ib} = (\cos a + i \sin a) (\cos b + i \sin b),$$

tedy  $\cos a \cos b - \sin a \sin b$  plus nějaké imaginární části. My však nyní potřebujeme pouze reálnou část, a proto máme

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (48.2)$$

Změníme-li znaménko u  $b$ , dostaneme rovnici

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b, \quad (48.3)$$

protože kosinus nezmění znaménko, ale sinus ho změni. Sečteme-li tyto rovnice, ztratíme sinus

## SKLÁDÁNÍ DVOU VLN

a zjistíme, že součin dvou kosinů je roven polovině kosinů součtu plus polovina kosinu rozdílu

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos (a + b) + \frac{1}{2} \cos (a - b). \quad (48.4)$$

Tento vztah můžeme i obrátit a najít vztah pro  $\cos \alpha + \cos \beta$ , položíme-li  $\alpha = a + b$ ,  $\beta = a - b$ . Tehdy  $a = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ ,  $b = \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$  a platí

$$\cos \alpha \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta). \quad (48.5)$$

Nyní můžeme analyzovat náš problém. Součet  $\omega_1 t$  a  $\omega_2 t$  má vyjádření

$$\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = 2 \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) t \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) t. \quad (48.6)$$

Nyní předpokládejme, že frekvence jsou téměř stejné, takže  $(1/2) (\omega_1 + \omega_2)$  je střední frekvence a je více méně stejná jako každá z frekvencí  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ . Jenže  $\omega_1 - \omega_2$  je *mnohem menší* než  $\omega_1$  nebo  $\omega_2$ , neboť podle předpokladu jsou frekvence  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  téměř stejné. To znamená, že řešení si můžeme představit tak, jakoby tam byla vysokofrekvenční kosinová vlna více méně stejná jako původní vlny, ale „velikost“ této vlny se pomalu mění – tato „velikost“ pulzuje s frekvencí  $(1/2) (\omega_1 - \omega_2)$ . Je to ta frekvence, s kterou slyšíme rázy? I když rovnice (48.6) říká, že amplituda se chová jako  $(1/2) (\omega_1 - \omega_2) t$ , musíme to chápat tak, že vysokofrekvenční kmity jsou ohraničeny dvěma opačnými kosinoidami (na obr. 48 je to znázorněno přerušovanou čarou). Můžeme tedy říci, že amplituda se mění s frekvencí  $(1/2) (\omega_1 - \omega_2)$ , ale když mluvíme o *intenzitě* vlny, ta se mění s dvojnásobkem této frekvence. Tedy modulace amplitudy, ve smyslu její intenzity, probíhá s frekvencí  $\omega_1 - \omega_2$ , i když v našem vztahu máme násobení kosinem s poloviční frekvencí. Rozdíl spočívá v tom, že vysokofrekvenční vlna má trochu odlišný fázový poměr v druhém půlcyklu.

Nebudeme-li si všimnout této nevelké komplikace, můžeme říci, že sčítáním dvou vln s frekvencemi  $\omega_1$  a  $\omega_2$  dostaneme výslednou vlnu se střední frekvencí  $(1/2) (\omega_1 + \omega_2)$ , její intenzita osciluje s frekvencí  $\omega_1 - \omega_2$ .

Kdyby byly amplitudy různé, museli bychom celý postup provést znovu, kosiny násobit různými amplitudami  $A_1$ ,  $A_2$ , vykonat řadu matematických úprav a použít rovnice podobné rovnicím (48.2) až (48.5). Existují však jiné, jednodušší způsoby, kterými můžeme uskutečnit takovou analýzu. Víme například, že je mnohem jednodušší pracovat s exponenciálami, a ne se sinem a kosinem, přičemž  $A_1 \cos \omega_1 t$  představuje reálnou část výrazu  $A_1 e^{i\omega_1 t}$ . Druhá vlna zase bude reálnou částí  $A_2 e^{i\omega_2 t}$ . Složením těchto vln dostaneme  $A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}$  a to můžeme přepsat do tvaru

$$A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t} = e^{\frac{1}{2}i(\omega_1 + \omega_2)t} \left[ A_1 e^{\frac{1}{2}i(\omega_1 - \omega_2)t} + A_2 e^{-\frac{1}{2}i(\omega_1 - \omega_2)t} \right]. \quad (48.7)$$

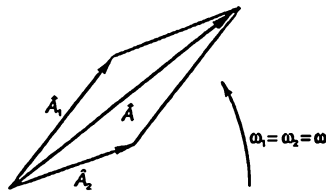
Opět máme vysokofrekvenční vlnu modulovanou nižší frekvencí.

## 48.2 ZÁZNĚJOVÉ TÓNY A MODULACE

Kdybychom chtěli vědět, jaká je intenzita vlny popsané rovnicí (48.7), museli bychom vypočítat druhou mocninu absolutní hodnoty levé nebo pravé strany této rovnice. Vezměme levou stranu. Intenzitu pak lze vyjádřit vztahem

$$I = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2) t. \quad (48.8)$$

Je vidět, že intenzita roste a klesá s frekvencí  $\omega_1 - \omega_2$  a mění se v rozsahu od  $(A_1 + A_2)^2$  po  $(A_1 - A_2)^2$ . Je-li  $A_1 \neq A_2$ , není minimum intenzity nulové.



Obr. 48.2 Výslednice dvou komplexních vektorů rotujících se stejnými frekvencemi

K tomuto výsledku můžeme dospět i graficky, tak jak je to znázorněno na *obr. 48.2*. Nechť vektor délky  $A_1$ , rotující s frekvencí  $\omega_1$ , představuje jednu z vln v komplexní rovině. Jiný vektor, který má délku  $A_2$  a rotuje s frekvencí  $\omega_2$ , představuje druhou vlnu. Kdyby tyto frekvence byly stejné, dostali bychom jako výsledek otáčející se vektor stálé délky, takže intenzita výsledné vlny by byla konstantní. Budou-li se však frekvence nepatrně lišit, budou se tyto dva komplexní vektory otáčet nestejnými rychlostmi. *Obrázek 48.3* znázorňuje, jak vypadá situace z hlediska vektoru  $A_1 e^{i\omega_1 t}$ . Je vidět, že  $A_2$  se pomalu odklání od  $A_1$ , a tak amplituda, kterou dostaneme složením těchto dvou vln je nejdříve velká a pak, když se druhý vektor rozevře, když svírá  $180^\circ$  úhel s prvním vektorem, bude amplituda nejmenší, a tak to půjde dále. Po dobu otáčení vektorů se stává amplituda vektorového součtu jednou větší, jednou menší a intenzita pulzuje. Je to poměrně jednoduchá myšlenka a můžeme ji realizovat rozmanitými způsoby.

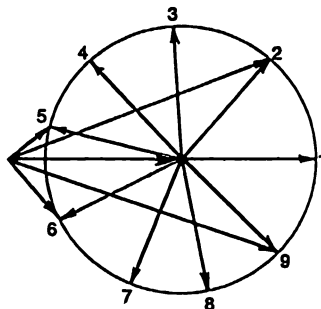
Tento jev můžeme velmi snadno pozorovat experimentálně. V akustické oblasti můžeme instalovat dva reproduktory, kde každý je spojen s vlastním oscilátorem vytvářejícím určitý tón. Nastavíme-li u obou oscilátorů stejnou frekvenci, dostaneme v určitém bodě prostoru určitou sílu signálu. Když potom oscilátory mírně rozladíme, budeme slyšet, jak se mění intenzita signálu s časem. Čím větší je rozladění, tím rychlejší jsou změny zvuku. Náš sluch má však určité těžkosti při sledování změn signálu, jejichž frekvence převyšuje frekvenci přibližně deset kmitů za sekundu.<sup>60)</sup>

Tento jev můžeme pozorovat i na osciloskopu, který znázorňuje prostě součet proudů dvou generátorů. Je-li frekvence pulzů poměrně nízká, vidíme postupovat sinusoidální vlnu, jejíž amplituda pulzuje, ale když se pulzy zrychlí, zpozorujeme takový druh vlny, jaký znázorňuje *obr.*

<sup>60)</sup> V akustice používáme často pro rázy staré české slovo zázněje, proto hovoříme o záznějových tónech. (pozn. red.)

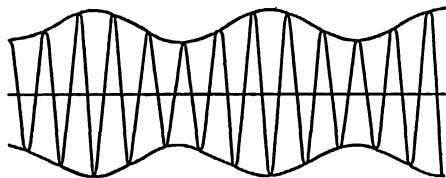
## ZÁZNĚJOVÉ TÓNY A MODULACE

48.1. Roste-li rozdíl frekvencí, maxima se vzájemně přibližují. Nejsou-li amplitudy signálů stejné, tedy je-li jeden signál silnější než druhý, dostaneme vlnu, jejíž amplituda nikdy není nulová – a to jsme očekávali. Dostáváme tedy to, co jsme měli dostat – a to v elektrickém i v akustickém případě.



Obr. 48.3 Výslednice dvou komplexních vektorů rotujících s různými frekvencemi v souřadnicové soustavě spojené s jedním vektorem. Obrázek znázorňuje posloupnost devíti poloh pomalu se otáčejícího vektoru.

Existuje i opačný jev! Při rádiovém vysílání se používá *amplitudová modulace (AM)*, jejíž pomocí rádiový vysílač zprostředkuje přenos zvuku následujícím způsobem. Oscilátor rádiového vysílače budí elektrické kmity velmi vysoké frekvence, např. 800 kHz, ve vysílacím pásmu. Zapnutím tohoto *nosného signálu* vysílá rádiová stanice vlnu s konstantní amplitudou s frekvencí 800 000 kmitů za sekundu. „Informace“ – často úplně zbytečná, jako např. inzerát nabízející určitou značku automobilu – se vysílá tak, že se mění amplituda nosného signálu v rytmu zvukových kmitů dopadajících na mikrofon.



Obr. 48.4 Modulovaná nosná vlna. Na tomto schématickém obrázku  $\omega_n / \omega_m = 5$ . Ve skutečné rádiové vlně  $\omega_n / \omega_m \sim 100$ .

Budeme-li jako matematicky nejjednodušší případ uvažovat situaci, kdy sopranistka zpívá dokonalý tón vyvolaný sinusoidálním chvěním jejích hlasivek, dostaneme signál, jehož síla se mění tak, jak to znázorňuje obr. 48.4. Audiofrekvenční změny pak dešifruje přijímač; v něm se zbavíme nosné vlny a máme jen obálku, která představuje kmity hlasivek, tedy zvuk zpěvačky. Reproduktor pak vytvoří ve vzduchu kmity se stejnou frekvencí a posluchač vlastně nepozná rozdíl mezi skutečným hlasem zpěvačky a reprodukcí. Existuje však řada jemných poruch a jemných efektů, které přece jen dovolují rozpoznat, zda slyšíme skutečný zpěv sopranistky nebo reprodukci jejího zpěvu; jinak však všechno probíhá tak, jak bylo uvedeno.



### 48.3 POSTRANNÍ PÁSY

Matematicky můžeme uvažovanou modulovanou vlnu vyjádřit vztahem

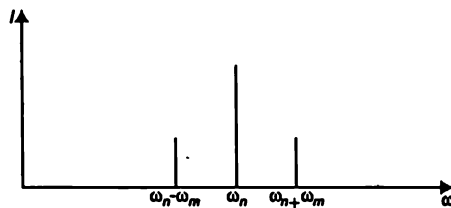
$$S = (1 + b \cos \omega_m t) \cos \omega_n t, \quad (48.9)$$

kde  $\omega_n$  představuje nosnou frekvenci a  $\omega_m$  zvukovou frekvenci. Kdybychom použili všechny ty věty o kosinech, nebo kdybychom pracovali s  $e^{i\theta}$  (vzhledem k výsledku je úplně jedno, jaký způsob zvolíme, ale s  $e^{i\theta}$  je to jednodušší), dostali bychom

$$S = \cos \omega_n t + \frac{1}{2} b \cos (\omega_n + \omega_m) t + \frac{1}{2} b \cos (\omega_n - \omega_m) t. \quad (48.10)$$

Proto bychom mohli z jiného hlediska říci, že výstupní vlna systému představuje superpozici tří vln: nejdříve regulární vlnu s frekvencí  $\omega_n$ , tedy s nosnou frekvencí, a dále dvě nové vlny s dvěma novými frekvencemi. Jedna z nich je rovna součtu nosné a modulační frekvence a druhá rozdílu. Kdybychom sestrojili jakýsi graf závislosti intenzity generovaných kmitů na frekvenci, dostali bychom velkou intenzitu u nosné frekvence, což je přirozené, ale když začne zpěvačka zpívat, najednou bychom objevili i intenzitu úměrnou síle hlasu zpěvačky,  $b^2$ , při frekvencích  $\omega_n + \omega_m$  a  $\omega_n - \omega_m$ , jak je to znázorněno na obr. 48.5. Jsou to tzv. *postranní pásy* a objevují se vždy, když je signál vysílače modulovaný. Znít-li současně více tónů, např.  $\omega_m$  a  $\omega_m'$ , tedy hrají-li dva nástroje nebo máme-li nějakou jinou, složitou kosinovou vlnu, pak nám matematika říká, že dostaneme další vlny, které odpovídají frekvencím  $\omega_n \pm \omega_m$ .

Proto se ukazuje, že v případě složité modulace, kterou můžeme vyjádřit pomocí součtu mnoha kosinů<sup>61)</sup>, vysílač vlastně vysílá celou oblast frekvencí – takovou, která obsahuje interval: mezi nosnou frekvencí od níž odečteme a k níž přičteme maximální frekvenci obsaženou v modulačním signálu.



Obr. 48.5 Frekvenční spektrum nosné vlny  $\omega_n$  modulované jedinou kosinovou vlnou  $\omega_m$

I když jsme zpočátku věřili, že rádiový vysílač vysílá jen nominální nosnou frekvenci, protože obsahuje velké, superstabilní krystalové oscilátory a všechno je nastaveno přesně na 800 kHz,

<sup>61)</sup> Můžeme si položit následující vedlejší otázku: Kdy můžeme vyjádřit křivku jako součet mnoha kosinů? Ve všech běžných případech kromě některých, které si vymyslel matematik. Samozřejmě křivka musí mít jen jednu hodnotu v daném bodě a nesmí být tak divoká, aby měla nekonečně mnoho skoků na nekonečně malé vzdálenosti nebo se nesmí nějak podobně šíleně chovat. Odhlédneme-li od těchto omezení, můžeme každou rozumnou křivku (i tu, kterou vytvoří zpěvačka chvěním hlasivek) vyjádřit ve tvaru součtu kosinových vln.

v okamžiku, když hlasatel *oznámí*, že vysílání je na 800 kHz, nastává modulace této frekvence a ta už není přesně rovna 800 kHz. Předpokládejme, že zesilovače jsou zkonstruovány tak, že může být přenášena velká část frekvencí, na něž je citlivé lidské ucho. Naše ucho vnímá frekvence až do 20 kHz, ale vysílače a přijímače obvykle nepracují na vyšších frekvencích než 10 kHz, takže v rádiu neslyšíme nejvyšší tóny). Hlas hlasatele tedy může obsahovat frekvence až do 10 kHz, a proto vysílač vysílá frekvence v rozsahu od 790 kHz do 810 kHz. Kdyby na frekvenci 795 kHz vysílala jiná stanice, nastal by zmatek. Chybou by bylo i to, kdybychom zkonstruovali náš přijímač natolik selektivní, že by přijímal jen 800 kHz a nepřijímal těch 10 kHz na obou stranách, pak bychom hlas hlasatele vůbec neslyšeli – informace je totiž na těch nepřijatých frekvencích. Proto je nezbytné dodržovat určitou frekvenční vzdálenost mezi stanicemi, aby se nepřekrývaly jejich postranní pásy. Dále přijímač nesmí být natolik selektivní, že by nedovoloval příjem postranních pásů spolu s nominální frekvencí. V případě zvuku tyto požadavky nezpůsobují mnoho problémů. Slyšíme v oblasti  $\pm 20$  kHz a pásmo středních vln je od 500 kHz do 1500 kHz, takže je tam místo pro mnoho rozhlasových stanic.

V případě televize je situace horší. Elektronový paprsek prochází jednotlivými místy obrazovky a musí v nich vyvolat světlé nebo tmavé body. Tato „světlá“ a „tmavá“ místa jsou vlastně „signálem“. Elektronový paprsek obvykle rastruje obraz tak, že přibližně za třicetinu sekundy proběhne 500 řádků. Předpokládejme, že hustoty bodů obrazu v horizontálním a vertikálním směru jsou téměř stejné, tj. na milimetr každého řádku připadá stejný počet bodů jako na milimetr výšky. Musíme mít možnost rozlišit střídání světlých a tmavých míst pokrývajících 500 řádků. Abychom to mohli provést s kosinovými vlnami, musíme použít takovou vlnovou délku, tj. vzdálenost od maxima po maximum, která je rovna  $1/250$ -tině délky obrazovky. Máme tedy  $250 \times 500 \times 30$  informací za sekundu, a proto je nejvyšší frekvence, kterou budeme přenášet, rovna přibližně 4 MHz. Aby jednotlivé stanice byly od sebe odděleny, potřebujeme trochu vyšší frekvenci, asi 6 MHz; její část se využije k přenosu zvukového signálu a jiných informací. Nyní už víme, proč mají televizní kanály šířku 6 MHz. Rozhodně nelze vysílat televizi na nosném kmitočtu 800 kHz, protože nemůžeme modulovat nosnou frekvenci vyšší frekvencí.

Takže televizní pásma začínají na frekvenci 54 MHz. První vysílací kanál, který však má v USA označení 2 (!), má frekvenční rozsah od 54 do 60 MHz, tedy je 6 MHz široký. Nyní můžete namítnout: „Vždyt jsme dokázali, že postranní pásy jsou na obou stranách, a proto by byla potřebná dvojnásobná frekvenční šířka.“ Jenže radioinženýři jsou lidé chytří. Kdybychom při analýze modulačního signálu pracovali nejen s kosiny, ale i se siny, a tak bychom připustili fázové rozdíly, dospěli bychom k poznatku, že mezi postranním pásem na straně vyšších frekvencí a postranním pásem na straně nižších frekvencí je určitý, invariantní vztah. To znamená, že druhý postranní pás už neobsahuje vzhledem k prvnímu nějakou novou informaci. Proto se jeden postranní pás potlačuje a přijímač je zkonstruován tak, že potlačenou informaci vytváří z jednoho postranního pásu a nosné frekvence. Vysílání pomocí jednoho postranního pásu je důmyslnou metodou zúžení frekvenční šířky potřebné k přenášení informace.

#### 48.4 LOKALIZOVANÉ VLNOVÉ BALÍKY

Další otázkou, kterou se budeme zabývat, je interference vln v prostoru a v čase. Předpokládejme, že máme dvě vlny, které se šíří prostorem. Už víme, že vlnu šířící se prostorem, můžeme popsat výrazem  $e^{i(\omega t - kx)}$ . Takový výraz může například představovat posunutí ve zvukové vlně. Předpokládáme-li, že  $\omega^2 = k^2 c^2$ , kde  $c$  je rychlost šíření vlny, pak jde o řešení vlnové rovnice. V takovém případě můžeme exponenciálu zapsat ve tvaru  $e^{i k(x - ct)}$ , což je speciální případ

## RÁZY

obecného výrazu  $f(x - ct)$ . Proto to musí být vlna, která postupuje rychlostí  $\omega/k$ , tedy  $c$  a vše je v pořádku.

Nyní složme dvě takové vlny. Nechť se jedna šíří se stejnou frekvencí a druhá s jinou frekvencí. Příklad, kdy vlny mají různé amplitudy, si ověříte sami; podstatným způsobem se neliší od případu stejných amplitud, který budeme nyní zkoumat. Naše skládání bude  $e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}$  a můžeme ho uskutečnit pomocí stejné matematiky jako při skládání signálů. Samozřejmě v obou případech bude  $c$  stejné, a proto to půjde snadno; bude to stejné jako výpočet, který jsme prováděli dříve

$$e^{i\omega_1(t-x/c)} + e^{i\omega_2(t-x/c)} = e^{i\omega_1 t'} + e^{i\omega_2 t'}, \quad (48.11)$$

až na to, že místo  $t$  máme proměnnou  $t' = t - x/c$ . Proto dostaneme stejný druh modulací s tím rozdílem, že tyto modulace se pohybují s vlnou. Jinými slovy, složme-li dvě vlny, které nejen oscilují, ale také se šíří v prostoru, bude se i výsledná vlna šířit stejnou rychlostí.

Naše úvahy bychom chtěli zobecnit i na takové vlny, v nichž neplatí tak jednoduchý vztah mezi frekvencí a vlnovým číslem  $k$ . Jako příklad vezměme šíření vlny v nějakém materiálu, který má určitý index lomu. V kapitole 31 jsme již studovali teorii indexu lomu a zjistili jsme, že můžeme psát  $k = n\omega/c$ , kde  $n$  je index lomu. Zajímavý je případ rentgenového záření, pro něj jsme našli vztah

$$n = 1 - \frac{Nq_e^2}{2\varepsilon_0 m \omega^2}. \quad (48.12)$$

Ve skutečnosti jsme v kapitole 31 odvodili složitější vztah (31.20), ale jako příklad je náš vztah stejně dobrý.

Mimochodem víme, že i tehdy, není-li mezi  $\omega$  a  $k$  přímá úměrnost, je poměr  $\omega/k$  určité rychlosti šíření dané frekvence a vlnového čísla. Tento poměr nazýváme *fázovou rychlostí*; je to rychlost, jíž se pohybuje fáze nebo uzel jednotlivé vlny

$$v_f = \frac{\omega}{k}. \quad (48.13)$$

V případě rentgenových paprsků šířících se sklem je tato fázová rychlost větší než rychlost světla ve vakuu (protože  $n$  ve vztahu 48.12 je menší než 1) a to nás trochu znepokojuje, protože si nemyslíme, že by bylo možné posílat signály větší rychlostí než je rychlost světla!

Nyní budeme uvažovat interakci dvou vln, ve kterých  $\omega$  a  $k$  jsou vázány zcela určitým vztahem. Takový vztah nám dává uvedený vzorec pro  $n$ , který říká, že  $k$  je dáno jako zcela určitá funkce  $\omega$ . Konkrétně v tomto případě závisí  $k$  na  $\omega$  takto:

$$k = \frac{\omega}{c} - \frac{a}{\omega c}, \quad (48.14)$$

kde  $a = Nq_e^2/2\varepsilon_0 m$  představuje konstantu. Každé frekvenci tedy odpovídá zcela konkrétní vlnové číslo a my chceme takové dvě vlny složit. Udělejme to jako v rovnici (48.7):

$$e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} = e^{\frac{1}{2}i[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x]} \left\{ e^{\frac{1}{2}i[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]} + e^{-\frac{1}{2}i[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]} \right\}. \quad (48.15)$$

Opět máme modulovanou vlnu, která se šíří se střední frekvencí a středním vlnovým číslem, ale její intenzita se mění v závislosti na rozdílu frekvencí a rozdílu vlnových čísel.

Nyní si všimněme případu, kdy je rozdíl mezi dvěma vlnami relativně malý. Předpokládejme, že skládáme dvě vlny, jejich frekvence jsou téměř stejné; pak  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  jsou prakticky stejné jako kterákoliv z frekvencí a podobně je to s  $(k_1 + k_2)/2$ . Proto rychlost vlny, rychlých oscilací, uzlů zůstane v podstatě  $\omega/k$ . Jenže rychlost šíření modulační vlny není stejná! Jak musíme změnit  $x$ , aby to odpovídalo určité hodnotě  $t$ ? Rychlost této modulační vlny je poměr

$$v_M = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}. \quad (48.16)$$

Rychlost modulační vlny se někdy nazývá i *grupová rychlost*. Vezmeme-li případ, kdy je rozdíl frekvencí relativně malý a rozdíl vlnových čísel je pak také relativně malý, v limitě dostaneme výraz

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (48.17)$$

Jinými slovy, nejpomalejší modulaci odpovídají nejpomalejší rázy a ty se šíří rychlostí, která není stejná jako fázová rychlost vln – a to je záhadné!

*Grupová rychlost je derivace  $\omega$  podle  $k$  a fázová rychlost je  $\omega/k$ .*

Pokusme se vysvětlit, proč tomu tak je. Uvažujme dvě vlny, které mají opět mírně odlišné vlnové délky, tak jak je to znázorněno na obr. 48.1. Jejich fáze se liší, shodují, liší atd. Nyní tyto vlny představují ve skutečnosti takové vlny, které se šíří v prostoru a mají přitom i trochu rozdílné frekvence. Protože fázové rychlosti těchto dvou vln, tedy rychlosti jejich uzlů, nejsou přesně stejné, děje se něco nového. Předpokládejme, že putujeme s jednou z těchto vln a pozorujeme druhou vlnu; kdyby měly obě vlny stejnou rychlost, druhá by zůstávala vzhledem k nám na stejném místě. Putujeme třeba na hřebenu vlny a proti sobě vidíme hřeben druhé vlny; jsou-li rychlosti obou vln stejné, hřebeny těchto vln se překrývají. Jenže rychlosti nejsou ve skutečnosti stejné. Mezi frekvencemi je nepatrný rozdíl, a proto bude nepatrný rozdíl i mezi rychlostmi a právě v důsledku tohoto rozdílu se druhá vlna bude pohybovat vzhledem k naší vlně pomalu dopředu nebo dozadu. Co se stane v průběhu času s uzlem? Pohneme-li jednu vlnu trochu dopředu, uzel postoupí dopředu (nebo dozadu) o značnou vzdálenost. Součet těchto dvou vln má tedy obálku a jak vlna postupuje, obálka po ní jezdí různou rychlostí. *Grupová rychlost* je taková rychlost, jíž se vysílají modulované signály.

Kdybychom vytvořili signál, tj. určitý druh změny ve vlně, který lze rozpoznat např. tím, že je slyšitelný, tedy máme-li určitý druh modulační vlny, pak se tato modulační vlna – je-li relativně pomalá – bude šířit grupovou rychlostí. (Je-li modulační rychlá, je velmi těžké ji analyzovat.)

Nyní můžeme ukázat (konečně!), že rychlost šíření rentgenového záření v grafitovém bloku není větší než rychlost světla, i když fázová rychlost je větší než rychlost světla. Proto musíme najít  $d\omega/dk$ , které vypočítáme derivováním (48.14):  $dk/d\omega = 1/c + a/\omega^2 c$ . Grupová rychlost je převrácená hodnota tohoto výrazu, konkrétně

$$v_g = \frac{c}{1 + a/\omega^2} \quad (48.18)$$

## RÁZY

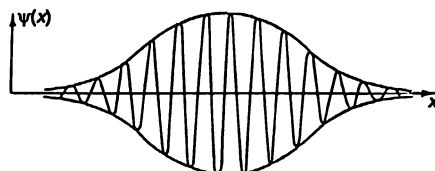
a tento výraz je menší než  $c$ . Takže i když fáze mohou postupovat větší rychlostí než je rychlost světla, modulační signály postupují pomaleji, a v tom spočívá rozluštění zdánlivého paradoxu. Ovšem máme-li jednoduchý případ  $\omega = kc$ , pak i  $d\omega/dk = c$ . Mají-li všechny fáze stejnou rychlost, bude stejná i grupová rychlost.

### 48.5 AMPLITUDY PRAVDĚPODOBNOСТИ PRO ČÁSTICE

Uvažujme ještě jeden mimořádně zajímavý příklad fázové rychlosti, který patří do oblasti kvantové mechaniky. Víme, že amplituda pravděpodobnosti nalezení částice v daném místě se může za určitých okolností měnit v prostoru a čase následujícím způsobem, uvažujme-li jednorozměrný problém:

$$\psi = A e^{i(\omega t - kx)}, \quad (48.19)$$

přičemž  $\omega$  je frekvence související s klasickou energií  $E = \hbar\omega$  a  $k$  je vlnové číslo související s hybností vztahem  $p = \hbar k$ . Kdyby vlnové číslo bylo rovno přesně  $k$ , tedy šlo by o dokonalou vlnu, která všude postupuje se stejnou amplitudou, částice by měla zcela určitou hybnost. Rovnice (48.19) vyjadřuje amplitudu a kdybychom vzali druhou mocninu absolutní hodnoty, dostali bychom relativní pravděpodobnost výskytu částice jako funkce polohy a času. Tato veličina je *konstantní*, to znamená, že pravděpodobnost nalezení částice je všude stejná. Místo toho předpokládejme, že máme takovou situaci, kdy o částici víme, že se bude vyskytovat s větší pravděpodobností na jednom místě než na nějakém jiném místě. Takovou situaci můžeme popsat vlnou, která má maximum a zaniká, když se vzdalujeme od tohoto maxima na jednu nebo na druhou stranu (obr. 48.6). (Není to sice totéž jako vlna typu (48.1), která má řadu maxim, ale těchto maxim se až na jedno můžeme zbavit tak, že složíme několik vln s téměř stejnými  $\omega$  a  $k$ .)



Obr. 48.6 Lokalizovaný vlnový balík

Protože druhá mocnina výrazu (48.19) představuje pravděpodobnost nalezení částice v některém místě, bude v daném okamžiku částice s největší pravděpodobností v blízkosti středu balíku, kde je maximální amplituda vlny. Kdybychom chvíli počkali, vlna by se posunula a za určitou dobu bychom balík našli někde jinde. Když jsme věděli, kde částice původně byla, mohli bychom podle klasické mechaniky *očekávat*, že někde bude i později, neboť má *rychlost* a hybnost. Přitom kvantová teorie přejde na správnou klasickou teorii dávající do souvislosti hybnost, energii a rychlost jen tehdy, když je grupová rychlost – rychlost modulační – rovna rychlosti, kterou bychom získali klasicky pro částici se stejnou hybností.

Nyní musíme ukázat, zda to tak je nebo ne. Podle klasické teorie souvisí energie s rychlostí vztahem

AMPLITUDY PRAVDĚPODOBNOTI PRO ČÁSTICE

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (48.20)$$

Podobně platí pro hybnost

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (48.21)$$

To je klasická teorie a jako důsledek této teorie vyloučením  $v$  dostaneme

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4.$$

Tak jsme dospěli k velkolepému čtyřrozměrnému výsledku, o němž jsme již mnohokrát mluvili. Lze ho zapsat ve tvaru  $p_\mu p_\mu = m^2 c^2$  a vyjadřuje vztah mezi energií a hybností v klasické teorii. Přejde-li  $E$  a  $p$  na  $\omega$  a  $k$  substitucí  $E = \hbar \omega$ ,  $p = \hbar k$ , znamená to, že v kvantové mechanice musí platit

$$\frac{\hbar^2 \omega^2}{c^2} - \hbar^2 k^2 = m^2 c^2. \quad (48.22)$$

Tak jsme dostali vztah mezi frekvencí a vlnovým číslem kvantověmechanické amplitudy popisující částici s hmotností  $m$ . Z této rovnice vyplývá, že

$$\omega = c \sqrt{k^2 + m^2 c^2 / \hbar^2}.$$

Fázová rychlost  $\omega/k$  je i v tomto případě větší než rychlost světla!

Nyní věnujme pozornost grupové rychlosti. Grupová rychlost by měla být  $d\omega/dk$ , tedy rychlost s jakou postupuje modulace. Musíme derivovat odmocninu, což není obtížné. Tak dostaneme

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc}{\sqrt{k^2 + m^2 c^2 / \hbar^2}}.$$

Zde vystupující odmocnina je rovna  $c^{-1} \omega$ , a proto  $d\omega/dk = c^2 k / \omega$ . Dále víme, že  $k/\omega = p/E$ , takže

$$v_g = \frac{c^2 p}{E}.$$

Ze vztahů (48.20) a (48.21)  $c^2 p/E = v$ , kde  $v$  je rychlost částice v klasické mechanice. Je vidět, že zatímco základní kvantověmechanické vztahy  $E = \hbar \omega$ ,  $p = \hbar k$  určující  $\omega$  a  $k$  pomocí klasických veličin  $E$  a  $p$  dávají pouze vztah  $\omega^2 - k^2 c^2 = m^2 c^4 / \hbar^2$ , nyní můžeme pochopit i vztahy (48.20) a (48.21) dávající do souvislosti  $E$  a  $p$  s rychlostí částice. Grupová rychlost musí být samozřejmě rovna rychlosti částice, má-li mít taková interpretace smysl. Předpokládáme-li, že částice je v určitém okamžiku na určitém místě a o deset minut později na jiném místě, pak podle kvantové mechaniky vzdálenost, kterou prošlo maximum balíku, dělená časovým intervalem, musí být rovna klasické rychlosti částice.

## 18.6 VLNY V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

Naši diskuzi o vlnách uzavřeme několika obecnými poznámkami o vlnové rovnici. Tyto poznámky jsou mněny tak, aby poskytly pohled do budoucna – neumožní nám nyní všechno pochopit, ale naznačí nám, jak budou věci vypadat, budeme-li vlny podrobněji zkoumat. Především uvažme, že vlnová rovnice pro zvuk v jednom rozměru měla tvar

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2},$$

kde  $c$  je rychlost podle toho, o jaké vlny jde – v případě zvuku je to rychlost zvuku, v případě světla je to rychlost světla. Ukázali jsme, že v případě zvukové vlny se určitou rychlostí šíří samotné posunutí. Jenže určitou rychlostí se šíří i dodatečný tlak a stejně i dodatečná hustota. Proto můžeme očekávat, že stejné rovnici bude vyhovovat i tlak, a to je skutečně pravda. Důkaz tohoto tvrzení ať provede čtenář sám. Připomeňme jen, že  $\rho_e$  je úměrné rychlosti změny  $\chi$  v závislosti na  $x$ . Proto derivujeme-li vlnovou rovnici podle  $x$ , okamžitě zjistíme, že  $\partial \chi / \partial x$  vyhovuje stejné rovnici. Tedy  $\rho_e$  vyhovuje stejné rovnici. Jenže  $p_e$  je úměrné  $\rho_e$ , a proto  $p_e$  také vyhovuje rovnici. Proto i tlak a posunutí vyhovují stejné vlnové rovnici.

Vlnová rovnice pro zvuk se obvykle zapisuje pomocí tlaku, a ne pomocí posunutí, neboť tlak je skalární veličina a nemá směr, zatímco posunutí je vektor a má směr a jeho analýza je složitější.

Další věc, s níž se setkáme, je vlnová rovnice v trojrozměrném prostoru. Víme, že jednorozměrná zvuková vlna má tvar  $e^{i(\omega t - kx)}$ , v němž  $\omega = kc$  a víme i to, že v trojrozměrném prostoru popisuje vlnu výraz  $e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$ , přičemž nyní  $\omega^2 = k^2 c^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) c^2$ . Chceme uhádnout správný tvar vlnové rovnice v trojrozměrném případě. V případě zvuku můžeme dedukci udělat tak, že v trojrozměrném prostoru použijeme stejné dynamické argumenty, jež jsme používali v jednorozměrném prostoru. My však budeme postupovat jinak; místo toho napíšeme prostě výsledek: rovnice pro tlak (nebo pro posunutí apod.) má tvar

$$\frac{\partial^2 p_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p_e}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_e}{\partial t^2}. \quad (48.23)$$

Dosažením  $e^{i(\omega t - k \cdot r)}$  se můžeme přesvědčit o tom, že tato rovnice je skutečně správná. Skutečně, když každé derivování podle  $x$  znamená násobení  $-ik_x$ . Dvojnásobné derivování je násobení  $-k_x^2$ , takže první člen pro takovou vlnu bude  $-k_x^2 p_e$ . Podobně druhý člen bude  $-k_y^2 p_e$  a třetí  $-k_z^2 p_e$ . Na pravé straně dostaneme  $-(\omega^2 / c^2) p_e$ . Zbavíme-li se vykrácením  $p_e$  a změníme znaménko, dostaneme mezi  $k$  a  $\omega$  právě takový vztah, jaký potřebujeme.

Vrátíme-li se trochu nazpět, nemůžeme odolat, abychom nenapsali rovnici, která odpovídá disperznímu vztahu (48.22) pro kvantověmechanické vlny. Představuje-li  $\varphi$  amplitudu nalezení částice v místě  $x, y, z$  v okamžiku  $t$ , má slavná kvantověmechanická rovnice tvar

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi. \quad (48.24)$$

Nejprve si všimněte, že relativistický charakter tohoto výrazu je zabezpečen takovou kombinací  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a  $t$ , jakou právě teorie relativity vyžaduje. Dále si všimněte, že jde o vlnovou rovnici a dosadíme-li do ní řešení ve tvaru rovinné vlny, dostaneme  $-k^2 + \omega^2/c^2 = m^2 c^2/\hbar^2$ , což je vztah platný v kvantové mechanice. Ještě jedna důležitá věc je obsažena v této vlnové rovnici. Jejím řešením bude i libovolná superpozice vln. Tato rovnice tedy obsahuje celou kvantovou mechaniku a relativitu, o nichž byla do této doby řeč – aspoň pokud jde o jedinou částici v prázdném prostoru bez potenciálů, na kterou nepůsobí žádné síly!

## 48.7 NORMÁLNÍ MODY

Nyní obrátíme naši pozornost na jiný příklad rázů, který je dost zvláštní a trochu odlišný od předcházejících příkladů. Představme si dvě stejná kyvadla, jež jsou navzájem spojena slabou pružinou. Kyvadla jsou pokud možno stejně dlouhá. Vychýlíme-li jedno kyvadlo a pustíme ho, bude samo kývat a natahovat a stlačovat spojovací pružinu. Dostaneme tedy zařízení vytvářející sílu s frekvencí rovnou vlastní frekvenci druhého kyvadla. Jako důsledek teorie rezonance, kterou jsme již studovali, dochází k situaci, kdy síla aplikovaná s vhodnou frekvencí způsobí pohyb daného objektu. Proto jedno kyvadlo svým kývavým pohybem přinutí pohybovat se i druhé kyvadlo. Za těchto okolností však nastává nový úkaz související s tím, že energie systému je konečná. Odevzdává-li totiž jedno kyvadlo svou energii druhému kyvadlu a uvádí ho do pohybu, ztrácí postupně vlastní energii, až jednou ztratí všechnu svou energii a zastaví se! Pak má všechnu energii druhé kyvadlo a první nemá žádnou, a tak všechno začne opačným směrem a energie se vrací k prvnímu kyvadlu. Je to velmi zajímavý a zábavný jev. Už jsme uváděli, že takový jev popisuje teorie rázů a my musíme nyní ukázat, jak můžeme analyzovat tento jev z hlediska takové teorie.

Všimněte si, že pohyb každé ze dvou kuliček jsou vlastně kmity s periodicky se měnící amplitudou. Proto můžeme pohyb jedné z kuliček zřejmě zkoumat i jinak – tak, že jde o součet dvou současně kmitajících oscilátorů, jež mají trochu odlišné frekvence. Proto by mělo být možné najít dva jiné pohyby systému a tvrdit, že to co pozorujeme, je superpozice těchto dvou pohybů, neboť jde samozřejmě o lineární soustavu. Vskutku můžeme snadno najít dva způsoby uvedení našeho systému do pohybu, z nichž každý je dokonalý periodický pohyb s jednou frekvencí. Pohyb, s nímž jsme předtím začínali, nebyl přísně periodický, protože nepřetržoval; jedna kulička odevzdávala energii druhé, a tak měnila svou amplitudu. Existují však takové způsoby uvedení do pohybu, při nichž se nic takového nemění. Jen, co se dozvíte, o jaké způsoby jde, ihned pochopíte, proč tomu tak je. Například, kdybychom spustili obě kyvadla současně, pak by v důsledku jejich stejných délek a toho, že tehdy pružina vlastně nic nedělá, kyvadla stále stejně kývala za předpokladu, že není tření a vše je dokonalé. Existuje ještě jiný druh pohybu, při němž také máme určitou frekvenci: je to pohyb, při němž se kyvadla pohybují proti sobě, když jsme je vychýlili v opačných směrech na přesně stejnou vzdálenost. Tehdy také dostaneme absolutně periodický pohyb. V takovém případě pružina vlastně dělá jen to, že trochu zvětšuje obnovující sílu pocházející od gravitace, a proto systém kmitá s trochu větší frekvencí než v prvním případě. Proč větší? Protože tah pružiny napomáhá gravitaci a dělá systém trochu „tužší“, takže frekvence tohoto pohybu je nepatrně větší než frekvence prvního.

Náš systém má dva způsoby, kterými může kmitat při nezměněné amplitudě: může kmitat tak, že obě kyvadla se pohybují stejným směrem a kmitají stále se stejnou frekvencí nebo se kyvadla pohybují opačným směrem s trochu větší frekvencí.



## RÁZY

Protože systém je lineární, můžeme si skutečný pohyb představit jako superpozici takových dvou pohybů. (Pamatujme, že předmětem této kapitoly jsou efekty skládání dvou pohybů s různými frekvencemi.) Uvažujme proto, co by se stalo, kdybychom zkombinovali tato dvě řešení. Začnou-li tyto dva pohyby v okamžiku  $t = 0$  se stejnou amplitudou a stejnou fází, superpozice těchto dvou pohybů znamená, že jedna kulička posunutá jedním pohybem na jednu stranu a druhým pohybem na opačnou stranu zůstane na místě, zatímco druhá kulička posunutá stejným směrem v obou pohybech bude mít velkou amplitudu. Postupem času se však fáze jednoho takového základního pohybu pomalu posouvá vzhledem k fázi druhého pohybu, neboť tyto *základní pohyby* probíhají nezávisle. To znamená, že po dostatečně dlouhé době, když se v prvním pohybu uskutečnilo např. „900,5“ kmitů a v druhém pouze „900“ kmitů, relativní fáze bude opačná než byla na začátku. Pohyb, který měl původně velkou amplitudu, se stane nulovým, zatímco původně nehybná kulička se bude pohybovat plnou silou!

Vidíme, že takový složitý pohyb můžeme analyzovat jako rezonanci, při níž přechází energie z jednoho objektu na druhý nebo jako superpozici dvou pohybů s konstantními amplitudami, ale s různými frekvencemi.

---

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

---

- 48.1 ■ Fázová rychlost vlny s vlnovou délkou  $\lambda$  šířící se na vodní hladině, zanedbáme-li konečnou hloubku vodního bazénu (tzv. vlna na hluboké vodě) a povrchové napětí, je rovna  $v_f = \sqrt{g\lambda/2\pi}$ . Ukažte, že grupová rychlost vlny je rovna polovině fázové rychlosti. Čemu jsou rovny fázová a grupová rychlost vlny o vlnové délce 1 000 m?
- 48.2 ■ Vezměme-li v předchozí úloze v úvahu vliv povrchového napětí, můžeme ukázat, že fázová rychlost vlny na hluboké vodě s hustotou  $\rho$  a povrchovým napětím  $\sigma$  bude rovna  $v_f = \sqrt{2\pi\sigma/\lambda\rho + g\lambda/2\pi}$ . Najděte grupovou rychlost takové vlny.
- 48.3 ■ Najděte fázovou rychlost zčeření o vlnové délce 1,0 cm na povrchu vody (povrchové napětí  $\sigma_v = 0,070$  N/m) a etylalkoholu (povrchové napětí  $\sigma_e = 0,026$  N/m).
- 48.4 ■ Najděte vlnovou délku a frekvenci zčeření na povrchu vody, jež se šíří *minimální* rychlostí.
- 48.5 ■ Dlouhý motorový nákladní vlak se blíží ke kopci rychlostí 5,0 m/s po přímé trati. Před tunelem proraženým ve svislé skalní stěně strojvůdce spustí táhlý zvuk sirény o základní frekvenci 340 Hz. Tón sirény a jeho ozvěnu od stěny slyší jednak strojvůdce, jednak člověk stojící na zemi v blízkosti posledního vagónu. Jaký zvuk uslyší strojvůdce a jaký člověk na zemi?

# M 49

## Mody

---

### 49.1 ODRAZ VLN

### 49.2 VLNY V OHRANIČENÉ OBLASTI, VLASTNÍ FREKVENCE

### 49.3 DVOJROZMĚRNÉ MODY

### 49.4 VÁZANÁ KYVADLA

### 49.5 LINEÁRNÍ SOUSTAVY

#### 49.1 ODRAZ VLN

V této kapitole se budeme zabývat některými pozoruhodnými jevy, které jsou důsledkem toho, že vlny jsou ohraničené určitou konečnou oblastí. Nejprve se zmíníme o několika zajímavých skutečnostech souvisejících například s chvěním struny a pak zobecníme těchto faktů dospějeme k principu, který je pravděpodobně nejdalekosáhlejším principem matematické fyziky.

Naším prvním příkladem ohraničených vln bude vlna ohraničená na jedné straně. Jako příklad uvažujme jednorozměrnou vlnu na struně. Stejně dobře by bylo možné uvažovat jednorozměrné zvuk dopadající na stěnu nebo jiné situace podobného charakteru, ale případ struny pro naše účely postačí. Předpokládejme, že struna je na jednom konci upevněna, například tak, že je uchycena na „nekonečně pevné“ stěně. Tuto skutečnost můžeme matematicky vystihnout tak, že posunutí struny  $y$  v bodě  $x = 0$  je nulové, protože konec struny se nehýbe. Kdyby nebyla stěna, bylo by obecné řešení pohybu součtem dvou funkcí,  $F(x - ct)$  a  $G(x + ct)$ , z nichž první představuje vlnu putující podél struny jedním směrem a druhé vlnu postupující opačným směrem k opačnému konci struny. Obecné řešení pro kteroukoliv strunu je

$$y = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (49.1)$$

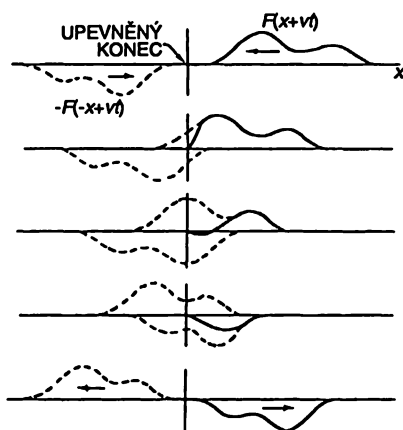
My však musíme vyhovět podmínce, že struna se na jednom konci nehýbe. Položíme-li v rovnici (49.1)  $x = 0$  a určíme  $y$  pro libovolnou hodnotu  $t$ , dostaneme  $y = F(-ct) + G(+ct)$ . Má-li se toto rovnat v každém okamžiku nule, musí být funkce  $G(ct)$  rovna  $-F(-ct)$ . Jinak řečeno, funkce  $G$  nějaké veličiny musí být rovna funkci  $-F$  téže veličiny se znaménkem minus. Vložíme-li tento poznatek do rovnice (49.1), zjistíme, že řešení naší úlohy má tvar

$$y = F(x - ct) - F(-x - ct) \quad (49.2)$$

## ODRAZ VLN

Snadno se přesvědčíme o tom, že pro  $x = 0$  dostaneme  $y = 0$ .

*Obr. 49.1* znázorňuje vlnu postupující v záporném směru osy  $x$  v blízkosti  $x = 0$  a hypotetickou vlnu postupující v opačném směru s opačným znaménkem a na druhé straně od počátku. Říkáme, že jde o hypotetickou vlnu, protože na té straně stěny není struna, která by kmitala. Za výsledný pohyb struny je třeba považovat součet těchto dvou vln v oblasti kladných hodnot  $x$ . Dosáhnou-li počátku  $x = 0$ , vždy se navzájem ruší, takže nakonec bude v oblasti kladných hodnot  $x$  existovat jen ta druhá (odražená) vlna a bude samozřejmě postupovat v opačném směru. Tyto výsledky jsou ekvivalentní tvrzení: Dosáhne-li vlna upevněného konce struny, odrazí se se změněným znaménkem. Takový odraz můžeme pochopit, představíme-li si, že to, co přichází na konec struny, vychází převrácené za stěnou. Krátce řečeno: Představíme-li si nekonečnou strunu a předpokládáme, že tam, kde máme vlnu postupující jedním směrem, máme i vlnu postupující opačným směrem s uvedenou symetrií. Potom posunutí v  $x = 0$  je vždy nulové a nic se nestane, jestliže strunu v tomto bodě upevníme.



Obr. 49.1 Odraz vlny jako superpozice dvou postupných vln

Další věcí, o níž budeme mluvit, je odraz periodické vlny. Předpokládejme, že vlna charakterizovaná funkcí  $F(x - ct)$  je sinusoidální vlna a ta se odrazila; odražená vlna je potom  $-F(-x - ct)$  je také sinusoidální vlna se stejnou frekvencí, ale postupující opačným směrem. Takovou situaci můžeme nejjednodušeji popsat pomocí komplexních funkcí:  $F(x - ct) = e^{i\omega(t - x/c)}$  a  $F(-x - ct) = e^{i\omega(t + x/c)}$ . Kdybychom tyto výrazy dosadili do vztahu (49.2) a položili  $x = 0$ , platilo by  $y = 0$  pro všechny hodnoty  $t$ , takže by to splnilo nutnou podmínku. Kdybychom využili vlastnosti exponenciál, mohli bychom tento výsledek přepsat do jednoduššího tvaru

$$y = e^{i\omega t} (e^{-i\omega x/c} - e^{i\omega x/c}) = -2ie^{i\omega t} \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right). \quad (49.3)$$

Je zde něco zajímavého a nového, a spočívá to v tom, že pohled na libovolný bod  $x$  struny nás přesvědčí o tom, že struna kmitá s frekvencí  $\omega$ . Bez ohledu na to, kde se bod nachází, bude frekvence stejná! Existují však místa, v nichž  $\sin(\omega x/c) = 0$ , a v těchto místech nedochází k posunutí. Uděláme-li dále v kterémkoliv okamžiku fotografickou momentku kmitající struny, bude

## MODY

obrázkem sinusoidální vlna. Posunutí této sinusoidální vlny bude záviset na čase  $t$ . Z vyjádření (49.3) vidíme, že délka jednoho cyklu sinusové vlny je rovna vlnové délce skládajících se vln

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (49.4)$$

Nehybné body vyhovují podmínce  $\sin(\omega x/c) = 0$ , to znamená, že  $(\omega x/c) = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots$ . Takové body se nazývají *uzly*. Mezi libovolnými dvěma za sebou jdoucími uzly se každý bod pohybuje nahoru a dolů sinusoidálně, ale pohybový obrazec zůstává v prostoru nehybný. Taková je základní charakteristika toho, co nazýváme *mod*. Je-li obrazec pohybu takový, že každý bod objektu se pohybuje sinusoidálně a všechny body se pohybují se stejnou frekvencí (i když některé se pohybují víc než druhé), máme co činit s modem.

### 49.2 VLNY V OHRANIČENÉ OBLASTI, VLASTNÍ FREKVENCE

Bude zajímavé uvážit, co se stane, upevníme-li strunu na obou koncích, např. v bodech  $x=0$ ,  $x=L$ . Naše úvahy můžeme začít představou o odrazu vln, a to tak, že si představíme, jak se jakási vyvýšenina nebo hrb šíří v jednom směru. S přibývajícím časem se hrb dostane blíže k jednomu konci a jak čas roste, hrb se zmenšuje, protože se složí s obráceným zrcadlovým hrbem přicházejícím z opačné strany. Nakonec původní hrb vymizí a zrcadlový hrb bude postupovat v opačném směru, aby na opačném konci zopakoval předcházející proces. Taková úloha má jednoduché řešení, ale bylo by zajímavé si položit otázku, zda můžeme v takovém případě dostat sinusoidální pohyb (popsané řešení je *periodické*, ale není *sinusoidálně periodické*). Zkusme na struně vybudit sinusoidálně periodickou vlnu. Je-li struna na jednom konci upevněna, musí řešení vypadat tak jako v předcházejícím případě, tj. jako (49.3). Je-li struna upevněna i na druhém konci, musí mít i tam řešení stejný tvar. Jedinou možností pro periodický sinusoidální pohyb je, že vlna se pěkně rozmístí podél délky struny. Nestane-li se to, nepůjde o vlastní frekvenci, při níž by struna setrvala v kmitání. Prostě, vznikne-li na struně vlna sinusoidálního tvaru, která vyhovuje délce struny, udrží se tento dokonale sinusoidální tvar vlny a struna bude harmonicky kmitat s určitou frekvencí.

Matematicky můžeme vyjádřit tvar vlny funkcí  $\sin kx$ , kde  $k$  je rovno  $(\omega/c)$  z rovnic (49.3) a (49.4). Tato funkce je rovna nule v bodě  $x=0$ , musí však být nulová i na druhém konci. Podstatné je to, že  $k$  už nemůže být libovolné jako v případě struny upevněné jen na jednom konci. Je-li struna upevněna na obou koncích, jedinou možností je, aby  $\sin(kL) = 0$ , neboť jen taková podmínka připouští pevné konce struny. Aby byl sinus nulový, musí být úhel roven  $0, \pi, 2\pi$  nebo jinému celočíselnému násobku  $\pi$ . Rovnice

$$kL = n\pi \quad (49.5)$$

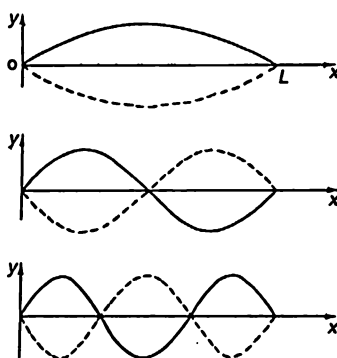
nám proto dá všechny možné hodnoty  $k$  v závislosti na celých číslech  $n$ . Každému  $k$  odpovídá určitá frekvence  $\omega$ , pro niž podle vztahu (49.3) platí

$$\omega = kc = \frac{n\pi c}{L}. \quad (49.6)$$

Tak jsme zjistili, že struna má tu vlastnost, že může konat sinusoidální pohyb, *ale jen při urči-*

## VLNY V OHRANIČENÉ FREKVENCI, VLASTNÍ FREKVENCE

*tých frekvencích.* To je nejdůležitější rys ohraničených vln. Bez ohledu na složitost soustavy se vždy ukáže, že existují určité druhy pohybů s dokonale sinusoidální časovou závislostí, ale s frekvencemi závislými na vlastnostech dané soustavy a povaze jejích hranic. V případě struny máme mnoho různých možných frekvencí, každá podle definice odpovídá nějakému modu, neboť mod představuje pohybový obrazec, který se sinusoidálně opakuje. Na obr. 49.2 jsou znázorněny první tři mody struny. Vlnová délka  $\lambda$  prvního modu je  $2L$ . Zjistili bychom to, kdybychom prodloužili vlnu do  $x = 2L$ , a tak bychom dostali úplný cyklus sinusoidální vlny. Úhlová frekvence  $\omega$  je obecně rovna podílu  $2\pi c$  a vlnové délky, což je v našem případě  $\pi c/L$ , protože  $\lambda$  je rovna  $2L$  a tento výsledek je ve shodě se vztahem (49.6) pro  $n = 1$ . Označme frekvenci prvního modu symbolem  $\omega_1$ . Další mod vykazuje dvě smyčky s jedním uzlem uprostřed. Vlnová délka tohoto modu je prostě  $L$ . Odpovídající hodnota  $k$  a i vlastní frekvence jsou nyní dvakrát větší, tedy  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Frekvence třetího modu je rovna  $3\omega_1$  atd. Všechny různé frekvence struny jsou tedy celočíselné násobky nejnižší frekvence  $\omega_1$ .



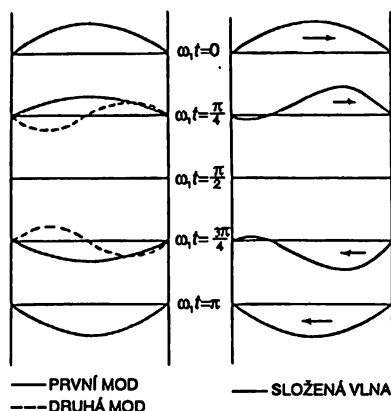
Obr. 49.2 První tři mody vibrující struny

Vraťme se opět k obecnému pohybu struny. Ukazuje se, že libovolný možný pohyb lze zkoumat jako současné působení několika modů. Pro úplně obecný pohyb musí být současně vybudeno nekonečně mnoho modů. Abychom o tom získali určitou představu, nakreslíme si, co se děje, jsou-li současně vybudeny dva mody. Předpokládejme, že první mod probíhá tak, jak to znázorňuje posloupnost obrázků 49.3, která zachycuje výchylku struny ve stejně vzdálených časových intervalech v průběhu polovičního cyklu nejnižší frekvence.

Nyní předpokládejme, že je současně vybuděn i druhý mod. Na obr. 49.3 je znázorněna i posloupnost výchylek struny u druhého modu, který je na počátku fázově posunut o  $90^\circ$  proti prvnímu modu. To znamená, že zpočátku nebyla výchylka, ale dvě poloviny struny měly opačně orientované rychlosti. Nyní si připomeňme obecný princip platný pro lineární systémy: máme-li libovolná dvě řešení, je řešením i jejich součet. Proto třetím možným pohybem struny bude výchylka, kterou získáme sčítáním dvou řešení znázorněných na obr. 49.3. Výsledek je také znázorněn na obrázku a začíná připomínat vyvýšeninu pohybující se dopředu a dozadu mezi konci struny. Se dvěma mody si o tom nemůžeme vytvořit dostatečně dobrou představu; potřebovali bychom modů víc. Tento výsledek je vlastně speciálním případem vynikajícího principu lineárních soustav:

*Libovolný pohyb můžeme zkoumat za předpokladu, že jde o součet pohybů všech různých modů s vhodnými amplitudami a fázemi.*

## MODY



Obr. 49.3 Dva mody vytvoří při složení postupnou vlnu

Význam tohoto principu spočívá v tom, že každý mod je velmi jednoduchý – není to nic jiného než sinusoidální pohyb v čase. Je sice pravda, že ani obecný pohyb struny není příliš komplikovaný, ale existují jiné systémy, např. chvění křídla letadla, při nichž je pohyb mnohem složitější. Ale i v případě křídla letadla zjišťujeme existenci určitého stáčení, které má jednu frekvenci a jiných stáčení s jinými frekvencemi. Umíme-li takové mody najít, můžeme výsledný pohyb zkoumat jako superpozici harmonických kmitů (s výjimkou těch případů, kdy chvění je tak velké, že systém už nemůžeme považovat za lineární).

### 49.3 DVOJROZMĚRNÉ MODY

Další příklad, který si zaslouží pozornost, je případ modů ve dvou rozměrech. Dokud jsme mluvili jen o jednorozměrných situacích – o napjaté struně nebo o zvukových vlnách v trubici. Nakonec budeme muset uvažovat trojrozměrný případ, ale jako mezikrok uvažujme jednodušší případ, kdy máme dva rozměry. Pro konkrétnost uvažujme pravoúhlý buben s gumovou blánou, který je sestaven tak, že na pravoúhlém okraji bubnu se blána nevychyluje a rozměry blány jsou  $a, b$  (obr. 49.4). Ptáme se, jaký je charakter možného pohybu. Můžeme začít stejným postupem jako v případě struny. Kdyby nebylo žádné upevnění, mohli bychom očekávat, že půjde o šíření vln s určitým druhem vlnového pohybu. Například  $(e^{i\omega t})(e^{-ik_x x + ik_y y})$  by představovalo sinusoidální vlnu postupující určitým směrem, který závisí na relativních hodnotách  $k_x$  a  $k_y$ . Zajímá nás, jak se může stát osa  $x$ , tedy přímka  $y = 0$ , uzlem. Využijme stejné myšlenky jako v případě jednorozměrné struny a představme si jinou vlnu popisovanou komplexní funkcí  $(e^{-i\omega t})(e^{-ik_x x - ik_y y})$ . Superpozice těchto vln dá nulovou výchylku při  $y = 0$  bez ohledu na to, jaké jsou hodnoty  $x$  a  $t$ . (I když tyto funkce jsou definovány pro záporná  $y$ , kde není buben, který by kmital, nemusíme si toho všimnout, neboť výchylka je opravdu nulová při  $y = 0$ .) V tomto případě můžeme na druhou funkci hledět jako na odraženou vlnu.

Chceme však, aby uzlová přímka byla nejen pro  $y = 0$ , ale i pro  $y = b$ . Jak toho docílíme? Řešení takové úlohy souvisí s něčím, co jsme už dělali, když jsme zkoumali odraz světla od krystalů. Ty vlny, které se kompenzují pro  $y = 0$ , se kompenzují i pro  $y = b$  jen tehdy, když  $2b \sin \vartheta$  je celočíselným násobkem  $\lambda$ , přičemž  $\vartheta$  je úhel znázorněný na obr. 49.4

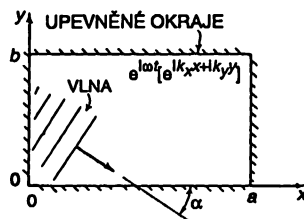
### DVOJROZMĚRNÉ MODY

$$m\lambda = 2b \sin \vartheta, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (49.7)$$

Stejným způsobem můžeme udělat uzlovou přímkou z osy  $y$ , přidáme-li další dvě funkce  $-(e^{i\omega t}) (e^{ik_x x + ik_y y})$  a  $(e^{i\omega t}) (e^{ik_x x - ik_y y})$ , z nichž každá představuje odraz jedné z druhých dvou vln od přímky  $x = 0$ . Podmínka pro to, aby přímka  $x = a$  byla uzlovou přímkou je podobná té, kterou jsme už měli pro  $y = b$ , takže  $2a \cos \vartheta$  musí být celočíselným násobkem  $\lambda$ :

$$n\lambda = 2a \cos \vartheta. \quad (49.8)$$

Konečným výsledkem pak je, že vlny odrážející se v krabici mají tvar stojaté vlny, tedy tvoří určité mody.



Obr. 49.4 Kmitající pravouhlá deska

Chceme-li tedy dostat mody, musíme splnit uvedené dvě podmínky. Najdeme nejprve vlnovou délku. Eliminujeme-li z rovnic (49.7) a (49.8) úhel  $\vartheta$ , dostaneme vlnovou délku vyjádřenou pomocí  $a$ ,  $b$ ,  $n$ ,  $m$ . Nejjednodušeji se to udělá tak, že se obě strany příslušných rovnic dělí  $2b$ , resp  $2a$ , umocní se a rovnice se sečtou. Tak dostaneme  $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1 = (n\lambda/2a)^2 + (m\lambda/2b)^2$  a odtud dostaneme pro  $\lambda$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{n^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4b^2}. \quad (49.9)$$

Tak máme vlnovou délku určenou pomocí dvou celých čísel  $a$  a  $n$  ihned dostaneme frekvenci  $\omega$ , neboť víme, že frekvence je rovna  $2\pi c$  dělenému vlnovou délkou.

Tento výsledek je tak zajímavý a důležitý, že bychom ho měli odvodit čistě matematickou analýzou, a ne použitím představ o odrazech. Představme si kmity jako superpozici čtyř vln zvolených tak, že čtyři přímky  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$  jsou uzlové. Dále budeme požadovat, aby všechny vlny měly stejnou frekvenci, takže výsledný pohyb bude představovat nějaký mod. Z našeho předcházejícího postupu při odrazu světla už víme, že  $(e^{i\omega t}) (e^{-ik_x x + ik_y y})$  představuje vlnu postupující ve směru označeném na obr. 49.4. Rovnice (49.6), tj.  $k = \omega/c$ , stále platí, předpokládáme-li

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (49.10)$$

Z obrázku je jasné, že  $k_x = k \cos \vartheta$ ,  $k_y = k \sin \vartheta$ .

Tak naše rovnice pro výchylku  $\varphi$  pravouhelníkové blány bubnu nabude výsledného tvaru

$$\varphi = [e^{i\omega t}] [e^{-ik_x x + ik_y y} - e^{+ik_x x + ik_y y} - e^{-ik_x x - ik_y y} + e^{+ik_x x - ik_y y}]. \quad (49.11a)$$



MODY

I když to působí chaotickým dojmem, součet takových výrazů není příliš komplikovaný. Exponenciály můžeme zkombinovat tak, aby z nich vznikly sinové funkce a výraz pro výchylku pak můžeme zapsat takto

$$\varphi = (-4 \sin k_x x \sin k_y y) (e^{i\omega t}). \quad (49.11b)$$


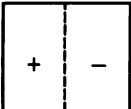
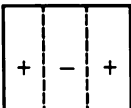
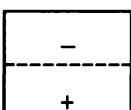
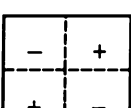
Jinými slovy, máme sinusoidální kmity a jejich tvar je také sinusoidální, jak ve směru osy  $x$ , tak ve směru osy  $y$ . Naše okrajové podmínky jsou samozřejmě splněny pro  $x=0$  i  $y=0$ . Chceme však, aby  $\varphi$  bylo nulové pro  $x=a$  a také  $y=b$ . Proto musíme položit dvě další podmínky:  $k_x a$  musí být celočíselným násobkem  $\pi$  a  $k_y b$  musí být také nějakým celočíselným násobkem  $\pi$ . Platí-li  $k_x = k \sin \vartheta$ ,  $k_y = k \sin \vartheta$ , ihned dostáváme rovnice (49.7) a (49.8) a z nich konečný výsledek (49.9).

Jako příklad uvažujme obdélník, jehož délka je rovna dvojnásobku šířky. Položíme-li  $a = 2b$  a využijeme rovnice (49.4) a (49.9), můžeme vypočítat frekvence všech modů

$$\omega^2 = \left( \frac{\pi c}{b} \right)^2 \frac{4m^2 + n^2}{4}. \quad (49.12)$$

Tabulka 49.1 představuje soupis několika jednoduchých modů a kvalitativním způsobem ukazuje i jejich tvar.

Tabulka 49.1

Typ modu	$m$	$n$	$(\omega/\omega_0)^2$	$\omega/\omega_0$
	1	1	1,25	1,12
	1	2	2,00	1,41
	1	3	3,25	1,80
	2	1	4,25	2,06
	2	2	5,00	2,24

## VÁZANÁ KYVADLA

Na tomto speciálním případě je třeba ukázat na jeden důležitý fakt spočívající v tom, že frekvence nejsou soudělné a nejsou násobky nějakého čísla. Obecně neplatí představa o tom, že vlastní frekvence jsou harmonicky vázány. Neplatí pro soustavy, které mají víc než jeden rozměr a neplatí ani pro ty jednorozměrné soustavy, které jsou složitější než struna s homogenní hustotou a napětím. Příkladem takové složitější jednorozměrné soustavy je zavěšený řetěz, v němž je napětí na horním konci větší než na dolním. Vybudíme-li v takovém řetězu harmonické kmity, vzniknou různé mody a frekvence, ale frekvence nebudou jednoduchými násobky nějakého čísla a ani tvar modů nebude sinusoidální.

Mody složitějších systémů jsou ještě komplikovanější. Například v ústech máme nad hlasivkami dutinu a pohybem jazyka, rtů apod. vytváříme otevřenou nebo uzavřenou píšťalu různých tvarů a parametrů. Je to opravdu velmi složitý rezonátor, ale přece jen to rezonátor je. Mluvíme-li, naše hlasivky vydávají nějaký tón. Tóny jsou velmi složité a je jich mnoho, ale ústní dutina tyto tóny dále modifikuje, díky různým rezonančním frekvencím této dutiny. Například zpěvák může zpívat různé samohlásky: *a*, *o*, *u* atd. se stejnou výškou, ale budou znít různě, neboť různé harmonické kmity různě rezonují s dutinou. Velký význam rezonančních frekvencí dutiny pro modifikaci hlasových zvuků můžeme demonstrovat jednoduchým experimentem. Protože rychlost zvuku je nepřímě úměrná druhé mocnině hustoty, můžeme tuto rychlost měnit použitím různých plynů. Použijeme-li místo vzduchu hélium, které má nižší hustotu, dostaneme mnohem větší rychlost zvuku a všechny rezonanční frekvence dutiny vzrostou. Kdyby si tedy někdo naplnil plíce před hovorem héliem, charakter jeho hlasu by se drasticky změnil, i kdyby jeho hlasivky kmitaly nezměněně.

### 49.4 VÁZANÁ KYVADLA

Nakonec je třeba zdůraznit, že mody existují nejen v případech složitých spojitých soustav, ale i v případě velmi jednoduchých mechanických systémů. Vhodným příkladem je soustava dvou vázaných kyvadel, již jsme se zabývali v předcházející kapitole. Tam jsme ukázali, že pohyb můžeme chápat jako superpozici dvou harmonických pohybů s různými frekvencemi. I tuto soustavu tedy můžeme zkoumat pomocí harmonických modů. Struna má nekonečně mnoho modů a dvojrozměrná plocha má také nekonečně mnoho modů. Je to svým způsobem dvojnásobně nekonečno, umíme-li nekonečna sčítat. Ale v jednoduchém mechanickém zařízení, které má jen dva stupně volnosti a vyžaduje k popisu jen dvě proměnné, existují jen dva mody.

Provedme matematický rozbor těchto dvou modů v případě, kdy jsou obě kyvadla stejně dlouhá. Nechť je stejně jako na *obr. 49.5* výchylka jednoho kyvadla  $x$  a druhého  $y$ . Kdyby nebyla pružina, v důsledku tíhy by byla síla působící na první hmotný bod úměrná jeho výchylce. Kdyby nebyla pružina, existovala by pro toto kyvadlo nějaká vlastní frekvence  $\omega_0$ . Pohybová rovnice pro kyvadlo bez pružiny by měla tvar

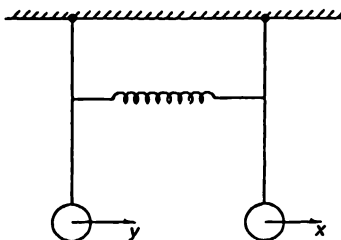
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x. \quad (49.13)$$

Podobně bez přítomnosti pružiny by druhé kyvadlo kývalo stejným způsobem. V přítomnosti pružiny se vedle obnovující síly podmíněné tíhou objevuje dodatečná síla od pružiny přitahující první hmotný bod. Tato síla závisí na převýšení výchylky  $x$  nad výchylkou  $y$  a je úměrná tomuto rozdílu, takže lze zapsat jako nějaká konstanta, závislá na geometrii, násobená rozdílem  $(x - y)$ .

## MODY

Stejná síla, ale v opačném smyslu, působí na druhý hmotný bod. Proto musíme vyřešit tyto pohybové rovnice

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - k(x-y), \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y - k(y-x). \quad (49.14)$$



Obr. 49.5 Dvě vázaná kyvadla

Abychom našli pohyb, při němž se obě závaží kyvadel pohybují se stejnou frekvencí, musíme určit, jak se každé z nich vychyluje. Jinými slovy, kyvadlo  $x$  a kyvadlo  $y$  se budou kývat se stejnou frekvencí, ale jejich amplitudy musí mít určité hodnoty  $A$  a  $B$ , jejichž poměr je stálý. Zkusme třeba řešení

$$x = A e^{i\omega t}, \quad y = B e^{i\omega t}. \quad (49.15)$$

Dosadíme-li tyto veličiny do rovnic (49.14) a seskupíme podobné členy, dostaneme

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right) A = -\frac{k}{m} B, \quad \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right) B = -\frac{k}{m} A. \quad (49.16)$$

Rovnice jsme získali dělením společným faktorem  $e^{i\omega t}$  a  $m$ .

Vypadá to tak jako bychom měli dvě rovnice pro dvě neznámé. Ve skutečnosti však nemáme *dvě* neznámé, neboť celý rozsah pohybu nemůžeme z těchto rovnic určit. Uvedené rovnice nám dovolují najít jen *poměr veličin A a B a obě musí dát stejný poměr*. Aby tyto rovnice byly současně splnitelné, musí být frekvence zcela speciální.

V tomto konkrétním případě můžeme frekvenci snadno najít. Vynásobíme-li rovnice navzájem, dostaneme

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m}\right)^2 AB = \left(\frac{k}{m}\right)^2 AB. \quad (49.17)$$

Pokud  $A$  a  $B$  jsou nenulové (kdyby byly nulové, nebyl by pohyb), můžeme výrazem  $AB$  krátit. Nastává-li pohyb, dostaneme z uvedeného vztahu kvadratickou rovnici. Jejím vyřešením dostaneme dvě možné frekvence

$$\omega_1^2 = \omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2k}{m}. \quad (49.18)$$

Dosadíme-li dále tyto hodnoty frekvencí zpět do rovnice (49.16), zjistíme, že pro první frekvenci platí  $A = B$  a pro druhou  $A = -B$ . Tak tedy vypadá „tvar modů“, o čemž se můžeme přesvědčit experimentem.

## LINEÁRNÍ SOUSTAVY

Je jasné, že v případě prvního modu, když  $A = B$ , se pružina nenapíná a obě závaží kmitají s frekvencí  $\omega_0$ , jakoby pružina neexistovala. V případě druhého řešení, kdy  $A = -B$ , přispívá pružina k obnovovací síle a zvyšuje frekvenci. Ještě zajímavější případ bychom dostali, kdybychom měli kyvadla různé délky. I v tomto případě je analýza podobná té, kterou jsme provedli a můžeme ji doporučit čtenáři jako cvičení.

### 49.5 LINEÁRNÍ SOUSTAVY

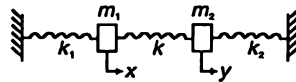
Nyní shrňme myšlenky, o nichž jsme mluvili a které všechny představují aspekty toho, co je pravděpodobně nejjobecnější a nejkrásnější princip matematické fyziky. Máme-li lineární soustavu, jejíž charakter nezávisí na čase, nemusí být jeho pohyb nějak jednoduchý, může být i neobyčejně složitý, a přece existují velmi speciální pohyby, obvykle celá řada takových pohybů, při nichž se celkový tvar pohybu mění exponenciálně s časem. Pro kmitající soustavy, o nichž jsme nyní mluvili, je exponenciála imaginární a místo výrazu „exponenciálně“ by bylo lépe říkat „sinusoidálně“ s časem. Můžeme to však říci obecněji a to tak, že pohyby se mění exponenciálně s časem ve velmi speciálních modech s velmi speciální formou. Ten nejjobecnější pohyb soustavy lze vždy vyjádřit jako superpozici pohybů zahrnujících každou z různých exponenciál.

Stojí za to zdůraznit to ještě jednou i pro sinusoidální pohyby: lineární soustava se nemusí pohybovat čistě sinusoidálním způsobem, tj. s jednou určitou frekvencí, ale ať se pohybuje jakkoliv, tento pohyb lze vyjádřit jako superpozici čistě sinusoidálních pohybů. Frekvence každého z těchto pohybů a také forma vlny jsou charakteristické pro danou soustavu. Obecný pohyb v každé takové soustavě můžeme charakterizovat udáním amplitudy a fáze každého z těchto modů a pak je sečíst. Lze to říci i tak, že každá kmitající lineární soustava je ekvivalentní souboru nezávislých harmonických oscilátorů, jejichž frekvence odpovídají frekvencím modů soustavy.

Tuto kapitolu uzavřeme poznámkou o vztahu modů a kvantové mechaniky. V kvantové mechanice je kmitajícím objektem, tedy tím, co se mění s časem, amplituda pravděpodobnostní funkce, která udává pravděpodobnost nalezení elektronu resp. systému elektronů v dané konfiguraci. Tato amplituda se může měnit v prostoru a čase a ve skutečnosti splňuje lineární rovnici. Jenže v kvantové mechanice existuje transformace, podle níž to, co jsme nazývali frekvence amplitudy pravděpodobnosti, je rovno energii v jejím klasickém smyslu. Proto už zformulovaný princip můžeme na takový případ přenést tak, že slovo *frekvence* nahradíme slovem *energie*. Pak tento princip vypadá takto: Kvantověmechanická soustava, například atom, nemusí mít určitou energii, tak jako jednoduchý mechanický systém nemusí mít určitou frekvenci. Ale ať se tato soustava chová jakkoliv, její chování můžeme vždy vyjádřit jako superpozici stavů s určitou energií. Energie každého stavu a právě tak forma amplitudy určující pravděpodobnost nalezení částice v různých místech je charakteristikou atomu. Obecný pohyb můžeme popsat udáním amplitud každého z těchto rozličných energetických stavů. Zde je původ energetických hladin v kvantové mechanice. Protože kvantová mechanika je reprezentována vlnami, pak v podmínkách, kdy elektron nemá dost energie na to, aby se odtrhl od protonu, *jsou tyto vlny ohraničené*. Stejně jako v případě ohraničených vln struny existují pouze určité frekvence při řešení vlnové rovnice kvantové mechaniky. V kvantověmechanické interpretaci to budou určité *energie*. Jako důsledek toho, že kvantověmechanická soustava je reprezentována vlnami, může mít určité stavy s danou energií; příkladem jsou diskrétní energetické hladiny atomu.

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 49.1 ■ Dvě tělesa o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  jsou upevněna ke dvěma stěnám pružinami o tuhostech  $k_1$  a  $k_2$ . Vzájemně jsou spojeny pružinou o tuhosti  $k$  (viz obrázek). Napište pohybové rovnice těchto těles a označte přitom  $k_1/m_1 = k_2/m_2 = \omega_0^2$ .



- 49.2 ■ Do rovnic získaných v předchozí úloze dosadte  $x = Ae^{i\omega t}$  a  $y = Be^{i\omega t}$  a najděte frekvence a poměr amplitud modů soustavy.

- 49.3 ■ Dokažte, že funkce  $f(x, y, z, t) = Ae^{i\omega t} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi z}{c}$ , kde

$$\omega^2 = v^2 \pi^2 \left( \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right), \text{ a } l, m, n \text{ jsou celá čísla větší nebo rovna jedné,}$$

- a) vyhovuje trojrozměrné vlnové rovnici popisující vlnu o rychlosti šíření  $v$ ;  
 b) je rovna 0 při  $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$ ;  
 c) mění se v čase jako sinusoida.

- 49.4 ■ Za předpokladu, že v předchozí úloze  $a:b:c = 1:2:3$  najděte 10 minimálních frekvencí vyjádřených pomocí nejmenší frekvence  $\omega_0$ . Uspořádejte je podle velikosti a naneste na vertikální stupnici.

- 49.5 ■ Na základě představy o nekonečně dlouhých periodických vlnách šířících se proti sobě vysvětlete, co se stane, jestliže ideální homogenní napjatou strunu délky  $L$  vychýlíme ve středním bodě kolmo o vzdálenost  $A$  a pustíme. Zakreslete několik poloh struny v různých okamžicích během jedné půlperiody první harmonické.

# 50 Harmonické kmity

## 50.1 HUDEBNÍ TÓNY

## 50.2 FOURIEROVY ŘADY

## 50.3 KVALITA A LIBOZVUČNOST

## 50.4 FOURIEROVY KOEFICIENTY

## 50.5 VĚTA O ENERGII

## 50.6 NELINEÁRNÍ ODEZVY

### 50.1 HUDEBNÍ TÓNY

Říká se, že to byl Pythagoras, kdo objevil tento jev: Pro ucho je libozvučné současné znění dvou stejných a stejně napjatých strun s různými délkami, jsou-li délky těchto strun v poměru malých celých čísel. Je-li poměr délek jedna ku dvěma, odpovídá to v hudbě oktávě. Je-li poměr dva ku třem, odpovídá to intervalu mezi  $C$  a  $G$ , který se nazývá kvintou. Takové intervaly jsou obecně považovány za „libozvučné“ akordy.

Pythagoras byl tak unesen tímto objevem, že na něm založil celou školu – nazývala se pythagorejská – která mysticky věřila ve velkou moc čísel. Panovalo přesvědčení, že něco podobného se zjistí i pro planety – resp. „sféry“. Proto se říká „hudba sfér“. Základní myšlenka této teorie spočívala v existenci číselných vztahů mezi orbitami planet nebo mezi jinými objekty v přírodě. Lidé to obvykle považují za projev pověrčivosti Řeků. Položme si však otázku, zda je to tak příliš odlišné od našeho vědeckého zájmu o kvantitativní vztahy. Pythagorův objev byl kromě geometrie prvním příkladem numerického vztahu v přírodě. Muselo to být úžasně překvapující najednou objevit v přírodě *sakt* vyjádřený jednoduchým číselným vztahem. Jednoduchá měření délky poskytla předpověď o něčem, co zjevně nesouviselo s geometrií, předpověď o tvorbě příjemných zvuků. Tento objev vedl k myšlence, že snad aritmetika a numerická analýza budou vhodnými nástroji pro pochopení přírody. Výsledky moderní vědy potvrzují toto stanovisko.

Pythagorovi se podařilo učinit svůj objev jen díky experimentálnímu pozorování. Přesto na něho, jak se zdá, tento důležitý aspekt nezapůsobil. V opačném případě by totiž rozvoj fyziky začal mnohem dříve. (Snadno se mluví o tom, co někdo kdysi udělal, jak to měl udělat!)

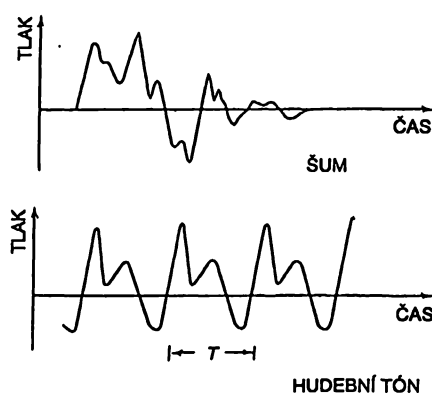
Všimněme si třetího aspektu tohoto velmi zajímavého objevu: máme co činit se dvěma tóny, které pro ucho *příjemně znějí*. Můžeme si položit otázku, zda jsme na tom lépe než Pythagoras v poznání, proč jsou našemu uchu příjemné určité tóny. Obecná teorie estetiky od dob

## HARMONICKÉ KMITY

Pythagora téměř vůbec nepokročila. V tomto jediném objevu Řeků jsou vlastně tři aspekty: experiment, matematické vztahy a estetika. Fyzici byli úspěšní jen v prvních dvou oblastech. Tato kapitola se bude zabývat současným chápáním Pythagorova objevu.

Mezi zvuky, které slyšíme, je určitý druh, který nazýváme *šumem*. Šumu odpovídají jakési nepravidelné kmity ušního bubínku vyvolané nepravidelným kmitáním nějakého blízkého objektu. Kdybychom nakreslili graf závislosti tlaku vzduchu na bubínek (a tedy i posunutí bubínku) na čase, zjistili bychom, že je podobný grafu na obr. 50.1a. Takový šum odpovídá zhruba dupotu nohou. *Hudební tón* má jiný charakter. Hudbu můžeme charakterizovat přítomností více méně *setrvávajících tónů* – nebo hudebních „not“. (Hudební nástroje však dokážou vytvářet i šum!) Tón může trvat relativně krátkou dobu, jako když stlačíme klávesu klavíru nebo může trvat velmi dlouho, jako v případě flétnisty, který píská dlouhý tón.

V čem spočívá zvláštnost hudebního tónu z hlediska tlaku vzduchu? Hudební tón se liší od šumu v tom, že jeho graf je periodický. Existuje určitý nepravidelný průběh změny tlaku vzduchu v určitém časovém intervalu, ale tento průběh se pak periodicky opakuje. Příklad závislosti tlaku na čase odpovídající hudebnímu tónu je vidět na obr. 50.1b.



Obr. 50.1 Tlak jako funkce času a) v případě šumu b) v případě hudebního tónu

Hudebníci obvykle charakterizují hudební tón hlasitostí (silou), výškou a kvalitou. Hlasitost odpovídá velikosti tlakových změn. Výška odpovídá časové periodě opakování základní tlakové funkce. (Nízké tóny mají delší periody než vysoké tóny.) Kvalita tónu je charakterizována rozdíly, které slyšíme při znění dvou tónů stejné hlasitosti a výšky. Hoboj, housle nebo soprán rozeznáme i tehdy, když vytvářejí tón stejné výšky. Kvalita souvisí se strukturou periodicky se opakujícího obrazce.

Na chvíli předpokládejme, že zvuk vzniká kmitáním struny. Rozezvučíme-li strunu tak, že ji uprostřed vychýlíme a pustíme, bude její další pohyb určován vlnami, které jsme vybudili. Víme, že takové vlny se budou šířit oběma směry a na koncích se odrazí. Tak budou dlouhou dobu putovat z jednoho konce na druhý. Vlna se bude bez ohledu na to, jak je složitá, periodicky opakovat. Perioda opakování je právě doba  $T$  potřebná k tomu, aby vlna proběhla dvě délky celé struny. Je to doba, kterou potřebuje jakákoliv vybuzená vlna k odrazu od každého konce, návratu do původní polohy a pokračování v původním směru. Doba je stejná pro vlny postupující v jednom nebo druhém směru. Každý bod struny se vrátí do své počáteční polohy po jedné periodě a pak znovu po další periodě atd. Vybuzená zvuková vlna se musí opakovat stejně. Tak můžeme vysvětlit vznik hudebního tónu brnknutím o strunu.

## 50.2 FOURIEROVY ŘADY

V předcházející kapitole jsme se seznámili s jiným pohledem na kmitající soustavu. Poznali jsme, že struna má různé módy a každou určitou vibraci podmíněnou počátečními podmínkami můžeme považovat za vhodnou kombinaci několika módů, které kmitají současně. V případě struny jsme zjistili, že normální módy mají frekvence  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ . Nejobecnější pohyb rozkmitané struny je proto složen ze sinusoidálních kmitů se základní frekvencí  $\omega_0$ , dále s druhou harmonickou frekvencí  $2\omega_0$ , dále s třetí harmonickou  $3\omega_0$  atd. Základní mod se opakuje po každé periodě  $T_1 = 2\pi/\omega_0$ . Druhý harmonický mod se opakuje po každé periodě  $T_2 = 2\pi/2\omega_0$ . Opakuje se však i po  $T_1 = 2T_2$ , tedy po dvou svých periodách. Podobně se třetí harmonický kmit opakuje po časovém intervalu  $T_1$ , který představuje jeho tři periody. Tak vidíme, že struna, kterou jsme rozkmitali, opakuje obrazec svého pohybu s periodou  $T_1$ . Tím vytváří hudební tón.

Dosud jsme mluvili o pohybu struny. Ale *zvuk*, který je pohybem vzduchu, je vyvolán pohybem struny, a proto i jeho kmity se musí skládat ze stejných harmonických kmitů – i když nemůžeme mluvit o vlastních kmitech vzduchu. I relativní velikost harmonických kmitů může být ve vzduchu jiná než ve struně, hlavně tehdy, je-li struna „vázána“ se vzduchem prostřednictvím ozvučnice. Účinnost této vazby se vzduchem je totiž různá pro různé harmonické kmity.

Vyjadřuje-li funkce  $f(t)$  časovou závislost tlaku vzduchu v případě hudebního tónu (např. takovou jaká je na *obr. 50.1b*), pak můžeme očekávat, že  $f(t)$  lze vyjádřit jako součet určitého počtu jednoduchých harmonických funkcí času – takových jako je  $\cos \omega t$  – pro každou z různých harmonických frekvencí. Je-li perioda kmitů  $T$ , bude základní úhlová frekvence  $\omega = 2\pi/T$  a harmonické frekvence budou  $2\omega, 3\omega$  atd.

Je to však trochu složitější. Nemůžeme totiž očekávat, že počáteční fáze budou pro všechny frekvence stejné. Musíme proto pracovat s funkcemi typu  $\cos(\omega t + \varphi)$ . Je však jednodušší používat pro každou frekvenci sinus i kosinus. Vzpomeňme si, že

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cos \omega t - \sin \varphi \sin \omega t \quad (50.1)$$

a protože  $\varphi$  je konstanta, můžeme *každý* sinusoidální kmit s frekvencí  $\omega$  vyjádřit jako součet takového členu, který obsahuje  $\cos \omega t$  a takového, který obsahuje  $\sin \omega t$ .

Tak přicházíme k závěru, že *každou* funkci  $f(t)$ , která je periodická s periodou  $T$ , můžeme matematicky vyjádřit ve tvaru

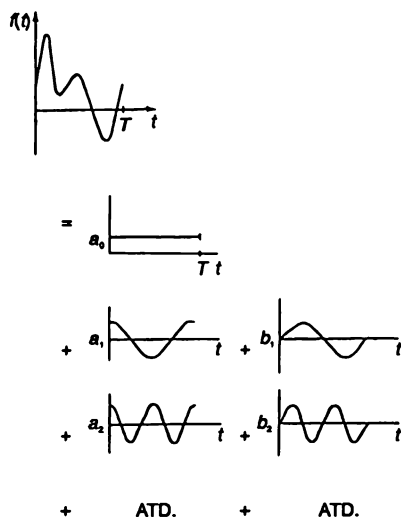
$$\begin{aligned} f(t) = & a_0 \\ & + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \\ & + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t \\ & + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t \\ & + \dots \quad + \dots \quad , \end{aligned} \quad (50.2)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$  a  $a_i$  a  $b_i$  jsou číselné konstanty, které nám říkají s jakou vahou je každá složka kmitů přítomna v kmitu  $f(t)$ . Přidali jsme i člen  $a_0$  s nulovou frekvencí, a tak náš vztah je zcela obecný, i když v hudebním tónu je tento člen obvykle nulový. Tento člen představuje posun střední hodnoty zvukového tlaku (tj. posun „nulové“ hladiny). S tímto členem můžeme náš vztah použít pro libovolný případ. Rovnice (50.2) je schematicky znázorněna na *obr. 50.2*. (Amplitudy



## HARMONICKÉ KMITY

$a_n$ ,  $b_n$  harmonických funkcí musí být vhodně vybrány. Na obrázku jsou jen schématicky znázorněny bez dodržení měřítka.) Řada (50.2) se nazývá *Fourierova řada* pro  $f(t)$ .



Obr. 50.2 Libovolná periodická funkce  $f(t)$  je rovna součtu jednoduchých harmonických funkcí

Uvedli jsme, že každou periodickou funkci lze takovým způsobem vyjádřit. Toto tvrzení musíme opravit v tom smyslu, že platí pro zvukové vlny nebo pro všechny ty funkce, s nimiž se setkáváme ve fyzice. Matematici však dokážou vymyslet funkce, které nemůžeme složit z jednoduchých harmonických funkcí. Takovým příkladem je funkce, která se „stáčí zpět“, takže má pro některá  $t$  dvě hodnoty. Takové funkce nás však nyní nemusí znepokojovat.

### 50.3 KVALITA A LIBOZVUČNOST

Nyní už můžeme říci, co určuje „kvalitu“ hudebního tónu. Je to relativní množství jednotlivých harmonických, tedy hodnoty koeficientů  $a$  a  $b$ . Tón, který obsahuje jen první harmonickou, je „čistý“ tón. Tón, který obsahuje mnoho silných harmonických, je „bohatý“ tón. Housle dávají jiný poměr harmonických tónů než hoboje.

Různé hudební tóny můžeme vytvořit tak, že připojíme k reproduktoru různé oscilátory. (Oscilátor obvykle vytváří téměř čistou jednoduchou harmonickou funkci.) Frekvence oscilátorů můžeme vybrat tak, aby byly  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$  atd. Pak můžeme nastavením síly každého oscilátoru skládat požadovaná množství jednotlivých harmonických – tak vytvoříme tóny různé kvality. Na tomto principu spočívá činnost elektronického syntezátoru zvuku. Klávesami volíme frekvenci základního oscilátoru a pomocí jezdců ovládáme relativní poměry harmonických. Tak dosáhneme toho, že zvuk varhan zní jako zvuk flétny, hoboje nebo houslí.

Není bez zajímavosti, že k vytvoření takových „umělých“ tónů potřebujeme jen jeden oscilátor pro každou frekvenci – nepotřebujeme oddělené oscilátory pro sinovou a kosinovou složku. Naše ucho totiž není příliš citlivé na relativní fáze harmonických a zaměřuje se hlavně na celkovou sinovou a kosinovou část každé frekvence. Naše analýza je tedy přesnější než analýza potřebná

k vysvětlení *subjektivního* aspektu hudby. Reakce mikrofonu nebo jiných fyzikálních zařízení však závisí na fázích a naše úplná analýza je pak nezbytná.

„Kvalita“ řeči je určována zvuky samohlásek, které rozeznáváme v hovoru. Tvar úst určuje frekvenci přirozených modů zvukových vibrací vzduchu v ústní dutině. Některé z těchto modů se vybudí zvukovou vlnou od hlasivek. Takovým způsobem amplitudy některých harmonických zvuků vzrostou proti druhým harmonickým. Změníme-li tvar úst, budou upřednostněny harmonické jiných frekvencí. Tak se vytváří rozdíl mezi zvukem  $e-e-e$  a zvukem  $a-a-a$ .

Všichni dobře víme, že určitá samohláska – řekněme  $e-e-e$  – zůstává stále tou samohláskou, i když ji vyslovujeme (nebo zpíváme) s vyšší nebo nižší frekvencí. Z mechanismu, který jsme popsali, by se dalo čekat, že při zformování úst pro vyslovení  $e-e-e$  se zdůrazní *určité* frekvence, které se *nesmí* změnit při změně výšky našeho hlasu. Pak se však se změnou výšky hlasu musí změnit poměr důležitých harmonických k základní harmonické, musí se tedy změnit kvalita. Je zjevné, že mechanismus rozeznávání řeči se nezakládá na poměru jednotlivých harmonických.

Co můžeme nyní říci o Pythagorově objevu? Víme, že dvě podobné struny, jejichž délky jsou v poměru 2 ku 3, budou mít základní frekvence v poměru 3 ku 2. Proč by ale měly společně příjemně znít? Klíčem k tomuto problému snad budou frekvence vyšších harmonických. Druhá harmonická kratší struny bude mít stejnou frekvenci jako třetí harmonická delší struny. Snadno se ukáže – nebo tomu prostě uvěřte – že brnknutím o strunu vybudíme několik silných nejnižších harmonických.

Snad bychom mohli zformulovat tato pravidla. Tóny znějí libozvučně, mají-li harmonické se stejnými frekvencemi. Tóny znějí nelibozvučně, mají-li vyšší harmonické málo se lišící frekvence, ale přece jen jsou dost odlišné k tomu, aby mezi nimi vznikly rychlé záněje. Neumíme popsat, ani definovat, proč záněje neznějí příjemně, ale souzvuk vyšších harmonických zní příjemně. Na základě našich poznatků neumíme říci, co *zní* dobře nebo co by mělo například dobře *vonět*. Jinými slovy, naše chápání tohoto jevu není obecnější než pouhé tvrzení, že když znějí tóny unisono, znějí dobře. Nemůžeme z toho však dedukovat nic víc než vlastnosti souladu v hudbě.

Harmonické vztahy, které jsme popsali, můžeme snadno prověřit jednoduchými experimenty s klavírem. Označme tři po sobě jdoucí noty C někde ze středu klaviatury symboly  $C$ ,  $C'$ ,  $C''$  a tři bezprostředně vyšší noty  $G$  označme symboly  $G$ ,  $G'$ ,  $G''$ . Základní harmonické budou pak mít následující relativní frekvence:

$$\begin{array}{ll} C - 2 & G - 3 \\ C' - 4 & G' - 6 \\ C'' - 8 & G'' - 12. \end{array}$$

Tyto harmonické vztahy můžeme demonstrovat takto: *Pomalou* stlačme klávesu  $C'$ , takže nezvučí, ale tlumící pedál zdvihne. Rozezvučíme-li pak  $C$ , ozve se základní harmonická i druhá harmonická. Druhá harmonická vybudí kmity struny  $C'$ . Uvolníme-li  $C$  (ale  $C'$  ponecháme stlačené), tlumící pedál zastaví kmity struny  $C$  a my slyšíme (měkce) notu  $C'$ , jak zaniká. Podobným způsobem může třetí harmonická  $C$  způsobit kmity  $G'$  nebo šestá harmonická  $C$  (která je mnohem slabší) může vybudit kmity základní harmonické  $G''$ .

Poněkud odlišný výsledek dostaneme tehdy, stlačíme-li jemně  $G$  a pak silně  $C'$ . Třetí harmonická  $C'$  odpovídá čtvrté harmonické  $G$ , takže se vybudí jen čtvrtá harmonická  $G$ . Nasloucháme-li pozorně, můžeme slyšet tón  $G''$ , který je o dvě oktávy vyšší než  $G$ , které jsme stlačili. Není těžké vymyslet mnoho jiných kombinací této hry.

Bude na místě poznamenat, že durovou stupnicí můžeme definovat právě podmínkou, že *každý* ze tří durových akordů ( $F-A-C$ ), ( $C-E-G$ ) a ( $G-B-D$ ) představuje posloupnost tónů

s frekvenčním poměrem (4 : 5 : 6). Tyto poměry – spolu se skutečností, že v oktávě (C – C', B – B' atd.) jsou frekvence v poměru 1 : 2 – určují celou stupnici „ideálního“ případu, resp. to, co nazýváme přirozené ladění. Klávesnicové nástroje nebo klavír *nejsou* obvykle laděné tímto způsobem, ale při jejich ladění se dopouštíme malého podvodu, takže frekvence jsou jen *přibližně* věrné pro všechny možné počáteční tóny. Pro takové ladění, nazývané „temperované“, je oktáva (poměr frekvencí zůstává 1 : 2) rozdělena na 12 stejných intervalů, které mají frekvenční poměr  $(2)^{1/12}$ . Kvinta už nemá frekvenční poměr 3/2, ale  $(2)^{7/12} = 1,499$ , takže většina lidí tento rozdíl sluchem nepostřehne.

Pomocí shody harmonických frekvencí jsme zformulovali pravidla libozvučnosti v hudbě. Je tato shoda skutečnou *příčinou* libozvučnosti dvou tónů? Jeden vědec tvrdil, že dva *čisté* tóny – tóny zbavené vyšších harmonických – nevytvoří *pocit* libozvučnosti nebo nelibozvučnosti, je-li poměr jejich frekvencí přesně nebo přibližně takový jako očekávaný poměr. (Takové experimenty je však těžké uskutečnit, protože je těžké vytvořit čisté tóny z důvodů, o nichž si povíme později.) Nemůžeme s určitostí tvrdit, zda ucho porovnává harmonické nebo používá aritmetiku, když se rozhoduje, zda se nám zvuk líbí.

#### 50.4 FOURIEROVY KOEFICIENTY

Vraťme se nyní k myšlence, že každý tón – tj. *periodický* zvuk – můžeme vyjádřit jako vhodnou kombinaci harmonických frekvencí. Chtěli bychom ukázat, v jaké míře jsou jednotlivé harmonické zastoupeny. Jsou-li *dány* všechny koeficienty  $a, b$ , je jednoduché vypočítat  $f(t)$  pomocí rovnice (50.2). Nás však zajímá, jaké jsou pro dané  $f(t)$  koeficienty u jednotlivých harmonických členů. (Je jednoduché upéct koláč podle receptu, ale dokážeme napsat recept, když nám někdo dá ochutnat upečený koláč?)

Fourier přišel na to, že to není příliš složité. Člen  $a_0$  je určitě jednoduchý. Už jsme uvedli, že je to právě střední hodnota  $f(t)$  za jednu periodu (od  $t = 0$  po  $t = T$ ). Snadno se o tom můžeme přesvědčit. Střední hodnota sinové nebo kosinové za jednu periodu je nulová. Za dvě nebo tři periody nebo celočíselný násobek periody je také nulová. Proto je střední hodnota všech členů pravé strany rovnice (50.2) nulová kromě členu  $a_0$ . (Vzpomeňte si, že musíme zvolit  $\omega = 2\pi/T$ .)

Střední hodnota součtu je rovna součtu středních hodnot. Proto je střední hodnotou  $f(t)$  právě střední hodnota z  $a_0$ . Jenže  $a_0$  je konstanta a její střední hodnota je jí právě rovna. Připomeneme-li si definici střední hodnoty, můžeme psát

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (50.3)$$

Určit ostatní koeficienty není o moc těžší. K jejich určení použijeme trik objevený Fourierem. Násobme obě strany rovnice (50.2) nějakou harmonickou funkcí, řekněme  $\cos 7\omega t$ . Tak dostaneme

$$\begin{aligned} f(t) \cdot \cos 7\omega t &= a_0 \cdot \cos 7\omega t \\ &+ a_1 \cos \omega t \cdot \cos 7\omega t + b_1 \sin \omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &+ a_2 \cos 2\omega t \cdot \cos 7\omega t + b_2 \sin 2\omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &+ \dots \quad + \dots \\ &+ a_7 \cos 7\omega t \cdot \cos 7\omega t + b_7 \sin 7\omega t \cdot \cos 7\omega t \\ &+ \dots \quad + \dots \end{aligned} \quad (50.4)$$

#### FOURIEROVY KOEFICIENTY

Dále najdeme střední hodnoty obou stran. Střední hodnota  $a_0 \cos 7\omega t$  za dobu  $T$  je úměrná střední hodnotě kosinu za 7 celých period. Jenže ta je rovna nule. Střední hodnota *téměř všech* ostatních členů je *také* rovna nule. Podívejme se na člen s  $a_1$ . Víme, že obecně platí vztah

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos (A + B) + \frac{1}{2} \cos (A - B). \quad (50.5)$$

Člen s  $a_1$  proto lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{1}{2} a_1 (\cos 8\omega t + \cos 6\omega t). \quad (50.6)$$

Máme tedy dva kosinové členy, z nichž má jeden osm úplných period  $T$  a druhý šest. *Střední hodnoty obou těchto členů jsou nulové.* Proto je i střední hodnota členu s  $a_1$  nulová.

Pro člen s  $a_2$  bychom dostali  $a_2 \cos 9\omega t$  a  $a_2 \cos 5\omega t$  a střední hodnota každého z těchto členů je nulová. Pro člen s  $a_3$  bychom dostali  $\cos 16\omega t$  a  $\cos(-2\omega t)$  je stejný jako  $\cos 2\omega t$  a tak střední hodnoty obou těchto členů jsou nulové. Je jasné, že všechny členy s koeficienty  $a$  budou mít nulové střední hodnoty až na jediný člen, který je právě člen s  $a_7$ . Pro tento člen dostaneme

$$\frac{1}{2} a_7 (\cos 14\omega t + \cos 0). \quad (50.7)$$

Kosinus nuly je jedna a taková je i jeho střední hodnota. Přicházíme tak k výsledku, že střední hodnota všech členů rovnice (50.4), které obsahují koeficienty  $a$ , je rovna  $1/2 a_7$ .

Členy s koeficienty  $b$  jsou ještě jednodušší. Násobíme-li je kosinovým výrazem, jako je např.  $\cos n\omega t$ , stejným způsobem jako předtím, můžeme dokázat, že jejich střední hodnoty budou nulové.

Je vidět, že Fourierův „trik“ působil jako síto. Při násobení  $\cos 7\omega t$  a zprůměrování, všechny členy vypadly, kromě členu s  $a_7$ , a platilo

$$\text{Střední hodnota } [f(t) \cdot \cos 7\omega t] = a_7/2, \quad (50.8)$$

tedy

$$a_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos 7\omega t dt. \quad (50.9)$$

Pro čtenáře nebude těžké dokázat, že koeficient  $b_7$  můžeme získat násobením rovnice (50.2) výrazem  $\sin 7\omega t$  a vyjádřením střední hodnoty obou stran rovnice. Tak získáme výsledek

$$b_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin 7\omega t dt. \quad (50.10)$$

To, co platí pro číslo 7, zřejmě platí pro libovolné celé číslo. Výsledek našeho důkazu můžeme shrnout do následujícího elegantnějšího matematického tvaru. Jsou-li  $m$  a  $n$  celá čísla různá od nuly a je-li  $\omega = 2\pi/T$ , pak

HARMONICKÉ KMITY

$$\text{I.} \quad \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t \, dt = 0 \quad (50.11)$$

$$\text{II.} \quad \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ T/2 & \text{pro } n = m \end{cases} \quad (50.12)$$

$$\text{III.} \quad \int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ T/2 & \text{pro } n = m \end{cases}$$

$$\text{IV.} \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad (50.13)$$

$$\text{V.} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt \quad (50.14)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt \quad (50.15)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega t \, dt. \quad (50.16)$$

V předcházejících kapitolách bylo výhodné popisovat jednoduchý harmonický pohyb pomocí exponenciální funkce. Místo  $\cos \omega t$  jsme psali  $e^{i\omega t}$ , tedy reálnou část exponenciální funkce. V této kapitole jsme pracovali se sinem a kosinem, protože tak se stal náš důkaz trochu přehlednější. Náš konečný výsledek, rovnice (50.13), však lze vyjádřit v kompaktnější formě

$$f(t) = \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n e^{in\omega t}, \quad (50.17)$$

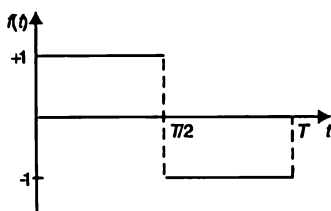
kde  $\hat{a}_n$  je komplexní číslo  $a_n - i b_n$  (přičemž  $b_0 = 0$ ). Kdybychom chtěli takový zápis používat důsledně, museli bychom psát

$$\hat{a}_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} \, dt \quad (n \geq 1). \quad (50.18)$$

Nyní už umíme rozložit periodickou vlnu na její harmonické složky. Takový postup se nazývá *rozvoj do Fourierovy řady* a jednotlivé členy se nazývají Fourierovými složkami. *Neukázali* jsme však, že určením všech Fourierových složek a jejich sčítáním se dostaneme opravdu zpět k naší funkci  $f(t)$ . Matematici dokázali pro širokou třídu funkcí, vlastně pro všechny ty, které zajímají fyziky, že umíme-li vypočítat požadované integrály, dostaneme se nazpět k  $f(t)$ . Je zde však jedna malá výjimka. Je-li funkce  $f(x)$  nespojitá, tj. když najednou skočí z jedné hodnoty na druhou, Fourierův součet dá v bodě nespojitosti hodnotu, která leží uprostřed mezi dolní a horní hodnotou skutečné funkce v tomto bodě. Kdybychom tedy měli takovou zvláštní funkci:  $f(t) = 0$ ,  $0 \leq t < t_0$  a  $f(t) = 1$  pro  $t_0 \leq t \leq T$ , Fourierova řada by dala správnou hodnotu všude kromě bodu  $t_0$ , kde by dala hodnotu  $1/2$  místo 1. Je však dost nefyzikální požadovat, aby funkce byla nulová

## FOURIEROVY KOEFICIENTY

až po  $t_0$  a jednotková *právek* v  $t_0$ . Snad by bylo přece jen dobré pro fyziky formulovat „pravidlo“ tak, že každá nespojitá funkce (která může být jen zjednodušením *skutečné* fyzikální funkce) musí nabývat v bodě nespojitosti hodnotu, která leží uprostřed hodnot, jež má funkce zleva a zprava. Pak každá taková funkce – s libovolným počtem skoků – bude stejně jako ostatní fyzikálně zajímavé funkce správně určována Fourierovou řadou.



Obr. 50.3 Skoková funkce

$$f(t) = +1 \text{ pro } 0 < t < T/2$$

$$f(t) = -1 \text{ pro } T/2 < t < T$$

Jako cvičení může čtenář určit Fourierovu řadu pro případ funkce znázorněné na obr. 50.3. Vzhledem k tomu, že funkci nemůžeme vyjádřit v explicitním algebraickém tvaru, nebude možné počítat integrály od 0 po  $T$  obvyklým způsobem. Integrály jsou však jednoduché, rozdělíme-li je na dvě části: integrál od 0 po  $T/2$  (kde je  $f(t) = 1$ ) a na integrál od  $T/2$  do  $T$  (kde je  $f(t) = -1$ ). Tak musíme dostat

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega t + \dots \right), \quad (50.19)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$ . Pravoúhelníková vlna (se speciálně zvolenou fází) má tedy jen liché harmonické a jejich amplitudy jsou nepřímo úměrné jejich frekvencím.

Proveřme, zda nás rovnice (50.19) skutečně přivedla nazpět k funkci  $f(t)$  pro některou hodnotu  $t$ . Zvolme  $t = T/4$ , tedy  $\omega t = \pi/2$ . Tehdy máme

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots \right) \quad (50.20)$$

$$= \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) \quad (50.21)$$

Součet takové řady je však znám<sup>62)</sup> a je roven  $\pi/4$ , takže bude  $f(t) = 1$ .

<sup>62)</sup>

Součet této řady můžeme vypočítat následujícím způsobem. Nejprve si uvědomme, že  $\int_0^x [dx/(1+x^2)] = \text{arctg } x$ . Dále rozložíme podintegrální výraz do řady  $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ . Integrujeme-li tuto řadu tak, že integrujeme každý člen zvlášť (v intervalu od 0 po  $x$ ), dostaneme  $\text{arctg } x = 1 - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7$ . Položíme-li  $x = 1$ , dostaneme hledaný vztah, neboť  $\text{arctg } 1 = \pi/4$ .

**50.5 VĚTA O ENERGII**

Energie vlny je úměrná druhé mocnině její amplitudy. V případě vlny složitějšího tvaru je energie za jednu periodu úměrná  $\int_0^T f^2(t) dt$ . Tuto energii můžeme dát do souvislosti s Fourierovými koeficienty. Můžeme psát

$$\int_0^T f^2(t) dt = \int_0^T \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \right]^2 dt, \quad (50.22)$$

Vyjádříme-li druhou mocninu výrazu v závorce, dostaneme všechny možné křížové členy. Jeden z nich je například  $a_5 \cos 5\omega t \cdot b_7 \sin 7\omega t$ . Ukázali jsme však už dříve (rovnice (50.11) a (50.12)), že integrály všech takových členů přes jednu periodu dávají nulu. Zůstávají nám jen kvadratické členy typu  $a_5^2 \cos^2 \omega t$ . Integrál z druhé mocniny libovolného kosinu nebo sinu přes jednu periodu je roven  $T/2$ , a proto máme

$$\begin{aligned} \int_0^T f^2(t) dt &= T a_0^2 + \frac{T}{2} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + b_1^2 + b_2^2 + \dots) = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &= T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned} \quad (50.23)$$

Tato rovnice se nazývá „věta o energii“ a říká, že celková energie vlny je rovna součtu energií všech Fourierových složek. Kdybychom například tuto větu aplikovali na řadu (50.19) a uvážili, že  $[f(t)]^2 = 1$ , dostali bychom

$$T = \frac{T}{2} \cdot \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right),$$

a tak bychom se dozvěděli, že součet reciprokých druhých mocnin lichých celých čísel je roven  $\pi^2/8$ . Kdybychom zapsali podobným způsobem nejprve Fourierovu řadu pro funkci  $a$  pak použili větu o energii, mohli bychom dokázat, že  $1 + 1/2^4 + 1/3^4 + \dots$  je rovno  $\pi^4/90$ ; tento výsledek jsme potřebovali v 45. kapitole.

**50.6 NELINEÁRNÍ ODEZVY**

V harmonické teorii je ještě jeden důležitý prvek, na který je třeba upozornit pro jeho praktický význam, a tím jsou nelineární efekty. Ve všech soustavách, které jsme dosud uvažovali, jsme předpokládali linearitu, tedy odezvy na síly, např. výchylky nebo zrychlení byly vždy úměrné silám. Proudů v obvodech byly úměrné napětím apod. Nyní budeme uvažovat takové případy, kde tato přímá úměrnost není. Na chvíli uvažujme nějaký přístroj, v němž odezva – označíme ji  $x_{od}$  – bude v okamžiku  $t$  určována vstupní veličinou  $x_{vs}$  ve stejném okamžiku. Veličinou  $x_{vs}$  může například být síla a  $x_{od}$  může být výchylka nebo  $x_{vs}$  může být proud a  $x_{od}$  napětí. Je-li přístroj lineární, bude

$$x_{od}(t) = K x_{vs}(t), \quad (50.24)$$

VĚTA O ENERGII • NELINEÁRNÍ ODEZVY

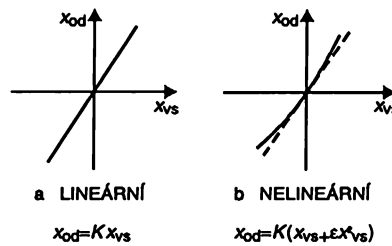
kde  $K$  je konstanta nezávislá na  $t$  a  $x_{vs}$ . Předpokládáme však, že přístroj není přesně lineární, ale jen přibližně, takže můžeme psát

$$x_{od}(t) = K[x_{vs}(t) + \varepsilon x_{vs}^2(t)], \quad (50.25)$$

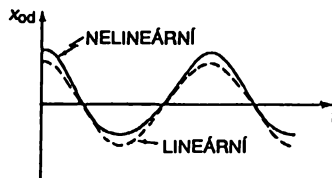
kde  $\varepsilon$  je malé vzhledem k jedné. Takové lineární a nelineární odezvy jsou znázorněny na grafech obrázku 50.4.

Nelineární odezvy mají některé důležité praktické důsledky a o některých z nich si povíme. Nejprve si všimneme, co se stane, připojíme-li na vstup čistý tón. Ať  $x_{vs} = \cos \omega t$ . Nakreslíme-li  $x_{od}$  jako funkci času, dostaneme plnou čáru na obr. 50.5. Přerušovaná čára je pro porovnání a představuje odezvu lineární soustavy. Je vidět, že na výstupu už nedostáváme kosinovou funkci. Tato funkce je nahoře ostřejší a dole plošší. Říkáme, že výstupní signál je *zkreslený*. Taková vlna už není čistým tónem a bude obsahovat vyšší harmonické. Zjistíme, které to budou. Dosadíme-li  $x_{vs} = \cos \omega t$  do rovnice (50.25), dostaneme

$$x_{od} = K(\cos \omega t + \varepsilon \cos^2 \omega t). \quad (50.26)$$



Obr. 50.4 Lineární a nelineární odezva



Obr. 50.5 Odezva nelineárního přístroje na vstupní signál  $\cos \omega t$ . Pro porovnání je znázorněna i lineární odezva.

Využijeme-li známý vztah  $\cos^2 \vartheta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\vartheta)$ , dostaneme

$$x_{od} = K \left( \cos \omega t + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\omega t \right). \quad (50.27)$$

Výstupní signál má tedy nejen složku základní frekvence, kterou měl i vstupní signál, ale má i určitou část druhé harmonické. Na výstupu se objevuje i konstantní člen  $K(\varepsilon/2)$ , který odpovídá posunu střední hodnoty znázorněnému na obr. 50.5. Proces vytvoření posunu střední hodnoty se nazývá *usměrnění*.



## HARMONICKÉ KMITY

Nelineární systém tedy usměrňuje a vytváří vyšší harmonické frekvencí přivedených na vstup. I když nelinearita, kterou jsme uvažovali, vytvářela jenom druhou harmonickou, nelinearity vyššího řádu – například takové, které obsahují členy jako  $x^3$ ,  $x^4$  – budou vytvářet vyšší harmonické než druhou.

Dalším důsledkem nelineární odezvy je *modulace*. Obsahuje-li náš vstupní signál dva čisté tóny (nebo i více), nedostaneme na výstupu jen jejich harmonické, ale i jiné frekvenční složky. Nechť  $x_{vs} = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$ , přičemž  $\omega_1$  a  $\omega_2$  nejsou v harmonickém vztahu. Kromě lineárního členu (který je  $K$ -násobkem vstupního signálu) dostaneme na výstupu tyto složky

$$x_{od} = K\varepsilon (A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t)^2 = \quad (50.28)$$

$$= K\varepsilon (A^2 \cos^2 \omega_1 t + B^2 \cos^2 \omega_2 t + 2AB \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t) \quad (50.29)$$

První dva členy v závorce rovnice (50.29) představují právě ty členy, které daly v našich předcházejících výpočtech konstantní členy a druhé harmonické. Poslední člen je nový.

Tento nový „křížový člen“  $AB \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t$  můžeme chápat dvojím způsobem. Liší-li se podstatně tyto dvě frekvence (je-li například  $\omega_1$  mnohem větší než  $\omega_2$ ), můžeme považovat tento křížový člen za kosinové oscilace s proměnnou amplitudou. Můžeme si ho představit zapsaný následujícím způsobem

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = C(t) \cos \omega_1 t, \quad (50.30)$$

kde

$$C(t) = AB \cos \omega_2 t. \quad (50.31)$$

Říkáme, že amplituda kmitů  $\cos \omega_1 t$  je *modulovaná* frekvencí  $\omega_2$ .

Tento nový člen se však může zapsat i v takovémto tvaru:

$$AB \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \frac{AB}{2} [\cos(\omega_1 + \omega_2) t + \cos(\omega_1 - \omega_2) t]. \quad (50.32)$$

Z tohoto zápisu je vidět, že se vytvořily dvě nové složky, jedna se *součtovou* frekvencí  $(\omega_1 + \omega_2)$  a druhá s *rozdílovou* frekvencí  $(\omega_1 - \omega_2)$ .

Máme tedy dva různé, ale ekvivalentní pohledy na jeden výsledek. Ve speciálním případě, kdy  $\omega_1 \gg \omega_2$  můžeme dát tyto různé pohledy do souvislosti, uvědomíme-li si, že  $(\omega_1 + \omega_2)$  a  $(\omega_1 - \omega_2)$  se jen málo liší, a proto upozorujeme zázračně. Jenže tyto zázračně způsobí *modulaci* amplitudy střední frekvence  $\omega_1$  polovinou rozdílu frekvencí  $2\omega_2$ . Nyní vidíme, proč jsou tyto dva popisy ekvivalentní.

Máme-li shrnout, co jsme zjistili, můžeme říci, že nelineární odezvou vzniká několik jevů: usměrnění, tvorba vyšších harmonických a modulace nebo tvorba složek se součtem a rozdílem frekvencí.

Všimněme si, že všechny tyto jevy (rovnice 50.29) jsou úměrné nejen koeficientu nelinearity  $\varepsilon$ , ale i součinu dvou amplitud – buď  $A^2$  nebo  $B^2$  nebo  $AB$ . Proto lze čekat, že tyto jevy budou mnohem důležitější v případě *silných* než *slabých* signálů.

Popsané jevy mají mnoho praktických aplikací. Co se týká zvuku, předpokládá se, že ucho je nelineární soustavou. Podkladem pro takový předpoklad je skutečnost, že při silných zvucích máme pocit, že *slyšíme* vyšší harmonické a součtové a rozdílové frekvence, i když zvuková vlna obsahuje pouze čisté tóny.

Prvky používané v zařízeních reprodukcí zvuk – zesilovače, reproduktory apod. – obsahují vždy nějaké nelinearity. Zkreslují zvuk – vytvářejí vyšší harmonické apod. – tedy zvuky, které v původním signálu nebyly. Tyto nové složky ucho slyší a překáží mu. Proto jsou hi-fi zařízení konstruována tak, aby byla co nejlineárnější. (Není však jasné, proč nám stejným způsobem „nepřekáží“ nelinearita *ucha* nebo odkud vlastně vímc, že nelinearita je v *reproduktoru*, a ne v našem uchu!)

Nelinearity jsou však potřebné a v některých částech rádiových vysílačů a přijímačů jsou úmyslně zabudovány velké nelinearity. Ve vysílači s amplitudovou modulací je hlasový signál (s frekvencí několika kHz) kombinován s „nosným“ signálem (s frekvencí několika MHz) v nelineárním obvodu nazývaným *modulátor*, a tak se vytvářejí modulované vlny, které potom vysílač vysílá. V přijímači se složky přijatého signálu dostanou na nelineární obvod, který zkombinuje součtové a rozdílové frekvence modulovaného nosného signálu a opět vytvoří hlasový signál.

Když jsme mluvili o průchodu světla látkou, předpokládali jsme, že indukované oscilace nábojů jsou úměrné elektrickému poli světla – že odezva je lineární. Byla to opravdu velmi dobrá aproximace. Ale byly už zkonstruovány zdroje světla (lasery), které produkují tak intenzivní světlo, že můžeme pozorovat nelineární efekty. Dnes je už možné generovat harmonické světelných frekvencí. Prochází-li intenzivní červené světlo kouskem skla, vychází ze skla i trochu modrého světla – to je druhá harmonická!

## PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 50.1 ■ S použitím Fourierova rozvoje pravoúhlé vlny

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases} = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

ukážete, že

- a)  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$ ,  
 b)  $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ ,  
 c)  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{6}$ .

- 50.2 ■ Rozložte funkci  $g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$  do Fourierova integrálu a ukažete, že získané výsledky jsou ve shodě s tím, co dostanete při integrování funkce z předchozí úlohy.

- 50.3 ■ Na základě výsledku předchozí úlohy ukažete, že

- a)  $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$ ,  
 b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2^4}{2^4 - 1} \left( 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right) = \frac{\pi^4}{90}$ .

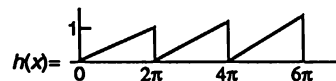
- 50.4 ■ V kapitole 45 jsme potřebovali vypočítat integrál  $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$ .

Nyní to můžeme provést tak, že vynásobíme čítelele i jmenovatel  $e^{-x}$ , rozložíme integrovanou funkci do řady a integrujeme podle jednotlivých členů. Tak dostaneme

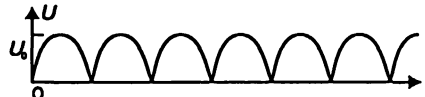
$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \int_0^{\infty} u^3 e^{-u} du \left[ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right] = 6 \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Ověřte si to.

- 50.5 ■ Najděte Fourierův rozvoj pilové funkce, která poplňuje průběh proudu, protékajícího v síti horizontálního vychylování elektronového paprsku oscilografu:



- 50.6 ■ Usměřovač je zařízení, které přeměňuje sinusoidální vlnu, například vlnu napětí amplitudy  $U_0$ , v napětí následujícího průběhu:



- a) Vypočítejte střední hodnotu  $U(t)$  (říká se mu výstupní napětí).  
 b) Najděte amplitudu druhé harmonické výstupního napětí.

- 50.7 ■ Z transformátoru snímáme výstupní napětí úměrné  $U_{vyst} = U_{vst} + \theta (U_{vst})^3$ . Vysvětlete, jaký bude vliv kubického členu jestliže

- a) vstupní napětí bude mít sinusoidální průběh;  
 b) na vstup budou přicházet dvě nebo více sinusoidálních vln s různými frekvencemi.

# V51 Vlny

## 51.1 KUŽELOVÉ VLNY

## 51.2 RÁZOVÉ VLNY

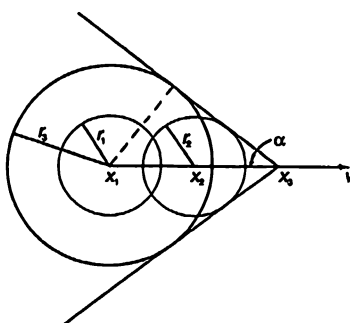
## 51.3 VLNY V PEVNÝCH LÁTKÁCH

## 51.4 POVRCHOVÉ VLNY

### 51.1 KUŽELOVÉ VLNY

I když jsme už skončili kvantitativní analýzu vln, věnujeme tuto doplňkovou kapitolu kvalitativnímu posouzení některých jevů souvisejících s vlnami, které jsou příliš složité na to, abychom je mohli v těchto přednáškách podrobně prozkoumat.

Protože jsme už několik kapitol věnovali vlnám, bylo by přiměřenější nazvat tuto kapitolu kapitolou o „některých složitějších jevech souvisejících s vlnami“.



Obr. 51.1 Čelo rázové vlny vytváří kužel s vrcholem ve zdroji a s polovičním úhlem rozevření  $\alpha = \arcsin(v/c)$

Prvním předmětem našich úvah bude jev, který vzniká tehdy, když se zdroj vln pohybuje větší rychlostí, než je rychlost vlny nebo fázová rychlost. Uvažujme nejprve vlny jako zvuk nebo světlo, které mají určitou konstantní rychlost. Je-li rychlost pohybu zdroje zvuku větší než rychlost zvuku, nastává následující jev. Předpokládejme, že v daném okamžiku je zvuková vlna vybudena zdrojem v bodě  $x_1$  (viz obr. 51.1). Potom v dalším okamžiku, kdy se zdroj dostane do bodu  $x_2$ , se vlna rozšíří z bodu  $x_1$  na kulovou plochu poloměru  $r_1$ , který je menší než vzdálenost, jíž prošel zdroj. Z bodu  $x_2$  se ovšem začne šířit další vlna. Dostal-li se zvukový zdroj ještě dále, až do bodu  $x_3$  a z tohoto bodu vychází další vlna, vlna z  $x_2$  se rozšířila na kulovou plochu poloměru

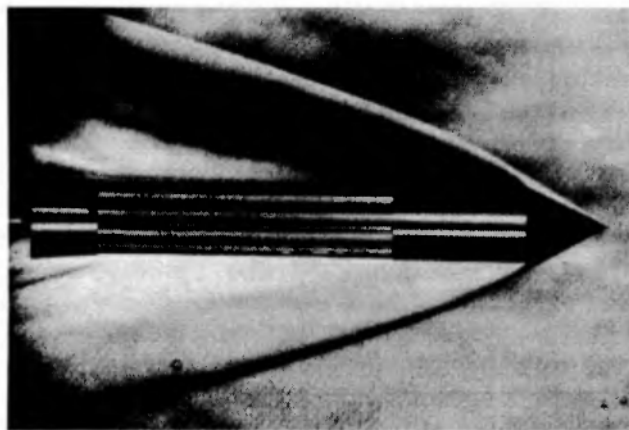
## VLNY

$r_2$  a vlna z  $x_1$  poloměru  $r_3$ . Děje se to samozřejmě spojitě, a ne skoky, a proto máme celou řadu takových kulových vlnoploch dotýkajících se pláště kužele s vrcholem v místě zdroje. Místo toho, aby zdroj vytvářel kulové vlny, jako v případě, kdyby se nepohyboval, vytváří pohybující se zdroj vlny, jejichž čelo je v trojrozměrném prostoru kužel a v dvojrozměrném prostoru dvojice přímek. Vrcholový úhel tohoto kužele lze snadno určit. V určitém časovém intervalu projde zdroj vzdálenost např.  $x_3 - x_1$ , která je úměrná rychlosti zdroje  $v$ . Zatím se čelo vlny dostalo do vzdálenosti  $r_3$ , která je úměrná rychlosti vlny  $c_p$ . Je jasné, že sinus polovičního úhlu rozevření kužele je roven poměru rychlosti vlny k rychlosti zdroje a to je možné jen tehdy, když je  $c_p$  menší než  $v$ , tedy když se předmět pohybuje rychleji než vlna. Proto

$$\sin \alpha = \frac{c_p}{v}. \quad (51.1)$$

I když jsme zdůraznili, že máme zdroj zvuku, ukazuje se – a to je velmi zajímavé – že předmět už tím, že se pohybuje rychlostí větší než je rychlost zvuku, vytváří zvuk. To znamená, že on sám nemusí kmitat. Jakýkoliv objekt pohybující se prostředím větší rychlostí než je rychlost, kterou se v tom prostředí šíří vlny, bude vytvářet automaticky vlny právě v důsledku svého rychlého pohybu. Tak je to v případě zvuku, ale stejný jev nastává i v případě světla. Na první pohled by se zdálo, že se nic nemůže pohybovat rychlostí větší než je rychlost světla. Jenže světlo má ve skle menší fázovou rychlost, než je rychlost světla ve vakuu a sklem můžeme propustit nabitou částici s velmi vysokou energií, takže rychlost částice bude blízká rychlosti světla ve vakuu, zatímco rychlost světla ve skle může být rovna jen 2/3 rychlosti světla ve vakuu. Částice pohybující se rychleji než světlo v daném prostředí vytvoří kuželovou světelnou vlnu s vrcholem ve zdroji, která se podobá vlně vznikající na vodě za lodí (jde vlastně o stejný jev). Změřením úhlu u vrcholu kužele můžeme určit rychlost částice. Takový postup se používá v praxi k měření rychlosti částic jako jedna z metod určování jejich energie ve vysokoenergetické oblasti. Jediné, co je třeba měřit, je směr šíření světla.

Tento jev se nazývá podle Čerenkova, který je poprvé pozoroval. Intenzitu tohoto záření teoreticky analyzovali Frank a Tamm. Za tento výzkum dostali tito tři vědci společně Nobelovu cenu za fyziku v roce 1958.

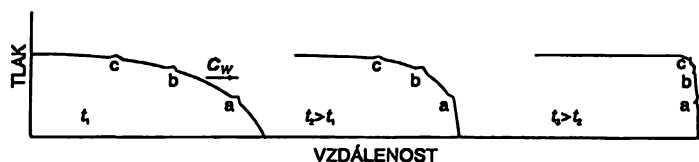


Obr. 51.2 Rázová vlna vyvolaná v plynu projektilem pohybujícím se rychleji než zvuk

Na *obrázku 51.2* můžete vidět, jaká je situace v případě zvuku. Je to fotografie předmětu pohybujícího se v plynu rychlostí, která je větší než rychlost zvuku. Změny tlaku způsobují změny indexu lomu, takže vhodnou optickou soustavou můžeme okraj vln zviditelnit. Tak vidíme, že předmět pohybující se rychlostí, která je větší než je rychlost zvuku, opravdu vytváří kuželovou vlnu. Podrobnější zkoumání nás přesvědčí o tom, že její povrch je vlastně zakřivený. V asymptotické oblasti není zakřivení, ale u vrcholu zakřivení existuje a my bychom si nyní měli promluvit o příčině tohoto zakřivení. To nás přivádí k druhému tématu této kapitoly.

## 51.2 RÁZOVÉ VLNY

Rychlost vlny často závisí na její amplitudě a v případě zvuku má tato závislost následující charakter. Předmět, který se pohybuje ve vzduchu, musí odstraňovat vzduch ze své dráhy, a tak vytváří poruchu ve formě určitého tlakového skoku. Tlak za čelem vlny je vyšší než tlak v neporušené oblasti, do níž se vlna pohybující se normální rychlostí ještě nedostala. Avšak vzduch, který zůstal za vlnou, byl adiabaticky stlačen, a proto jeho teplota bude vyšší. Rychlost zvuku však s teplotou roste, a proto je rychlost v oblasti za skokem větší než ve vzduchu před skokem. To znamená, že jakákoliv další porucha za tímto skokem, vyvolaná třeba stálým tlakem tělesa nebo jinak, se bude šířit rychleji než čelo vlny a s růstem tlaku tato rychlost poroste. *Obr. 51.3* charakterizuje takovou situaci a hrboly na křivce tlaku slouží větší názornosti. Je vidět, že původní zadní oblasti vyššího tlaku postupem času dobehají čelo vlny, dokud tlaková vlna nevytvoří strmé čelo. Je-li síla vlny velmi velká, stane se to ihned; je-li malá, může to trvat dlouho. Ve skutečnosti se však může stát, že zvuk se rozšíří a zanikne dříve, než k takovému jevu dojde.



Obr. 51.3 „Momentky“ čela vlny v následujících časových okamžicích

Zvuky naší řeči jsou nesmírně slabé vzhledem k atmosférickému tlaku – je to asi jedna milióntina. Ale pro tlakové změny řádově jedné atmosféry vzroste rychlost vlny asi o dvacet procent a strmost čela vlny naroste úměrně rychleji. V přírodě se však nic neděje nekonečně rychle, a to, co nazýváme strmým čelem, má ve skutečnosti přece jen jakousi tloušťku, není to nekonečně strmé. Vzdálenost, na níž se čelo mění, je řádově rovna střední volné dráze, ale na takové vzdálenosti vlnová rovnice neplatí, neboť neuvažujeme strukturu plynu.

Podíváme-li se opět na *obrázek 51.2*, zjistíme, že zakřivení můžeme vysvětlit tím, že v blízkosti vrcholu jsou vyšší tlaky než ve větší vzdálenosti od něho, a proto je tam úhel  $\alpha$  větší. Zakřivení vzniklo v důsledku toho, že rychlost závisí na síle vlny. Proto se vlna pocházející od výbuchu atomové bomby šíří po určitou dobu mnohem větší rychlostí, než je rychlost zvuku, dokud při šíření natolik nezeslábně, že tlakový náraz je malý ve srovnání s atmosférickým tlakem. Rychlost tlakového nárazu se pak přiblíží rychlosti zvuku v plynu, v němž se šíří. (Ukazuje se, že rychlost rázové vlny je vždy vyšší než rychlost zvuku v plynu před ní, ale nižší než rychlost zvuku v plynu za ní. Impulzy přicházející zezadu dobehnou čelo, ale čelo se noří do prostředí před sebou rychleji, než je normální rychlost šíření signálů v něm. Proto jen podle zvuku nemůžeme říci,

## VLNY

že přichází rázová vlna, dokud není příliš pozdě. Světlo výbuchu bomby přichází nejdříve, ale že přichází rázová vlna, nemůže nikdo říci, dokud vlna opravdu nedorazí, protože ji nepředchází žádný zvukový signál.)



Obr. 51.4

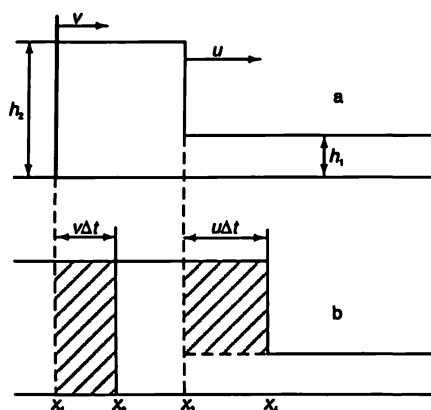
Takové nahromadění vln je velmi zajímavý jev a jeho hlavní příčinou je to, že po příchodu jedné vlny musí rychlost po ní následující vlny vzrůstat. Uvedeme ještě jiný příklad téhož jevu. Představte si, že dlouhým kanálem konečné šířky a hloubky teče voda. Pohybuje-li se podél takového kanálu dostatečně rychle píšť nebo příčná stěna, dojde k takovému nakupení vody jako v případě sněhu před sněžným pluhem. Nechtě tedy nastává taková situace, jakou zobrazuje obrázek 51.4, kdy se někde v kanálu objevuje náhlý skok vodní hladiny. Lze ukázat, že v kanálu se dlouhé vlny pohybují v hluboké vodě rychleji než v mělké. Proto každý nový náraz nebo nepravidelnost v přisunu energie od píšť postoupí dopředu a nahromadí se na čele. Teoreticky nakonec opět dostaneme vodu se strmým čelem. Obrázek 51.4 však ukazuje na některé komplikace. Znárodněná vlna prochází na obrázku kanálem tak, že píšť je kdesi daleko na levé straně. Zpočátku mohla situace připomínat dobře se chovající vlnu, ale na cestě podél kanálu se vlna stávala strmější a strmější, až došlo ke stavu znázorněnému na obrázku. Na hladině dochází k silnému víření vody a kapky vody padají dolů, ale podstatné je, že okraj vlny je velmi ostrý a před vlnou není voda porušena.

Ve skutečnosti je vlna na vodě mnohem složitější než zvuk. Pro ilustraci se však pokusíme analyzovat rychlost přílivové vlny v kanálu. Neděláme to proto, že by to pro nás mělo principiální význam – nepředstavuje to totiž velké zobecnění – děláme to jenom proto, abychom ukázali, že zákony mechaniky, které už známe, nám umožní tento jev vysvětlit.

Představte si, že voda vypadá tak, jak to znázorňuje obr. 51.5a na horní hladině ve výšce  $h_2$  se pohybuje rychlostí  $v$  a čelo se posouvá rychlostí  $u$  na neporušenou vodu, jejíž hladina je ve výšce  $h_1$ . Chceme určit rychlost, kterou postupuje čelo. Za dobu  $\Delta t$  se vertikální rovina, která byla původně v  $x_1$ , posune o vzdálenost  $v \Delta t$  do  $x_2$ , zatímco čelo vlny projde vzdálenost  $u \Delta t$ .

Nyní použijeme zákony zachování hmotnosti a hybnosti. Začneme prvním z nich. Je vidět, že na jednotku šířky kanálu je množství vody  $h_2 v \Delta t$ , které prošlo  $x_1$  (vyšrafovaná oblast), kompenzováno druhou vyšrafovanou oblastí, jež představuje množství  $(h_2 - h_1) u \Delta t$ . Dělíme-li veličinou  $\Delta t$ , dostaneme  $v h_2 = u (h_2 - h_1)$ . To nám ještě nestačí, protože i když známe  $h_2$  a  $h_1$ , neznáme ani  $u$ , ani  $v$  a obě tyto veličiny chceme najít.

## KUŽELOVÉ VLNY • RÁZOVÉ VLNY


 Obr. 51.5 Dva průřezy vysokého přílivu v kanálu, kde b je obraz situace o  $\Delta t$  pozdější než a

Dalším krokem je použití zákona zachování hybnosti. Nezabývali jsme se ještě otázkou vodního tlaku a nemluvili jsme o hydrodynamice, ale je jasné, že tlak vody musí v dané hloubce právě stačit k udržení vodního sloupce nad touto hloubkou. Proto je tlak vody roven součinu hustoty vody  $\rho$ , gravitačního zrychlení  $g$  a hloubky pod povrchem. Protože tlak roste lineárně s hloubkou, střední tlak v rovině  $x_1$  je právě  $1/2 \rho g h_2$ . To je také střední síla na jednotku šířky a jednotku výšky tlačící rovinu směrem k  $x_2$ . Abychom dostali celkovou sílu působící na vodu zleva, musíme získaný výraz znovu násobit  $h_2$ . Na vodu však působí i tlak zprava a vyvolává sílu, která na uvažovanou oblast působí v opačném směru. Podobnou úvahou jako v předcházejícím případě můžeme vypočítat její velikost:  $1/2 \rho g h_1^2$ . Nyní musíme tyto síly porovnat s rychlostí změny hybnosti pohybu. Musíme zjistit, o kolik je větší hybnost odpovídající situaci (b) na obr. 51.5 proti hybnosti odpovídající situaci (a). Vidíme, že dodatečná hmotnost, která získala rychlost  $v$ , je rovna právě  $\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t$  (na jednotku šířky) a násobíme-li ji  $v$ , dostaneme dodatečnou hybnost, která musí být rovna impulzu  $F \Delta t$

$$(\rho h_2 u \Delta t - \rho h_2 v \Delta t) v = \left( \frac{1}{2} \rho g h_2^2 - \frac{1}{2} \rho g h_1^2 \right) \Delta t.$$

Dosažením už známého vztahu  $v h_2 = u (h_2 - h_1)$  vyloučíme z této rovnice  $v$ , a když ji ještě zjednodušíme, dostaneme nakonec:  $u^2 = g h_2 (h_1 + h_2) / 2 h_1$ .

Je-li rozdíl výšek velmi malý, takže  $h_1$  a  $h_2$  jsou téměř stejné, rychlost bude rovna  $\sqrt{gh}$ . Později uvidíme, že to platí jen tehdy, je-li vlnová délka vlny větší než hloubka kanálu.

Obdobně můžeme postupovat i v případě rázových vln, ale je třeba uvažovat zachování vnitřní energie, a ne entropie, protože rázová vlna představuje nevratný děj. Opravdu, kdybychom ověřovali platnost zákona zachování energie v případě přílivové vlny, zjistili bychom, že tento zákon není splněn. Jsou-li výškové rozdíly malé, je jeho narušení zanedbatelné, ale v případě velkých výškových rozdílů jsou značné energetické ztráty. Projevuje se to pádem vody a zpěněním znázorněným na obr. 51.4.

I v případě rázových vln se z hlediska adiabatických procesů také vyskytují ztráty energie. Energie zvukové vlny za čelem po průchodu vlny zahřívá plyn, což odpovídá zpěnění vody při přílivu. Ukazuje se, že v případě zvuku je třeba řešit tři rovnice, a jak jsme viděli, teplota za rázovou vlnou je jiná než teplota před ní.



Kdybychom se pokusili vytvořit převrácenou přílivovou vlnu, kdy  $h_2 < h_1$ , zjistili bychom, že energetické ztráty musí být záporné. Protože energie není odnikud k dispozici, takový typ přílivu se nemůže sám udržet; je nestabilní. Kdybychom začali tvořit vlnu takového typu, zploštila by se, protože závislost rychlosti na výšce, která vytvářela v předcházejícím případě strmé čelo, bude nyní právě opačná.

### 51.3 VLNY V PEVNÝCH LÁTKÁCH

Dalším složitějším typem vln, o nichž budeme mluvit, jsou vlny v pevných látkách. Už jsme mluvili o zvukových vlnách v plynu a kapalině a tyto vlny mají analogii ve vlnách šířících se v pevných látkách. Při nárazu na pevné těleso dojde k jeho stlačení. Pevná látka se však tomuto stlačení brání a tak vznikne vlna podobná zvuku. V pevné látce však může existovat i takový druh vln, který neexistuje v tekutinách. Zdeformujeme-li pevné těleso tečnými silami, smykem, bude se snažit vrátit do původního stavu. Právě tím se liší podle definice pevná látka od kapaliny. Narušíme-li kapalinu (vnitřně), chvíli ji necháme, aby se uklidnila a pak na ni přestaneme působit, zůstane v nově nabytém stavu. Vezmeme-li pevné těleso a roztřese ho jako kus žele, začne se v něm šířit *příčná* vlna postupující tělesem podobně jako vlna stlačení. Rychlost příčné vlny je však vždy menší než rychlost podélné vlny – vlny stlačení. Příčné vlny se víc podobají, alespoň pokud jde o jejich polarizaci, světelným vlnám. Zvuk nemá žádnou polarizaci, je to prostě tlaková vlna. Světlo má charakteristickou orientaci kolmou ke směru šíření.

V pevné látce existují oba druhy vln. Je tam především vlna stlačení, analogická zvuku, která se šíří jednou rychlostí. Není-li pevná látka krystal, šíří se v ní charakteristickou rychlostí libovolným směrem polarizovaná příčná vlna. (Všechny pevné látky jsou krystalické, ale máme-li kousek skládající se z mikrokrytalů všech orientací, krystalová anizotropie se vykompenzuje.)

V souvislosti se zvukovou vlnou si můžeme položit zajímavou otázku: Co se stane, když budeme vlnovou délku v pevné látce stále zmenšovat? Kam až ji můžeme zkracovat? Je zajímavé, že nemůže být kratší než vzdálenost mezi atomy. Předpokládáme-li totiž existenci vlny, v níž jeden bod se pohybuje nahoru, druhý dolů atd., je nám jasné, že nejkratší možná vlnová délka je rovna vzdálenosti mezi atomy. Mody můžeme klasifikovat, a tak známe podélné a příčné mody, dlouhovlnné a krátkovlnné mody. Uvažujeme-li vlnové délky porovnatelné s meziatomovou vzdáleností, nejsou už rychlosti konstantní; vzniká disperzní jev, kdy rychlost závisí na vlnovém čísle. Ale nejvyšším modem příčných vln bude nakonec ten, při němž se každý atom chová opačně než s ním bezprostředně sousedící atomy.

Z atomárního hlediska připomíná situace dvě vázaná kyvadla, o nichž jsme už mluvili a které mají dva typy modů; v jednom případě se pohybují souhlasně, v druhém se pohybují proti sobě. Kmity v pevných látkách můžeme tedy zkoumat i jinak, jako soustavu vázaných harmonických oscilátorů, jako ohromné množství vázaných kyvadel, přičemž nejvyšší harmonická odpovídá situaci, kdy kmitají proti sobě a nižší harmonické odpovídají jiným zřazováním.

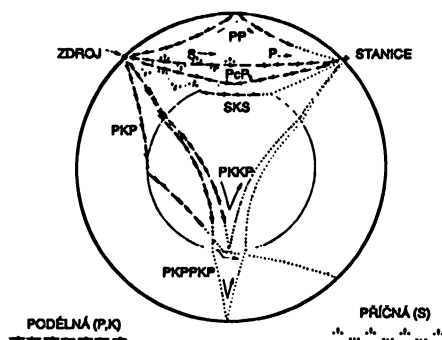
Nejkratší vlnové délky jsou tak krátké, že nejsou obvykle technicky dosažitelné. Mají však velký význam, neboť v termodynamické teorii pevných látek můžeme analyzovat tepelné vlastnosti látek například jejich tepelné kapacity pomocí vlastností krátkých zvukových vln. Přechod k extrémně krátkým vlnovým délkám zvukových vln nezbytně vede k individuálním pohybům atomů; tyto dvě věci jsou v konečném důsledku totožné.

Velmi zajímavým příkladem zvukových vln v pevném tělese, podélných i příčných, jsou vlny, které se šíří uvnitř Země. Nevíme, kdo vytváří tyto zvuky, ale uvnitř Země se čas od času projeví zemětřesení – jedna hornina sklouzne po druhé. Je to jako slabý zvuk. Z takového zdroje se

## VLNY V PEVNÝCH LÁTKÁCH

potom začne šířit vlna podobná zvukové vlně. I když její vlnová délka je mnohem větší než vlnová délka obyčejného zvuku, jsou to přece jen zvukové vlny a šíří se Zemí. Země však není homogenní a tlak, hustota, stlačitelnost a jiné vlastnosti se mění s hloubkou, takže se mění s hloubkou i rychlost vlny. Vlny proto nepostupují přímo – vzniká jistý druh indexu lomu a vlny se šíří křivočaře. Podélné a příčné vlny mají jiné rychlosti a pro různé rychlosti máme různá řešené vlnové rovnice. Umístíme-li někde seizmograf a pozorujeme pohyb jehly po zemětřesení, které vzniklo na některém jiném místě, neuvidíme jen nepravidelné chvění. Můžeme registrovat kmitání a ustálení a další kmitání, a všechno, co se děje, závisí na poloze. Kdyby zemětřesení bylo velmi blízko, nejprve by dorazily podélné vlny a o chvíli později příčné, protože postupují pomaleji. Měřením časového rozdílu mezi těmito dvěma událostmi bychom zjistili vzdálenost ohniska zemětřesení, pokud bychom dost věděli o rychlostech těchto vln a skladbě vnitřních částí Země.

Na obrázku 51.6 je schematicky znázorněno chování vln uvnitř Země. Dva druhy vln jsou označeny různými symboly. Kdyby v místě označeném jako zdroj došlo k zemětřesení, příčné a podélné vlny, jdoucí k pozorovací stanici přímo, by dorazily v různých okamžicích a v důsledku odrazu na nespojitostech by se objevily i jiné než přímé dráhy, a tedy i jiné okamžiky příchodu vln. Ukazuje se, že v Zemi existuje jádro, které nevede příčné vlny. Je-li pozorovací stanice proti zdroji, dojdou k ní příčné vlny, ale nesprávně načasované. Dochází totiž k tomu, že když příčná vlna přichází na své cestě k jádru k šikmému povrchu mezi dvěma materiály, vznikají nové vlny: jedna příčná a jedna podélná. V zemském jádře se však příčná vlna nešíří (aspoň na to nemáme na rozdíl od podélných vln důkaz). Na druhé straně jádra podélná vlna opět vybudí vlny dvě a ty přicházejí k pozorovací stanici.

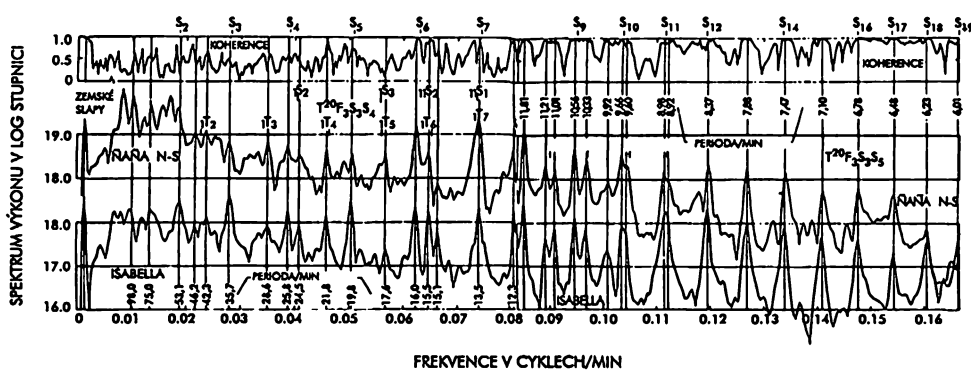


Obr. 51.6 Schématické znázornění Země, na kterém jsou vidět dráhy podélných a příčných zvukových vln

Právě z povahy vln vyvolaných zemětřesením se zjistilo, že příčné vlny se nemohou šířit v kulovém objemu ve středu Země. To znamená, že střed Země je kapalný v tom smyslu, že nevede příčné vlny. Jediným způsobem, kterým se dovídáme, co je uvnitř Země, je studium zemětřesení. Velkým počtem pozorování mnoha zemětřesení v různých pozorovacích stanicích byly zjištěny všechny podrobnosti – nyní už známe rychlosti vln, jejich dráhy, atd. Víme, jakými rychlostmi se šíří různé druhy vln v libovolné hloubce. Když už známe rychlost šíření zvukových vln, můžeme vypočítat, jaké jsou vibrační módy Země. Jinými slovy: známe elastické vlastnosti obou druhů vln v libovolné hloubce. Předpokládejme, že se Země zdeformovala do tvaru elipsoidu a v této podobě zůstala. Abychom určili periodu a tvar volného modu, stačí superponovat vlny šířící se elipsoidem. Už jsme zjistili, že v případě poruchy se objeví množství modů, od nejnižšího, který je elipsoidální k vyšším modům se složitější strukturou.

Zemětřesení v Chile v květnu 1960 vyvolalo tak silný „šum“, že jeho signály mnohokrát obešly Zemi. V této době už byly nainstalovány nové, velmi citlivé seizmografy, pomocí nichž bylo možno určit základní módy Země a porovnat je s hodnotami vypočítanými z teorie zvuku pomocí rychlostí změřených při jiných, nezávislých zemětřeseních. Výsledek takového experimentu je ilustrován na obr. 51.7 ve formě závislosti síly signálu na jeho frekvenci (Fourierova analýza). Na některých z přijímaných frekvencí jsou signály podstatně silnější, jsou tam určitá maxima. Ta odpovídají vlastním frekvencím Země, jsou to hlavní frekvence, na nichž Země může kmitat. Je-li celkový pohyb Země složen z modů mnoha frekvencí, můžeme pro každou stanicí očekávat, že nepravidelné výkyvy jsou superpozicí signálů mnoha frekvencí. Z jejich frekvenční analýzy bychom mohli určit charakteristické frekvence Země. Svislé plné čáry na obrázku jsou vypočtené frekvence a zjišťujeme pozoruhodnou shodu, která svědčí o tom, že teorie zvuku uvnitř Země platí.

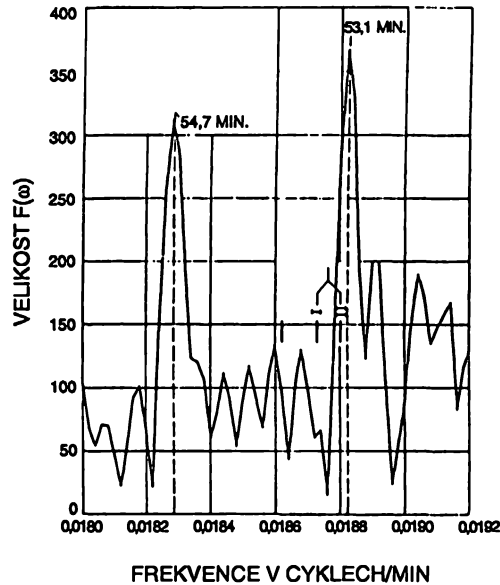
Velmi zajímavou skutečnost odhaluje obrázek 51.8, na němž jsou znázorněny výsledky velmi přesného měření s lepším rozlišením nejnižšího – elipsoidálního modu Země. Všimněme si, že nejde o jednoduché, ale o zdvojené maximum, jehož vrcholy v 54,7 min. a 53,1 min. jsou trochu posunuty. Příčina těchto dvou různých frekvencí nebyla v době jejich měření známá, ale dnes už se na ni možná přišlo. Existují přinejmenším alespoň dvě možná vysvětlení. První z nich vychází z možné asymetrie v rozložení zemské hmoty a ta by způsobila existenci dvou podobných modů. Jiné, ještě zajímavější vysvětlení spočívá v následujícím. Představte si vlny, které postupují od zdroje kolem Země ve dvou směrech. Jejich rychlosti nebudou stejné, neboť v pohybových rovnicích figuruje otáčení Země, s nímž jsme dosud v analýzách nepočítali. Pohyb v rotující soustavě je modifikován Coriolisovou silou a to může způsobit pozorované rozštěpení.



Obr. 51.7 Závislost výkonu na frekvenci zaznamenaná seizmografy v Nafta (Peru) a Isabella (Kalifornie). Koherence udává míru vazby mezi oběma stanicemi.  
[Benioff, Press and Smith, J. Geoph. Research **66**, 605 (1961)]

Řekněme si ještě pár slov o metodě registrace takových otřesů. To, co zapisuje seizmograf, není závislost amplitudy na frekvenci, ale závislost posunutí na čase, což zanechává velmi nepravidelnou stopu. My, však už víme, co musíme udělat, abychom dostali podíl jednotlivých sinových vln pro všechny frekvence. Získaný údaj musíme násobit sinovou vlnou dané frekvence a integrovat, tj. vystředovat ji. Při tomto postupu ostatní frekvence vymizí. Na obrázcích jsou vlastně znázorněny křivky integrálů z údajů násobených sinovými vlnami s různým počtem period za minutu.

## VLNY V PEVNÝCH LÁTKÁCH



Obr. 51.8 Analýza jednoho seizmografického záznamu s vysokým rozlišením ukazuje spektrální dublet.

### 51.4 POVRCHOVÉ VLNY

Dalším zajímavým typem vln jsou vlny na vodě, které každý z nás určitě viděl a které bývají často používány jako příklad vln v základních kursech. Jak brzy uvidíme, je to ten nejhorší příklad, neboť tyto vlny vůbec nepřipomínají zvuk nebo světlo a vyznačují se všemi komplikacemi, které vlny mohou mít. Uvažujme nejprve dlouhé vlny na hluboké vodě. Považujeme-li oceán za nekonečně hluboký a na jeho povrchu vznikne rozruch, objeví se vlny. Vzniknou všechny druhy nepravidelných pohybů, ale sinusoidální pohyb s velmi malou výchylkou může připomínat obyčejné hladké mořské vlny postupující k pobřeží. V případě takových vln zůstává voda v průměru na místě a pohybuje se pouze vlna. Položme si otázku: Jde o příčný nebo o podélný pohyb? Nemůže to být ani příčný, ani podélný pohyb! I když v daném místě je voda střídavě v brázdě a na hřebenu, nemůže jít o jednoduchý pohyb nahoru a dolů v důsledku zákona zachování množství vody. Kam by se totiž poděla voda po klesání, když je nestlačitelná? Rychlost vln stlačení – tedy zvuku ve vodě – je mnohem, mnohem větší a nebudeme nyní o nich mluvit. Vodu budeme považovat za nestlačitelnou a proto při sestupování hřebene musí voda z této oblasti odcházet do stran. Ve skutečnosti dochází k tomu, že vodní částice se v blízkosti hladiny pohybují přibližně po kružnicích. Člověk vznášející se na gumovém kole by po příchodu hladkých vln pozoroval kruhový pohyb okolních předmětů. Aby náš zmatek byl dokonalý, máme co činit se směsí příčných a podélných vln. Ve větších hloubkách probíhá pohyb po menších kružnicích a dostatečně hluboko už pohyb zaniká (obr. 51.9).

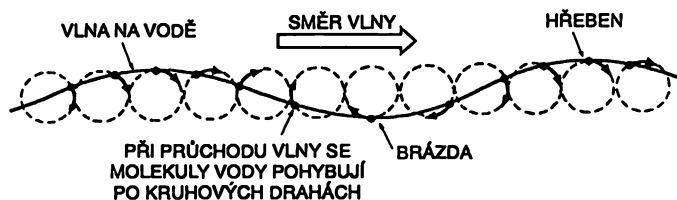
Bude velmi zajímavé najít rychlost takových vln. Musí to být nějaká kombinace hustoty vody, gravitačního zrychlení (gravitace je v tomto případě obnovující silou, která vytváří vlny) a možná vlnové délky a hloubky. Ať už bude vztah pro fázovou rychlost vln jakýkoliv, musí to být taková kombinace uvedených faktorů, která dá správný fyzikální rozměr. Budeme-li se o takovou

## VLNY

kombinaci pokoušet různými způsoby, jen jedním z nich bychom zkombinovali hustotu,  $g$  a  $\lambda$  tak, abychom dostali rychlost a to je právě veličina  $\sqrt{g\lambda}$ , která hustotu vůbec neobsahuje. Tento výraz pro fázovou rychlost není vlastně zcela správný ale úplná analýza dynamiky, kterou však nebudeme provádět, by nám poskytla vztah, který se od našeho liší o bezrozměrný koeficient  $\sqrt{2\pi}$ , takže

$$v_{\text{fáz}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (\text{pro gravitační vlny}).$$

Je zajímavé, že dlouhé vlny postupují rychleji než krátké. Vytvoří-li někde v dálce sportovní motorový člun vlny, dorazí ke břehu nejprve vlny v podobě ojedinělých nárazů a pak budou tyto nárazy častější a rychlejší, neboť jako první dorazily dlouhé vlny. Postupem času přicházejí kratší a kratší vlny, neboť rychlost se chová jako druhá odmocnina z vlnové délky.



Obr. 51.9 Vlna na hluboké vodě vznikají při pohybu částic po kružnicích. Všimněte si systematického fázového posunu od jedné kružnice k druhé. Jak by se pohyboval plavající předmět?

Nyní možná namítnete, že k takovým úvahám potřebujeme znát *grupovou* rychlost. Budete mít samozřejmě pravdu. Vztah pro fázovou rychlost nám neřekne, co dorazí první; k tomu potřebujeme znát grupovou rychlost. Musíme tedy určit grupovou rychlost a snadno si vypočítáte, že je rovna polovině fázové rychlosti za předpokladu, že tato rychlost se chová jako druhá odmocnina z vlnové délky. Grupová rychlost se také chová jako odmocnina z vlnové délky. Jak je možné, že grupová rychlost je dvakrát menší než fázová rychlost? Všimněte si skupiny vln vytvářených člunem plujícím vedle. Budeme-li sledovat některý hřeben zjistíme, že se pohybuje ve skupině vln kupředu a postupně slábne až na čele úplně zanikne. V zadní části se nějak mysticky a tajuplně objevuje malá vlnka, dere se dopředu a postupně sílí. Krátce řečeno, ve skupině se pohybují vlny, ale samotná skupina vln se pohybuje jen poloviční rychlostí než je rychlost jednotlivých vln.

Protože grupová a fázová rychlost jsou rozdílné, nebudou vlny vytvářené pohybující se předmětem kuželové, ale budou mít podstatně zajímavější tvar. Jaký tvar to bude, je možné vidět z obrázku 51.10, který znázorňuje vlny vytvořené předmětem, pohybující se po vodě. Všimněte si, že vlny vypadají zcela jinak než v případě zvuku, kdy rychlost nezávisí na vlnové délce. Ve vzduchu byla čela vln jen podél kužele postupujícího do stran. Místo toho máme vlny vzadu, jejich čela postupují souběžně s pohybem člunu a kromě nich máme vlnky po stranách postupující pod jinými úhly. Tento složitý obrazec vln můžeme důvtipně analyzovat, jen když víme, že fázová rychlost je úměrná druhé odmocnině z vlnové délky. Celý vtip spočívá v tom, že tento obrazec vln je stacionární vzhledem k člunu (pohybující se konstantní rychlostí). Jakýkoliv jiný obrazec vln při pohybu člunu zmizí.

Dosud jsme uvažovali dlouhé vlny, jejich obnovující silou byla gravitace. Jde-li však o velmi krátké vlny ve vodě, jejich hlavní příčinou bude kapilární přitahování, tj. energie povrchového napětí. Ukazuje se, že pro fázovou rychlost vln povrchového pláť vztah

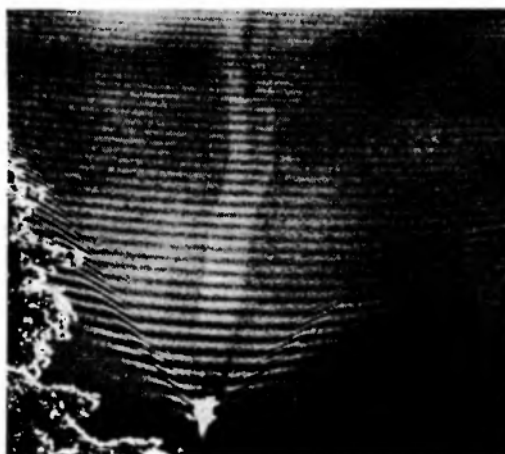
## VLNY V PEVNÝCH LÁTKÁCH

$$v_{\text{fáz}} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}} \quad (\text{pro vlnky}),$$

v němž  $\sigma$  označuje povrchové napětí a  $\rho$  hustotu. Nyní máme opačnou situaci: je-li vlnová délka velmi malá, pak čím je vlnová délka kratší, tím je fázová rychlost *větší*. Máme-li i gravitaci, i kapilární působení – což je vlastně běžné – musíme je zkombinovat a dostaneme

$$v_{\text{fáz}} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho} + \frac{g}{k}},$$

kde  $k = 2\pi/\lambda$  je vlnové číslo. Je vidět, že rychlost vln na vodě je opravdu složitá věc.



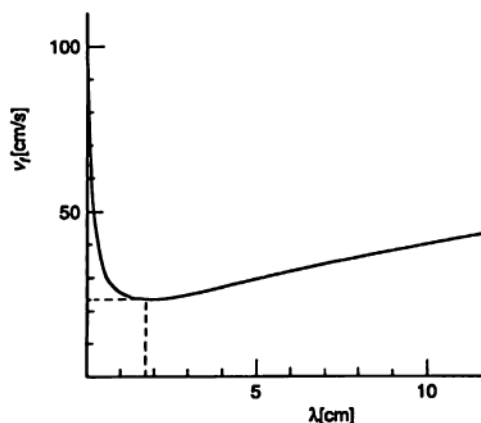
Obr. 51.10 Brázda za člunem

*Obrázek 51.11* představuje fázovou rychlost jako funkci vlnové délky; pro velmi krátké i velmi dlouhé vlny je velká a mezi těmito oblastmi existuje minimální rychlost šíření vln. Kdybychom vycházeli z tohoto vztahu, mohli bychom určit i grupovou rychlost; v případě vlnek je rovna  $3/2$  fázové rychlosti a v případě gravitačních vln  $1/2$  fázové rychlosti. Vlevo od minima je grupová rychlost větší než fázová, vpravo je tomu naopak. S těmito skutečnostmi souvisí několik zajímavých jevů. Protože grupová rychlost roste velmi rychle s poklesem vlnové délky, pak kdybychom vyvolali určitý rozruch, vznikly by vlny příslušné délky, šířící se minimální rychlostí a před nimi by postupovaly rychlejší krátké a velmi dlouhé vlny. Ve vodní nádrži snadno zpozorujete krátké vlny, ale jen těžko uvidíte dlouhé vlny.

Dozvěděli jsme se, že vlnky, které se tak často používají k ilustraci jednoduchých vln, jsou vlastně složité a velmi zajímavé. Vůbec nemají strmá čela jako zvukové a světelné vlny. Kromě hlavní vlny jsou zde vlnky, které vyběhají dopředu. Ostrý rozruch ve vodě nevyvolává ostrou vlnu právě v důsledku disperze. Nejprve přicházejí velmi drobné vlnky. Pohybuje-li se předmět ve vodě určitou rychlostí, vzniká složitý obrazec, neboť různé vlny se pohybují různými rychlostmi. Na tácku s vodou můžeme ukázat, že nejrychlejší jsou drobné kapilární vlny a vzadu postupují ty nejpomalejší. Nakloníme-li dno, zjistíme, že tam, kde je malá hloubka vody, je menší i rychlost vln. Postupuje-li vlna pod určitým úhlem vzhledem k přímce maximálního sklonu, ohýbá se

## VLNY

směrem k této přímce a má tendenci se pohybovat podél ní. Takovým způsobem se můžeme přesvědčit o mnoha zvláštnostech vln na vodě a dojít k poznatku, že jsou mnohem složitější než vlny ve vzduchu.



Obr. 51.11 Závislost fázové rychlosti vlny na vodě na vlnové délce

Rychlost dlouhých vodních vln s cirkulačním pohybem je menší při menší hloubce a větší při větší hloubce vody. Proto se vlna zpomalí, když se přiblíží k pobřeží, kde je mělká voda. V hlubší vodě se vlna pohybuje rychleji, a proto se objeví mechanismus rázové vlny. Tentokrát, protože vlna není tak jednoduchá, rázová vlna je deformovaná a hřeben vlny se láme známým způsobem zobrazeným na obrázku 51.12. S takovou situací se setkáváme, když vlna dorazí ke břehu a podhání ohromnou složitost přírody. Dodnes se nikomu nepodařilo spočítat tvar vlny v okamžiku zlomu. Tvar vln se určí snadno, když jsou malé, ale když vzrostou a lámou se, je to velice složité.



Obr. 51.12 Vlna na vodě

Zajímavou vlastnost kapilárních vln můžeme pozorovat, je-li vodní hladina porušena pohybujícím se předmětem. Z hlediska samotného předmětu proudí voda kolem něho a vlny, které v konečném důsledku zůstanou s ním, jsou vždy ty, které mají právě takovou rychlost, aby se vzhledem k předmětu nepohybovaly. Podobně budou vlny v okolí nehybného předmětu

## VLNY V PEVNÝCH LÁTKÁCH

obtákaného proudem vytvářet stacionární obrazec a budou to ty vlny, které mají stejnou rychlost jako obtékající voda. Je-li však grupová rychlost menší než fázová, porucha postupuje v proudu nazpět, protože grupová rychlost jí nestačí udržet v proudu. Je-li grupová rychlost větší než fázová, objeví se vlnový obrazec před předmětem. Když se pozorně zahledíme na předmět v proudu, zpozorujeme drobné vlnky před ním a dlouhé vzadu.

Jiný zajímavý jev podobného druhu je možno pozorovat při lití kapalin. Vyléváme-li například z láhve dostatečně rychle mléko, zpozorujeme veliké množství čar křížujících se ve vytékajícím proudu. Jsou to vlny vyvolané poruchou na okrajích a velice se podobají vlnám, pocházejícím od předmětu nacházejícího se v proudu. Teď však jev vzniká po obou stranách, a tak se tvoří křížující se čáry.

Seznámili jsme se s některými zajímavými vlastnostmi vln, s komplikacemi, které vznikají jako důsledek toho, že fázová rychlost závisí na vlnové délce, rychlost vln na hloubce vody atd., a které dělají přírodní jevy skutečně komplexními, a proto i zajímavými.



# Symetrie fyzikálních zákonů

---

- 52.1 SYMETRICKÉ OPERACE
- 52.2 SYMETRIE V PROSTORU A ČASE
- 52.3 SYMETRIE A ZÁKONY ZACHOVÁNÍ
- 52.4 ZRCADLOVÝ OBRAZ
- 52.5 POLÁRNÍ A AXIÁLNÍ VEKTORY
- 52.6 KTERÁ RUKA JE PRAVÁ?
- 52.7 PARITA SE NEZACHOVÁVÁ
- 52.8 ANTIHMOTA
- 52.9 PORUŠENÁ SYMETRIE

## 52.1 SYMETRICKÉ OPERACE

Předmětem této kapitoly bude to, co můžeme nazvat *symetrie fyzikálních zákonů*. O některých rysech symetrie fyzikálních zákonů jsme již mluvili v souvislosti s vektorovou analýzou (kapitola 16) a rotacemi (kapitola 20).

Proč nás symetrie tak zajímá? Především proto, že symetrie přímo fascinuje lidskou mysl a každý má rád předměty nebo obrazce, jež jsou určitým způsobem symetrické. Je zajímavé, že v předmětech okolního světa příroda často projevuje určité druhy symetrie. Snad nejsymetričtější objekt, jaký si umíme představit, je koule a příroda je jich plná – jsou to hvězdy, planety, vodní kapky v mračích. Krystaly, které najdeme v horninách, vykazují množství různých druhů symetrie a jejich studiem se dozvídáme mnoho zajímavého o struktuře pevných látek. Dokonce i zvířata a rostlinná říše vykazují určitý stupeň symetrie, i když symetrie květu nebo včelí plástve není tak dokonalá a nemá tak základní význam jako symetrie krystalu.

My se však nyní nebudeme zabývat tím, že v přírodě jsou *předměty* často symetrické. Budeme

## SYMETRICKÉ OPERACE

se zabývat ještě pozoruhodnější symetrií Vesmíru – symetrií, která je v *samotných základních zákonech*, jimž podléhají procesy fyzikálního světa.

Položme si nejprve otázku: Co je to symetrie? Jak může být fyzikální zákon „symetrický“? Problém definování symetrie je zajímavý a už jsme uváděli velmi dobrou Weylovu definici, která v podstatě říká, že předmět je symetrický, když s ním můžeme něco udělat a i potom bude vypadat stejně jako předtím. Například symetrická je váza, kterou můžeme zobrazit v zrcadlo nebo pootočit a bude vypadat stejně jako dříve. Nás bude zajímat, co můžeme udělat v experimentu s fyzikálním jevem nebo fyzikální situací, abychom dostali opět původní výsledek. Seznam známých operací, při nichž se nemění různé fyzikální jevy, najdete v *tabulce 52.1*.

Tabulka 52.1

Symetrické operace

Translace v prostoru
Translace v čase
Rotace o pevný úhel
Pohyb po přímce konstantní rychlostí (Lorentzova transformace)
Inverze času
Zrcadlové zobrazení
Výměna stejných atomů nebo stejných částic
Změna kvantověmechanické fáze
Záměna hmoty antihmotou (nábojové sdružení)

## 52.2 SYMETRIE V PROSTORU A ČASE

První věc, o kterou se například můžeme pokusit, je *posunutí* (translace) jevů *v prostoru*. Provádíme-li experiment na určitém místě a stejnou aparaturu pak postavíme na jiném místě prostoru (nebo tam přemístíme původní aparaturu), vše, co se stalo v určitém časovém sledu s první aparaturou, se stane i s druhou, pokud zabezpečíme na obou místech stejné podmínky. Přitom musíme dbát na to, abychom dodrželi již zmíněnou podmínku, že budou umístěny i všechny ty prvky okolí aparatury, jež by mohly způsobit její odlišné chování. O tom, co vše je třeba přemístit a co ne, jsme už mluvili a nebudeme to v podrobnostech opakovat.

Podobně jsme přesvědčeni, že *posunutí v čase* neovlivní fyzikální zákony. (Je třeba mít na zřeteli, že to, o čem mluvíme, se týká *současného stavu poznání*, a bude proto dobře, když si náš výrok doplníte tvrzením: *pokud je nám známo!*) Postavíme-li tedy nějakou aparaturu a spustíme ji v určitém okamžiku, např. ve čtvrtek v 10 hodin a pak postavíme stejnou aparaturu a spustíme ji za stejných podmínek např. o tři dny později, tyto aparatury budou vykonávat činnosti, které jsou stejnými funkcemi času bez ohledu na to, kdy začaly, pokud se podstatné vlastnosti okolí v obou případech stejně přizpůsobují času. Z hlediska této symetrie je stejnou událostí, zda jste si koupili akcie General Motors před třemi měsíci nebo dnes.

Musíme však uvážit i zeměpisné rozdíly, neboť některé charakteristiky se mění se změnou polohy na Zemi. Když například v určité oblasti měříme magnetické pole a aparaturu pak přemístíme do jiné oblasti, nemusí pracovat přesně stejně, neboť tam bude jiné magnetické pole, ale tato odchylka bude způsobena zemským magnetickým polem. Kdybychom si však představili, že jsme přemístili aparaturu spolu se Zemí, rozdíl se v činnosti aparatury neprojeví.

Další věcí, kterou jsme už podrobně prozkoumali, je rotace v prostoru. Otočíme-li aparaturu o nějaký úhel, bude pracovat nezměněně za předpokladu, že jsme spolu s aparaturou otočili vše, co je v této situaci podstatné. Problém symetrie při otáčení v prostoru jsme podrobně studovali v 11. kapitole a tam jsme zavedli *vektorovou analýzu* – matematický aparát umožňující velmi elegantní způsob popisu rotační symetrie.

Na pokročilejším stupni se setkáváme s dalším druhem symetrie – se symetrií při rovnoměrném přímočarém pohybu. Je to vlastně pozoruhodný jev, že umístěním naší aparatury do rovnoměrně a přímočaře se pohybujícího vozidla (spolu se vším, co je pro práci aparatury podstatné) se nezmění chod aparatury. Jevy ve vozidle probíhají stejně, jako když vozidlo stálo, tj. všechny fyzikální zákony vypadají stejně. Už víme i to, jak se tato symetrie vyjádří matematicky: matematické rovnice fyzikálních zákonů se nesmí měnit při *Lorentzově transformaci*. Bylo to vlastně studium problémů teorie relativity, které soustředilo zájem fyziků na symetrii fyzikálních zákonů.

Uvedené symetrie měly geometrickou povahu, přičemž čas a prostor měly přibližně stejnou úlohu. Existují však i jiné druhy symetrií. Příkladem jiného druhu symetrie je symetrie vystihující skutečnost, že jeden atom můžeme nahradit jiným atomem stejného druhu. Jinak řečeno, *existují stejné atomy*. Můžeme najít takové skupiny atomů, v nichž vzájemná záměna dvou libovolných atomů nezpůsobí žádnou změnu – atomy jsou identické. Vše, co může udělat jeden atom kyslíku určitého druhu, může udělat i jiný atom kyslíku stejného druhu. Můžete namítnout: „To je směšné, to je prostě *definice* stejného druhu atomů.“

Mohla by to být pouhá definice, ale pak bychom stále ještě nevěděli, zda vůbec *existují* atomy „stejného druhu“. *Skutečnost* však je, že existuje ohromné množství atomů stejného druhu. Takže tvrzení, že nezáleží na tom, zda nahradíme jeden atom jiným atomem stejného druhu, skutečně něco znamená. Takzvané elementární částice, z nichž se skládají atomy, jsou také identickými částicemi v uvedeném smyslu – všechny elektrony jsou stejné, všechny protony jsou stejné, všechny kladné piony jsou stejné atd.

Když jsme vyjmenovali tolik věcí, které můžeme dělat, aniž by se změnil fyzikální jev, zdálo by se, že můžeme dělat prakticky všechno. Abychom ukázali, že to není pravda, všimněme si několika příkladů. Ptejme se: „Jsou fyzikální zákony symetrické vzhledem ke změně měřítka?“ Předpokládejme, že jsme postavili určitý přístroj a také jiný přístroj, který má každou součástku pětkrát větší, a jsme zvědaví, zda tyto přístroje budou pracovat stejně. *Ne*, nebudou! Například vlnová délka světla emitovaného atomy sodíku nacházejícího se uvnitř jedné nádoby a vlnová délka světla emitovaného plynem sodíkových atomů v pětkrát větší nádobě budou stejné a nebudou v poměru jedna ku pěti. Poměr vlnové délky k velikosti zářiče se změní.

Vezměme jiný příklad: každou chvíli vídáme v novinách obrázky modelů velkých katedrál ze zápalek – jsou to úžasná umělecká díla vytvořená obvykle penzisty, kteří mají čas a trpělivost k takové práci. Tato díla jsou ještě pečlivěji provedena a jsou úžasnější než skutečné katedrály. A nyní si představte, že tato dřevěná katedrála, by byla postavena ve skutečném měřítku katedrály. Jistě víte, co by se stalo; zřítíla by se, protože zvětšené zápalky by nebyly dost silné. Někdo z vás by však mohl namítnout, že v souladu se zvětšením měřítka by bylo třeba změnit i vnější vlivy. Máme na mysli schopnost předmětu odolávat gravitaci. Nejprve bychom tedy měli vzít model katedrály ze skutečných zápalek a skutečnou Zemi (v tom případě je katedrála stabilní) a pak vzít větší katedrálu a větší Zemi. To by však bylo ještě horší, neboť gravitace by ještě vzrostla!

Dnes už víme, že závislost jevů na rozměrech je dána atomovým složením látky a kdyby se nám podařilo sestavit tak malé zařízení, které by se skládalo jen z pěti atomů, nemohli bychom ho už libovolně zvětšovat nebo zmenšovat. Rozměr jednotlivého atomu není vůbec libovolný, je dán.

Skutečnost, že fyzikální zákony nejsou neměnné při změně měřítka objevil Galileo. Uvědomil si, že pevnost materiálů není přesně úměrná jejich velikosti, a to, co jsme říkali v souvislosti s modelem katedrály, ilustroval na příkladu dvou kostí. Nakreslil obyčejnou kost psa v takovém rozměru, jaký je potřebný k udržení jeho váhy, a potom nakreslil takovou myšlenou kost, která by udržela „superpsa“ deset nebo stokrát většího. Ta druhá kost byla velká a pevná a měla jiný poměr rozměrů než první kost. Nevíme, zda Galileo dospěl až k takovému závěru, že přírodní zákony musí mít určité měřítka. Víme však, že musel být ohromen tímto objevem a považoval ho za tak důležitý jako pohybové zákony, neboť je uveřejnil ve stejném díle nazvaném „O dvou nových vědách“.

Uveďme další známý příklad nesymetrie zákonů. V soustavě rotující konstantní úhlovou rychlostí budou fyzikální zákony vypadat zcela jinak než v soustavě, která se neotáčí. Kdybychom provedli nějaký experiment a pak celé zařízení bychom umístili do kosmické lodi rotující v meziplanetárním prostoru konstantní úhlovou rychlostí, zařízení by pracovalo jinak. Víme totiž, že v takovém případě budou předměty uvnitř lodi vrhány ven, bude působit odstředivá síla, Coriolisova síla atd. Vždyť o tom, že Země rotuje, se můžeme přesvědčit pomocí Foucaultova kyvadla aniž bychom se dívali na hvězdy.

Ještě se zmíníme o velmi zajímavé symetrii, která je zřejmě falešná, a tou je inverze času. Fyzikální zákony nemohou být zjevně obráceny v čase, neboť víme, že všechny jevy jsou ve velkém měřítku (tj. v našich běžných rozměrech) nevratné. Říká se: „Ruka píše, a když napsala, přemísťuje se dál.“ Pokud víme, tuto nevratnost způsobuje ohromné množství částic zúčastňujících se fyzikálních jevů, ale kdybychom rozlišili jednotlivé molekuly, nemohli bychom říci, zda mechanismus pracuje tím nebo opačným směrem. Vysvětlíme to podrobněji. Mějme drobné zařízení, o němž víme, jak pracují jednotlivé atomy, protože můžeme pozorovat jejich pohyby. Sestrojíme stejné zařízení, které se začne pohybovat tak, že počáteční rychlosti v novém zařízení budou rovny konečným rychlostem ve starém zařízení vzatým s opačnými znaménky: ( $v$  (začátek v novém) =  $-v$  (konec ve starém)). *Toto zařízení bude konat stejné pohyby, ale přesně v opačném směru.* Jinak řečeno, kdybychom tedy nafilmovali se všemi podrobnostmi vnitřní pohyby v nějakém kusu materiálu a promítli ji na plátno v obráceném sledu, žádný z fyziků by nemohl říci: „To je proti fyzikálním zákonům, ten děj neprobíhá správně!“ Pokud nevidíme všechny podrobnosti, situace je zcela jiná. Vidíme-li, jak se vejce rozbilo na chodníku, rozbila se skořápka a vnitřek vytekl, určitě řekneme: „Tento děj je nevratný, neboť při opačném chodu filmu by se žloutek a bílek spojily, skořápka scelila, a to všechno by bylo absurdní!“ Hledíme-li však jen na jednotlivé atomy, zákony vypadají vratně. Odhalit tuto symetrii nebylo snadné, ale faktem je, že základní fyzikální zákony jsou na mikroskopické úrovni zcela vratné v čase!

### 52.3 SYMETRIE A ZÁKONY ZACHOVÁNÍ

Už i na této úrovni jsou různé druhy symetrie fyzikálních zákonů velmi zajímavé, avšak později v kvantové mechanice uvidíme, jak jsou vzrušující. Ve výkladu jsme ještě nepokročili dost daleko, abych vám mohl říci, proč většina fyziků stále považuje za udivující a krásnou skutečnost, že v kvantové mechanice *každému z pravidel symetrie odpovídá určitý zákon zachování*. Existuje zcela určitá souvislost mezi zákony zachování a symetrií fyzikálních zákonů. My to nyní můžeme konstatovat, aniž bychom se to pokusili vysvětlit.

Ukazuje se například, že zákony symetrie pro translaci v prostoru vedou spolu s principy kvantové mechaniky k *zachování hybnosti*.

## SYMETRIE FYZIKÁLNÍCH ZÁKONŮ

Zákony symetrie pro časovou translaci vedou v kvantové mechanice k *zachování energie*.

Invariantnost vůči rotaci o pevný úhel v prostoru odpovídá *zachování momentu hybnosti*. Tyto vztahy jsou skutečně velmi zajímavé a patří k těm nejkrásnějším a nejhlubším myšlenkám ve fyzice.

V kvantové mechanice existují i takové symetrie, které nemají klasický analog a nemůžeme je popsat metodami klasické fyziky. Jedna z nich spočívá v následujícím: Představuje-li  $\psi$  amplitudu nějakého procesu, pak druhá mocnina absolutní hodnoty  $\psi$  představuje pravděpodobnost, že takový proces se uskuteční. Kdyby někdo jiný počítal ne s veličinou  $\psi$ , ale s veličinou  $\psi'$ , která se od  $\psi$  liší jen ve fázi (je-li  $\Delta$  je nějaká konstanta a  $\psi'$  se od  $\psi$  liší faktorem  $e^{i\Delta}$ ), dostal by pro druhou mocninu absolutní hodnoty  $\psi'$  (to je pravděpodobnost události) stejnou hodnotu jako pro druhou mocninu absolutní hodnoty  $\psi$

$$\psi' = \psi e^{i\Delta}; |\psi'|^2 = |\psi|^2. \quad (52.1)$$

Fyzikální zákony se tedy nezmění, posune-li se fáze vlnové funkce o libovolnou konstantu. To je další druh symetrie. Fyzikální zákony musí mít takovou povahu, že se na nich posun kvantověmechanické fáze neprojeví. Jak už jsme uvedli, v kvantové mechanice odpovídá každé symetrii určitý zákon zachování. Zdá se, že *zákon zachování elektrického náboje* je zákonem zachování souvisejícím s kvantověmechanickou fází. To je další velmi významný poznatek!

### 52.4 ZRCADLOVÝ ODRAZ

Dalším problémem, kterým se budeme zabývat téměř v celém zbytku této kapitoly, je problém symetrie při zrcadlovém *odrazu v prostoru*. Mohli bychom se zeptat: Jsou fyzikální zákony symetrické vzhledem k odrazu? Tuto otázku bychom mohli formulovat i takto: Předpokládejme, že jsme sestrojili nějaké zařízení, například hodiny, a ty mají mnoho koleček, ručiček, číslic i pružinu, tikají a pracují. Podívejme se na tyto hodiny v zrcadle. Nezájímá nás jejich *vzhled* v zrcadle. *Sestrojíme* ale jiné hodiny, které jsou navlas stejné jako vypadají první hodiny v zrcadle – všude tam, kde byl šroubek s pravotočivým závitem, bude nyní šroubek s levotočivým závitem; kde byl znak „2“, bude nyní znak „5“; kde byla doleva stočená pružina, bude doprava stočená pružina. Když to všechno uskutečníme, budeme mít dvoje hodiny, oboje fyzikální a přitom budou v takovém vztahu jako předmět a jeho zrcadlový obraz, jenže nyní to budou dva skutečné, materiální předměty. Ptáme se: Začnou-li tyto hodiny jít za stejných podmínek, jejich pružiny budou stejně natažené, půjdou hodiny vždy jako zrcadlové obrazy? (Je to fyzikální, ne filozofická otázka.) Na tuto otázku nám naše fyzikální intuice odpovídá kladně, tyto hodiny by *měly tak jít*.

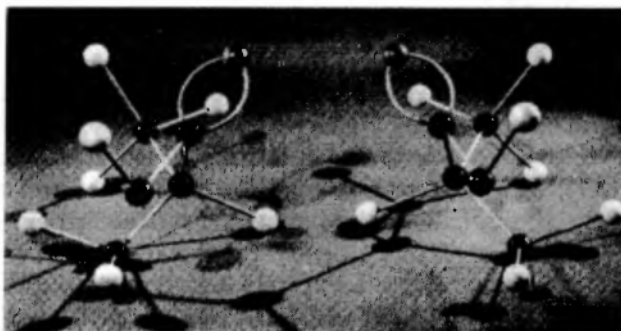
Máme podezření, že aspoň v případě těchto hodin je zrcadlení jednou ze symetrií fyzikálních zákonů, tedy když vše změníme z „levého“ na „pravé“ a vše ostatní necháme nezměněné, nezjistíme rozdíl. Na chvíli předpokládejme, že je to skutečně pravda. Je-li to pravda, bude nemožné rozlišit „pravé“ od „levého“ pomocí nějakého fyzikálního jevu právě tak, jako je například nemožné určit pomocí fyzikálního jevu absolutní rychlost. Pomocí fyzikálních experimentů by tedy nebylo možné absolutně určit, co je třeba rozumět „pravým“ v opaku k „levému“, neboť fyzikální zákony by byly symetrické.

Svět samozřejmě *nemusí* být symetrický. V zeměpisu například pojem „pravý“ můžeme zavést. Například, stojíme-li v New Orleansu a díváme se směrem k Chicagu, je Florida vpravo (stojíme-li nohama na zemi!). „Pravé“ a „levé“ tedy můžeme definovat pomocí zeměpisu. Je jen samozřejmé, že v libovolném systému nemusí mít skutečná situace tu symetrii, o níž mluvíme; jde však

o to, zda jsou symetrické *zákony*. Jinak řečeno, zda by bylo *proti fyzikálním zákonům*, kdyby existovala taková koule jako Země s „levostranným povrchem“ a s lidmi, kteří by se nám podobali, ale při pohledu z města New Orleans na město jako Chicago by viděli Floridu na opačné straně. To se vůbec nezdá být nemožné; záměna všeho levého na pravé není v rozporu s fyzikálními zákony.

Dále musíme žádat, aby naše definice „pravého“ nezávisela na historii. Snadno byste rozlišili pravé od levého, kdybyste si v železářství koupili náhodně vybraný šroubek. Tento šroubek bude mít pravotočivý závit – není to sice úplně jisté, ale je to velmi pravděpodobné. Příčina je v historii, v zavedené konvenci, ale ne v základních zákonech. Kdokoliv totiž mohl začít vyrábět šroubky s levotočivým závitem!

Musíme proto hledat takový jev, v kterém by „pravé“ vystupovalo principiálně. Další možnost, o níž budeme mluvit, spočívá ve skutečnosti, že polarizované světlo stáčí rovinu polarizace například při průchodu roztokem cukru. V kapitole 33. jsme už poznali, že rovina polarizace se stáčí v určitém cukrovém roztoku doprava... Tak máme způsob, jak definovat pravou stranu, protože nám stačí rozpustit cukr ve vodě a směr stáčení polarizační roviny nám určí pravou stranu. Ale cukr pochází ze živých organismů a kdybychom ho vyrobili uměle, zjistili bychom, že *nestáčí* rovinu polarizace! Kdybychom do uměle vyrobeného a polarizační rovinu nestáčejšího cukru nasadili bakterie (které se živí cukrem) a pak bakterie odfiltrovali, zjistili bychom, že zůstala část cukru (téměř polovina původního množství), a tento cukr stáčí rovinu polarizace na *opačnou stranu*! I když to vypadá zamotaně, lze to snadno vysvětlit.



Obr. 52.1 Modely alaninové molekuly. Vlevo: *L*-alanin, vpravo: *D*-alanin

Všimněme si jiného příkladu: Jednou z látek společných všem živým organismům a nezbytných pro život je bílkovina. Bílkoviny se skládají z aminokyselinových řetězců. Na *obrázku 52.1* je vidět model aminokyseliny, kterou můžeme získat z bílkoviny. Tato aminokyselina se nazývá alanin a její molekulární uspořádání ukazuje *obr. 52.1a*, pochází-li z bílkoviny živého organismu. Na druhé straně, kdybychom vyrobili alanin z oxidu uhličitého, etanu a čpavku (a to umíme, neboť nejde o složitou molekulu), zjistili bychom, že vznikají stejná množství zmíněných molekul a molekul znázorněných na *obr. 52.1b*. První molekula, ta která vzniká v živých organizmech, se nazývá *L-alanin*. Druhá molekula, nazývaná *D-alanin*, která je chemicky stejná v tom smyslu, že má stejné druhy a stejné vazby atomů, je „pravostrannou“ molekulou ve srovnání s „levostranným“ *L-alaninem*. Je zajímavé, že při laboratorní výrobě alaninu z jednoduchých plynů dostáváme ve směsi stejná množství obou druhů. Živé organismy však používají jen *L-alanin*. (Není to úplně pravda. Občas živé organismy používají ke speciálním účelům i *D-alanin*. Děje se to však velmi řídce a bílkoviny používají výlučně *L-alanin*.) Vyrobíme-li oba druhy alaninu a touto směsí krmíme nějaké organismy, které „jedí“ nebo vylučují alanin, spotřebují *L-alanin*, neboť *D-*

alanin je pro ně nepoužitelný. Stane se tedy to, co se stalo v případě cukru, kdy bakterie „snědly“ jim vyhovující cukr a „špatný“ cukr nechaly! (Levotočivý cukr má sladkou chuť, ale jinou než pravotočivý cukr.)

Vypadá to tak, jakoby životní procesy dovozovaly rozlišit „pravé“ od „levého“, neboť takové dvě molekuly jsou chemicky jiné. Jenže ve skutečnosti tomu tak není! Můžeme-li provést fyzikální měření takových veličin jako je energie, rychlost chemické reakce atd., dávají obě molekuly stejné výsledky, pokud bylo i vše ostatní zrcadlově převráceno. Jsou-li molekuly ve stejném množství rozpouštědla, jedny stáčí světlo napravo a druhé stejnou mírou nalevo. Z fyzikálního hlediska stejně dobře vyhoví kterákoliv z těchto aminokyselin. Naše současné chápání problému je takové, že už v samotné Schrödingerově rovnici je zakotveno, že tyto dvě molekuly se budou chovat stejně až na to, že jedna se bude orientovat napravo a druhá nalevo. V životě se však setkáváme jen s jednou orientací.

Předpokládá se, že příčina takové situace spočívá v následujícím. Představte si, že v určitém okamžiku vznikly takové podmínky pro život, že všechny bílkoviny v určitých organizmech obsahovaly levotočivé aminokyseliny. Když se trávicí enzymy pokoušely změnit chemické látky v potravě z jednoho druhu na druhý druh, jedna látka se enzymu hodila, ale druhá ne. Bylo to jako s Popelčíným střívkem, až na to, že v našem případě jde o levou nožku, na níž zkoušíme střívek. Pokud víme, bylo by možné aspoň v principu vytvořit např. žábu, která by měla všechny molekuly převrácené. Byla by jako levostranný zrcadlový obraz skutečné žáby. Kdybychom měli takovou levostrannou žábu, bylo by vše v pořádku až na to, že by nenašla nic k jídlu. Kdyby spolkla mouchu, její enzymy by ji nemohly ztrávit. Moucha má totiž nevhodný druh aminokyselin (pokud bychom žábě nenabídli levostrannou mouchu). Vypadá to tedy tak, že kdyby bylo vše zrcadlově převráceno, pokračovaly by chemické a životní procesy stejným způsobem.

Je-li život čistě fyzikální a chemický jev, pak skutečnost, že všechny bílkoviny jsou stočeny jedním směrem, lze pochopit jen tak, že na samém počátku náhodně zvítězil určitý druh molekul. Kdysi se jednou jedna organická molekula určitým způsobem zkroutila a tato událost způsobila, že se právě rozrostlo v našem živém světě. Určitá historická událost byla jednostranná a od té doby je vše živé jednostranné. Když se dospělo do dnešního stavu, bude to už tak stále pokračovat – všechny enzymy tráví a produkují jen pravotočivé látky. Dostanou-li se oxid uhličitý, vodní páry a jiné látky do listů rostlin, enzymy produkující cukr z nich vyrobí pravotočivé látky, neboť i tyto enzymy jsou pravotočivé. Kdyby vznikl nový druh viru nebo nějaký živý organizmus, přežil by jen tehdy, kdyby dokázal „jíst“ ten druh živé hmoty, který už existuje. Musel by tedy být stejného druhu.

Počet pravotočivých molekul se nezachovává. Tento počet může stále narůstat. Usuzujeme tedy, že životní jevy nemluví o tom, že by fyzikálními zákony chyběla určitá symetrie, ale o tom, že všechny živé organizmy na Zemi měly společný prapůvodní počátek v uvedeném smyslu.

## 52.5 POLÁRNÍ A AXIÁLNÍ VEKTORY

Budeme pokračovat. Ve fyzice je mnoho případů, kdy se využívají pravidla „pravé“ a „levé“ ruky. Když jsme mluvili o vektorové analýze, uváděli jsme pravidlo pravé ruky, pomocí něhož se určuje správný směr momentu hybnosti, momentu síly, magnetického pole atd. Síla působící na náboj pohybující se v magnetickém poli je například rovna  $F = q v \times B$ . Není tato rovnice postačující k tomu, abychom v dané situaci, když známe  $F$ ,  $v$  a  $B$ , definovali pravou stranu? Vráťme-li se nazpět a uvědomíme si, jak byly vektory zavedeny, víme, že „pravidlo pravé ruky“ bylo pouhou dohodou, jen jakýmsi trikem. Původní veličiny jako moment hybnosti, úhlová

## POLÁRNÍ A AXIÁLNÍ VEKTORY

rychlost a ostatní podobné veličiny nebyly vůbec vektory! Všechny jsou nějakým způsobem spojeny s určitou rovinou a jen proto, že náš prostor je trojrozměrný, můžeme tyto veličiny vázat na směr kolmý k této rovině. Ze dvou možných směrů jsme si zvolili „pravý“.

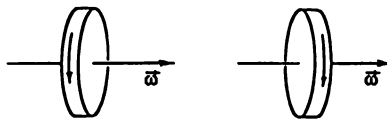
Jsou-li fyzikální zákony symetrické, nic by se nezměnilo, kdyby se do každé fyzikální laboratoře vkradl jakýsi démon a v každé knize, kde vystupuje „pravidlo pravé ruky“, nahradil slovo „pravý“ slovem „levý“, takže by všude bylo „pravidlo levé ruky“.

Ukažme to na příkladu. Existují dva druhy vektorů. Existují „správné“ vektory, tak jako je například posunutí  $\Delta r$  v prostoru. Máme-li v našem zařízení něco tady a něco jiného tam, budou tyto věci i v zrcadlovém zařízení, a spojíme-li původní dvě věci vektorem a podobně i zrcadlové vektorem, bude jeden vektor zrcadlovým obrazem druhého (obr. 52.2). Vektor podobně jako celý prostor, se převrací a takový vektor nazýváme *polární vektor*.



Obr. 52.2 Posunutí v prostoru a jeho zrcadlový obraz

S jiným druhem vektorů se setkáváme při otáčení. Představte si, že v trojrozměrném prostoru rotuje něco tak, jak to znázorňuje obrázek 52.3. Na obrázku je zakreslena i rotace, kterou vidíme při pohledu do zrcadla; je to zrcadlový obraz původní rotace. Dohodneme se, že zrcadlovou rotaci popíšeme pomocí stejného pravidla jako původní rotaci; tak dostaneme „vektor“, který na rozdíl od polárního vektoru při odrazu nemění směr a vzhledem k polárním vektorům a geometrii prostoru je obrácený. Takový vektor nazýváme *axiální vektor*.



Obr. 52.3 Rotující kolo a jeho zrcadlový obraz. Všimněte si, že směr „vektoru“ úhlové rychlosti se nezměnil.

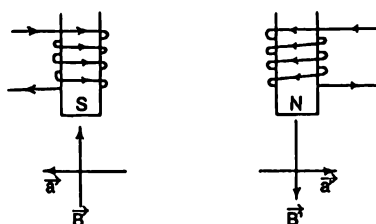
Platí-li ve fyzice zákon symetrie při odrazu, musí být rovnice sestaveny tak, že při záměně znaménka každého axiálního vektoru a každého vektorového součinu, jak to odpovídá zrcadlovému odrazu, se nic nestane. Například, zapíšeme-li vztah pro moment hybnosti  $L = r \times p$ , bude vše v pořádku, neboť při přechodu k levé souřadnicové soustavě se změní znaménko  $L$ , ale  $p$  a  $r$  se nezmění. Znaménko vektorového součinu se musí změnit, musíme přejít od pravidla pravé ruky k pravidlu levé ruky. Uvedme další příklad. Víme, že pro sílu působící na náboj pohybující se v magnetickém poli platí vztah  $F = q v \times B$  a vektory  $F$  a  $v$  jsou polární. Přejdeme-li od pravé soustavy k levé, musí se změna znaménka vektorového součinu kompenzovat změnou znaménka  $B$ , tedy  $B$  musí být axiální vektor. Jinak řečeno při takovém zrcadlení musí  $B$  přejít na  $-B$ . Změníme-li tedy souřadnice z pravých na levé, musíme změnit severní pól magnetu na jižní.

Na příkladu si všimněme, jak se to stane. Mějme dva takové magnety jako na obr. 52.4. První magnet má cívku navinutou určitým způsobem a teče jím proud určitým směrem. Druhý magnet je jako zrcadlový obraz prvního – cívka má navinutou opačně než první magnet a vše v ní probíhá opačně než v cívkce prvního magnetu; směr proudu je zakreslen na obrázku. Směr magnetického pole můžeme určit ze zákonů magnetizmu, které jsme se v tomto kurzu ještě



## SYMETRIE FYZIKÁLNÍCH ZÁKONŮ

neučili, ale které už znáte ze střední školy. Tento směr je v obou případech znázorněn na obrázku. V jednom případě jde o jižní magnetický pól, zatímco v druhém magnetu teče proud opačně a magnetické pole je obrácené – jde o severní magnetický pól. Je tedy vidět, že při přechodu od pravé soustavy k levé se musí změnit sever na jih!



Obr. 52.4 Magnet a jeho zrcadlový obraz

Záměna severu jihem ještě mnoho neřká, neboť tyto pojmy jsou dány dohodou. Musíme si proto všimnout samotného *jevu*. Předpokládejme, že v jednom poli se elektron pohybuje tak, že letí směrem do roviny stránky knihy. Použijeme-li vztah vyjadřující sílu,  $v \times B$  (pamatujte, že elektron nese záporný náboj), zjistíme, že ve shodě s tímto fyzikálním zákonem se elektron vychýlí v znázorněném směru. Jev tedy spočívá v tom, že při proudu tekoucím cívkou v určitém smyslu se elektron vychyluje určitým směrem. Pro fyziku není podstatné označení pólů, ale tento jev.

Ukustečněme stejný experiment se zrcadlovým magnetem: poletí-li elektron uvedeným směrem, bude síla obrácená, pokud ji vypočítáme pomocí stejného pravidla. To je však v pořádku, neboť odpovídající pohyb bude zrcadlovým odrazem.

### 52.6 KTERÁ RUKA JE PRAVÁ?

Situace je taková, že při studiu jakýchkoliv jevů se setkáme s pravidlem pravé ruky dvakrát nebo je-li to vícekrát, je tento počet sudý. Tak se stává, že výsledný jev vypadá vždy symetricky. Krátce řečeno: nemůžeme-li se rozhodnout, zda jde o severní nebo jižní pól, nemůžeme rozhodnout ani to, zda jde o pravé nebo levé. Může se zdát, že *umíme* určit, který pól magnetu je severní. Například severní pól magnetky je ten, který směřuje na sever. Jenže to je lokální vlastnost a máme co dělat s geografíí Země; je to stejné, jako kdybychom se zeptali, kterým směrem leží Chicago, a to není dobrá otázka. Kdybychom si všimli magnetky, zjistili bychom, že její severní konec je natřený modravou barvou. To však je už práce člověka. Jde tedy o lokální, konvenční kritéria.

Kdyby měl magnet tu vlastnost, že při pozorném sledování by bylo na severním pólu vidět vyrůst jakési chloupky, zatímco na jižním by nic takového nebylo a to by bylo obecným pravidlem, nebo by existoval *nějaký* jiný jednoznačný způsob rozlišení severního pólu magnetu od jižního, *byl by to konec zákona symetrie při zrcadlení*.

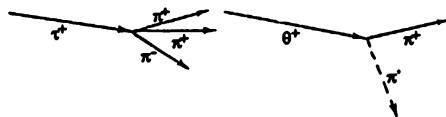
Pro lepší ilustraci celého problému si představte, že máme telefonický rozhovor s Marťanem nebo někým hodně vzdáleným. Přitom mu nesmíme poslat žádný vzorek k prozkoumání. Kdybychom mu například mohli poslat světlo, mohlo by to být světlo pravotočivě kruhově polarizované a pak by stačilo říci: „Všimni si, jak je světlo polarizované; takovou polarizaci nazveme pravostrannou!“ My mu však nesmíme nic *poslat*, smíme s ním jen mluvit a on je přitom někde velmi daleko, na neznámém místě a nemůže vidět nic z toho, co vidíme my. Nemůžeme

mu například říct: „Podívej se na Velký vůz a všimni si, jak jsou rozmístěny jeho hvězdy, ‚pravou‘ stranou rozumíme...“ My mu směsme jen telefonovat.

Chtěli bychom mu o nás všechno povědět. Samozřejmě bychom začali s definováním čísel, a to tak, že bychom řekli: „Tik, tik – dva, tik, tik, tik – tři...“, takže by mohl postupně pochopit několik slov, a tak bychom pokračovali dále. Časem bychom se s ním natolik seznámili, že by se nás zeptal: „Jak vy vlastně vypadáte?“ A my bychom mu začali popisovat náš vzhled. „Jsme 175 cm vysokí.“ On by nás přerušil: „Moment, co to vlastně znamená – 175 centimetrů?“ Mohli bychom mu to vysvětlit? Zcela určitě! Stačilo by říci: „Znáš průměr vodíkového atomu a naše výška je stejně velká jako 17 000 000 000 průměrů vodíkového atomu.“ Takový postup je možný, neboť fyzikální zákony se nezmění při změně měřítka, a tak *můžeme* definovat absolutní délku. Takovým způsobem určíme velikost našeho těla, povíme mu o tvaru našeho těla, že máme končetiny s pěti výrůstky na konci atd. a on pravděpodobně bez obtíží pochopí, jak navenek vypadáme. Dokonce si udělá podle našeho popisu model našeho těla a řekne nám: „Zvenku jste celkem pěkní, ale jak vypadáte zevnitř?“ Pak se pustíme do popisu našich vnitřních orgánů, dostaneme se až k srdci, podrobně ho seznámíme s tvarem našeho srdce a řekneme mu: „Srdce máme na levé straně.“ Od něho dostaneme odpověď: „Hm – na levé straně?“ Bude v rozpacích, a proto mu musíme popsat, kde vlastně máme srdce, ale on přitom nikdy neviděl to, co vidíme my a nikdy od nás nedostal vzorek, podle něhož by bylo jasné, co je to pravá strana. Dokážeme to?

## 52.7 PARITA SE NEZACHOVÁVÁ

Ukazuje se, že zákony gravitace, elektřiny a magnetizmu i jaderných sil vyhovují principu zrcadlové symetrie, takže závěry z nich odvozené nám v naší úloze nepomohou. Ale v přírodě existuje mnoho částic, které vykazují jev nazývaný *rozpad  $\beta$*  nebo *slabý rozpad*. Jeden z případů slabého rozpadu souvisí s částicí, jež byla objevena kolem roku 1954, postavil před fyziky hlavolam. Vyskytla se taková nabitá částice, která se rozpadla na tři  $\pi$ -mezony podle schématu znázorněného na *obr. 52.5*. Na určitou dobu nazvali tuto částici  $\tau$ -mezon. Na *obr. 52.5* je vidět i jiná částice, která se rozpadá na *dva* mezony; ze zákona zachování náboje vyplývá, že jeden z nich musí být neutrální. Tuto částici nazvali  $\theta$ -mezonem. Na jedné straně tedy máme částici nazývanou  $\tau$ , jež se rozpadá na tři  $\pi$ -mezony a na druhé částici  $\theta$ , jež se rozpadá na dva  $\pi$ -mezony. Zjistilo se, že  $\tau$  a  $\theta$  mají téměř stejné hmotnosti; v rámci experimentální chyby jsou vlastně stejné. I o časech potřebných k rozpadu na tři  $\pi$ -mezony a na dva  $\pi$ -mezony se zjistilo, že jsou téměř zcela stejné; obě částice žijí stejně dlouho. Kdykoliv byly vytvořeny, vždy to bylo ve stejném poměru, řekněme 14%  $\tau$  ku 86 %  $\theta$ .



Obr. 52.5 Schématický diagram rozpadu  $\tau^+$  a  $\theta^+$  částice

Každý s trochou důvtipu okamžitě pochopí, že to musí být stejná částice, a ne dvě rozdílné částice, že vlastně vytváříme objekt, který se rozpadá dvojným způsobem. Tento objekt, který se

## SYMETRIE FYZIKÁLNÍCH ZÁKONŮ

může rozpadnout dvojnásobným způsobem, má proto stejnou dobu života a stejné procentuální zastoupení (jde vlastně o poměr pravděpodobností uvedených rozpadů).<sup>63)</sup>

V kvantové mechanice můžeme pomocí principu zrcadlové symetrie dokázat (na tomto místě si však nemůžeme říci *jak*), že je *nemožné*, aby oba vzniklé produkty pocházely ze stejné částice – stejná částice by se *nemohla* rozpadnout oběma způsoby. Zákon zachování odpovídající principu symetrie při zrcadlení představuje něco, co nemá klasický analog a toto kvantověmechanické zachování bylo nazváno *zachování parity*. Jako důsledek zachování parity nebo přesněji ze symetrie kvantověmechanických rovnic slabých rozpadů vůči zrcadlení by vyplynulo, že jedna a táž částice se nemůže rozpadnout oběma způsoby. Muselo by tedy jít o jakousi shodu hmotností, dob života apod. Čím víc však byl tento problém zkoumán, tím byla shoda pozoruhodnější a nastalo podezření, že zákon symetrie přírody vůči zrcadlení nemusí platit.

Podezření na neplatnost tohoto zákona vedlo dva fyziky Leeho a Yanga k návrhu jiných experimentů s příbuznými rozpady, aby se ověřila platnost zákona i na jiných případech. První takový experiment provedla slečna Wu z Kolumbijské university následujícím způsobem. Velmi silným magnetem při velmi nízkých teplotách působila na určitý izotop kobaltu, který se rozpadá za emise elektronů. Je magnetický a při dostatečně nízké teplotě tepelné pohyby příliš nerozkmitají atomové magnetické momenty, takže ty se uspořádají podél magnetického pole. Proto budou všechny atomy kobaltu tímto silným polem uspořádány rovnoběžně. Pak se rozpadnou, vyžáří elektron a zjistilo se, že v případě atomů uspořádaných polem, jehož vektor  $B$  směřuje nahoru, bude většina emitovaných elektronů letět dolů.

Ten, kdo není dost vnímavým pozorovatelem, nebude této poznámce připisovat velký význam, ale ten, kdo má smysl pro tajemství přírody, bude považovat tuto poznámku za dramatický objev. Vložme-li atomy kobaltu do velmi silného magnetického pole, poletí více elektronů, které vznikly při rozpadu dolů a méně nahoru. Kdybychom provedli „zrcadlový“ experiment, v němž jsou atomy kobaltu seřazeny opačně, emitované elektrony by letěly převážně *nahoru*, a ne *dolů*; je to tedy *nesymetrický* děj. Nyní bychom už mohli obrazně říci, že *magnetu narostly ty chloupky*, které jsme na něm předtím marně hledali. Jižním pólem magnetu je ten pól, od něhož se elektrony vzniklé při  $\beta$ -rozpadu vzdalují. Tak můžeme fyzikálním způsobem odlišit severní pól magnetu od jižního pólu.

Pak následovalo mnoho jiných experimentů: rozpad  $\pi$ -mezonu na  $\mu$  a  $\nu$ ; rozpad  $\mu$ -mezonu na elektron a dvě neutrino, rozpad  $\Lambda$ -částice na proton a  $\pi$ -mezon, rozpad  $\Sigma$ -částic a mnoho dalších rozpadů. Téměř ve všech předpokládaných případech se potvrdila *neplatnost* principu zrcadlové symetrie. Zákon zrcadlové symetrie je tedy na této úrovni fyziky principiálně nesprávný.

Stručně řečeno, nyní už můžeme Martanovi oznámit, na které straně máme srdce. Můžeme mu dát následující návod: „Sestroj magnet, cvíčkou pusť proud, vezmi kobalt a sniž teplotu. Experimentální zařízení orientuj tak, aby elektrony letěly od nohou k hlavě a pak směr, jímž prochází proud cvíčkou, je směr zleva doprava.“ Pomocí takového experimentu už můžeme definovat pravou a levou stranu.

Bylo předpovězeno mnoho jiných jevů. Ukázalo se, že spin, moment hybnosti kobaltového jádra, představuje před rozpadem pět jednotek  $\hbar$  a po rozpadu 4 jednotky. Elektron tedy odnáší spinový moment a úlohu přitom hraje i neutrino. Není těžké si představit, že elektron musí nést svůj spinový moment hybnosti orientovaný ve směru svého pohybu a podobně i neutrino. Elektron by se tedy měl jakoby otáčet zprava doleva, to se opravdu zjistilo. Na Kalifornském technickém institutu dokázali Boehm a Wapstra, že spin elektronu je orientován levotočivě. (O experimentech dokazujících opak se ukázalo, že jsou nesprávné!)

---

<sup>63)</sup> Dnes této částici říkáme  $K^+$  mezon nebo kaon. (Pozn. red.)

Další úlohou bylo najít zákon o nezachování parity. Jaké pravidlo nám říká, kdy se parita nezachovává? Takové pravidlo existuje a říká, že selhání se vyskytuje jen ve velmi pomalých reakcích nazývaných slabé rozpady a dojde-li k narušení zachování parity, pak částice se spinem, jako je elektron nebo neutrino apod., vychází převážně se spinem orientovaným levotočivě. Je to jakési pravidlo jednostrannosti; dává do souvislosti polární vektor rychlosti a axiální vektor momentu hybnosti a říká, že moment hybnosti směřuje s větší pravděpodobností proti vektoru rychlosti než souhlasně s tímto vektorem.

Takové je pravidlo, ale dodnes vlastně neznáme jeho příčiny. Proč platí právě toto pravidlo, jakou má hlavní příčinu a jak to souvisí s ostatním? Takovou nesymetrií jsme byli velmi překvapeni a dosud jsme se z toho neprobrali, takže jsme ještě nepochopili, co znamená tato nesymetrie z hlediska všech ostatních pravidel. Víme však, že je to zajímavý, moderní a dosud nerozřešený problém, takže bude vhodné, promluvíme-li si o některých s ním souvisejících otázkách.

## 52.8 ANTIHMOTA

Když se ztratí jedna ze symetrií, první věcí, kterou musíme udělat, je vrátit se k seznamu známých nebo předpokládaných symetrií a ptát se, zda některá z nich nezanikla. Ještě jsme se nezmínili o jedné operaci z naší tabulky, kterou nemůžeme nechat nepovšimnutou – je jí vztah mezi hmotou a antihmotou. Dirac předpověděl, že vedle elektronu musí existovat ještě jiná částice (nazval ji pozitron a objevil ji Anderson z Kalifornského technického institutu), která s elektronem úzce souvisí. Vlastnosti těchto částic jsou v určitém vztahu, splňují určitá pravidla korespondence: jejich energie jsou stejné, hmotnosti jsou stejné, náboje jsou opačné, ale co je nejdůležitější, když se tyto dvě částice setkají, anihilují se a celá jejich hmotnost přejde na energii, např.  $\gamma$ -záření. Pozitron nazýváme *antičásticí* elektronu a uvedené vlastnosti jsou pro částici a antičástici charakteristické. Z Diracovy argumentace bylo jasné, že i ostatní částice musí mít odpovídající antičástice. Například k protonu musí existovat antiproton, který označujeme symbolem  $\bar{p}$  a jenž má záporný elektrický náboj, stejnou hmotnost jako proton atd. Nejdůležitější vlastností však je, že proton a antiproton mohou při setkání anihilovat. Tuto vlastnost zdůrazňujeme, neboť lidé dost dobře nechápou, že může existovat neutron a antineutron a říkájí: „Neutron je neutrální a jak může mít tedy antineutron opačný náboj?“ To, že říkáme „anti-“, neznámá, že jde právě o opačný náboj, ale jde o celý soubor vlastností, z nichž mnohé jsou právě opačné. Antineutron se od neutronu liší v následujícím. Kdybychom dali dohromady dva neutrony, zůstaly by dvěma neutrony, ale kdybychom dali dohromady neutron a antineutron, navzájem by anihilovaly za současného uvolnění velkého množství energie v podobě  $\pi$ -mezonů,  $\gamma$ -záření apod.

Máme-li antineutrony, antiprotony a antielektrony, můžeme v principu vytvářet antiatomy. Zatím ještě vytvořeny nebyly, ale v principu je to možné.<sup>64)</sup> Například atom vodíku má uprostřed proton a elektron ho obíhá. Představte si, že bychom vytvořili antiproton a k němu přiblížili pozitron. Bude pozitron kolem něho obíhat? Víme, že antiproton je elektricky záporný a antielektron je elektricky kladný, takže se budou přitahovat a jsou-li jejich hmotnosti stejné jako hmotnosti protonu a elektronu, bude stejný i vše ostatní. Jeden z principů symetrie ve

<sup>64)</sup> V roce 1996 bylo na urychlovači v CERNu v Ženevě vyrobeno 11 prvních atomů antivodíku. Žily jen 30 miliardtin sekundy a za tu dobu uletěly 10 m. (Pozn. red.)

## SYMETRIE FYZIKÁLNÍCH ZÁKONŮ

fyzice, který se zdá vyplývat z rovnic, je ten, že sestrojíme-li jedny hodiny z látky a druhé z antilátky, oboje půjdou stejně. (Kdybychom však takové hodiny přiložili k sobě, navzájem by anihilovaly, ale to už je jiná záležitost.)

Nyní nás může napadnout následující otázka. Z hmoty můžeme sestrojít dvojce hodiny – jedny „levostranné“ a druhé „pravostranné“. Můžeme například sestrojít ne obyčejné hodiny, ale hodiny s kobaltem a magnety a detektory elektronů, které zaznamenávají přítomnost elektronů vzniklých  $\beta$ -rozpadem a počítají je. Je-li zaregistrován elektron, pohne se sekundová ručička. Zrcadlové hodiny, které napočítají méně elektronů, půjdou jinou rychlostí. Zřejmě tedy můžeme sestrojít takovou dvojici hodin, v níž levostranné hodiny jdou jinak než pravostranné. Nyní sestrojme z hmoty hodiny, které nazveme standardní nebo pravostranné. Dále sestrojme z hmoty také hodiny, které nazveme levostrannými. Konstatovali jsme, že obecně *nepůjdou* tyto hodiny stejně, ale až do tohoto významného objevu se předpokládalo, že obě tyto hodiny by měly jít stejně. Předpokládalo se i to, že hmota a antihmota jsou ekvivalentní, tedy že kdybychom sestrojili pravostranné hodiny z antihmoty stejného tvaru jako pravostranné hodiny z hmoty, oboje by šly stejně a totéž by platilo o levostranných hodinách z hmoty a antihmoty. Jinými slovy: zpočátku se předpokládalo, že *všechny tyto čtyři* hodiny půjdou stejně. Nyní už však víme, že pravostranné a levostranné hodiny z hmoty nejsou stejně. Proto můžeme předpokládat, že ani pravostranné a levostranné hodiny z antihmoty nebudou stejně.

Vzniká tedy přirozená otázka, půjdou vůbec některé hodiny stejně, a které? Jinými slovy: chová se pravostranná hmota jako pravostranná antihmota nebo se pravostranná hmota chová jako levostranná antihmota? Experimenty s  $\beta$ -rozpadem, v nichž místo elektronu vystupují pozitrony, naznačují, „pravá“ hmota se chová jako „levá“ antihmota.

Nakonec se tedy ukázalo, že pravolevá symetrie přece jen existuje! Kdybychom sestrojili levostranné hodiny ne z hmoty, ale z antihmoty, šly by stejně jako pravostranné hodiny z hmoty. Místo dvou nezávislých pravidel v naší tabulce symetrií by zůstalo jedno nové, kombinované pravidlo, mluvící o tom, že pravostranná hmota je symetrická s levostrannou antihmotou.<sup>65)</sup>

Kdyby byl náš Martan z antihmoty, dopadly by naše instrukce o „pravostranném“ modelu našeho těla opačně. Co by se stalo, kdybychom se po dlouhé konverzaci rozhodli zkonstruovat kosmickou loď a setkat se někde v půli cesty ve vesmíru? Určitě bychom si řekli o našich zvyklostech při setkávání a chtěli bychom si potřást rukama. Museli bychom se však mít na pozoru, kdyby nám náš kosmický přítel chtěl podat levou ruku!

### 52.9 PORUŠENÁ SYMETRIE

Je přirozené ptát se, co s takovými zákony, které jsou jen *přibližně* symetrické? Co nejvíc udivuje, je skutečnost, že v široké oblasti důležitých jevů, jako jsou jaderné síly, elektrické jevy a dokonce i tak slabé interakce jako je gravitace, ve velmi rozsáhlé oblasti fyziky se tyto zákony ukazují být symetrické. Na druhé straně existuje jeden nepatrný jev a ten nám říká: „Ne, zákony nejsou symetrické!“ Jak je to možné, že příroda je téměř symetrická, ale přece jen symetrickou není? Co s tím máme dělat? Nejdříve si všimněme, zda neznáme nějaké jiné příklady tohoto druhu. Několik takových příkladů opravdu existuje. Například jaderné části sil mezi protonem a protonem, mezi neutronem a neutronem a mezi neutronem a protonem jsou přesně stejné –

65)

Kdyby Feynmann psal své přednášky o několik let později, určitě by tuto kapitolu dále rozvinul. Další pokusy s kaony ukázaly, že ani kombinované pravidlo s „pravostrannou hmotou“ a „levostrannou antihmotou“ vždy neplatí. U některých procesů je navíc třeba obrátit i znaménko času (CPT teoném). (Pozn. red.)

existuje symetrie jaderných sil, nová symetrie, která dovoluje záměnu neutronu a protonu. Je zřejmé, že nejde o obecnou symetrii, neboť mezi neutrony neexistuje elektrické odpuzování, ale existuje mezi dvěma protony. Obecně tedy neplatí, že proton můžeme nahradit neutronem, ale je to dobrá aproximace. Ptáte se proč *dobrá*? Protože jaderné síly jsou mnohem silnější než elektrické. I v tomto případě jde tedy o „přibližnou“ symetrii. Vidíte, že existují i jiné příklady.

Jsme zvyklí přijímat symetrii jako projev dokonalosti. Tento náš zvyk připomíná starou představu Řeků o dokonalosti kruhů. V důsledku této utkvělé představy bylo přímo hrozné uvěřit, že dráhy planet nejsou přesně kruhové, ale jen přibližně kruhové. Rozdíl mezi kružnicí a něčím, co je téměř kruhové, není vůbec malý a z hlediska myšlení jde o principiální rozdíl. Kružnice nese znak dokonalosti a symetrie a je-li porušena, tyto momenty se ztrácejí – symetrie mizí. Samotná odpověď na otázku, proč jsou dráhy jen *přibližně* kruhové, je příliš složitá. Skutečné dráhy planet jsou obecně eliptické, ale v průběhu věků pod vlivem slapových sil a podobně se staly téměř symetrické. Podobá se tento problém našemu problému? Jde-li o kružnice, pak kdyby byly dokonalé, nebylo by co vysvětlovat, ale když dokonalé nejsou, je vysvětlování příliš mnoho a ve skutečnosti jde o složitý dynamický problém. Měli bychom vysvětlit, proč jsou dráhy planet přibližně symetrické z hlediska slapových sil apod.

Měli bychom tedy vysvětlit, odkud symetrie pochází. Proč je příroda přibližně symetrická? To však dodnes nikdo neví. Jediné, co můžeme navrhnout, je asi toto. V japonském městě Neiko existuje brána, kterou mnozí Japonci nazývají nejkrásnější v Japonsku. Byla postavena v době, kdy japonskou kulturu silně ovlivňovalo čínské umění. Je velmi umělecky vyrobena s množstvím štítů, sloupů, dračích hlav, princů a nádherných rytin. Při pozorném pohledu však můžeme spatřit, že na jednom ze sloupů je ve složitém komplexu znaků jeden z dekoračních prvků vyrytý převráceně. Jinak je vše úplně symetrické. O této bráně koluje pověst, že převrácený prvek je tam proto, aby bohové nežárlili na dokonalost člověka. Tvůrce této brány udělal schválně chybu, aby zabránil hněvu bohů, který by pramenil ze žárlivosti.

Proč bychom tuto myšlenku neobrátili a nepodali následující vysvětlení přibližné symetrie přírody? Bůh stvořil zákony jen přibližně symetrické, aby lidé nežárlili na jeho dokonalost!

# Výsledky a návody ke cvičením

## KAPITOLA 1

- 1.1 Jeden mol vzduchu obsahuje  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  mol<sup>-1</sup> molekul a za normálního atmosférického tlaku a teploty zaujímá objem 22,4 l. V 1 m<sup>3</sup> je tedy  $n_0 = 2,7 \cdot 10^{25}$  m<sup>-3</sup> molekul. Porovnáme-li přibližných hustot plynného a kapalného vzduchu najdeme koncentraci molekul kapalného vzduchu  $n_K = 2,7 \cdot 10^{28}$  m<sup>-3</sup> a hmotnost „průměrné“ molekuly vzduchu  $3,7 \cdot 10^{-26}$  kg. Představíme-li si molekuly jako tvrdé kuličky o průměru  $d$  uspořádané v jednotkovém objemu tak, že se navzájem dotýkají, dostaneme  $d \approx 3,3 \cdot 10^{-10}$  m. Při pohybu střední rychlostí  $v$  narazí molekula za sekundu na všechny molekuly, s jejichž středy se bude její střed mjet ve vzdálenosti menší než  $d$ , tedy nacházející se v objemu  $\pi d^2 v$ . Střední volnou dráhu  $l$  molekuly dostaneme jako součin její střední rychlosti a střední doby, která proběhne mezi srážkami a udává jí známý vztah

$$l = \frac{1}{\pi d^2 n_0}$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme přibližně  $l = 1,1 \cdot 10^{-7}$  m. Předpokládáme-li, že při téže teplotě jsou si koncentrace a tlak plynu vzájemně úměrné, bude střední volná dráha rovna 1 m při tlaku asi 0,11 Pa.

- 1.2 Vezmeme-li v úvahu rozlohu světového oceánu a jeho střední hloubku kolem 3 km, můžeme odhadnout celkový objem vody na zeměkouli na  $1,2 \cdot 10^{18}$  m<sup>3</sup>, tedy asi  $4,0 \cdot 10^{46}$  molekul vody. Původní kapka mohla obsahovat  $3,0 \cdot 10^{22}$  molekul. Jestliže se tyto molekuly rozptýlily rovnoměrně v pozemské vodě, najdeme jich v každé skleničce asi 5.
- 1.3 Je výhodné uvažovat rovnovážný stav v uzavřené nádobce, kdy počet molekul odpařujících se z vody je roven počtu molekul kondenzujících zpět do vody. Bude-li nádobka otevřena, uplatní se jen proces odpařování. Počet molekul kondenzujících do vody závisí na jejich koncentraci  $n$  v tenké vrstvě o výšce rovné střední volné dráze nad hladinou a na střední rychlosti  $v$ . Za 1 s kondenzuje do vody povrchem o obsahu  $S$  celkem  $nSv$  molekul (1/6 molekul se pohybuje směrem k hladině). Označíme-li  $n_0$  koncentraci molekul vody ve sklenici a  $h$  výšku hladiny, všechna voda se vypaří za dobu  $t = 6 n_0 h / nv$ . Odhadneme-li  $n_0 = 3,3 \cdot 10^{28}$  m<sup>-3</sup>,  $h = 10$  cm,  $n = 10^{19}$  m<sup>-3</sup> a  $v = 600$  m · s<sup>-1</sup>, dostaneme  $t = 3,3 \cdot 10^6$  s, tj. asi 1 měsíc. Nepřesnost tu spočívá v odhadu koncentrace  $n$ , která závisí na vlhkosti vzduchu a silně se mění se vzdáleností od hladiny. Při našich odhadech se z 1 cm<sup>2</sup> bude odpařovat  $10^{17}$  molekul za sekundu. Množství vody odpařené z povrchu oceánů za rok můžeme přibližně přirovnat ročnímu úhrnu srážek.
- 1.4 V pevných tělesech, například v krystalech, atomy vykonávají rychlé kmitavé pohyby kolem rovnovážných poloh, ale jejich střední vzájemné vzdálenosti a uspořádání se nemění.
- 1.5 Stačí uvážit rozložení atomů v jedné z krystalových rovin a použít geometrickou poučku, podle níž k pokrytí roviny mnohoúhelníky téhož druhu lze použít pouze rovnoběžníky, rovnostranné trojúhelníky a pravidelné šestiúhelníky.
- 1.6 Tlak ideálního plynu bude záviset na hustotě toku molekul a na předávané hybnosti, tj. hmotnosti a střední rychlosti molekul. S růstem rychlosti molekul roste jednak hustota toku, ale také hybnost. Tlak tedy poroste úměrně koncentraci molekul a druhé mocnině střední kvadratické rychlosti.
- 1.7 Tepelný pohyb je chaotický pohyb molekul, jehož střední rychlost roste s teplotou. U letícího míčku se všechny molekuly pohybují navíc společnou, usměrněnou rychlostí.
- 1.8 Dva třoucí se povrchy těles jsou vždy nerovné a mikroskopické nárazy nerovností vedou k růstu chaotického pohybu molekul.
- 1.9 Při roztahování gumy působí řetězky atomů jako svého druhu píst, který při nárazech uvádí do chaotického pohybu i další atomy a guma se zahřívá.
- 1.10 Chaoticky se pohybující atomy se při srážkách snaží narušit uspořádané, roztažené řetězky a zamotat je. Zahřátá napjatá guma se při zahřívání proti očekávání zkracuje.
- 1.11 Z geometrie je známo, že při nejtěsnějším možném prostorovém uspořádání stejných koulí průměru  $d$  budou koule zaujímat  $\pi/\sqrt{18} \approx 0,7405$  celkového objemu. Do dostatečně velké nádoby objemu  $V$  se tedy vejde  $\sqrt{2} V/d^3$  kuliček.

## KAPITOLA 4

- 4.1 Všimněme si, že  $AC$  a  $BC$  svírají pravý úhel a že napěťové síly  $T_1 = T_2 = T$  jsou stejné. Úlohu bychom mohli řešit prostým rozkladem tíhy závaží  $m$  do složek. Máme-li použít princip virtuálních posunutí, můžeme si třeba představit, že část drátu  $AC$  malinko popustíme,

takže se prodlouží o  $\Delta l$ . Napěťová síla přitom vykoná virtuální práci  $\Delta W = T\Delta l$ ; síla na úseku drátu  $BC$  zůstává k malému posunutí kolmá, takže práci nekoná. Vykonaná práce musí být rovna změně potenciální energie závaží  $mg\Delta l/\sqrt{2}$ . Odtud  $T = mg/\sqrt{2} = 347 \text{ N}$ .

- 4.2 Označme hmotnost žebříku  $M$ , hmotnost závaží  $m$ , úhel, který žebřík svírá se zemí  $\alpha$  a hledané síly  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  v pořadí uvedeném v zadání. Při virtuálním posunutí žebříku se závaží svise dolů o  $\Delta y$  vykoná složka síly  $F_3$  práci  $F_3\Delta y$  a ze změny potenciální energie máme  $F_3 = (M + m)g = 353 \text{ N}$ . Z virtuálního posunutí ve vodorovném směru  $\Delta x$  dostaneme  $F_1 = F_2$ . Dáme-li úhlu  $\alpha$  malý virtuální přírůstek  $\Delta\alpha$  a přirovnáme-li virtuální práci síly  $F_1$  změně potenciální energie, dostaneme

$$F_1 = \frac{1}{2} \left( M + \frac{3}{2}m \right) g \cot\alpha = 177 \text{ N}.$$

- 4.3 Řešíme podobně jako úlohu 4.2. Pro napěťovou sílu dostaneme  $T = \frac{l}{x} \left( \frac{M}{2} + \frac{m}{x} \right) g \tan\theta$ .
- 4.4 Závaží klesne a síla  $F = mgy/x$  bude tyč roztahovat.
- 4.5 Vozík i závaží jsou upevněny pomocí volné kladky a při poklesu závaží se vozík posune o 4-krát menší vzdálenost. Hmotnost vozíku  $M = 4m/\sin\theta$ .
- 4.6 Při malém pootočení cívky, při němž její těžiště stoupne, závaží klesne. Přirovnáme-li změnu potenciální energie cívky a závaží, dostaneme  $M = mr/(R-r)$ . Týž výsledek bychom dostali z podmínky rovnováhy sil a momentů sil.
- 4.7 Uvážíme práci vykonanou silami při zvedání a spouštění břemene o jednu celou otočku kladky a přirovnáme změně potenciální energie. Práce sil tření je v obou případech táž a můžeme ji z rovnice vyloučit. Pro zvedací sílu dostaneme  $F_2 = MgR/[r(R-1) + 1]$ , sílu spouštění  $F_2 = F_1/R$ .
- 4.8 Uvážíme malý virtuální pokles řetězu a určíme, jak se změní jeho délka. Práce napěťové síly  $T$  musí být rovna změně potenciální energie řetězu. Odtud  $T = (Mgh)/(2\pi r)$ .
- 4.9 Jako virtuální posunutí uvážíme pootočení rámu v ložiscích o malý úhel. Ze změny potenciální energie dostaneme  $M_2 = \frac{1}{2}M_1 = 0,25 \text{ kg}$ .
- 4.10 Rychlost určíme z kinetické energie soustavy rovné úbytku její potenciální energie jako  $v = \sqrt{gd(\sin\varphi - \sin\theta)}$ .
- 4.11 Řešíme podobně jako v předchozí úloze a dostaneme  $v = \sqrt{2gd\sin\theta(M_1 - M_2)/(M_1 + M_2)}$ .
- 4.12 Označme rychlost výtoku kapaliny  $v$ , rychlost poklesu hladiny  $u = v$ . Z rovnice spojitosti zjistíme, že  $u = (s/S)v$ . Podle zákona zachování energie  $v = \sqrt{2hg/[1 - (s/S)^2]}$ .
- 4.13 I. Použijeme kosinovou větu a součtový vzorec pro  $\cos(\alpha + \Delta\alpha)$ .  
II. Plyne z Pythagorovy věty.
- 4.14 Uvážíme malou virtuální změnu polohy klád, při níž vrchní kláda trochu klesne do mezery mezi oběma spodními a odtlačí kládu napravo poněkud vzhůru. Klády jsou hladké a proto předpokládáme, že se celková potenciální energie nezmění; očí klesne těžiště jedné klády, o to stoupne těžiště druhé. Trochu pracnější geometrický výpočet dává výsledek  $\tan\theta = 1/3\sqrt{3}$ , a tedy  $\theta = 11^\circ$ .
- 4.15 Provedeme myšlený pokus a odstraníme některou z tyčí konstrukce. Závaží  $m$  poklesne a můžeme usoudit, zda se koncové klouby odstraněné tyče přiblíží nebo vzdálí. Pokud mají tendenci se vzdálit, můžeme je nahradit ohebnými vazbami. Jsou to tyče  $BC$ ,  $AC$ ,  $CE$ ,  $EG$ ,  $ED$  a  $EF$ . Dále si představíme malé virtuální posunutí spočívající v tom, že se tyč  $BD$  trochu zkrátí (je namáhána stlačováním), vodorovná základna praskne v kloubu  $C$  a ten se malinko posune dolů. Přitom klesne i závaží  $m$ . Při geometrickém výpočtu se nám hodí vztah z úlohy 4.13 I.; z údajů o délce tyčí snadno zjistíme, že  $\sin(\angle BCD) = 24/25$ . Přirovnáme-li změnu potenciální energie závaží práci napěťové síly v tyči  $BD$ , dostaneme  $T_{BD} = mg/2$ .
- 4.16 Visí-li tyč v rovnovážné poloze, má její potenciální energie minimum a při vychýlení o (nekonečně) malý úhel se nemění. Vychýlíme-li tyč například nalevo, těžiště její lehčí poloviny stoupne a těžiště její těžší poloviny klesne. Jednoduchým geometrickým výpočtem pak dostaneme pro úhel  $\alpha$ , který tyč svírá s vodorovnou přímkou  $\tan\alpha = 1/6\sqrt{3}$ ,  $\alpha = 5^\circ 30'$ .
- 4.17 Uvážíme dvě virtuální posunutí. Při prvním se závaží  $m_2$  malinko posune po odvěsně směrem dolů a závaží  $m_1$  zůstane nehybné (vlákno se roztáhne); při druhém posunutí tomu bude naopak. Změnu potenciální energie přirovnáme práci napěťové síly  $T$  a dostaneme  $\tan\alpha = 3\sqrt{3}$ ,  $\alpha = 79^\circ$ ,  $T = \frac{g}{2}\sqrt{m_1^2 + 3m_2^2} = 2,60 \text{ N}$ .

## KAPITOLA 6

- 6.1 Pohyb molekuly můžeme považovat za náhodnou procházku, při níž se molekula po  $N$  srážkách dostane do vzdálenosti  $D = \sqrt{N}l$ , kde  $l$  je střední volná dráha. O 1 cm se tedy molekula vzdálí za dobu  $t = D^2/(l\langle v \rangle) = 3 \text{ s}$ .
- 6.2 Pravděpodobnosti jsou 0,3 a 0,05.
- 6.3 Jde o tzv. izotropní rozptyl, kdy počet rozptýlených kuliček nezávisí na směru. Srážkový parametr  $\rho$  (tj. vzdálenost letové přímky od rovnoběžné přímky procházející rozptylovým centrem) souvisí s úhlem rozptylu  $\chi$  vztahem  $\rho = (a + b) \cos(\chi/2)$ . Poměrnou část kuliček rozptýlených v rozmezí úhlů mezi  $\chi$  a  $\chi + d\chi$  lze určit z diferenciálního srážkového průřezu

$$d\sigma = 2\pi\rho \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| = \frac{1}{2}\pi(a + b)^2 \sin\chi d\chi,$$

ktejž po zintegrování přes celý prostorový úhel dá celkový srážkový průřez uvedený v zadání.



## KAPITOLA 7

- 7.1 Použijeme-li vztahy pro parametry elipsy uvedené pod textem úlohy, 3. Keplerův zákon a označíme periody oběhu Měsíce a družice  $T_M$  a  $T_d$ , dostaneme

$$T_d = \sqrt{\left(\frac{r_{pd} + r_{ad}}{r_{pM} + r_{aM}}\right)^3} T_M = 1,55 \text{ h.}$$

- 7.2 a) Dostaneme známý vztah  $a_d = v^2/R$ .  
 b) Známe-li výraz pro dostředivé zrychlení, můžeme z gravitačního zákona odvodit 3. Keplerův zákon a naopak. Newton tak získal gravitační zákon pro obecnější případ eliptických orbit.

- 7.3 a) Porovnáme druhé mocniny oběžných dob a použijeme 3. Keplerův zákon. Dostaneme  $M_S/M_Z \approx 3,33 \cdot 10^6$ .  
 b) Podobně  $M_J/M_Z \approx 318$ .

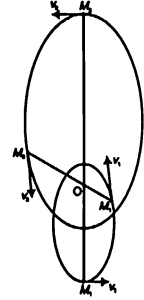
- 7.4 Doba oběhu  $T$  kolem společného těžiště  $O$  kolem sebe navzájem je stejná, protože těžiště musí pořád ležet na jejich spojnici. Jsou-li hmotnosti obou těles  $M_1, M_2$  a vzdálenosti každého tělesa od těžiště  $R_1, R_2$  a od sebe navzájem  $R = R_1 + R_2$ , potom platí.

$$\frac{4\pi^2 M_1 R_1}{T^2} = x \frac{M_1 M_2}{R^2}, \quad \frac{4\pi^2 M_2 R_2}{T^2} = x \frac{M_1 M_2}{R^2}.$$

$$\text{Sečteme-li tyto rovnice, určíme odtud } T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{x(M_1 + M_2)}}.$$

V případě eliptických orbit obě tělesa obíhají kolem společného těžiště  $O$  po elipsách s velkými poloosami  $a_1, a_2$  a též excentricitě (viz obrázek). Z Keplerových zákonů lze poněkud pracnějším způsobem najít  $T = 2\pi \sqrt{a^3/x(M_1 + M_2)}$ , kde  $a = a_1 + a_2$ .

Výsledek jinak plyne též z obecného řešení úlohy dvou těles.



- 7.5 S použitím výsledku úlohy 7.4 pro uvedené hodnoty dostaneme  $\frac{m_a + m_b}{M_S} = \left(\frac{R}{R_{ZS}}\right)^3 \left(\frac{T_Z}{T}\right)^2$ , kde  $m_a, m_b$  jsou hmotnosti složek dvojhvězdy,  $M_S$  hmotnost Slunce,  $R_{ZS} = 1 \text{ AU}$  a  $T_Z = 1 \text{ r}$ . Zanedbali jsme hmotnost Země vzhledem k hmotnosti Slunce.

- 7.6 Z obr. 7.7 lze zjistit, že úhlový rozměr velké poloosy dráhy Síría B je přibližně  $7,30''$  a doba oběhu kolem 45 r. Stejně jako v předchozí úloze určíme hmotnost dvojhvězdy  $m_A + m_B = 3,7 M_S$ . Z orientace roviny dvojhvězdy vzhledem k pozemskému pozorovateli plyne, že jde o dolní odhad.

- 7.7 Z 2. Keplerova zákona  $v_{\max}/v_{\min} = r_a/r_p = (1 + e)/(1 - e) = 1,0334$  ( $e$  je excentricita zemské trajektorie).

- 7.8 Pro Halleyovu kometu z uvedených údajů  $T = 76 \text{ r}$ ,  $a = 18 \text{ AU}$ ,  $r_a = 2a - r_p = 35,4 \text{ AU}$ ,  $v_{\max}/v_{\min} = 59$ .

- 7.9 Z výsledku úlohy 7.4 a známé oběžné doby Měsíce  $T_M$  dostaneme  $M_M = \frac{4\pi^2 R_{ZM}^3}{x T_M^2} - M_Z = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg} \approx 0,012 M_Z$

( $R_{ZM}$  je vzdálenost Měsíce od Země,  $M_M, M_Z$  hmotnosti Měsíce a Země).

Jiná možnost je určit hmotnost Měsíce z doby oběhu a poloměru trajektorie umělé družice Měsíce (např. kosmické lodi Apollo), nebo ze slapových pohybů na povrchu oceánu.

- 7.10 Z Newtonova gravitačního zákona, poloměrů a hmotností Země a Měsíce  $R_Z, R_M, M_Z, M_M$  dostaneme

$$g_M = M_M R_Z^2 / M_Z R_M^2 \approx 1,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

- 7.11 Je-li  $\Delta g$  rozdíl gravitačních zrychlení, když je Měsíc v maximální a minimální vzdálenosti od laboratoře na povrchu Země, při zanedbání poloměru Země ze srovnání se vzdáleností Měsíce  $R_Z \ll R_{ZM}$  najdeme  $\frac{\Delta g}{g} \approx 2 \frac{M_M}{M_Z} \left(\frac{R_Z}{R_{ZM}}\right)^2 = 10^{-5}$ .

## KAPITOLA 8

- 8.1 Platí  $d v_x / dt = a = \text{konst.}$ , odkud integrací s danými počátečními podmínkami dostaneme výsledek.

- 8.2 Bez komentáře.

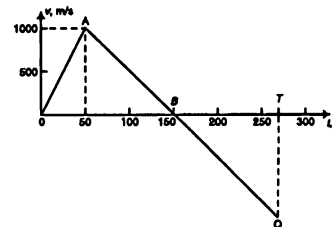
- 8.3 Dostaneme  $v^2 = v_0^2 + 2[a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) + a_z(z - z_0)]$ .

- 8.4 Vzdálenost  $x_d = v^2 \sin^2 \vartheta / g$ , maximální výška  $y_v = v^2 \sin^2 \vartheta / 2g$ .

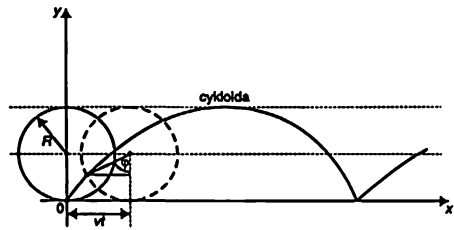
- 8.5 Pod úhlem  $\vartheta = 45^\circ$ .

- 8.6 Ze vztahu  $s(t) = v_0 t + a t^2 / 2$  dostaneme  $v_0 = 3,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $a = 0,84 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

- 8.7 Viz obrázek. Raketa dosáhne výšky  $h_{\max} = 73500 \text{ m}$ , celková doba letu  $t_f = 272 \text{ s}$ .



- 8.8 Je-li  $s$  celková délka testovací trati, z podmínky rovnosti dob  $t = \sqrt{\frac{s}{a_1}} + \sqrt{\frac{s}{4a_1}} = \sqrt{\frac{2s}{a_2}}$  dostaneme  $a_1/a_2 = 9/8 = 1,125$ .
- 8.9 Aby mina těsně minula okraj srázu, musí být vystřelena pod úhlem daným podmínkou  $\sin 2\alpha = sg/v_0^2$  ( $s$  je vzdálenost od srázu,  $v_0$  počáteční rychlost), odkud  $\alpha = 59^\circ$ . Pod tímž úhlem rychlostí  $v_0$  bude mina mjet okraj srázu směrem dolů. Od tohoto okamžiku poletí 0,41 s a dopadne do vzdálenosti asi 63 m od úpatí srázu.
- 8.10 Bez komentáře.
- 8.11 Projde-li těleso za dobu  $t$  úhel  $\varphi = \omega t$ , kde  $\omega$  je úhlová rychlost, pak  $x = R \cos \omega t$ ,  $y = R \sin \omega t$ ,  $v_x = -R\omega \sin \omega t$ ,  $v_y = R\omega \cos \omega t$ ,  $a_x = -R\omega^2 \cos \omega t$ ,  $a_y = -R\omega^2 \sin \omega t$ ,  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$ .
- 8.12 Kamínek bude opisovat křivku zvanou cykloida. Podle obrázku, kde úhel  $\varphi = vt/R$ , najdeme
- $$x = vt - R \sin(vt/R),$$
- $$y = R[1 - \cos(vt/R)],$$
- $$v_x = v[1 - \cos(vt/R)],$$
- $$v_y = v \sin(vt/R),$$
- $$a_x = (v^2/R) \sin(vt/R),$$
- $$a_y = (v^2/R) \cos(vt/R).$$



## KAPITOLA 9

- 9.1 Síla stálé velikosti  $F$  a kolmá k rychlosti vyvolává pohyb po kružnici poloměru  $r = mv^2/F$ . V našem případě  $r = mv_0/k$ .
- 9.2 Poloměr křivosti  $R = v^2/a_n$ , kde  $a_n$  je normálové zrychlení. Určíme-li tečné zrychlení  $a_t = dv/dt$ , pak  $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$ . Pro uvedené časové okamžiky dostaneme  $R$  rovno 0,664; 0,650; 0,665 (v přijatých jednotkách).
- 9.3 Protože míč vletěl do okna vodorovně, musel být na vrcholu své trajektorie. Použijeme-li výsledek úlohy 8.4, máme  $v_0 = \sqrt{2hg/\sin^2 \alpha} = 14,5$  m/s. Zrychlení v tomto bodě je kolmé k rychlosti, takže poloměr křivosti  $R = v_0^2 \cos^2 \alpha / g = 2,46$  m. V obecném okamžiku  $t$  bychom dostali  $R = (v_0^2 + g^2 t^2 - 2gv_0 t \sin \alpha)^{3/2} / g v_0 \cos \alpha$ .
- 9.4 Rychlost, zrychlení, síla a energie se musí násobit koeficienty  $\lambda/r$ ,  $\lambda/r^2$ ,  $\mu\lambda/r^2$ ,  $\mu\lambda^2/r^2$ .
- 9.5  $x' = (\lambda^3/\mu r^2) x$ .
- 9.6  $x M_g = 4\pi^2 \cdot AU^3/r^2$ .
- 9.7 Násobíme-li délky koeficientem  $k$  a má-li hustota materiálů zůstat nezměněna, musíme násobit hmotnost koeficientem  $k^3$ . S použitím výsledku předchozí úlohy zjistíme, že se periody oběhu planet nezmění.
- 9.8 Ze zákona zachování energie  $g = (2M + m)v^2/2mh$ .
- 9.9 Při uvedeném způsobu zavěšení bude celkové zatížení gondoly  $F = 3T$ , kde  $T$  je napěťová síla závěsu. Tu dostaneme řešením pohybových rovnic  $m_P a_P = -m_P g - 2T$ ,  $m_F a_F = m_F g - T$ ,  $a_F = -2a_P$  (indexy F a P se vztahují ke jmenům cestujících). Odtud  $F = 9m_P m_F g / (4m_F + m_P)$ . Zatížení ložky se tak zmenší na 1 445 N, tj. o pouhých 26 N. Kdyby si Paolo a Francesca vyměnili místa, gondole by se ulehčilo podstatně více, ale tento stav by zas trval kratší dobu.
- 9.10 Hmotnosti závaží A a B jsou v poměru měsíčního zrychlení  $g_M$  a zemského tíhového zrychlení  $g$ . Použijeme-li tento vztah v pohybových rovnicích obou těles na kladce, dostaneme  $m_B = 5,75$  kg.
- 9.11 a)  $a = F/(M_1 + M_2) - g$ , b)  $T = M_1 F/(M_1 + M_2)$ , c)  $a' = F/M_2 - g$ , d)  $t = \sqrt{2s M_2/F}$ .
- 9.12 a)  $g/3$ , b) 112 kg.
- 9.13 Z podmínky plyne, že tíha závaží  $M_2$  musí být právě rovna napěťové síle nití, odkud zrychlení vozíku musí být rovno  $a = M_2 g/M_1$ . Potom  $F = (M + M_1 + M_2) M_2 g/M_1$ .
- 9.14 Označíme  $T$  napěťovou sílu nití, vodorovné zrychlení hmoty  $M + m$  jako  $a$  a svislé zrychlení  $m$  jako  $a_m$ . Máme  $ma_m = mg - T$ ,  $(m + M)a = 2T$ ,  $a_m = 2a$ , odkud  $a_m = 4mg/(M + 5m)$  a  $t = \sqrt{2d/a_m} = 1$  s.

9.15–9.18 Bez komentáře.

## KAPITOLA 10

- 10.1 Je-li  $m_2$  hmotnost tělesa v klidu a  $m_1$  hmotnost tělesa pohybujícího se rychlostí  $v_1$ , které do něho narazí, ze zákonů zachování hybnosti a energie zjistíme, že tělesa se po srážce rozletí rychlostmi

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Mají-li si být velikosti těchto rychlostí rovny, musí platit  $m_2 = 3m_1$ .

- 10.2 Malá změna rychlosti  $\Delta v = v/2$ . Bude-li jedno z těles před srážkou v klidu, bude se po srážce pohybovat rychlostí  $v - v/4$ , nalétající těleso bude pokračovat malou rychlostí  $v/4$ .
- 10.3 Rychlost družice pohybující se po kruhové dráze ve výšce  $h$  určíme jako  $v^2 = gR_2^2/(R_2 + h) = gR_2(1 - h/R_2)$  a brzdicí sílu  $F = \rho S v^2 = 0,005 \text{ N}$  ( $\rho$  je hustota vzduchu,  $S$  obsah průřezu družice). Brzdicí síla vyvolá pokles družice a paradoxně vzrůst její rychlosti.
- 10.4 a) Počáteční zrychlení  $a = v_0 r_0 / M_0$ . b) Tažná síla  $F = r_0 v_0$ , odkud  $r_0 = 500 \text{ kg/s}$ , c)  $d v / v_0 = r_0 dt / (M_0 - r_0 t)$ ,  $v = v_0 \ln [M_0 / (M_0 - r_0 t)]$ .
- 10.5 Bez komentáře.
- 10.6  $v_T = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$  (rychlosti  $v_i$  jsou kladné v jednom směru a záporné v opačném směru).
- 10.7 Bez komentáře.
- 10.8  $T = T_T + \frac{1}{2} M v_T^2$ , kde  $M$  je celková hmotnost a  $T_T$  kinetická energie v těžiškové soustavě.
- 10.9 Ze zákonů zachování hybnosti a energie (viz výsledek úlohy 10.1) bude poměr kinetických energií neutronu po srážce a před ní  $E'/E = 121/169 = 0,72$ .
- 10.10 Rychlost kulky  $v = \frac{(M+m)x}{m} \sqrt{\frac{g}{L}}$ .

## KAPITOLA 11

- 11.1 a) 5 l + j, b) l + 3 j - 2 k, c) 3, d) 3, e) 3, f) 15 l - 18 j + 9 k
- 11.2 a) Směr větru svírá se směrem pohybu cyklisty úhel  $139,5^\circ$ . b) Cyklista jedoucí opačným směrem pocítuje vítr pod úhlem  $141,3^\circ$ . V obou případech použijeme sinovou větu.
- 11.3 Určíme závislost vzdálenosti obou lodí na čase a z podmínky minima zjistíme, že druhá loď míří přímo na sever a bude mjet záď naší lodí asi za 10 minut.
- 11.4 Bod na obvodu kola bude opisovat cykloidu (úloha 8.12). Jeho rychlost má velikost  $v = r\omega = v/R$ , kde  $r$  je průvodič bodu z bodu doteku s rovinou, a je k tomuto průvodiči kolmá.
- 11.5 Poměr  $t_1/t_2 = t_A/t_L = v/\sqrt{v^2 - u^2}$ .
- 11.6 Je-li rychlost plavání  $v$ , chůze  $u$  a rychlost toku řeky  $w$ , bude poměr dob potřebných k prvnímu a druhému způsobu překonání řeky  $t_1/t_2 = uv / [(w+u)\sqrt{v^2 - w^2}] = 5/4,5 = 1,1$
- 11.7 Z pohybových rovnic dostaneme a) 2 g, b)  $\sqrt{2} g$ , c)  $F = Mg/\sqrt{2} = 2660 \text{ N}$ .
- 11.8 Dostředivá síla je výslednicí tíhové síly a napěťové síly nití a je rovna  $mgR/H = mv^2/R$ , kde  $R$  je poloměr dráhy. Potom perioda pohybu  $T = 2\pi R/v = 2\pi \sqrt{\frac{H}{g}}$ .
- 11.9  $v_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i v_i$ , výraz pro kinetickou energii je formálně též jako v úloze 10.8.
- 11.10  $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 2(j+k) \text{ m/s}$ .
- 11.11  $T = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - v)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - v)^2 = 30 \text{ J}$ ,  $v = v_T$  (viz úlohu 11.10).
- 11.12 a) Ze zákona zachování hybnosti se těleso pohybuje rychlostí  $\sqrt{5} \text{ m/s}$  ve směru odchýleném od severu o  $26,5^\circ$  na západ. b) Ztratí se  $3/4$  původní kinetické energie, tj. 9 J. c) V těžiškové soustavě se lehčí těleso bude po srážce pohybovat na východ.
- 11.13 Bez komentáře.
- 11.14  $r_a(t) = 7(1+t)l + 3tj + 4,9(1+t^2)k \text{ m}$   
 $r_b(t) = 7(7-t)l + 3tj + 4,9(1+t^2)k \text{ m}$ .
- 11.15 Dostaneme  $\tan \theta_1 = 3$ ,  $u_1 = 5v_1/8$ ,  $u_2 = v_1/8$ .
- 11.16 Platí  $\sin \theta_{\max} = m/M$ .
- 11.17 Platí  $\tan \theta = [(M-m)/(M+m)]^{1/2}$ .

11.18 Zákony zachování energie v těžiškové soustavě musíme zapsat s ohledem na ztrátu části kinetické energie. Použijeme-li dále zákon zachování hybnosti a přejdeme do laboratorní soustavy, dostaneme  $\text{tg } \vartheta = [(a^2 M^2 - m^2) (M + m)]^{1/2}$ .

Uvažte, co se stane, bude-li  $\alpha < m/M$ .

11.19 a)  $r(0) = 0$ ,  $v(0) = \left( l + j - \frac{2}{\pi} k \right) \text{ m/s}$ ,  $a(0) = j \text{ m/s}^2$ ,  $T = \left( 1 + \frac{2}{\pi^2} \right) J$

$$r(1) = \left( l + \frac{3}{2} j - \frac{4}{\pi^2} k \right) \text{ m}, v(1) = (l + 2j) \text{ m/s}, a(1) = (j + k) \text{ m/s}^2, T = 2,5 J$$

b)  $F = \left[ j + k \sin \left( \frac{2}{\pi} t \right) \right] \text{ N}$

c)  $R = 5\sqrt{30}/6 \text{ m} \approx 4,6 \text{ m}$  (viz též úlohu 9.3).

11.20  $r(t) = r_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 k$  (osa z míří vzhůru).

11.21 Označíme hledanou délku oblouku  $s$ , poloměr Země  $R_2$ . Pak  $\cos(l/R_2) = \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2$ .

11.22 Musíme sečíst dostředivá zrychlení Měsíce vzhledem k Zemi a vzhledem k Slunci. Pak dostaneme a)  $a_1 = 0,33 \text{ cm/s}^2$  směrem k Slunci, b)  $a_2 = 0,66 \text{ cm/s}^2$  pod úhlem  $\alpha = 24^\circ 13'$  vzhledem ke spojnici Měsíce a Slunce, c)  $a_3 = 0,87 \text{ cm/s}^2$  směrem k Slunci.

## KAPITOLA 12

12.1 a)  $a_y = -g \cos \vartheta (\mu + \text{tg } \vartheta)$

b)  $a_y = g \cos \vartheta (\mu - \text{tg } \vartheta)$

c)  $a_x = g(\mu \cos \vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi) \cos \varphi$ ,  $a_y = g(\mu \cos \vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi) \sin \varphi$ .

12.2 a)  $s = 0,68 \text{ m}$ , b)  $t = 1,1 \text{ s}$ , c)  $\Delta E = 2,2 \text{ J}$ .

12.3 Míří-li vodorovná síla přímo proti svahu, bude se těleso pohybovat vzhůru, překročí-li síla hodnotu  $F_{\min} = 3\mu Mg/(2 - \mu^2)$ . Bude-li síla mířit od svahu, bude se těleso pohybovat dolů, překročí-li síla hodnotu  $F_{\min} = \mu Mg/(2 + \mu^2)$ .

12.4 Je-li  $T$  velikost napěťové síly úseku nití o délce 1,5 m a  $\alpha$  úhel, který svírá nit s tyčí v místě kroužku těsně před začátkem pohybu, platí  $T \cos \alpha = \mu T \sin \alpha$ , odkud  $\text{tg } \alpha = 1/\mu = 4/3$ . Pomocí sinové věty najdeme  $\vartheta = 90^\circ$ . Z rovnováhy sil pak dostaneme  $m = 3/5 \text{ kg}$ ,  $T = 4g/5 \text{ N}$ .

12.5 Těsně před tím, než se zámeček dá do pohybu, budou tlaková síla  $N$ , kterou působí část  $B$ , síla tření a minimální síla  $F$  v rovnováze. Proto  $N = \sqrt{2} mg/(1 - \mu)$ ,  $F = (1 + \mu) mg/(1 - \mu)$ .

12.6 V pohyblivě se vztažené soustavě bude vedle tíhového zrychlení směrem vzhůru působit setrvačné zrychlení  $g \sin^2 \alpha$ . Odtud dostaneme náklon roviny  $\alpha = 30^\circ$ .

12.7 Zrychlení břemene  $a_2 = (M_1 - M_2) g/(4 M_1 + M_2) = g/9 = 1,06 \text{ m/s}^2$ , napěťová síla nití  $T = 4 M_1 M_2 g/(4 M_1 + M_2) = 2178 \text{ N}$ .

12.8 Označíme koeficient statického tření mezi kvádry  $\mu_{st}$ , smykového tření  $\mu$  a úhel náklonu roviny  $\alpha = 22^\circ 38'$ . Potom  $a = (\mu_{st} \cos \alpha - \sin \alpha) g = 0,75 \text{ m/s}^2$ ,  $F = (1/13 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha) (m_1 + m_2) g = 1962 \text{ N}$ .

12.9 V okamžiku, kdy se krychle začne pomalu dávat do pohybu, bude změna její potenciální energie právě rovna práci sil tření. Odtud dostaneme  $\text{tg } \vartheta = 1/(1 + 2\mu)$ . Pro  $\mu = 1$ ,  $\vartheta = 18^\circ 30'$ .

12.10 Z rovnováhy sil a momentů sil dostaneme  $x = 32 \text{ cm}$ .

12.11 Rozdíl napěťových sil je právě roven síle tření  $\Delta T = \mu N = \mu T \Delta \vartheta$ , kde  $\mu$  je koeficient tření a  $N$  kolmá tlaková síla. Pro konečný úhel  $\alpha$  dostaneme integraci  $T_2/T_1 = \exp(\mu \alpha)$ .

12.12 Úlohu řešíme v neinerciální vztažené soustavě spojené s deskou. Řešením pohybové rovnice dostaneme  $t = [2s/(a \cos \vartheta - g \sin \vartheta)]^{1/2} = 2,16 \text{ s}$ .

12.13  $[E] = \text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$ ,  $[B] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$ ,  $[E/B] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $[K] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

12.14 Poloměr trajektorie  $R = mv/qB$  ( $m$ ,  $v$ ,  $q$  jsou hmotnost, rychlost a náboj částice).

12.15  $T = 2\pi m/qB$ .

12.16 a)  $m\dot{x} = qyB_z$ ,  $m\dot{y} = qEx - qxBy_z$ ,  $m\dot{z} = 0$ ,

b)  $m\dot{x}' = qy'B_z$ ,  $m\dot{y}' = -qx'B_z$ ,  $m\dot{z}' = 0$

V takto se pohyblivě soustavě (tzv. driftovou rychlostí) bude působit jen magnetické pole a částice se bude pohybovat po kružnici. V laboratorní soustavě bude částice opisovat cykloidu.

## KAPITOLA 14

14.1 a)  $F(0) = (4,5 I + 12 J - 2,6 K) \text{ N}$ , b)  $a(0) = (4,5 I + 12 J - 2,6 K) \text{ m/s}^2$ , c)  $T(0) = 2,5 \text{ J}$ , d)  $dT/dt = F(0) \cdot v(0) = 21,4 \text{ J/s}$ .

14.2 Použijeme-li řešení úlohy 14.1, dostaneme přibližně a)  $r(0,01) = r(0) + 0,01 v(0)$ , b)  $v(0,01) = v(0) + 0,01 a(0)$ , c)  $T = T(0) + 0,01 dT/dt = mv^2(0,01)/2 = 2,71 \text{ J}$ .

- 14.3 Pro obě trajektorie je práce síly  $F$  nulová. Aby však silové pole bylo konzervativní, musela by být tato práce nulová pro každou trajektorii. Zjistíme-li, že pro některou trajektorii to neplatí, dokážeme tím, že toto pole konzervativní není, což je náš případ.
- 14.4 1) 3 m/s; 2,5 m/s<sup>2</sup>; 45 W, 2) 4,5 m/s; 2,5 m/s<sup>2</sup>; 67,5 W.
- 14.5  $q = 4\pi \epsilon_0 \varphi R = 5,6 \cdot 10^{-5} C$ .
- 14.6 Pro  $R_1 > R_2$ ,  $C = 4\pi \epsilon_0 R_1 R_2 / (R_1 - R_2) F$ .
- 14.7 1409 V.
- 14.8  $a = 7,2 m/s^2$ .
- 14.9 Změnu potenciální energie kabelu přirovnáme jeho kinetické energii, odkud  $v = \sqrt{gL/2}$ . Údaj o lineární hmotnosti kabelu jsme nepotřebovali.
- 14.10 Máme  $S = 35 cm^2$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $h = 4,8 m$ ,  $h_0 = 2,4 m$ .  
Rychlost vody u ústí hadice  $v = \sqrt{2hg/\sin^2\alpha} = \sqrt{8hg}$ . Pumpa musí zvednout každou sekundu množství vody o hmotnosti  $\rho Sv$  do výšky  $h_0$  a dodat jí potřebnou kinetickou energii. S uvažováním účinnosti pumpy  $\eta$  dostaneme výkon  $P = \rho g v S (h_0 + 4h)/\eta = 25 kW$ .
- 14.11 Označíme počáteční výšku  $h = 1,8 m$ , délku doletu  $s$  a hmotnost vrhaného nářadí  $M$ . Z rovnice trajektorie šikmého vrhu určíme počáteční rychlost  $v = \sqrt{gs^2/(s+h)}$  a práci  $W = mgs^2/2(s+h)$ . To odpovídá u koule 646 J, disku 588 J a oštěpu 328 J.
- 14.12 Označíme hmotnost automobilu  $M$ , výkon na rovině  $P_r$  a maximální výkon  $P_{max}$ . Při stoupání musí automobil vedle tření překonávat i svislou složku tíhové síly. Maximální úhel stoupání dostaneme ze vztahu  $\sin\alpha = (P_{max} - P_r)/Mgv = 0,30$ .
- 14.13 Pro  $r < R$  potenciál  $\psi(r) = xM(r^2/2R^3 - 3/2R)$ , intenzita  $K(r) = xMr/R^3$ ; pro  $r \geq R$ ,  $\psi(r) = -xM/r$ ,  $K(r) = xM/r^2$ .
- 14.14 Závažičko dopadne z výšky  $h$  rychlostí  $v = \sqrt{2hg}$ ; podle zákona zachování hybnosti se míška o hmotnosti  $m_m$  se závažičkem o hmotnosti  $m_z$  začnou pohybovat dolů rychlostí  $v' = m_z v / (m_z + m_m)$  tak dlouho, dokud jejich celková kinetická a tíhová potenciální energie nepřejdou v potenciální energii roztažené pružiny tuhosti  $k$ . Miska se závažičkem přitom klesnou o  $h' = m_z g / k + [m_z g / k + 2m_z h / (m_m + m_z)]^{1/2} = 10,1 cm$ .
- 14.15 Bude-li na pružinu v nové rovnovážné poloze  $x_0$  působit další síla  $F'$ , která vyvolá malou výchylku  $x$ , bude celková výchylka  $x_0 + x = (F + F')/k$ . Tedy i v nové rovnovážné poloze bude platit  $F' = kx$  s toutéž tuhostí  $k$ .
- 14.16 V horním bodu smyčky musí být tíhová síla  $mg$  právě rovna dostředivé síle  $mv^2/R$  působící na vozík. Vozík musí být vypuštěn z takové výšky  $h$  nad smyčkou, aby jeho potenciální energie vzhledem k hornímu bodu smyčky byla rovna jeho kinetické energii, tedy  $h = R/2$ .
- 14.17 Hmotný bod se odtrhne v okamžiku, kdy projde oblouk o středovém úhlu  $\alpha$  a kdy jeho obvodová rychlost bude splňovat podmínku  $v^2/R = g \cos\alpha$ , tj. radiální složka tíhového zrychlení bude právě rovna dostředivému zrychlení. Podle zákona zachování energie  $mv^2/2 = mgR(1 - \cos\alpha)$  dostaneme  $\cos\alpha = 2/3$ . Hmotný bod tedy klesne o svislou vzdálenost  $R/3$  a projde dráhu  $s = 0,84 R$ .
- 14.18 Pohyb probíhá v poli konzervativních sil, takže součet kinetické a potenciální energie nezávisí na poloze tělesa. Proto můžeme určit celkovou energii v perigeu a apogeu trajektorie a použít druhý Keplerův zákon  $v_p r_p = v_a r_a$ . Z těchto vztahů můžeme vyloučit rychlosti  $v_p$ ,  $v_a$  a excentricitu  $e$ . Pro energii pak dostaneme  $E = -xM/2a$ .
- 14.19 Bez komentáře.
- 14.20 Označíme  $v_0$  rychlost, s níž je těleso vypuštěno, v hledanou rychlost ve vzdálenosti  $r$  od Země a  $v_2$  druhou kosmickou rychlost. Ze zákona zachování energie  $v = [v_0^2 - v_2^2 (r - R_z)/R_z]^{1/2} = 4,78 km/s$ .
- 14.21 Součet potenciální energie vzhledem k Zemi, potenciální energie vzhledem k Slunci a kinetické energie se zachovává a rovná se výsledné kinetické energii. Odtud dostaneme hledanou rychlost  $v = 47 km/s$ . Využijeme-li oběžné rychlosti Země kolem Slunce, stačí vyloučit loď rychlostí 17 km/s ve směru pohybu Země.
- 14.22 Nejméně výhodný směr pohybu lodí by byl proti směru pohybu Země kolem Slunce a vyžádal by si rychlost 77 km/s.
- 14.23 Eliptická trajektorie kosmické lodí podle třetího Keplerova zákona musí mít stejně velkou hlavní poloosu jako trajektorie Země a v periheliu se bude velmi přibližovat Slunci. Platí též, že kosmická loď a Země mají v téže vzdálenosti od Slunce (tj. když se míjejí) stejnou velikost rychlosti vzhledem k Slunci. Uvážíme-li ještě, že kosmická loď musí získat dodatečnou kinetickou energii k odpoutání od zemské přitažlivosti, zjistíme, že musí být vypuštěna rychlostí 42 km/s ve směru 41° vzhledem ke směru spojnice Země – Slunce odečítaného v opačném smyslu než probíhá oběh Země. Existuje ještě jedno, energeticky méně výhodné řešení vypuštění lodí v místě druhého průsečíku trajektorii Země a lodí. Můžete se pokusit určit potřebnou rychlost v tomto případě.
- 14.24 Použijeme princip superpozice; výsledné zrychlení je dáno jako rozdíl zrychlení vyvolaného pinou koulí a menší, odebranou koulí.

$$a = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{x\rho}{(x+R)^2} \left[ 1 - \left( 8 + \frac{2R}{x+R} \right)^{-2} \right]$$

## KAPITOLA 15

- 15.1 Zpětnou Lorentzovu transformaci dostaneme, vyměníme-li čárkované a nečárkované souřadnice a změnímme znaménko rychlosti soustavy  $u$ .
- 15.2 Analýza ukáže, že pohybující se hodiny půjdou pomaleji než nehybné bez ohledu na jejich prostorovou orientaci.

- 15.3 a) Pozorovaná doba života mionu  $t = 1,67 \cdot 10^{-6}$  s, vlastní doba života  $\tau = 2,33 \cdot 10^{-6}$  s. b) Vrstva atmosféry v soustavě spojené s mionem má tloušťku  $d = 0,71$  km.
- 15.4 a) 86 kg, b)  $3,5 \cdot 10^{-3}$  kg/s.
- 15.5  $6,2 \cdot 10^8$  t/s.
- 15.6 Derivováním  $x$  podle času určíme rychlost  $v$  a zrychlení  $dv/dt$ . Dosazením do relativistické pohybové rovnice
- $$F = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} \text{ najdeme } F = m_0 c^2/a = \text{konst.}$$
- 15.7 a)  $g = 1,03$  světelných roků za rok na druhou. b) S použitím výsledku úlohy 15.6 zjistíme, že loď uletí vzdálenost 4,15 ly a dosáhne rychlost 0,98  $c$ .

#### KAPITOLA 16

- 16.1 Dostaneme vzorce pro relativistickou transformaci složek rychlostí  $v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2}$ ,  $v_{y,z} = \frac{v'_{y,z} \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + uv'_x/c^2}$ .
- 16.2  $v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}$ ,  $a'_x = dv'_x/dt' = \frac{(1 - u^2/c^2)^{3/2}}{(1 - uv_x/c^2)^3} a_x$ .
- 16.3 Bez komentáře.
- 16.4 Přejdeme do vztážené soustavy, v níž se obě částice pohybují proti sobě stejnou rychlostí  $c/2$  a mají relativistickou hmotnost  $m$  (viz odstavec 16.3). Nová částice vzniklá nepružnou srážkou bude v této soustavě v klidu a bude mít hmotnost  $2m = 4 m_0/\sqrt{3}$ . V laboratorní soustavě se bude pohybovat rychlostí  $c/2$ .
- 16.5 Ve vztážené soustavě, v níž se nalétající a terčové protony přibližují stejnou rychlostí  $u$ , budou vznikající protony a antiprotony v klidu. Z podmínky  $2m_p/\sqrt{1 - u^2/c^2} = 4m_p$  dostaneme  $u = \sqrt{3} c/2$ . Potom rychlost urychlovaných protonů v laboratorní soustavě  $v = 2u/(1 + u^2/c^2) = 4\sqrt{3}c/7$ . Jejich prahová kinetická energie, na niž je třeba urychlovač projektovat, je tedy  $E_p = (m_p - m_0) c^2 = 6,00 m_p c^2 = 5,628 \text{ GeV}$ .

#### KAPITOLA 17

- 17.1 Označíme  $t = 10^5 r$ , energii protonu  $E = E_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Pak doba, která uplyne ve vlastní soustavě protonu je  $\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2} = tE_0/E = 10^{-5} r = 5 \text{ min}$ .
- 17.2 Bez komentáře.
- 17.3 Použijeme soustavu jednotek, v níž  $c=1$ . Označíme hybnosti mionu a neutrina  $p_\mu$  a  $p_\nu$ , klidové hmotnosti pionu a mionu  $m_\pi$  a  $m_\mu$ . Ze zák. zachování hybnosti  $p_\mu = p_\nu$ , zák. zachování energie nám dá  $m_\pi = \sqrt{p_\mu^2 + m_\nu^2} + p_\nu$ . Odtud  $p_\mu = 29,8 \text{ MeV}$ ,  $T_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} - m_\mu = 4,1 \text{ MeV}$ ,  $T_\nu = E_\nu = p_\nu = 29,8 \text{ MeV}$ .
- 17.4 Použijeme výsledek úlohy 12.4, který platí i v relativistickém případě. V uvedených jednotkách dostaneme  $p = 300 \text{ ZBR}$ .
- 17.5 a) Použijeme-li výsledek úlohy 17.4 a vztah mezi hybností  $p$ , kinetickou energií  $T$  a klidovou hmotností  $m_0$ :  $p = \sqrt{T(T + 2m_0)}$ , dostaneme  $R = p/300$ ,  $B = \sqrt{T(T + 2m_0)}/300$ ,  $B = 1,84 \text{ m}$   
b) V našem případě relativistická hmotnost  $m = 2 m_0/\sqrt{3}$  a frekvence  $f = 300 \text{ Bc}/2\pi$ ,  $m = 300 \sqrt{3} \text{ Bc}/4\pi$ ,  $m_0 = 1,3 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ .  
c) Frekvence oběhu se mění v rozsahu  $1,5 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \pm 1,3 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$ , tedy asi o 13 %.

#### KAPITOLA 18

- 18.1 a) 140 N · m, b) 2,8 m, c) 14 N.
- 18.2 Obvodová rychlost bodu na povrchu Země  $R_z \omega \cos \varphi$ , kde  $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , a  $\varphi$  je zeměpisná šířka. Pro L. A.  $\varphi = 34^\circ$ , hledaná šířka  $\varphi = 66,6^\circ$ .
- 18.3 Ze vztahů pro rovnováhu složek působících sil a momentů sil vzhledem k bodu  $O$  najdeme velikost výsledné síly, která udrží destičku v rovnováze jako  $F = 20,5 \text{ N}$ , její působíště 0,34 m na přímce  $AB$  vlevo od bodu  $O$  a směr rovnoběžný se směrem síly působící v bodě  $O$ .
- 18.4 Náraz musí mířit směrem na těžiště úhelníčku, tj. ve vzdálenosti 7,5 cm od bodu  $O$ .
- 18.5 Vyjádříme podmínky rovnováhy sil a momentů sil. Odtud  $F_1 = F_g/3$ ,  $F_2 = 2F_g/3$ . Určíme-li postupně napěťové síly působící v bodech  $G$  a  $F$  zjistíme, že tyč  $DF$  je namáhána stlačením silou  $F = 4F_g/3\sqrt{3}$ .
- 18.6 Integrovaním určíme a)  $ml^2/3$ , b)  $ml^2/12$ , c)  $mr^2$ , d)  $mr^2/2$ .
- 18.7 Řešením pohybové rovnice pro závaží  $ma = mg - T$  a pro otáčivý pohyb válce  $I\epsilon = Tr$  ( $T$  je napěťová síla vlákna,  $I$  moment setrvačnosti válce,  $\epsilon = a/r$  úhlové zrychlení válce) dostaneme  $a = mg/(m + M/2)$ .

- 18.8 a)  $v_2 = r_1 v_1 / r_2$ , b)  $m v_1^2 (r_1^2 - r_2^2) / 2 r_2^2$ , c)  $m v^2 / r$ .
- 18.9 Moment hybnosti orbitálního pohybu planety je  $m v R = m \sqrt{x M R}$  ( $M$  je hmotnost Slunce). Uvážíme-li všechny rotační pohyby v soustavě Země–Měsíc, zjistíme, že moment hybnosti této soustavy je přibližně roven  $L = M_m \sqrt{x M_z R + L_z}$ , kde  $M_m$  je hmotnost Měsíce,  $M_z$  hmotnost Země,  $R$  vzdálenost Země–Měsíc a  $L_z$  moment hybnosti zemské rotace. Protože slapové síly postupně zpomalují zemskou rotaci a zmenšují tak veličinu  $L_z$ , přičemž se celkový moment  $L$  zachovává, bude se  $R$  postupně zvětšovat. Celková rotační energie soustavy se přitom bude slapovým působením samozřejmě zmenšovat.
- 18.10  $M_2 = 0,25$  kg.
- 18.11 Z rovnováhy tíhových a odstředivých sil působících na hmotnosti  $M$  a na objímku  $C$  o hmotnosti  $m$  dostaneme  $M = m g / (\omega^2 l / \sqrt{2} - g)$  ( $l$  je délka ramen,  $\omega$  úhlová rychlost rotace).
- 18.12 Potřebný výkon  $P = F v = 2 \mu m \omega^3 r^2$ .
- 18.13 Hromádka se zhroutí, bude-li těžiště celé soustavy destiček procházet mimo základnu. Označme vodorovnou vzdálenost těžiště od středu nejnižší destičky  $x_T$ . Protože těžiště  $x_i$  každé další položené destičky se posouvá (téměř) o délku  $L/2$ , dostaneme pro  $n$  stejných destiček naložených na základní destičku  $x_T = (x_1 + \dots + x_n) / n = L(1 + 2 + \dots + n) / n a = L(n+1) / 2 a$ . Přesáhne-li  $x_T = L/2$ , tj.  $n = a - 1$ , hromádka se zhroutí. Je zajímavé, že pokud nejvyšší destička bude vzhledem k destičce pod ní posunuta téměř o  $L/2$  a ta vzhledem k níže ležící téměř o  $L/4$ , dále o  $L/6$ ,  $L/8$  atd. zůstane hromádka vždy stabilní. Může přitom obsahovat libovolný počet destiček a vrchní destička může být vzhledem k nejspodnější posunuta o libovolnou vzdálenost.
- KAPITOLA 19**
- 19.1 Moment setrvačnosti každé z tyčí je v prvním uspořádání  $4 M l^2 / 3$ , v druhém  $M l^2 / 3$ . Celkový moment setrvačnosti soustavy včetně vnitřního mechanismu je v prvním případě  $24 M l^2$ , v druhém  $16 M l^2$ . Protože celkový moment hybnosti se zachovává, změní se úhlová rychlost na  $\omega = 3 \omega_0 / 2$ . Změnu energie pak určíme jako  $\Delta E = 6 M l^2 \omega_0^2$ .
- 19.2 a) Potenciální energii určíme jako práci momentu vnějších sil integrací přes úhel  $\theta$ .  
b) Moment hybnosti rámečku získáme ze vztahu  $dL/dt = nAB|dq/dt|$  jako  $L = nABq_0$ . Na počátku pohybu má rámeček kinetickou energii  $E_K = n^2 A^2 B^2 q_0^2 / 2I$  ( $I$  je jeho moment setrvačnosti), a ta se změní v potenciální energii registračního zařízení, takže podle a) bude maximální úhel odklonění  $\theta_{\max} = nABq_0 / \sqrt{KI}$ .
- 19.3  $I = M l^2 / 12$ , nezávisí na úhlu  $\theta$ .
- 19.4 Je-li  $r_2^2 = r_1^2 - r_2^2$ .
- 19.5 Podle Pappovy věty  $V = 2\pi R \cdot \pi R^2 = 2\pi^2 R^3$ .
- 19.6 Těžištěm.
- 19.7 Poměr úhlové rychlosti v okamžiku uvolnění závaží  $\omega$  a původní úhlové rychlosti  $\omega_0$  plyne ze zákona zachování momentu hybnosti:  $\omega / \omega_0 = (M R^2 + 4 m R^2) / [(M R^2 + 4 m (R + h)^2) = 1/n$ . Odtud  $I = R[\sqrt{n + M(n-1)} / 4 m - 1]$ .
- 19.8 Provedeme transformaci souřadnic, rychlostí a zrychlení při pootočení úhel  $\theta$  a dostaneme  $F_x = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta + 2 m \dot{\theta} \omega + m \omega^2 x'$ ,  $F_y = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta - 2 m \dot{\theta} \omega + m \omega^2 y'$ . Předposlední členy odpovídají síle Coriolisové, poslední členy síle odstředivé.
- 19.9 Jediná síla, která na kouli působí ve vodorovném směru, je síla tření  $F_t = \mu g M$ . Přechod od klouzání k valení nastane v okamžiku, kdy rychlost bodu dotyku koule s rovinou klesne k nule. Označíme-li  $v_T = v_0 - \mu g t$  rychlost těžiště koule a  $\omega = 5 \mu g t / R$  úhlovou rychlost rotace způsobenou momentem síly tření, dostaneme podmínku  $v_T - \omega R = 0$ . Přechod tedy nastane v okamžiku  $t_1 = 2 v_0 / 7 \mu g$ , ve vzdálenosti  $s = v_0 t_1 - a t_1^2 / 2 = 12 v_0^2 / 49 \mu g$  při rychlosti  $v = v_0 - \mu g t_1 = 5 v_0 / 7$ .
- 19.10 Tíhovou sílu, kterou hřídel  $T$  působí na buben  $K$  a válec  $P$  rozložíme do směru  $TP$  a do směru kolmého. Podmínka pro mezní hodnotu tečné síly  $F$  mezi válcem  $P$  a hřídelí  $T$ , aby se neztratil kontakt s bubnem  $K$ , je  $F \leq M g \cos \theta$ . Tato mezní síla uděluje hřídeli  $T$  úhlové zrychlení  $\varepsilon_T = 2 g \cos \theta / R$ , odkud dostaneme úhlové zrychlení válce  $P$ :  $\varepsilon = 2 g \cos \theta / R$ .
- 19.11 Určíme-li polohu těžišť jednotlivých kvadrantů a zvažíme je příslušnými hustotami, dostaneme polohu těžiště válce  $x_T = -\sqrt{2} R / 15$ ,  $y_T = -\sqrt{2} R / 15$  ( $R$  je poloměr válce) a rovnici hledané přímky  $y = x/2$ .
- 19.12 Poloha těžiště ve středu plného kotouče je rovna poloze těžiště daného útvaru, k níž přičteme polohu těžiště vyříznuté části, takže  $x_T = R/6 = 1,67$  cm.
- 19.13 Integrací podle definice těžiště dostaneme jeho  $x$ -ovou souřadnici  $x_T = 2 R \sin(\alpha/2) / \alpha$ ,  $\alpha = L/R$ . Můžeme též použít Pappovu větu.
- 19.14  $x_T = 4 R \sin(\alpha/2) / 3\alpha$ .
- 19.15 Nejdříve určíme polohu těžiště složeného tělesa ( $x_T = -\sqrt{3}/2$  cm,  $y_T = -1/2$  cm). Z rovnic rovnováhy působících sil a momentů sil najdeme sílu, kterou válec působí na stěnu:  $F = 3\sqrt{3} g / 2 \pi \approx 8,1$  N. Po odstranění stěny udržíme těleso v rovnováze momentem dodatečné tíhové síly závaží na úsečce  $OA$  ve vzdálenosti  $r = 3\sqrt{3} M / 2 m$  cm.
- 19.16 Bod  $P$  musí být těžištěm destičky s vyříznutým trojúhelníkem. Podobně jako v úloze 19.12 určíme  $h = a(3 - \sqrt{3}) / 2 = 0,63 a$ .
- 19.17 a) Nit musí mít svislý směr. b) Z pohybových rovnic najdeme pro postupný a otáčivý pohyb cívký zrychlení  $a = g / (1 + R^2 / 2 r^2)$ .
- 19.18 a) Ze zachování momentu hybnosti  $\omega = (I_0 + m R^2) \omega_0 / (I_0 + m r^2)$ . c) Kinetická energie bude rovna práci odstředivé síly, a proto hledaná rychlost  $v = \sqrt{(I_0 + m R^2)(R^2 - r^2) \omega_0^2 / (I_0 + m r^2)}$ .

## KAPITOLA 20

20.1 Bez komentáře.

20.2 Bez komentáře.

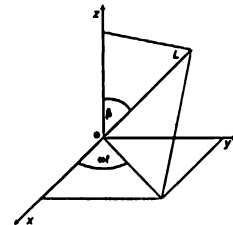
20.3 Malý úhel pootočení můžeme považovat za vektor mířící ve směru osy rotace v pravotočivém smyslu. Při postupném pootočení o dva malé úhly  $\Delta\vartheta_1$  a  $\Delta\vartheta_2$ , jejichž osy svírají úhel  $\alpha$ , bude výsledný pohyb ekvivalentní jednomu pootočení o úhel  $\Delta\vartheta = \sqrt{\Delta\vartheta_1^2 + \Delta\vartheta_2^2} + 2\Delta\vartheta_1\Delta\vartheta_2\cos\alpha$  ve směru výslednice vektorů obou úhlů. To lze zobecnit na více následných pootočení. Zároveň odtud plyne, že i úhlové rychlosti pohybu tělesa lze sčítat jako vektory.

20.4 Bez komentáře.

20.5 Plyne z geometrické interpretace smíšeného součinu vektorů, v daném případě je objem rovnoběžnostěny 406 objemových jednotek.

20.6 Při nárazu bude tělesu předána hybnost  $p$ , těžiště se začne pohybovat posuvnou rychlostí  $v = p/2m$  a těleso bude rotovat kolem osy procházející těžištěm úhlovou rychlostí  $\omega = 9p/5ml$  ( $m$  a  $l$  jsou hmotnost a délka každé z tyčí). Moment setrvačnosti tělesa je  $I = 5ml^2/12$ . Těžiště každé z tyčí se pohybuje rychlostí, která je vektorovým součtem rychlosti těžiště tělesa (ve směru osy  $x$ ) a rychlosti rotačního pohybu o velikosti  $v_r = 9p/10\sqrt{2}m$  pod úhlem  $45^\circ$  k ose  $x$  a opačných směrů. Pro poměr velikostí výsledných rychlostí dostaneme  $\sqrt{41/221} = 0,43$ .

20.7 Označme úhel mezi osou rotace a osou kotouče  $\alpha = 1^\circ$ . Lze ukázat, že vektor momentu hybnosti  $L$  bude svírat s osou rotace malý úhel  $\beta = \alpha^2$  a jeho složky se budou měnit v čase jako  $L_x = \beta L \cos \omega t$ ,  $L_y = \beta L \sin \omega t$ , kde  $L = \sqrt{5}MR^2\omega/4$ . Přitom osa  $z$  je osou rotace,  $M$  hmotnost,  $R$  poloměr a  $\omega$  úhlová rychlost kotouče (viz obrázek). Z pohybových rovnic pro změnu složek momentu hybnosti dostaneme velikost momentu sil působícího v ložiscích:  $N = dL/dt$ ,  $N = \beta\omega L = 30N \cdot m$ .



20.8 Určíme síly působící na každé z těles a z nich výsledný silový moment  $N = 2x m M r^2 \sin 2\vartheta/R^3$ .

20.9 Působící silové momenty jsou v poměru  $M/R^3$ , kde  $M$  je hmotnost a  $R$  vzdálenost Slunce, respektive Měsíce. Měsíc působí na Zemi asi dvakrát větším momentem než Slunce.

20.10 a)  $I = 8,1 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ; b)  $L = 5,9 \cdot 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ; c)  $T = 2,1 \cdot 10^{20} \text{ J}$ .

20.11 Ze zákona zachování energie  $v = \sqrt{2Mgh/(M + I/R^2)}$ . To dává pro kouli  $v = \sqrt{6gh/5}$ , kotouč  $v = \sqrt{4gh/3}$  a ve třetím případě

$$v = \sqrt{\frac{4(M_1 + m_2)gh}{3M_1 + m_2[2 + (r_2/R_1)^2]}}$$

20.12 a) Před nárazem i po něm  $v_T = v/2$ ; b)  $Mv/4$ ; c)  $6v/5$ ; d) kinetická energie se zmenší o  $Mv^2/10$ .

20.13 Při uvažované změně rozložení hmoty na povrchu Země by zůstal součin momentu setrvačnosti  $I$  a úhlové rychlosti  $\omega$  nezměněn. Při změně momentu setrvačnosti o  $\Delta I$  by se změnila úhlová rychlost o  $\Delta\omega$  a perioda rotace o  $\Delta T = T\Delta I/I$ . Předpokládáme-li, že voda v podobě polárního ledu k momentu setrvačnosti Země téměř nepřispívá a po roztání vytvořila rovnoměrnou kulovou slupku na celém zemském povrchu, dostaneme  $\Delta I = 8\pi\rho R^4\Delta R/3$  a  $\Delta T = 8\pi\rho R^4 T\Delta R/3I = 1 \text{ s}$ .

20.14 a) Rychlost těžiště po nárazu  $v_0 = J/M$ , úhlová rychlost  $\omega = 12J/MI^2$  a rychlost bodu  $A$   $v_A = J(1 - 6r/IM)$ ; b)  $AP = 2R/3$ .

## KAPITOLA 21

21.1 Jde o tzv. fyzické kyvadlo. a)  $I\ddot{\vartheta} + Mgdsin\vartheta = 0$ ; b)  $T = 2\pi\sqrt{I/Mgd}$  ( $I$  je moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace).

21.2 Je-li  $I_T$  moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm,  $T = 2\pi\sqrt{(I_T + Md^2)/Mgd}$ . a) Dané hodnotě  $T$  odpovídají  $d_{1,2} = gT^2/8\pi^2 \pm \sqrt{g^2T^4/64\pi^2 - I_T/M}$ . c) Uvedené hodnotě  $d$  odpovídá  $T_{\min} = 2\pi\sqrt{2d/g}$ .

21.3 Koeficient tuhosti pružiny je  $k = mg/A$ . Spojí-li se obě závaží, bude soustava kmitat kolem rovnovážné polohy dané protažením pružiny na délku  $D + 2A$  s periodou  $T = 2\pi\sqrt{2A/g}$ . Amplitudu určíme z počáteční podmínky dané tím, že pružina byla rozkmitána dopadem závaží  $m$  jako  $a = A/\sqrt{2}$ . Při kmitání vystoupí spojená závaží nejvýše o  $A = (\sqrt{2} - 1)$  nad původní rovnovážnou polohu před dopadem druhého závaží.

21.4 a) 2,17 cm; b)  $50 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

21.5 Určíme-li moment setrvačnosti a polohu těžiště kostry, dostaneme  $T = 2\pi\sqrt{(2/3 + \pi)R/2g} = 1,38 \text{ s}$ .

21.6 Označíme  $m = 20 \text{ g}$ ,  $m_1 = 5 \text{ g}$ ,  $m_2 = 25 \text{ g}$ . Tuhost pružiny je pak  $k = 36(m + m_1)$  a výchylka  $d = (m_2 - m_1)g/k = 21,8 \text{ cm}$ .

21.7 Je-li rychlost nárazu  $v$ , bude se po nárazu těžiště soustavy pohybovat rychlostí  $v_T = v/8$ . V těžišťové soustavě bude dvojice částic, každá o hmotnosti  $M$ , spojených pružinou harmonicky kmitat proti sobě s periodou  $T = 2\pi\sqrt{M/2k}$  a amplitudou  $a = (v\sqrt{M/2k})/4$ .

21.8 Jde o kvazielastický pohyb s konstantou  $k = mg/R_2$  a periodou  $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ . Těleso se propadne za dobu  $T/2 = 42 \text{ min}$ .

21.9  $dn/dt = \alpha n$ .



- 21.10 Bod závěsu zvolíme za počátek neinerciální vztažné soustavy a zahrneme působící setrvačnou sílu. Je-li amplituda kmitů závěsu  $a$  a jejich úhlová rychlost  $\omega$ , dostaneme pro malé kmity pohybovou rovnici  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{a\omega^2}{l}\sin\omega t$ .

Řešením této nehomogenní diferenciální rovnice dostaneme pro amplitudu ustálených kmitů  $A = aT_0^2(T^2 - T_0^2) = 4,7$  cm. ( $T$  je perioda kyvadla,  $T_0$  perioda závěsu.)

## KAPITOLA 22

Úlohy 22.1–22.10 představují důkazy vztahů známých z algebry komplexních čísel.

22.11  $\log_{11} 2 = 0,28906$ ,  $\log_{11} 7 = 0,81146$ .

## KAPITOLA 23

- 23.1 Je-li komplexní napětí  $\hat{U} = U_0 \exp(i\omega t)$ , dostaneme komplexní proudy ze vztahu analogického Ohmova zákona  $\hat{I} = \hat{U}/\hat{Z}$ . Komplexní impedance a)  $\hat{Z}_L = i\omega L$ , b)  $\hat{Z}_C = 1/i\omega C$ .

23.2 a)  $\hat{Z}_C = i\omega L + 1/i\omega C$ , b)  $(1/i\omega L + i\omega C)^{-1}$ .

23.3 c) Pro  $\gamma > 2\omega_0$  bude mít řešení tvar  $x = e^{-\gamma t/2} [A \exp(-t\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}) + B \exp(t\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2})]$ .

23.4  $A, B = \frac{1}{2} \left[ x_0 \mp \frac{v_0 + (\gamma x_0/2)}{\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}} \right]$ .

23.5 Komplexní napětí mezi body A a B je  $\hat{U}_{AB} = -\frac{1}{2} \hat{U}_{vs} \frac{R + i\omega C}{R - i\omega C}$ .

23.6 a)  $RRCL = 1$ ; b)  $I_A(\eta) = \frac{U_0 \cos(\omega t + \varphi_1)}{\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}}$ ,  $I_B(\eta) = \frac{U_0 \cos(\omega t + \varphi_2)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ ,  $\text{tg } \varphi_1 = 1/\omega RC$ ,  $\text{tg } \varphi_2 = -\omega LR$ .

## KAPITOLA 24

- 24.1 Rovnice  $m\ddot{x} + kx = 0$ ; označíme  $k/m = \gamma$  a zvolíme počáteční podmínky  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ . Řešení  $x = \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$ ,  $v = v_0 e^{-\gamma t} = v_0 - \gamma x$ .

24.2 Rovnice  $\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}U = 0$ ,  $U = U_0 e^{-t/RC}$ .

- 24.3 Rovnice  $\ddot{x} + \gamma \dot{x} = F_0/m$ . Řešením dostaneme rychlost  $v = F_0/m\gamma + Ce^{-\gamma t}$ , která se pro velká  $t$  blíží  $F_0/m\gamma$ . Pro počáteční podmínky  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = 0$  najdeme řešení  $x = F_0 (e^{-\gamma t} - 1 + \gamma t)/m\gamma^2$ .

- 24.4 a)  $U = U_0 \cos(t/\sqrt{LC})$ ; b) Jde o hustoty energie elektrického pole v kondenzátoru a magnetického pole v cívice a mění se jako  $1/2 CU_0^2 \cos^2(t/\sqrt{LC})$  a  $1/2 LU_0^2 \sin^2(t/\sqrt{LC})$  (jejich součet zůstává konstantní).

- 24.5 Podobně jako v úloze 24.4 najdeme  $U = (U_0/R) \sqrt{LC} \sin(t/\sqrt{LC})$ , takže maximální napětí  $U_{\max} = (U_0/R) \sqrt{LC}$ .

- 24.6 Původní perioda  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 1$  s, nová perioda po zavedení útlumu  $\gamma$  je  $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ . Z udaných podmínek určíme  $\gamma = 0,1386 \text{ s}^{-1} = \omega_0$ . a) Pohybová rovnice  $\ddot{x} + 0,1386 \dot{x} + 39,478 x = 0$ ; b)  $T = 1,00006$  s; c) za 20 period, za 34 period; d) Řešením pohybové rovnice dostaneme maximální ztrátový výkon 1,1 W.

- 24.7 1. Řešením rovnice  $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F/m$ , kde  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , najdeme  
 a)  $x = (F_0/m\omega_0^2) [1 - e^{-\gamma t/2} (\cos \omega t + \gamma/2\omega) \sin \omega t]$ , kde  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ ,  $\gamma < 2\omega_0$ ;  
 b)  $x = (\rho_x/m\omega) e^{-\gamma t/2} \sin \omega t$ .  
 c)  $x = (F_0/\gamma m) [(1/\omega_0) \sin \omega_0 t - (1/\omega) e^{-\gamma t/2} \sin \omega t]$ .  
 2. Při  $\omega^* = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$  nastává rezonance s amplitudou  $F_0/m\gamma\omega$ .

## KAPITOLA 25

- 25.1 V ustáleném režimu  $U_{\text{vst}} = U_0 \cdot [U_2 / (1 + R^2 C^2 \omega^2)] [\cos \omega t + \omega RC \sin \omega t]$ . Amplituda střídavé složky je potlačena 7,6 krát.

25.2 Bez komentáře.

25.3  $U_{\text{vst}} = -CRU_0 \omega \sin \omega t = CR(dU_{\text{vst}}/dt)$ .

25.4 Například obvod z úlohy 25.2, v němž zaměníme vstup a výstup.

- 25.5 a) V průběhu první půlperiody kmitů máme  $\ddot{x} + \omega^2 x = fg$ , kde  $\omega = \sqrt{k/m}$  a  $f$  je koeficient tření. Řešení vyhovující počátečním podmínkám je  $x = (A - fg/\omega^2) \cos \omega t + fg/\omega^2$ .

Během každé půlperiody klesne amplituda o  $2fg/\omega^2$ .

b)  $A \geq B + 2fg/\omega^2$ .

## KAPITOLA 26

- 26.1 Vezmeme-li za proměnnou veličinu vzdálenost bodu  $K$  od zdi, můžeme vyjádřit celkovou dobu chůze jako funkci této vzdálenosti a najít její minimum. Odpovídá mu vzdálenost  $KC = 27$  m. Týmž výsledkem bychom dostali z představy, že se takto láme světelný paprsek podle zákona  $\sin \alpha / \sin \beta = v_1 / v_2$ , kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou úhly dopadu a lomu na rozhraní a  $v_1$ ,  $v_2$  rychlosti pohybu po chodníku a po poli.
- 26.2 Je-li  $\alpha$  úhel dopadu paprsku na destičku a  $\beta$  úhel lomu, platí  $\alpha = \beta + 30^\circ$  a ze zákona lomu určíme  $\beta = 38,26^\circ$ . Potom boční posun  $PP' = 0,127$  m. Doba průchodu vzroste asi o 16 %.
- 26.3 Přirovnáme-li dobu chodu paprsku procházejícího středem čočky a paprsku procházejícího okrajem čočky, dostaneme tloušťku čočky asi 20 mm.
- 26.4 Zobrazení je symetrické vzhledem k rovině zrcadla a postava stojící před zrcadlem se jakoby otočí o  $180^\circ$ .
- 26.5 Dochází k dvojitmu odrazu.
- 26.6 Princip se užívá např. při měření vzdáleností umělých družic nebo Měsíce odrazem laserového paprsku.
- 26.7 Dochází k úplnému vnitřnímu odrazu, žádný paprsek se neláme. Jev objevil J. Kepler a dnes se využívá např. v technice optických vláken.

## KAPITOLA 27

- 27.1 Všechny paprsky musí dorazit do ohniska za stejnou dobu jako osový paprsek. Umístíme-li počátek soustavy souřadnic do vrcholu plochy a osu  $x$  ve směru optické osy, dostaneme rovnici plochy v rovině  $x$ ,  $y$  ve tvaru  $n^2 y^2 = 2Fn(n-1)x - (n^2 - 1)x^2$ .
- 27.2 Stěna kapiláry působí jako tlustá válcová čočka a vyjádření  $d'$  pomocí  $d$ ,  $D$  a  $n$  je poměrně komplikované. Pro  $d \ll D$  platí přibližně  $d' = d/n$ .
- 27.3 Plocha má tvar elipsoidu s ohnisky  $P$  a  $P'$ .
- 27.4 Jde o Keplerův dalekohled, zvětšení  $Ff$ .
- 27.5 5 cm a 4,16 cm. V prvním případě je zvětšení nekonečné, ve druhém přibližně 6 násobné.
- 27.6 Použijeme-li dvakrát rovnici pro čočkové zobrazení, dostaneme vzdálenost fotografické desky od rozptylky přibližně 25 cm.
- 27.7 Vzdálenost obrazu od ohniska při pozorování Měsíce je 0,067 mm, při pozorování družice 80 mm.
- 27.8 Využijeme-li vlastností hlavních rovin (bod v hlavní rovině v určité vzdálenosti od osy se zobrazuje v druhé hlavní rovině v téže vzdálenosti od osy), dostaneme  $F = ff/(D - f - f)$ ,  $\Delta = fD/(D - f - f)$ ,  $\Delta' = fD/(D - f - f)$ .

## KAPITOLA 28

- 28.1 a)  $|re^{i\varphi/2} + re^{-i\varphi/2}| = 2r \cos(\varphi/2)$  b)  $\left| \sum_{n=0}^{N-1} re^{in\varphi} \right| = r \sin(N\varphi/2) / \sin(\varphi/2)$ .

## KAPITOLA 29

- 29.1 Poměr amplitud pole vyzařovaného oběma anténami je  $A_2/A_1 = \sqrt{2}$  a fázový rozdíl  $\pi \sin \vartheta$  (úhel  $\vartheta$  odečítáme od směru na východ). Pro uvedené tři směry  $I(0^\circ) = 5,83 I_0$ ,  $I(30^\circ) = 3 I_0$ ,  $I(90^\circ) = 0,17 I_0$ .
- 29.2 Zářiče jsou vzdáleny o  $\lambda/4$  a fázový rozdíl mezi nimi v závislosti na úhlu  $(\pi/2)(1 - \sin \vartheta)$ . Použijeme-li výsledek úlohy 28.1b) pro  $N = 4$ , dostaneme  $I = I_0 \sin^2 [\pi(1 - \sin \vartheta)] / \sin^2 [\pi(1 - \sin \vartheta)/4]$ .
- 29.3 Dopadá-li signál pod úhlem  $\vartheta$  ke spojnici obou antén, pak malá změna úhlu  $\Delta \vartheta$  vyvolá fázový posun  $\Delta \varphi = 2\pi d \sin \vartheta \cdot \Delta \vartheta / \lambda$ . Intenzita signálu na výstupu směšovače bude  $I = 4 A^2 \cos^2(\Delta \varphi/2)$ . Je-li  $\vartheta = 90^\circ$ , pak citivost zařízení umožňuje měřit úhlovou polohu zdroje s přesností asi  $21''$ .
- 29.4 Rovnoměrný kruhový pohyb můžeme považovat za superpozici dvou kolmých harmonických oscilátorů. Podle rovnice 29.3 složky intenzity pole v rovině kolmé k paprsku  
 $E_x = -(qa\omega^2/4\pi\epsilon_0 rc^2) \cos(\omega t - \pi/2)$ ,  
 $E_y = -(qa\omega^2/4\pi\epsilon_0 rc^2) \sin(\pi/2 - \vartheta) \cos(\omega t)$ ,  $r = t - rc$ .  
 V rovině orbity je intenzita vyzařování úměrná  $\cos^2(\omega t - \pi/2)$ . Na ose orbity intenzita nezávisí na čase a je rovna dvojnásobku střední intenzity vyzařování v rovině orbity.
- 29.5 Použijeme komplexní vztahy úlohy 28.1 a pro amplitudu ve směru  $\pi/2 - \vartheta$  k linii dipólů dostaneme  
 $A(\vartheta) = A_1 [1 + \exp(i\Delta\varphi)] \sum_{n=0}^{N-1} \exp(in\Delta\varphi)$ , kde  $A_1$  je amplituda každého z dipólů,  $\Delta\varphi = \pi \sin \vartheta$  fázový posun mezi sousedními dipóly,  
 a  $\Delta\varphi' = (\pi/2)(1 - \sin \vartheta)$  fázový posun mezi dipóly v první a druhé řadě. Výsledná intenzita  $I = 2A_1^2 \sin^2 \Delta\varphi' \sin^2(N\Delta\varphi) / \sin^2 \Delta\varphi$ .
- 29.6 Označíme lineární hustotu elektronů  $\tau$ . Potom pro  $R \gg L$  máme  
 $E = -(q_e \tau L a \omega^2 / 4 \pi \epsilon_0 R c^2) \cos(\omega t + \varphi_0) \sin \vartheta$ ,  $r = t - R/c$ .
- 29.7 Intenzita vyzařování v daném směru  $I = \text{konst} \cdot \sin^2 \vartheta$ . Integrovaním přes kulovou plochu poloměru  $R$  dostaneme celkový vyzařovaný výkon  $P$  a určíme  $I = (3F/8\pi R^2) \sin^2 \vartheta$ . Intenzita vyzařování sondy přijímaná na povrchu Země pod úhlem  $45^\circ$  je  $I = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ W/m}^2$ .

### KAPITOLA 30

- 30.1 Již nepoužívaná délková jednotka angström  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ . Je-li  $n$  počet vrypů,  $m$  řád spektra a  $\lambda$  vlnová délka, bude rozlišení  $\Delta\lambda = \lambda/mn$ . Mřížka musí mít 1000 vrypů, a tedy délku 1,7 mm.
- 30.2 Rozlišovací mez lidského oka podle Rayleighova kritéria je  $\psi = 1,22 \lambda/D$ , kde  $\lambda$  je vlnová délka a  $D$  průměr zornice. Odtud zjistíme vzdálenost pozorovatele  $l = 8,3 \text{ km}$ . Neříší světlo monochromatické, je rozlišení znesnadněno.
- 30.3 a)  $h' = h F_2/F_1$ ;  
 b)  $\lambda = |\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1|/(N \cdot 10^3)$ ;  
 c) při konstantním  $\vartheta_1$  bude vzdálenost  $D = F_2 \Delta \vartheta_2$ , kde interval úhlů  $\Delta \vartheta_2$  odpovídá rozdílu úhlů obou spektrálních čar. Zderivujeme-li vztah  $\sin \vartheta_2 = \sin \vartheta_1 + m N \cdot 10^3 \lambda$  ( $m$  je řád spektra), určíme  $\Delta \vartheta_2$  a  $D = F_2 m N \cdot 10^3 \Delta \lambda / \cos \vartheta_2$ ;  
 d)  $w' = (w F_2 \cos \vartheta_1)/(F_1 \cos \vartheta_2)$ .
- 30.4 a) Z podmínky maxima  $2 \sin \vartheta = m N \cdot 10^3 \lambda$  ( $N$  je počet vrypů na 1 mm,  $m$  řád spektra) dostaneme  $\vartheta = 51,96^\circ$ ;  
 b)  $\lambda_1 = 375 \text{ nm}$  ( $m = 7$ ),  $\lambda_2 = 437,5 \text{ nm}$  ( $m = 6$ ),  $\lambda_3 = 656 \text{ nm}$  ( $m = 4$ );  
 c) Možno použít typ mřížky uvažovaný v úloze 30.6;  
 d)  $D = 11,2 \text{ mm}$  (viz úlohu 30.3c);  
 e)  $\lambda/(m N \cdot 10^3 l) = 0,7 \text{ p}_m$  ( $l = 25 \text{ cm}$  je délka mřížky).
- 30.5 Nejde o rozlišení dvou spektrálních čar, ale o stanovení maxima intenzity jedné čáry.
- 30.6 a) Dopadající svazek se bude odrážet podle zákona odrazu světla; maximum intenzity nastane, budou-li paprsky odražené o sousedních stupínkách ve fázi. Směr, v němž mřížka blyští, bude dán úhlem  $\vartheta$ , pro nějž  $\vartheta = \vartheta_0$ ,  $\sin \vartheta = m \lambda$  ( $m$  je řád spektra). Je-li  $\Delta \lambda$  interval vlnových délek viditelného světla, bude  $\Delta \vartheta = m \Delta \lambda / 2 d \cos \vartheta_0$ .
- 30.7 Amplituda vlny, která se v interferometru odrazila  $2n$  krát, je  $A_n = T A_0 [R^2 \exp(2\pi l D/\lambda)]^{2n}$ . Sečteme-li tyto amplitudy přes všechna  $n$ , dostaneme pro intenzitu procházejícího světla  $I = I_0 T^4 / |1 - R \exp(4\pi l D/\lambda)|^2$ .

### KAPITOLA 31

- 31.1 Podle rovnice (31.19) pro  $\omega_0 \ll \omega$   $n = 1 - 6,5 \cdot 10^{-7}$ .
- 31.2  $n = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ .
- 31.3 b)  $I = I_0 \exp(-N q^2 z / \epsilon_0 m \gamma \omega)$ .
- 31.4 a) Použijeme vyjádření intenzity elektrického pole (29.1), hustotu toku energie  $S$  vystředujeme a zintegrujeme přes prostorový úhel. Výsledný zářivý výkon  $P = q^2 \omega^4 x_0^2 / 12 \pi \epsilon_0 c^3$ ;  
 b)  $\gamma_R = 2 e^2 \omega^2 / 3 m c^3$ ;  
 c)  $\Delta \lambda = 2 \pi c \gamma_R / \omega^2 = q^2 / 3 \pi m \epsilon_0 c^2 = 10^{-5} \text{ nm}$ .

### KAPITOLA 32

- 32.1 Zářivý výkon oscilátoru za jednu periodu,  $P_r = (2 e^2 / 3 m c^3 T) \int_0^T (d^3 x / dt^3) (dx/dt) dt$ ,  $T = 2\pi/\omega$  (srv. úlohu 31.4).
- 32.2 Při průchodu jednotkovou plochou nekonečně malé tloušťky  $dx$  klesá intenzita světla o  $dI = -IN\sigma dx$ , kde  $N$  je koncentrace rozptylových center a  $\sigma$  jejich efektivní srážkový průřez rozptylu. Integrováním dokážeme výsledný vztah.
- 32.3 Použijeme rovnici 31.19.
- 32.4 Použijeme výsledky úloh 32.2 a 32.3; index lomu vzduchu  $n = 0,999708$ . Stačí odhadnout tloušťku atmosférické vrstvy, kterou projde světlo v prvním a druhém případě. Dostaneme  $I(90^\circ) = 0,78 I_0$ ,  $I(10^\circ) = 0,24 I_0$ .
- 32.5 Charakter a polarizaci rentgenového záření můžeme studovat při jeho průchodu vhodnými krystaly.
- 32.6 Za předpokladu, že hustota volných elektronů v uvažovaném prostoru je konstantní z podmínky oslabení slunečního světla rozptýlen v K koruně dostaneme koncentraci elektronů  $N_0 = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ .
- 32.7 Tzv. Impedance vakua  $377 \Omega$ .
- 32.8 Záleží na velikosti prachových částic. Jejich účinek bude největší, bude-li rozměr částic srovnatelný s vlnovou délkou světla. Pak můžeme brát účinný průřez přibližně  $\sigma = \pi \lambda^2$ . Je-li hmotnost částice rovna  $m$ , jejich koncentrace  $N$  a vzdálenost hvězdy  $r$ , platí  $N \sigma r = \ln 100$ . Odtud na jednotku plochy bude připadat  $3 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^2$  částic.
- 32.9 a) Použijeme výsledek úlohy 29.6, odkud  $E = -(q_e N \chi E_1 \omega^2 / 4 \pi \epsilon_0 R c^2) \cos(\omega t + \varphi_0) \sin \vartheta$ . Zintegrujeme-li intenzitu rozptýleného záření  $S = \epsilon_0 c E^2$  a vystředujeme v čase, dostaneme rozptýlený zářivý výkon  $P_r = N^2 \chi^2 \omega^4 q_e^2 E_1^2 / 12 \pi \epsilon_0 c^3$ . Dělíme-li ho dopadajícím výkonem  $P_0 = \epsilon_0 c E_0^2 / 2$ , najdeme účinný průřez  $\sigma = N^2 \chi^2 \omega^4 q_e^2 E_1^2 / 6 \pi \epsilon_0^2 c^4 E_0^2$ .  
 b) Jako  $\cos^2 \vartheta$ .

### KAPITOLA 33

33.1  $I = (I_0 \sin^2 2\theta) / 8.$

33.2  $I = I_0 \left[ \frac{1}{2} (\alpha^4 + \epsilon^4) \cos^2 \theta + \alpha^2 \epsilon^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \epsilon^2) \alpha \epsilon \sin 2\theta \right].$

33.3 Bez komentáře.

33.4 Viz úlohu 29.4. V prvním případě je záření kruhově polarizováno, v druhém lineárně polarizováno.

33.5 Z podmínky fázového posunu  $\Delta\varphi = 2\pi(n_o - n_e) d / \lambda = \pi/2$  dostaneme  $d = 1,67 \cdot 10^{-2}$  mm.

33.6 Student zná Fresnelovy vzorce a index lomu vody  $n = 1,67$ . Pak snadno vypočítá úbytek jasů Měsíce na 35 %. Pokud jde o přítelkyni, bude si muset poradit sám.

33.7 Odrazí se  $(n - 1)^2 / (n + 1)^2 = 17\%$  dopadajícího světla. Brewsterův úhel  $\theta_B = 67,5^\circ$ .

33.8 Fázový posun pro světlo o  $\lambda_1 = 410$  nm bude přibližně  $0,8 \pi$ , světlo bude elipticky polarizováno.

33.9 Necháme na destičku dopadat světlo polarizované v rovině dopadu a budeme měnit úhel dopadu. Tak můžeme určit Brewsterův úhel a index lomu.

### KAPITOLA 34

34.1  $x = -R \cos \theta, z = A \theta + R \sin \theta$ ; bod opisuje zkrácenou cykloidu. Její rovnice je zadána parametricky. Dvojnásobným integrováním najdeme  $d^2x/dt^2 = (AR \cos \theta + R^2) c^2 / (A + R \cos \theta)^3$ .

34.2  $d^2x/dt^2 = -(1 - vR/xc) c^2 x / R^2 (1 - vx/cR)^3$ .

34.3 Použijeme výsledek předešlé úlohy, kde  $x = R$ . Poměr intenzit bude  $I_1/I_2 = \left(1 + \frac{v}{c}\right)^4 / \left(1 - \frac{v}{c}\right)^4$ .

34.4 Plyne z transformace úhlu, který vlnový vektor svírá s osou  $x$ , resp.  $x'$  v nehybné a pohybující se vztažné soustavě.

34.5 Energie pohybujícího se elektronu  $E = m_e c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , kde  $m_e c^2 = 0,511$  MeV. Odtud určíme rychlost  $v$ .

34.6 Ze vztahu pro Dopplerův jev (34.12)  $v = 500$  km/s.

34.7 600 nm.

34.8 Z aberace můžeme určit oběžnou rychlost Země  $v$ , odkud  $R = vT/2\pi, T = 1$  rok.

34.9 a) Obě sily jsou nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti od Slunce.

b) Označíme-li intenzitu slunečního záření na zemské dráze  $P$ , bude síla radiačního tlaku na částici  $F_r = P c \pi R^2$ . Přirovnáme-li ji gravitační síle, dostaneme  $R = 3 P c r / 4 \rho M_s = 0,6 \mu\text{m}$  ( $\rho$  je hustota částic ledu,  $M_s$  hmotnost Slunce,  $r$  poloměr zemské dráhy).

### KAPITOLA 38

38.1 Podle (32.13) můžeme šířku spektrální čáry vyjádřit pomocí kvality  $Q$  jako  $\Delta\lambda = 2\pi c \Delta\omega / \omega^2 = \lambda / Q$  a dobu života atomu ve vzbuzeném stavu  $\Delta T = Q / \omega$ . V kvantové fyzice energie a hybnost  $E = \hbar\omega, p_x = \hbar k_x$ , odkud  $\Delta E \Delta T = \hbar \Delta\omega \Delta T = \hbar$ . Použijeme-li vztahy  $\Delta x = c \Delta T, \Delta p_x = \hbar \Delta k_x$ , kde  $k_x = 2\pi/\lambda$ , dostaneme též  $\Delta x \Delta p_x = \hbar$ .

38.2 Kombinací konstant  $\hbar, m_e, e^2 = q_e^2 / 4\pi\epsilon_0$  (kde  $m_e$  a  $q_e$  je hmotnost a náboj elektronu) dostaneme veličinu  $r_B = \hbar^2 / m_e e^2 = 5,29 \cdot 10^{-11}$  m, která má rozměr délky. Z relace neurčitosti  $\Delta E = \Delta p^2 / 2 m_e = m_e e^4 / 2 \hbar^2 = 13,6$  eV (odpovídá ionizačnímu potenciálu vodíku).

38.3 Podle (38.17) dostaneme 486,0 nm, 656,0 nm, 1880 nm.

### KAPITOLA 39

39.1  $TV^{\gamma-1} = \text{konst}, T p^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{konst}$

39.2 Považujeme-li proces huštění za adiabatický a použijeme-li vztahy z úlohy 39.1, dostaneme  $T_2 = T_1 (p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} = 145^\circ\text{C}$ .

39.3 a) Plyn rozpíná se do vakua nekoná práci. Proto  $T = T_0, V = 2 V_0, p = p_0/2$ .

b) Plyn koná práci, proces je adiabatický. Pro helium  $\gamma = 5/3$ . Jsou-li  $T_0, V_0, p_0$  parametry původního stavu, budou výsledné parametry  $T = 0,629 T_0, V = 2 V_0, p = 0,315 p_0$ .

39.4 a) Přírůstek tlaku při změně výšky o  $dh$  je roven tlze vrstvičky tekutiny jednotkového obsahu plochy  $dp = \rho g dh$ .

b) Pro atmosférický vzduch dostaneme za použití Boyleova-Mariotteova zákona  $p/\rho = \text{konst}$  známý barometrický vzorec  $p = p_0 \exp(-\text{konst} \cdot h)$ ; konstanta v exponentu  $\text{konst} = \mu g / RT = \rho_0 g / p_0$ , kde  $p_0$  a  $\rho_0$  jsou tlak a hustota vzduchu u povrchu Země.

39.5 a) Budeme řešit rovnici  $d T / dh = -[(\gamma-1)/\gamma] T_0 \rho_0 g / p_0$ , neboli  $d T / dh = -\mu g (\gamma-1) / R \gamma$  s výsledkem

$$T(h) = T_0 - [(\gamma-1)/\gamma] T_0 \rho_0 g h / p_0 = T_0 - \mu g (\gamma-1) h / R \gamma.$$

Použijeme-li pro vzduch molární hmotnost  $\mu = 0029$  kg/mol a  $\gamma = 1,40$ , dostaneme pokles teploty vzduchu na každý kilometr o 9,8 K/km. Skutečně naměřená hodnota v dolních vrstvách atmosféry je asi 6,5 K/km, což odpovídá  $\gamma = 1,25$ .

b) Je-li atmosféra v tepelné rovnováze ( $T = \text{konst}$ ), pak podmínku mechanické rovnováhy udává barometrický vzorec odvozený v úloze 39.4. Je-li v různých vrstvách atmosféry různá teplota, může dojít k nestabilitě, vertikálnímu proudění vzduchu. Máme určit, jak velký musí být gradient teploty, aby se rovnováha atmosféry narušila. Je možno uvažovat dva objemové elementy vzduchu jednotkové hmotnosti v různých výškách. Pokud si tyto elementy vymění místo a energie přitom poklesne, bude situace nestabilní (atmosféra se snaží zaujmout stav s nejnižší energií). Podmínku stability proto můžeme zapsat jako  $dU/dh + \rho dV/dh > 0$ , kde  $U = pV(\gamma - 1)$  je vnitřní energie. Použijeme-li dále stavovou rovnici ideálního plynu a rovnici pro změnu tlaku s výškou z úlohy 39.4 a), dostaneme podmínku stability  $dT/dh \geq -\mu g(\gamma - 1)/R\gamma$ .

39.6  $W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1 \ln(V_1/V_2) = 10^5 \text{ J}$  (indexy 1 a 2 odpovídají počátečnímu a konečnému stavu).

39.7 Z rovnice adiabaty  $p_A = 3,17 p_0$ ,  $p_B = 2,64 p_0$ .

39.8 S uvažováním zákona adiabaty po zintegrování  $W = - \int_{V_0}^{V_0/2} p dV = p_0 V_0 [2^{(\gamma-1)} - 1]/(\gamma - 1)$ . Poměr pro oba plyny  $W_A/W_B = 1,13$ .

39.9 V konečném stavu bude platit  $pV_1 = N_1 kT_1$ ,  $pV_2 = N_2 kT_2$ , kde  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $N_1 + N_2 = N$  celkový počet molekul kyslíku rovný  $N = p_0(V_1 + V_2)/kT_0$  (index 0 odpovídá počátečnímu stavu, indexy 1 a 2 konečnému stavu v obou nádobách). Z těchto vztahů dostaneme výsledný tlak  $p = p_0 T_2(V_1 + V_2)/T_0 [V_2 + (T_2/T_1)V_1] = 1,11 p_0$ , kde  $p_0$  je atmosférický tlak.

39.10 Podobně jako v úloze 39.9 určíme celkový počáteční počet molekul  $N = p_0 V_1/kT_0$ , kde  $p_0$  je atmosférický tlak a  $T_0$  původní termodynamická teplota. Je-li  $p_p = p_1 - p_2$  udaný přetlak, máme ve výsledném stavu  $(p_p + p_2)V_1 = N_1 kT$ ,  $p_2 V_2 = (N - N_1)kT$ . Odtud  $p_2 = V_1(p_0 T - p_p T_0)/(V_1 + V_2)T_0 = 0,262 p_0$ .

39.11 Z Avogadrova zákona určíme celkový počáteční počet molekul  $N_2O_4$  rovný  $N$ . Po odpaření a disociaci bude celkový počet molekul v nádobě  $pV/kT$ , z toho  $2\alpha N$  molekul  $NO_2$  a  $(1 - \alpha)N$  molekul  $N_2O_4$ , kde  $\alpha$  je stupeň disociace. Potom  $\alpha = pV/NkT - 1 = 13\%$ .

39.12 Teplu dodané při stálém tlaku  $Q = 5/2 R(T_2 - T_1)$ . Odtud  $T_2 = T_1 + 2Q/5R = 1740 \text{ K}$ .

Plyn vykonal práci  $W = p_1(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1) = 2Q/5 = 3,32 \text{ W} \cdot \text{h}$  a jeho vnitřní energie je  $U = 3/2 R T_2 = 21700 \text{ J}$ .

#### KAPITOLA 40

40.1 Jako přibližný odhad  $P = F\bar{v}_x$ , kde  $\bar{v}_x = \sqrt{3kT/m}$  je střední kvadratická rychlost molekul.

40.2 Leží-li stěna v rovině  $yz$ , pak za jednotku času na ni budou dopadat částice, jejichž vzdálenost od stěny je číselně menší nebo rovna  $v_x$ , kde  $v_x$  je příslušná složka rychlosti. Protože částice mají Maxwellovo rozdělení, bude tento počet

$$n = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_0^{v_x} v_x e^{-mv_x^2/2kT} dv_x = n_0 \bar{v}/4, \text{ kde } n_0 \text{ je koncentrace částic a } \bar{v} \text{ střední aritmetická rychlost molekul rovna}$$

$$\bar{v} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2kT} dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Přejdeme-li ke kinetické energii částic  $\epsilon$ , můžeme psát  $n = n_0 \frac{2\pi}{m^2} \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty \epsilon e^{-\epsilon/kT} d\epsilon$ .

Integrací v příslušných mezích snadno zjistíme, že počet dopadajících molekul s energiemi většími než  $3kT/2$  je  $0,55 n$  a většími než  $9kT/2$  je  $0,061 n$ .

40.3 a)  $C_V = 3R/2 = 12,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . b)  $C_V = 7R/2 = 29,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

40.4 Označíme-li  $J$  hustotu toku plynu, pak platí  $J = \rho v = \rho' v'$ ,  $F = AJ/(v - v')$ ,  $\left[ \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{v^2}{2} \right] J + \frac{Q}{A} = \left[ \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho'} + \frac{v'^2}{2} \right] J$ .

Označíme-li rychlost zvuku  $c_x = \sqrt{\gamma p/\rho}$ , řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$a) v' = \sqrt{\left( v + \frac{c_x^2}{(\gamma - 1)v} \right)^2 + \frac{2Q}{AJ} - \frac{c_x^2}{(\gamma - 1)v}}, \text{ b) } T' = Tv/v, \text{ c) } F = AJ(v - v').$$

40.5 Označíme-li  $\mu$  hmotnost paliva spotřebovávaného za sekundu a  $h$  jeho výhřevnost, pak účinnost vzduchového reaktivního motoru bude  $\eta = Fv/\mu h$ , kde tažná síla  $F$  byla odvozena v úloze 40.4. Dosadíme-li pro vzduch  $\gamma = 8/7$  a rychlost  $v = 800 \text{ km/h}$ , dostaneme účinnost  $\eta = 12\%$ . Při malých rychlostech závisí účinnost pouze na rychlosti vztahem  $\eta = (\gamma - 1)v^2/c_x^2$ .

40.6  $\gamma_{\text{max}} = 0,368$ .

40.7 Pro zemskou atmosféru je parametr  $h_x = kT/mg = 8,8 \text{ km}$ , v okolí Slunce  $h_s = 113 \text{ km}$ . Udává přibližně výšku izotermické atmosféry.

#### KAPITOLA 41

41.1 a)  $T = 11\,600 \text{ K}$ , b)  $kT = 0,025 \text{ eV}$ , c)  $\lambda = 1,24 \mu\text{m}$ .

41.2 Jde o Stefanův-Boltzmannův a Wienův zákon.

- 41.3 Pro danou vlnovou délku určíme veličinu  $\hbar\omega/k = 4,64 \cdot 10^4 \text{ K}$ .  $\hbar$  je Planckova konstanta a  $k$  Boltzmannova konstanta. Pak z Planckova zákona uvedeného v úloze 41.2 najdeme  $I_1/I_2 = \exp\left[\frac{\hbar\omega}{k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = e^{11,6}$ .

#### KAPITOLA 42

- 42.1  $1 \text{ eV/atom} = 96\,520 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
- 42.2 Bez komentáře.
- 42.3 Relativní chyba při určení hustoty  $\Delta n/n = (E/kT)(\Delta E/E)$  bude při  $E/kT = 2,4$  asi 7 %.
- 42.4 Při teplotách menších než  $300^\circ\text{C}$  se uplatní elektrony uvolněné atomy příměsí, při vyšší teplotě se uvolňují elektrony z atomů křemíku (energie odpovídající šířce zakázaného pásu je 1,2 eV).

#### KAPITOLA 43

- 43.1 Srovnějte řešení úlohy 1.1. Koncentrace molekul kyslíku  $n_0 = p/kT$ , odkud  $l = kT/(\pi p d^2) = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ . Střední doba života  $\tau = l/\bar{v} = l\sqrt{\pi m/8kT} = 2,4 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ .
- 43.2 Pravděpodobnost toho, že molekula projde bez srážky vzdálenost  $L$  je  $\exp(-L/l)$ . Z podmínky  $N \exp(-L/l) < 0,5$  dostaneme  $L > 56 l$ .
- 43.3 Na jednu molekulu připadá vnitřní energie  $kT(\gamma - 1)$  (pro jednoatomový plyn  $\gamma = 5/3$ , pro dvouatomový plyn  $\gamma = 7/5$  a pro víceatomový plyn  $\gamma = 4/3$ ). Předpokládáme, že molekuly přilétají k ploše jednotkového obsahu nastavené kolmo ke gradientu teploty ze vzdálenosti  $l$  rovné střední volné dráze. Po vystředování podle směrů dostaneme hustotu toku energie  $S = n_0 \bar{v} k [T(-l) - T(+l)]/6 (\gamma - 1) = -[n_0 \bar{v} k l/3 (\gamma - 1)] (dT/dx) = -\chi (dT/dx)$ , takže  $\chi = n_0 \bar{v} k l/3 (\gamma - 1) = \rho \bar{v} l c_v/3$ , kde  $\rho$  je hustota plynu a  $c_v$  je měrná tepelná kapacita plynu při stálém objemu. Koefficient  $1/3$  jsme dostali odhadem při středování směrů rychlostí a autoři úlohy jej nepovažují za podstatný.
- 43.4 Postup analogický použitému při řešení úlohy 43.3 dá  $\eta = n_0 \bar{v} m l/3 = \rho \bar{v} l/3$ .
- 43.5 Postupem použitým při řešení úlohy 43.3 dostaneme pro hustotu toku energie  $S = n_0 \bar{v} k \Delta T/6 (\gamma - 1)$  a pro hustotu toku hybnosti  $G = n_0 \bar{v} m \Delta v/6$ .
- 43.6 Pohyblivost iontu definujeme vztahem  $\mu = l/m\bar{v}$ , kde  $m$  je hmotnost iontu a  $\bar{v}$  je stejný v obou plynech. Střední volná dráha je nepřímo úměrná koncentraci plynu a pravděpodobnosti srážky (srážkovému průřezu). Ve směsi plynů se tedy budou počítat převrácené hodnoty střední volné dráhy a výsledná pohyblivost  $\mu = \mu_A \mu_B / (\mu_A + \mu_B)$ .

#### KAPITOLA 44

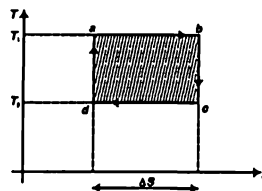
- 44.1 Určíme dílčí změny entropie podél jednotlivých částí cyklu

$$\Delta S_{AB} = \Delta S_{DC} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{dQ}{T} = \frac{kN}{\gamma - 1} \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = \frac{kN}{\gamma - 1} \ln \frac{T_B}{T_A} = \frac{kN}{\gamma - 1} \ln \frac{p_B}{p_A}, \text{ podobně}$$

$$\Delta S_{BC} = \Delta S_{AD} = \frac{kNY}{\gamma - 1} \ln \frac{T_C}{T_B} = \frac{kNY}{\gamma - 1} \ln \frac{V_C}{V_B}, \text{ a zjistíme, že } \Delta S_{ABC} = \Delta S_{ADC} = \frac{kN}{\gamma - 1} \ln (\rho_C V_C^\gamma / \rho_A V_A^\gamma) = 30,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

- 44.2 Použijeme výsledek úlohy 39.1 a určíme

$$\Delta S = \int_a^b \frac{2Q_1}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int_a^b p dV = Nk \ln \frac{V_b}{V_a} = Nk \ln \left[ \frac{V_c}{V_a} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma - 1)} \right]$$



- 44.3 66,3 %.

- 44.4 a)  $V_b = 8,8 \text{ l}$ ,  $V_d = 12,3 \text{ l}$ , b)  $Q_{ab} = RT_1 \ln \frac{V_b}{V_a} = 1\,270 \text{ J}$ , c)  $Q_{cd} = -(T_2/T_1) Q_{ab} = -952 \text{ J}$ , d) 25 %, e)  $0,11 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

- 44.5 Podobně jako v úloze 44.2 je  $\Delta S = Nk \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{\mu} R \ln \frac{p_1}{p_2}$ , kde  $M$  je hmotnost plynu a  $\mu$  jeho molární hmotnost. Potom  $\Delta S/M = 11 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

#### KAPITOLA 45

- 45.1 Je-li  $R$  poloměr Slunce,  $\alpha$  jeho úhlový průměr viditelný ze Země a  $R_s$  vzdálenost Slunce, pak můžeme vyjádřit  $R = R_s \alpha/2$ . Vyzařuje-li Slunce s teplotou  $T$ , a na měděné kouli se díky dobré tepelné vodivosti ustaví všude teplota  $T'$ , bude v tepelné rovnováze  $\sigma^2 T'^4/4 = 4 T^4$ , takže  $T' = T\sqrt{4}/2 = 266 \text{ K}$ . Teplota koule není příliš velká a nezávisí na jejím poloměru.
- 45.2  $T = (K/\sigma)^{1/4} = 396 \text{ K}$  ( $K$  je sluneční konstanta,  $\sigma$  Stefanova-Boltzmannova konstanta  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ ).
- 45.3 Z bilance vyzařované energie najdeme teplotu obálky  $T_0 = (r^2/2R^2)^{1/4} T$ , odkud poměr intenzity vyzařované systémem s obálkou a bez ní je  $R^2 T_0^4 / r^2 T^4 = 1/2$ .

- 45.4 Označíme-li  $n$  koncentraci částic v centru Slunce a uvážíme-li, že hustota sluneční látky je určena převážně protony, dostaneme pro tlak plynu  $p = nkT = 2 \rho RT / \mu = 1,7 \cdot 10^{16}$  Pa. ( $\mu$  je molární hmotnost jednoatomového vodíku). Ve srovnání s tím je radiační tlak  $p_r = 4 \sigma T^4 / 3c = 7,2 \cdot 10^{14}$  Pa.
- 45.5 Podle Clausiovy-Clapeyronovy rovnice se tlak soustavy, v níž jsou dvě fáze (např. voda a pára) v rovnováze mění s teplotou podle vztahu  $dp/dT = L / (T \Delta v)$ , kde  $L$  je měřené latentní výparné teplo a  $\Delta v$  měrný objem (v daném případě páry, neboť měrný objem vody lze zanedbat). Tlak je určován atmosférickým tlakem vzduchu, pro nějž  $dp/dz = -\rho g$ . Změna teploty varu s výškou bude  $dT/dz = (dT/dp)(dp/dz) = -T \Delta v \rho g / L = 3,2$  °C/km.
- 45.6 Zahříváme-li plyn při stálém tlaku a dodáme mu teplo  $\Delta Q$ , bude  $\Delta Q = C_p \Delta T = \Delta U + p \Delta V = C_v \Delta T + R \Delta T$ .
- 45.7 Použijeme Clausiovu-Clapeyronovu rovnici; z tabulek závislosti tlaku sytých vodních par na teplotě najdeme  $dp/dT = 50$  Pa · K<sup>-1</sup>. Odtud  $L = \Delta v T (dp/dT) = 2,8 \cdot 10^6$  J · kg<sup>-1</sup>.
- 45.8 Dopadající a vyzařovaný tok zářivé energie v případě absolutně černého tělesa je  $I = \sigma T^4$ . Jestliže těleso pohlcuje tok  $A I$  a odráží  $(1 - A)I$ , bude vyzařovat tok  $A I = A \sigma T^4$ .
- 45.9 a) Plyne z Clausiovy-Clapeyronovy rovnice  $dp/dT = L / T (\Delta v_1 - \Delta v_2)$ , kde  $L > 0$  je latentní teplo tání,  $\Delta v_1$  a  $\Delta v_2$  měrné objemy kapaliny a pevné látky. Pro vodu  $\Delta v_2 > \Delta v_1$ .
- b) Integrací Clausiovy-Clapeyronovy rovnice dostaneme  $T = T_0 \exp [p (\Delta v_1 - \Delta v_2) / L]$ . Odhadneme-li tlak brusle na led jako  $10^6$  Pa,  $\Delta v_2 - \Delta v_1 = 8 \cdot 10^{-5}$  m<sup>3</sup> · kg<sup>-1</sup>,  $L = 3,35 \cdot 10^5$  J · kg<sup>-1</sup> a určíme konstantu  $T_0$  za normálního tlaku a teploty, zjistíme, že exponenciální funkci můžeme aproximovat rozvojem do mocninné řady. Hledaná nejnižší teplota leží jen nepatrně pod Celsiovou nulou ( $= -0,06$  °C). Za mrazivého počasí nebude led pod bruslí tát.

#### KAPITOLA 47

- 47.1 Rychlost zvuku  $c_z = \sqrt{\gamma p / \rho} = \sqrt{\gamma R T / M} = \sqrt{\gamma T / \mu}$ , kde  $\mu$  je molární hmotnost plynu. Pro hélium  $\gamma = 5/3$ , pro vodík  $\gamma = 7/5$ , takže  $c_z(\text{He}) / c_z(\text{H}_2) = 0,78$ .
- 47.2 Výška tónu je úměrná  $\sqrt{T}$ ; hledaná teplota je 99 °C.
- 47.3 Vzrostla by v poměru rychlostí zvuku, tj. 2,9krát (srovnej úlohu 47.1).
- 47.4 a) Označíme  $\rho'$  a  $p'$  proměnnou část hustoty a tlaku ve zvukové vlně. Potom  $\rho' = \rho' / c_z^2 \leq 10^{-5}$  kg · m<sup>-3</sup>.
- b) Relativní změna hustoty při výchylce  $\chi$   $\rho' / \rho_0 = -\partial \chi / \partial x$ , takže  $\chi_m = \rho'_{\max} c_z / \rho_0 \omega = 2,5 \cdot 10^{-7}$  m je srovnatelné se střední volnou dráhou.
- c)  $I = (1/2) \rho_0 \omega^2 \chi_m^2 c_z = 5,4 \cdot 10^{-4}$  W · m<sup>-2</sup>.
- 47.5 Natahujeme-li gumový pásek, bude frekvence jeho kmitů úměrná  $(1/L) \sqrt{T/r}$ , kde  $L$  je délka,  $T$  napěťová síla a  $r$  lineární hustota. Protože  $T$  je úměrné  $L$ , a  $r$  nepřímo úměrné  $L$ , frekvence na  $L$  nezávisí. U struny se však mění pouze  $T$ .
- 47.6  $\partial^2 y / \partial x^2 = (r / T) \partial^2 y / \partial t^2$ ,  $v = \sqrt{T/r}$ .
- 47.7 Bez komentáře.

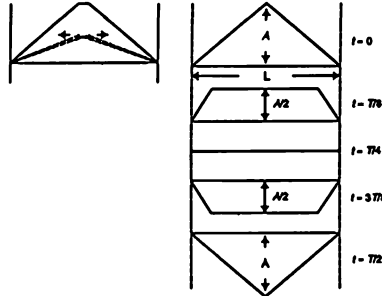
#### KAPITOLA 48

- 48.1 Platí  $v_r = \sqrt{g \lambda / 2\pi} = \sqrt{g/k}$ ,  $\omega = v_r k = \sqrt{gk}$ ,  $v_g = \partial \omega / \partial k = v_r / 2$ . Pro  $\lambda = 1000$  m,  $v_r = 39,5$  m · s<sup>-1</sup>.
- 48.2  $v_g = (\lambda / 4\pi) (12 \pi^2 \sigma / \rho \lambda^2 + g) / \sqrt{(2\pi \sigma / \lambda \rho) + (\lambda g / 2\pi)}$ .
- 48.3 Podle vztahu z úlohy 48.2 dostaneme  $v_r = 24,4$  cm · s<sup>-1</sup> a  $v_g = 17,8$  cm · s<sup>-1</sup>.
- 48.4 Z podmínky minima funkce  $v_r(\lambda)$ ,  $\lambda = 1,5$  cm,  $f = 14,4$  Hz.
- 48.5 Podle Dopplerova vztahu pro změnu frekvence při vzájemném pohybu zdroje vlnění a pozorovatele rychlostí  $v$  uslyší pozorovatel zvuk o frekvenci  $f = f_0 (1 \pm v / c_z)$ . Strojvůdce uslyší zvuk  $f_0 = 340$  Hz a ozvěnu 350 Hz, tedy rázy o frekvenci 10 Hz. Člověk stojící na zemi uslyší zvuk  $f = 335$  Hz a ozvěnu 345 Hz, tedy opět rázy o téže frekvenci.

#### KAPITOLA 49

- 49.1 Označíme-li též  $k/m_1 = \omega_1^2$ ,  $k/m_2 = \omega_2^2$ , máme  $\ddot{x} + (\omega_0^2 + \omega_1^2)x - \omega_1^2 y = 0$ ,  $\ddot{y} + (\omega_0^2 + \omega_2^2)y - \omega_2^2 x = 0$ .
- 49.2 Pro normální módy je  $\Omega_1 = \omega_0$ ,  $\Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2}$ , pro  $\Omega_1$  je  $A = B$ , pro  $\Omega_2$  je  $A = -(m_2 / m_1) B$ .
- 49.3 Dosadíme do rovnice  $\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ , kde  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$  je Laplaceův operátor.
- 49.4 Nejmenší frekvence odpovídá  $l = m = n = 1$  a je rovna  $\omega_0 = 7 \sqrt{\pi / 6} a$ . Nejnižší další frekvence dostaneme násobením  $\omega_0$  1,12; 1,25; 1,29; 1,34; 1,48; 1,57; 1,65; 1,79; 1,86; 1,93 ...

- 49.5 Počáteční průběh struny si můžeme představit jako superpozici dvou stejných trojúhelníkových průběhů poloviční výšky, které se začnou pohybovat opačnými směry. Na koncích struny se odrážejí tak, že jejich výchylka mění znamení.



#### KAPITOLA 50

- 50.1 a) Do uvedené řady dosadíme  $x = \pi/2$ , přičemž  $f(\pi/2) = 1$ .  
 b) Vypočítáme integrál druhé mocniny uvedené řady a položíme  $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 2\pi$ .  
 c) Hledaný součet nekonečné řady vyjádříme jako  $\Sigma = \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right) = \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) + \frac{1}{4} \Sigma$ .  
 Z této rovnice vypočítáme  $\Sigma$  a použijeme výsledek b).
- 50.2  $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left( \cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right)$ .
- 50.3 a) Vypočítáme integrál druhé mocniny uvedené řady a položíme  $\int_0^{2\pi} g^2(x) dx = 2\pi/3$ .  
 b) Hledaný součet nekonečné řady vyjádříme jako  $\Sigma = \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) + \frac{1}{2^4} \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots\right) = \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) + \frac{1}{2^4} \Sigma$ .  
 Z této rovnice vypočítáme  $\Sigma$  a použijeme výsledek a).
- 50.4 Bez komentáře.
- 50.5  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$ .
- 50.6 a)  $\bar{V} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} V_0 \sin \omega t dt = \frac{2V_0}{\pi}$ . b)  $a_2 = \frac{2}{T} \int_0^T V(t) \cos 2\omega t dt = \frac{2V_0}{T} \int_0^T |\sin \omega t| \cos 2\omega t dt = \frac{8V_0}{3\pi}$ .
- 50.7 a) Je-li  $V_{\text{vst}} = V_0 \sin \omega t$ , dostaneme  $V_{\text{vst}} = (V_0 + 3eV_0^2/4) \sin \omega t - (eV_0^3/4) \sin 3\omega t$ .  
 b) Je-li  $V_{\text{vst}} = A \sin \omega_1 t + B \sin \omega_2 t$ , dostaneme  
 $V_{\text{vst}} = (A + 3eA^3/4 + 3eAB^2/2) \sin \omega_1 t + (B + 3eB^3/4 + 3eA^2B/2) \sin \omega_2 t - (eA^3/4) \sin 3\omega_1 t - (3eA^2B/4) \sin(2\omega_1 + \omega_2)t + (3eA^2B/4) \sin(2\omega_1 - \omega_2)t - (3eAB^2/4) \sin(\omega_1 + 2\omega_2)t - (3eAB^2/4) \sin(\omega_1 - 2\omega_2)t - (eB^3/4) \sin 3\omega_2 t$ .



## REJSTŘÍK VYBRANÝCH POJMŮ A JMEN

- A**  
aberace 366, 463  
absorpce 419  
Adams 98  
amplitudová modulace 650  
Anderson 710  
anomální lom 446  
antičástice 710  
Aristotelés 64  
atomová hypotéza 17  
baryon 37
- B**  
Becquerel 373  
Boehm 709  
Bohr 577  
Bohrův poloměr 517  
Boltzmann 555  
Boltzmannův zákon 542  
Born 497  
Brewster 442  
Brewsterův úhel 442  
Briggs 301  
Brown 554  
Brownův pohyb 25, 554  
brzdné záření 458
- C**  
Carnot 51, 597  
Cavendish 102  
celková energie 235  
celková hybnost 141  
cívka 315  
Clausiova-Clapeyronova rovnice 621  
Clausius 597  
Coriolis 268  
Coriolisova síla 268  
Cornuova spirála 403
- Č**  
Čerenkov 687  
čtyřvektor 461
- D**  
Dedekind 298  
Dicke 105  
difrakce 391  
difrakční mřížka 395  
difuze 589
- dipólový zářič 374  
Dirac 710  
disperze 416  
disperzní vztah 417  
Dopplerův jev 459  
dvojlom 439, 446
- E**  
Einstein 32, 90, 93, 105, 210, 235, 554, 563, 577, 592  
elektrická energie 58  
elektromagnetická vlna 31  
elektromagnetické pole 31  
elektromagnetické záření 344, 371  
elektron 30  
entalpie 618  
entropie 608  
Eötvös 105  
Euklidés 29, 70
- F**  
fázová rychlost 653  
Fermat 347, 353  
Fermatův princip 347  
Fermi 75  
foton 34, 577  
Fourier 677  
Fourierova řada 679  
Fourierovy transformace 336  
Frank 687  
Fresnelovy zákony 446
- G**  
Galileo 64, 94, 122, 702  
Gell-Mann 35  
geometrická optika 357  
gravitace 29  
gravitační energie 54  
gravitační zákon 92  
gravitační zrychlení 126  
Greenovy funkce 336  
grupová rychlost 654
- H**  
Haldingerův jev 489  
Hamilton 358  
Heisenberg 497, 505  
Helmholtz 475  
Heron Alexandrijský 348
- hlavní rovina 365  
hmotnost 123, 231  
hmotný střed 250, 259  
Huygens 345, 446  
hybnost 123, 231
- CH**  
chemická energie 58  
chemická reakce 23  
chromatická aberace 366
- I**  
impedance 317  
impedance vakua 426  
index lomu 353  
indukčnost 315  
indukovaná emise 577  
Intenzita elektrického pole 177, 180  
intenzita gravitačního pole 178  
interference 376, 388  
interval 240
- J**  
jaderná energie 58  
Jeans 551, 561  
Johnsonův šum 556  
Justová 476
- K**  
kapacita 315  
Kepler 93, 94  
Keplerovy zákony 94  
Kerrův článek 441  
Kerrův jev 441  
kinetická energie 57, 185  
Kirchhoffovy zákony 342  
klasický poloměr elektronu 429  
kondenzátor 315  
kvantová elektrodynamika 34, 373  
kvantová mechanika 32
- L**  
Laplace 643  
laser 431, 579  
Lee 709  
Leibnitz 112  
Leonardo da Vinci 482  
lepton 37  
Leverrier 98

Lorentz 213, 215  
Lorentzova transformace 460  
Lorentzovy transformace 213, 237

## M

magnetická indukce 180  
magnetické pole 179  
maser 579  
Maxwell 88, 370, 373, 550, 630  
Mayer 41  
mezon 37  
Michelson 213  
Miller, W. C. 469  
Minkowski, R. 466  
mlon 35  
molekula 17, 22  
moment hybnosti 254  
moment setrvačnosti 256  
moment síly 252, 276  
Morley 213

## N

napětí 207  
Nemst 610  
neutron 30  
Newton 94, 95, 103, 105, 112, 122,  
211, 497, 643  
Nishijima 35  
nutace 281

## O

odpor 315  
Ohmův zákon 315, 339  
ohnisková vzdálenost 360  
optická aktivita 443

## P

Pappova věta 263, 264  
paradox dvojčat 227  
paraxiální paprsky 359  
Pasteur 49  
perioda 382  
pion 35  
Planck 552, 561  
Poincaré 213, 216, 225  
polarizace 438  
pole 206  
potenciál 207  
potenciální energie 54, 185, 200  
pozitron 34  
práce 188, 198

precese 279  
princíp neurčitosti 90, 505  
princíp reciprocity 350  
princíp relativity 142  
princíp setrvačnosti 122  
princíp superpozice 178  
princíp virtuální práce 56  
prostorčas 238  
proton 30  
Ptolemaios 346  
Purkyňův efekt 469  
Pythagoras 672

## R

radlačný odpor 425  
radlačný tlak 464  
radiačný útlum 428  
rameno síly 253  
Rayleighovo kritérium 398  
Rayleighův zákon 560  
rezistor 315  
rezonance 37  
Ritzův kombinační princíp 519  
Roemer 98  
rovnice čočky 365  
rozdělení molekul podle rychlosti 544  
rozlišovací schopnost 367  
Rushton 478  
rychlost 124, 161  
Rydbergova energie 517

## S

Sahova ionizační rovnice 574  
Schrödinger 473, 497  
setrvačná síla 180  
sférická aberace 366  
Shannon 597  
síla 123, 126, 162  
slapové pohyby 97  
Smoluchovskí 563  
smykové tření 172  
Snell 346  
Snellův zákon 347  
spontánní emise 577  
srážky 142  
statistická mechanika 40  
Stefan-Boltzmannova konstanta 622  
Stevinus 54  
stupeň volnosti 536  
symetrie fyzikálních zákonů 153  
synchrotronní záření 456

## Š

šířka spektrálních čar 430

## T

Tamm 687  
tepelná energie 57  
tepelná vodivost 592  
teplota 530  
těžiště 261  
Thomsonův rozptyl 433  
tlak 525  
tuhé těleso 250  
Tycho Brahe 93

## U

účinný průřez 74  
účinný průřez rozptylu 433  
úhlová frekvence 382

## V

vazba 199  
vlnová délka 382  
vlnová rovnice 641  
vlnová zóna 383  
vlnové číslo 382  
vnitřní energie 527  
výkon 187

## W

Wapstr 709  
Wu 709

## Y

Yang 709  
Young 475  
Yukawa 35

## Z

zákon zachování baryonů 59  
zákon zachování momentu hybnosti  
58, 255, 277  
zákon zachování hybnosti 58, 141  
zákon zachování energie 41, 50  
zákon zachování leptonů 59  
zákon zachování náboje 59  
záření černého tělesa 560  
zářivá energie 58  
zrychlení 124, 162