M1130 — Příklady ze cvičení a domácí úlohy

- Jde o seznam typových úloh, které jsme probrali na cvičení a dalších obdobných úloh na procvičení za domácí úlohu. Na písemkách se objeví výhradně modifikace příkladů z této sbírky a jim obdobné příklady.
- Příklady označené hvězdičkou jsou určeny pro studenty, kteří by se na cvičení příliš nudili a jsou zde uvedeny pouze jako doplňující příklady, které nebudou obsahem písemek.
- Časový údaj je pouze orientační. Program jednotlivých cvičení si sestavují vyučující sami a popsaný časový plán nemusí dodržovat.
- Velké množství příkladů je převzato ze sbírky „Seminář ze středoškolské matematiky“ autorů Herman, Kučera, Šimša (skriptum MU, 2004).

1 Test středoškolských znalostí

Cvičení konaná 16. a 17. 9. 2019.

Příklad 1.1: Nechť $T = [r, s]$ je těžiště $\triangle ABC$, kde $A = [2, -1]$, $B = [-1, 3]$ a $C = [5, 7]$. Určete hodnoty r a s.
[*Řešení:* $r = 2$, $s = 3$.]

Příklad 1.2: Nechť $S = 72\,cm^2$ je povrch krychle vepsané do kulové plochy o poloměru r. Určete hodnotu $k = r^2 + r + 3$.
[*Řešení:* $k = 15$.]

Příklad 1.3: Nechť M je množina všech reálných čísel, která splňují nerovnici $|2x+1| < x+3$. Určete množinu M.
[*Řešení:* $M = (-\frac{4}{3}, 2)$.]

Příklad 1.4: Komplexní číslo z je řešením rovnice $z + |z| = 5 + (2 + i)^2$. Určete komplexní číslo z^2.
[*Řešení:* $z^2 = -7 + 24i$.]

Příklad 1.5: Čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, jsou řešením rovnice $x^{2\log x + 3,5} = 100\sqrt{x}$. Určete číslo $k = ab^2$.
[*Řešení:* $k = \frac{1}{10}$.]

Příklad 1.6: Nechť číslo c je součtem všech řešení rovnice $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ v intervalu $[0, 2\pi]$. Určete hodnotu c.
[*Řešení:* $c = \frac{\pi}{4}$ *(jediné řešení v daném intervalu).*]

Příklad 1.7: Určete počet všech lichých pěticiferných přirozených čísel, která neobsahují ve svém zápisu cifru 9.
[*Řešení:* $8 \cdot 9^3 \cdot 4$.]

Příklad 1.8: Nechť $c = a^2 + b^2$, kde a a b jsou délky poloos kuželosečky k o rovnici $k : 3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 8 = 0$. Určete hodnotu c.
[*Řešení:* $c = 8$.]

2 Porovnávání průměrů, formální zápis množin

Cvičení konaná 23. a 24. 9. 2019.

Příklad 2.1: Dříve než začneme rozebírat výsledky testu, si matematicky přesně definujme, co je to aritmetický průměr n-tice reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a co je medián těchto čísel. Na příkladech čtyř čísel ukažte, že někdy je medián menší než aritmetický průměr a jindy je tomu naopak.

Příklad 2.2: Pro n-tici kladných reálných čísel můžeme definovat kromě aritmetického průměru i jiné průměry. Nejznámější je geometrický a harmonický průměr:

$$\begin{aligned} G(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}, \\ H(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \end{aligned}$$

Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla a_1, a_2 platí $A(a_1, a_2) \geq G(a_1, a_2) \geq H(a_1, a_2)$. Pro která a_1, a_2 nastane rovnost? (A značí aritmetický průměr čísel v závorce.)

Příklad 2.3*: Jaká je průměrná rychlost auta, které jede n stejně dlouhých úseků postupně rychlostmi $v_1, v_2, \ldots, v_n$?

Příklad 2.4*: Nerovnosti z příkladu 2.2 platí nejen pro dvojice, ale pro všechny n-tice kladných reálných čísel. Dokažte, že z nerovnosti $A \geq G$ plyne nerovnost $G \geq H$. Zkuste dokázat nerovnost $A \geq G$.

Příklad 2.5: Pomocí množinového zápisu zapište následující množiny definované slovně:

1. Množinu všech přirozených čísel, která jsou dělitená třemi.

2. Množinu všech celých čísel, která dávají po dělení osmi zbytek 5.

3. Množinu všech reálných čísel, jejichž druhá mocnina je větší než 3.

4. Množinu všech kladných reálných čísel, jejichž druhá mocnina je menší než jejich trojnásobek.

5. Množinu všech dvojic reálných čísel, kde první je třikrát větší než druhé.

6. Množinu všech trojic přirozených čísel, která mohou být délkami stran pravoúhlého trojúhelníka. Je tato množina prázdná?

Příklad 2.6: Pomocí množinového zápisu zapište následující množiny definované slovně:

1. Množinu všech lichých přirozených čísel, která jsou dělitená 5.

2. Množinu všech dvouciferných celých čísel, která jsou dělitená 17.

3. Množinu všech reálných čísel x, která jsou řešením nerovnice $x^2 + 2x + 1 > 0$.

4. Množinu všech kladných reálných čísel, jejichž třetí mocnina je menší než jejich druhá mocnina.

5. Množinu všech dvojic přirozených čísel, kde první dělí druhé.

6. Množinu všech dvojic celých čísel, která se navzájem dělí, tj. první dělí druhé a naopak.

7. Množinu všech čtveřic celých čísel, kde třetí je součtem prvních dvou a čtvrté je součinem prvních tří.

3 Reálné funkce a jejich grafy

Cvičení konaná 30.9. a 1. 10. 2019.

Zopakujte si, co je zobrazení množiny A do množiny B. O zobrazení do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ budeme mluvit jako o funkci.

Příklad 3.1: Určete definiční obor a obor hodnot funkcí f zadaných předpisy

$$f(x) = 2x+7, \quad f(x) = |3x+1|-x, \quad f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad f(x) = x^2+2x+3, \quad f(x) = \log_{10}(x+2),$$

$$f(x) = 2^{x-3}, \quad f(x) = 3\cos x, \quad f(x) = \tan(-x).$$

Načrtněte jejich grafy. Zjistěte, zda jsou injektivní, surjektivní (zobrazení ze svého definičního oboru). Najděte maximální intervaly, na kterých jsou funkce rostoucí, resp. klesající.

Příklad 3.2: Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{1}{\log_{10}(x^2-1)-1}.$$

Najděte její definiční obor jako podmnožinu reálných čísel. Najděte její obor hodnot. Zjistěte, na kterých maximálních intervalech je funkce rostoucí, resp. klesající.

Příklad 3.3: Zkoumejte, jak se mění graf funkce $y = f(x)$, když přejdeme k funkci:

$$y = 2f(x), \quad y = \frac{1}{3}\cdot f(x), \quad y = -f(x), \quad y = f(-x), \quad y = f(x+3),$$

$$y = f(x-2), \quad y = f(x)-4, \quad y = f(x)+6 \quad y = f(3x), \quad y = f(\frac{x}{2}).$$

Je-li původní funkce rostoucí na svém definičním oboru, co můžeme říci o nově vytvořených funkcích?

Příklad 3.4: S využitím předchozí úlohy nakreslete grafy funkcí

$$f(x) = |x|, \qquad g(x) = 2\cdot|x|, \qquad h(x) = |3x-8|+2.$$

Zjistěte, na kterých maximálních intervalech je funkce rostoucí, resp. klesající.

Příklad 3.5: Nakreslete graf funkce

$$f(x) = 2\cos(3x+\frac{\pi}{2})-1.$$

Určete všechny maximální intervaly, na nichž je funkce klesající (resp. rostoucí). Určete všechna $x \in \mathbb{R}$ splňující $f(x) = 0$. Určete zejména, kolik je takových reálných čísel v intervalu $(0, 2\pi)$.
[*Řešení: a) pro každé* $k \in \mathbb{Z}$ *je* f *klesající na intervalu* $I_k = [\frac{2}{3}\pi k - \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{6}]$ *a rostoucí na intervalu* $J_k = [\frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi k + \frac{\pi}{2}]$*. b) Množina všech řešení je* $\{\frac{2}{3}\pi k - \frac{\pi}{18}; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2}{3}\pi k - \frac{5}{18}\pi; k \in \mathbb{Z}\}$*, 6 řešení leží v intervalu* $(0, 2\pi)$.]

Příklad 3.6: Definujte (formálně) pojem „funkce f je rostoucí na intervalu I“.

Zformulujte precizně tvrzení, že složení rostoucích funkcí (na intervalu) je rostoucí funkce (na intervalu) a větu dokažte. Zejména si uvědomte, jaké všechny předpoklady je třeba uvést. Přesněji: pokud g je rostoucí funkce na intervalu I, kde $I \subseteq D(g)$, a dále f je rostoucí funkce na intervalu $J \subseteq D(f)$, potom ještě musíme něco předpokládat o množině $\{g(x); x \in I\}$, abychom mohli dokázat, že $f \circ g$ je rostoucí na intevalu I.

Příklad 3.7: Nechť f a g jsou rostoucí funkce na intervalu I, tj. zejména $I \subseteq D(f) \cap D(g)$. Rozhodněte, zda je rostoucí nebo klesající funkce h daná následujícím předpisem:

$$(i)\ h(x) = f(x) + g(x), \quad (ii)\ h(x) = f(x) - g(x), \quad (iii)\ h(x) = f(x) \cdot g(x),$$

$$(iv)\ h(x) = -g(x), \quad (v)\ h(x) = g(x) \cdot g(x), \quad (vi)\ h(x) = |g(x)|, \quad (vii)\ h(x) = \frac{1}{g(x)}.$$

V případech, kdy odpovídáte „ano", se pokuste o formální důkaz. V případech, kdy odpovídáte „ne", dejte protipříklad a navíc se pokuste (přidáním vhodných předpokladů pro funkce f a g) zformulovat platné tvrzení.

Řešte úlohy (i)-(iii) za předpokladu, že f je konstatní funkce, tj. $f(x)$ v definici funkce $h(x)$ nahraďte konstantou $c \in \mathbb{R}$. Pozor, v tomto případě se může někdy odpověď lišit v závislosti na paramatru c.

4 Funkce s absolutní hodnotou, kvadratické funkce

Cvičení konaná 7. a 8. 10. 2019.

Příklad 4.1: Nakreslete graf funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(x) = |2x - 3| - |x + 2| + |10 - 3x| - 1$$

na intervalu $[-5, 5]$. Najděte obor hodnot této funkce, maximální intervaly, na kterých je monotónní, a vyřešte nerovnici $f(x) < 2$.
[*Řešení: a)* $H(f) = [-\frac{8}{3}, \infty)$, *b) klesající na intervalu* $(-\infty, \frac{10}{3}]$, *rostoucí na intervalu* $[\frac{10}{3}, \infty)$. *c)* $\{x \in \mathbb{R}; f(x) < 2\} = (\frac{4}{3}, \frac{9}{2})$.]

Příklad 4.2: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice

a) $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = |x + 2|$,

b) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} = 1$.

[*Řešení: a)* $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, *b)* $x \in \{-2/3, 1/2, 2\}$]

Příklad 4.3: Pomocí úpravy na čtverec odvoďte "vzoreček" pro řešení obecné kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Načrtněte graf kvadratické funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ pro $a > 0$ a pro $a < 0$. Určete, jaké maximum nebo minimum tato funkce nabývá a v kterém bodě.

Příklad 4.4: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby daná nerovnost platila pro všechna $x \in A$. (Kreslete si, jak musí vypadat grafy příslušných kvadratických funkcí.)

a) $(r+4)x^2 - 2rx + 2r - 6 < 0$, $A = \mathbb{R}$.

b) $rx^2 - 4x + 3r + 1 > 0$, $A = (0, \infty)$.

c) $(r-2)x^2 + rx + 1 - r > 0$, $A = (0, \infty)$.

d) $(x - 3r)(x - r - 3) < 0$, $A = [1, 3]$.

[*Řešení: a)* $r \in (-\infty, -6)$*, b)* $r \in (1, \infty)$*, c) nemá řešení, d)* $r \in (0, 1/3)$]

Příklad 4.5: Určete všechny hodnoty parametru $r \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost

$$(rx - 1)(x + r) < 0$$

platila pro všechna $x \in A$.

a) $A = (0, 1)$.

b) $A = (-1, 1)$.

c) $A = (-2, 2)$.

d) $A = (0, \infty)$.

Příklad 4.6*: Nalezněte kvadratickou rovnici s celočíselnými koeficienty, jejímž jedním řešením je

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}.$$

[*Řešení:* $x_1 = 4 - \sqrt{15}, x_2 = 4 + \sqrt{15}$*, polynom* $x^2 - 8x + 1$.]

Příklad 4.7*: Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\left| x + \frac{1}{x+1} \right| \geq 1.$$

[*Řešení:* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$]

5 První písemka; kvadratické rovnice a polynomy

Cvičení konaná 14. a 15. 10. 2019.

Příklad 5.1: Určete, kdy pro řešení $x_1 \leq x_2$ rovnice

$$2x^2 - 2(2a+1)x + a(a-1) = 0$$

platí $x_1 < a < x_2$. *Nápověda: Vyznačte na grafu příslušné kvadratické funkce její hodnotu v a.*
[*Řešení:* $a \in (-\infty, -3) \cup (0, \infty)$]

Příklad 5.2: Určete, kdy pro řešení x_1 a x_2 rovnice

$$(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$$

platí $x_1 > 3$ a $x_2 < 2$.
[*Řešení:* $a \in (2, 5)$]

Příklad 5.3: Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ má následující polynom dvojnásobný kořen

$$(2a-5)x^2 - 2(a-1)x + 3.$$

[*Řešení:* $a = 4$]

Příklad 5.4: Najděte nejmenší celé číslo k, pro něž má rovnice

$$x^2 - 2(k+2)x + 12 + k^2 = 0$$

dvě různá reálná řešení.
[*Řešení:* $k = 3$, *diskriminant* $D = 16(k-2)$]

Příklad 5.5: Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby obě rovnice měly aspoň jedno společné řešení.

$$(1-2a)x^2 - 6ax - 1 = 0, \quad ax^2 - x + 1 = 0.$$

[*Řešení:* $a = -3/4,\ 0,\ 2/9$]

Příklad 5.6: Určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby obě rovnice měly aspoň jedno společné řešení.

$$x^2 + ax + 8 = 0, \quad x^2 + x + a = 0.$$

[*Řešení:* $a = -6$]

Příklad 5.7*: Označme

$$a = \sqrt[3]{3\sqrt{21} + 8}, \quad b = \sqrt[3]{3\sqrt{21} - 8}\ .$$

Dokažte, že součin i rozdíl těchto dvou reálných čísel je celočíselný a určete jej. Zjednodušte algebraické výrazy pro čísla a a b tak, aby obsahovala kromě celých čísel a obvyklých operací již pouze druhé odmocniny.

Nápověda: Napište si kvadratickou rovnici s dvojicí řešení a, $-b$.

[*Řešení:* $ab = 5$, $a - b = 1$. *Potom* $a = \frac{\sqrt{21}+1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$.]

6 Racionální kořeny, Viètovy vztahy, iracionální funkce

Cvičení konaná 21. a 22. 10. 2019.

Příklad 6.1: Najděte nějaký polynom s celočíselnými koeficienty,

a) jehož kořeny jsou $0, 1, -1/2$,

b) jehož jediný reálný kořen je -1, ale stupeň polynomu je větší než 1,

c) který má trojnásobný kořen 1,

d) jehož kořeny jsou $\sqrt{2}$ a -1.

Příklad 6.2: Najděte racionální kořeny polynomu:

a) $2x^3 + x^2 - 4x - 3$,

b) $27x^3 + 27x^2 - 4$,

c) $4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 7x - 2$.

Příklad 6.3: Označme x_1, x_2 řešení rovnice $3x^2+8x+4 = 0$. Aniž danou rovnici řešíte, určete číslo:

a) $x_1^2 + x_2^2$,

b) $x_1^3 + x_2^3$,

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$,

d) $x_1 - x_2$,

e) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$,

f) $x_1^2 - x_2^2$.

Příklad 6.4: Polynom $x^2 + ax + b$ má kořeny x_1, x_2. Určete kvadratický polynom, který má kořeny:

a) $-x_1, -x_2$,

b) $2x_1, 2x_2$,

c) $x_1 + 1, x_2 + 1$,

d) x_1^2, x_2^2.

Příklad 6.5: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

a) $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x+8}}$,

b) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$,

c) $\sqrt{3x+2} = \sqrt{5x+3} + 2\sqrt{2x+1}$.

[*Řešení: a)* 8, *b)* 4, *c)* $-1/2$.]

Příklad 6.6: Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

a) $3 > x + 3 \cdot \sqrt{1 - x^2}$,

b) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$,

c) $1 \geq x + \sqrt{4 - x^2}$.

[*Řešení: a)* $[-1, 0) \cup (3/5, 1]$, *b)* $[1, 3/2)$, *c)* $[-2, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{7})]$.]

Příklad 6.7*: Nechť polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$ má tři kladné kořeny. Dokažte, že $a^3 \leq 27c$.

8 Exponenciální a logarimické funkce

Cvičení konaná 4. a 5. 11. 2019.

Příklad 8.1: Mocniny a exponenciální funkce a^x.

1. Pro $a > 0$ a $n \in \mathbb{Z}$ definujte a^n.
2. Je-li $a > 1$ reálné číslo a $n < m$ celá čísla, pak $a^n < a^m$.
3. Pro $a > 0$ reálné a $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ definujte a^x.

4.* Pro $a > 0$ reálné a x, y racionální, dokažte, že $a^x a^y = a^{x+y}$ a $(a^x)^y = a^{xy}$.

5. Pro $a > 1$ a x reálné definujeme $a^x = \sup\{a^y \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{Q}, y \leq x\}$.

6.* Dokažte, že funkce a^x je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $a \in (0, 1)$.

7.* Pro $a > 0$ reálné a x, y reálná, dokažte, že $a^x a^y = a^{x+y}$ a $(a^x)^y = a^{xy}$.

8. Nakreslete graf exponenciální funkce pro různá a.

Příklad 8.2: Logaritmická funkce $\log_a x$.

1. Definujte inverzní funkci k funkci f.
2. Definujte $\log_a x$ jako inverzní funkci k exponenciální funkci a^x.
3. Jak je to s monotonií logaritmické funkce? Nakreslete grafy logaritmické funkce pro různé základy.

Příklad 8.3: Z vlastností exponenciálních funkcí dokažte tyto vlastnosti logaritmických funkcí:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
3. $\log_a(x^y) = y \log_a x$.
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.
5. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.
6. $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.

Příklad 8.4: Určete číslo m, je-li

(a) $m = 49^{1-\frac{1}{2}\log_7 25}$.

(b) $m = \log\left(\log\sqrt{\sqrt[5]{10}}\right)$.

(c) $m = 81^{\frac{1}{\log_5 3}}$.

(d) $m = \log_2 \frac{2}{3} + \log_4 \frac{9}{4}$.

(e) $m = 3^{2\log_3 2 + \log_3 5}$.

(f) $m = \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_4 9} - \frac{1}{\log_8 3}$.

(g) $m = 36^{\log_6 5} + 10^{1-\log_{10} 2} - 3^{\log_9 36}$.

[*Řešení: (a)* $\frac{49}{25}$*, (b)* -1*, (c)* 625*, (d)* 0*, (e)* 20*, (f)* $-\log_3 2$*, (g)* 24]

9 Druhá písemka; Exponenciální a logarimické funkce

Cvičení konaná 11. a 12. 11. 2019.

Příklad 9.1: Pomocí čísel a, b, c vyjádřete x:

(a) $x = \log_{100} 40; \quad a = \log_2 5.$

(b) $x = \log_6 16; \quad a = \log_{12} 27.$

(c) $x = \log \frac{1}{300}; \quad a = \log 2,\ b = \log 3,\ c = \log 5.$

(d) $x = \log_{140} 63; \quad a = \log_2 3,\ b = \log_3 5,\ c = \log_7 2.$

[*Řešení: (a)* $\frac{a+3}{2+2a}$, *(b)* $\frac{4(3-a)}{3+a}$, *(c)* $-(2a+b+2c)$, *(d)* $\frac{2ac+1}{abc+2c+1}$]

Příklad 9.2: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

(a) $4^x + 2^{x+1} = 24.$

(b) $|x|^{x^2-2x} = 1.$

(c) $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0.$

(d) $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x.$

[*Řešení: (a)* 2, *(b)* -1, 1, 2, *(c)* 1, -1, *(d) 1 (lze snadno ukázat, že má právě jedno řešení).*]

Příklad 9.3: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

(a) $\log 5 + \log(x+10) = 1 - \log(2x-1) + \log(21x-20).$

(b) $\log_{0{,}5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0.$

(c) $15^{\log_5 3} \cdot x^{1+\log_5(9x)} = 1.$

(d) $\log\sqrt{1+x} + 3\log\sqrt{1-x} = \log\sqrt{1-x^2} + 2.$

[*Řešení: (a)* 3/2, 10, *(b)* $\sqrt{2}/2$, 1, 4, *(c)* 1/15, 1/3 *(d) nemá řešení.*]

Příklad 9.4: Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnice:

(a) $\frac{1}{3^x+5} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$.

(b) $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x > 0$.

(c) $\log_{(x-2)}(2x-3) > \log_{(x-2)}(24-6x)$.

(d) $x^{\log_2 x} > 2$.

[*Řešení: (a)* $(-1,1]$*, (b)* $(-\infty,0)$*, (c)* $(2,3) \cup (27/8,4)$*, (d)* $(0,1/2) \cup (2,\infty)$.]

10 Goniometrické funkce

Cvičení konaná 18. a 19. 11. 2019.

Příklad 10.1: Odvoďte základní vztahy:

(a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

(b) $\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$,

(c) $\sin(x+2\pi) = \sin x, \quad \cos(x+2\pi) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$,

(d) $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$,

(e) $\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x), \quad \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$.

(f) $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x), \quad \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

Příklad 10.2: Předpokládejme, že platí $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, kde x je libovolné reálné číslo. Dále předpokládejme, že pro umocňování reálného čísla e na komplexní čísla platí obvyklé vlastnosti pro umocňování. Odvoďte součtové vzorce

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,.$$

Součtových vzorců využijte k odvození vzorců (e) a (f) z předchozího příkladu.

Příklad 10.3: Odvoďte dále vztahy:

(a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

(b) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

(c) $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

Nápověda: V částech (b) a (c), napište $x = \alpha + \beta$ *a* $y = \alpha - \beta$ *a použijte součtové vzorce.*

Příklad 10.4: Za předpokladu, že výrazy na obou stranách rovnosti dávají smysl, dokažte:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \quad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Přitom si řádně promyslete, pro které hodnoty tyto rovnosti platí. Navíc dokažte, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ takové, že $\frac{2x}{\pi} \notin \mathbb{Z}$ platí

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1.$$

Příklad 10.5: Odvoďte následující vztahy (a promyslete, pro které hodnoty $x \in \mathbb{R}$ platí):

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\ , \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\ , \quad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\ .$$

11 Goniometrické funkce, inverzní funkce

Cvičení konaná 25. a 26. 11. 2019.

Příklad 11.1: Za předpokladu, že výrazy na obou stranách rovnosti dávají smysl, dokažte:

(a) $\frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x} = 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x$,

(b) $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x)$,

(c) $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$,

(d) $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} = \operatorname{tg} x$,

(e) $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{1}{4}(3 + \cos^2 2x) \cos 2x$,

(f) $\sin x \cos(y - x) + \cos x \sin(y - x) = \sin y$.

Příklad 11.2: Vypočtěte bez kalkulačky:

(a) $\cos 15°$,

(b) $\operatorname{tg} 75°$,

(c) $\operatorname{tg} 20° + \operatorname{tg} 40° + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20° \operatorname{tg} 40°$,

(d) $\sin 160° \cos 110° + \sin 250° \cos 340° + \operatorname{tg} 110° \operatorname{tg} 340°$,

(e) $\sin \frac{3\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10}$.

Nápověda: (a) $15 = 45 - 30$*, (b)* $75 = 45 + 30$*, (c) použijte vztah 10.4 pro argumenty* $20°$ *a* $40°$*, (d) použijte vztahy 10.1. na posunutí argumentů do základního intervalu. Potom součtový vzorec na součet prvních dvou členů a poslední vzorec z 10.4. na třetí sčítanec, (e) použijte poslední vzorec z 10.3c v opačném směru.*
[Řešení: (a) $\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (1 + \sqrt{3})$*, (b)* $2 + \sqrt{3}$*, (c)* $\sqrt{3}$*, (d)* 0*, (e)* 0.]

Příklad 11.3*: Dokažte, že pro vnitřní úhly α, β, γ trojúhelníka platí:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Příklad 11.4: Najděte maximální intervaly, na kterých je funkce f monotónní. Na těchto intervalech určete inverzní funkci.

(a) $f(x) = x^2 + x - 6$,

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 12}$.

[Řešení: (a) $I_1 = (-\infty, -1/2]$ *a* $I_2 = [-1/2, \infty)$*; Pro* I_1 *je inverzní funkce* $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{25}{4}}$*, s definičním oborem* $[-\frac{25}{4}, \infty]$ *a oborem hodnot* I_1*; Pro* I_2 *je inverzní funkce* $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{25}{4}}$*, s definičním oborem* $[-\frac{25}{4}, \infty]$ *a oborem hodnot* I_2*; (b)* $I_1 = (-\infty, -6]$ *a* $I_2 = [2, \infty)$*; Pro* I_1 *je inverzní funkce* $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x^2 + 16}$*, s definičním oborem* $[0, \infty]$ *a oborem hodnot* I_1*; Pro* I_2 *je inverzní funkce* $f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{x^2 + 16}$*, s definičním oborem* $[0, \infty]$ *a oborem hodnot* I_2.]

Příklad 11.5: Funkce arcsin je inverzní funkce k funkci sin na intervalu $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Napište předpis inverzní funkce k funkci sin na intervalu

(a) $[2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$,

(b) $[(2k + 1)\pi - \frac{\pi}{2}; (2k + 1)\pi + \frac{\pi}{2}]$

pomocí funkce arcsin.

(c) Navrhněte a řešte analogickou úlohu pro dvojice funkcí cos, arccos, resp. tg, arctg.

[Řešení: (a) $\arcsin x + 2k\pi$*, (b)* $-\arcsin x + (2k + 1)\pi$*.*]

Příklad 11.6: Najděte maximální interval obsahující 0, na němž je funkce f monotónní. Na tomto intervalu určete inverzní funkci.

(a) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$,

(b) $f(x) = \sin x + \cos x$,

(c) $f(x) = \sqrt{3} \cdot \sin x + \cos x$,

(d) $f(x) = \log(\cos x)$,

(e) $f(x) = \log(\log(x + 10))$.

[*Řešení: (a)* $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$, $I = [-\pi/4, \pi/4]$, $H(f) = [-1/2, 1/2]$, *tzn.* $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\arcsin 2x$ *s definičním oborem* $[-1/2, 1/2]$ *a oborem hodnot* I.
(b) $f(x) = \sqrt{2}\cdot\cos(x - \pi/4)$, $I = [-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$, $H(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, *tzn.* $f^{-1}(x) = -\arccos(\frac{-y}{\sqrt{2}}) + \frac{\pi}{4}$ *s definičním oborem* $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ *a oborem hodnot* I.
(c) $f(x) = 2 \cdot \sin(x + \pi/6)$, $I = [-\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi]$, $H(f) = [-2, 2]$, *tzn.* $f^{-1}(x) = \arcsin(\frac{y}{2}) - \frac{\pi}{6}$ *s definičním oborem* $[-2, 2]$ *a oborem hodnot* I.
(d) Protože funkce cos *(a tudíž i funkce* f*) nabývá v bodě* 0 *svého maxima, existují dva maximální intervaly* I_1 *a* I_2 *obsahující bod* 0*, kde je* f *monotónní:* $I_1 = (-\frac{\pi}{2}, 0]$ *a* $I_2 = [0, \frac{\pi}{2})$*. V obou případech je* $H(f) = (-\infty, 0]$*. Pro* I_1 *je inverzní funkce* $f^{-1}(x) = -\arccos(10^x)$*, s definičním oborem* $(-\infty, 0]$ *a oborem hodnot* I_1*; Pro* I_2 *je inverzní funkce* $f^{-1}(x) = \arccos(10^x)$*, s definičním oborem* $(-\infty, 0]$ *a oborem hodnot* I_2.
(e) Definiční obor funkce f *je* $(-9, \infty)$ *a obor hodnot je* $\mathbb{R}$*. Funkce je na svém definičním oboru rostoucí. Tedy* $f^{-1}(x) = 10^{10^x} - 10$ *má definiční obor* $\mathbb{R}$ *a obor hodnot* $(-9, \infty)$*.*]

12 Rovnice a nerovnice s goniometrickými funkcemi

Cvičení konaná 2. a 3. 12. 2019.

Příklad 12.1: Určete nejmenší periodu zadané funkce:

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$,

(b) $f(x) = \sin 3x$,

(c) $f(x) = |\cos 2x|$,

(d) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$,

(e) $f(x) = \sin x^2$,

(f) $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$.

[*Řešení: (a)* 2π*, (b)* $\frac{2\pi}{3}$*, (c)* $\frac{\pi}{2}$*, (d) není periodická, (e) není periodická, (f)* 2π.]

Příklad 12.2: U dané funkce určete, zda je sudá nebo lichá.

(a) $f(x) = x \cdot \sin x$,

(b) $f(x) = x \cdot \cos 2x$,

(c) $f(x) = x + \sin x$,

(d) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$,

(e) $f(x) = \cos x^2$,

(f) $f(x) = \sin^2 x$,

(g) $f(x) = |\sin x + \cos x|$,

(h) $f(x) = \sin |x|$.

[*Řešení: (a) sudá, (b) lichá, (c) lichá, (d) lichá, (e) sudá, (f) sudá, (g) není ani sudá ani lichá, (h) sudá.*]

Příklad 12.3: Udejte příklad funkce s vhodným definičním oborem, která má předepsané vlastnosti:

(a) perioda 3π, obor hodnot $[1, 2]$,

(b) perioda 1, obor hodnot $\mathbb{R}$,

(c) perioda 2, obor hodnot $[0, 1] \cup (2, 3)$, rostoucí na intervalu $(0, 2)$.

Příklad 12.4: Udejte příklad funkce s definičním oborem obsahující interval I, pro niž je obor hodnot na intervalu I roven $(0, \infty)$, tzn. $f(I) = (0, \infty)$.

(a) $I = (n, \infty)$, pro pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$,

(b) $I = (-\infty, n)$, pro pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$,

(c) $I = (0, n)$, pro pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$,

(d) $I = (a, b)$, pro pevně zvolená $a, b \in \mathbb{R}$ splňující $a < b$,

Příklad 12.5: Udejte příklad funkce s definičním oborem $\mathbb{R}$ takové, že pro libovolné kladné reálné číslo ε je obor hodnot na intervalu $(0, \varepsilon)$ roven I, tzn. $f(0, \varepsilon) = I$.

(a) $I = [-1, 1]$,

(b) $I = (-1, 1)$,

(c) $I = [0, 1]$,

(d) $I = (0, 1)$,

(e) $I = (0, \infty)$.

Příklad 12.6: Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice nejdříve graficky a poté i algebraickým výpočtem:

(a) $\sin x = \sin 2x$,

(b) $\sin 3x + \cos 3x = 0$,

(c) $\sin 2x = \cos 3x$.

[*Řešení: Řešením je vždy sjednocení* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} M_k$ *množin* M_k. *Jednotlivé množiny* M_k *jsou množiny řešení dané nerovnosti na intervalu* $[2k\pi, (2k+2)\pi]$, *resp.* $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$.
(a) $M_k = \{2k\pi, \pi + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\}$,
(b) $M_k = \{\frac{3\pi}{12} + 2k\pi, \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, \frac{15\pi}{12} + 2k\pi, \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, \frac{23\pi}{12} + 2k\pi\}$,
(c) $M_k = \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{10} + 2k\pi, \frac{5\pi}{10} + 2k\pi, \frac{9\pi}{10} + 2k\pi, \frac{13\pi}{10} + 2k\pi, \frac{17\pi}{10} + 2k\pi\}$.]

Příklad 12.7: Řešte v $\mathbb{R}$ následující rovnice. Vždy určete počet řešení v intervalu $[0, 2\pi)$.

(a) $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$,

(b) $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$,

(c) $2\cos x \cos 2x = \cos x$,

(d) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$,

(e) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$,

(f) $\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x$,

(g) $\sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x$.

Nápověda: (d) Podělte 2 a použijte 10.2 zprava doleva. (e) Použijte 10.3b na levou stranu. (f) Použijte 10.3b zprava doleva. (g) Použijte 10.1f.

[*Řešení: Ve všech případech se řešení periodicky opakují podobně jako v předchozím případě. Lze je tedy i podobným způsobem zapsat. My zde uvedeme pouze výčet řešení v intervalu* $[0, 2\pi)$.
(a) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$,
(b) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$,
(c) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$,
(d) $\frac{\pi}{6}$,
(e) $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$,
(f) $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$,
(g) $0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$.]

Příklad 12.8: Řešte graficky v $\mathbb{R}$ následující nerovnice.

(a) $\sin x > \frac{1}{2}$,

(b) $\sin x < \cos x$,

(c) $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$.

[*Řešení: Řešením je vždy sjednocení* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$. *Jednotlivé množiny* I_k *jsou množiny řešení dané nerovnosti na intervalu* $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$, *resp.* $[(k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi]$.
(a) $I_k = (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi)$,
(b) $I_k = (-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$,
(c) $I_k = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi)$.]

Příklad 12.9: Řešte v $\mathbb{R}$ následující nerovnice.

(a) $\sin 3x < \sin x$,

(b) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \geq 0$,

(c) $\sin x + \cos x < \frac{1}{\cos x}$,

(d) $\sin 2x + \sin x \leq 0$,

(e) $1 - \cos x \leq \operatorname{tg} x - \sin x$,

(f) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$,

(g) $\sin 3x > 4\sin x \cos 2x$.

Nápověda: (a) 10.3c. (b) Substituce $y = \cos x$ *a vyřešit kvadratickou nerovnici. (c) Pronásobit* $\cos x$ *a použít 10.1a. Ovšem pozor na znaménka při násobení a dělení. (d) 10.3b. (e) Pravá strana je součin levé strany a* $\operatorname{tg} x$*. (f) Sešíst dle 10.3b* $\sin x + \sin 3x$*. (g) Vyjádřit obě strany pomocí* $\sin x$ *(za použitím 10.2, resp. 10.3a, s přihlédnutím k 10.1a0.*

[*Řešení: Řešením je vždy sjednocení* $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ *množin* I_k*. Jednotlivé množiny* I_k *jsou množiny řešení dané nerovnosti na intervalu* $[2k\pi, (2k+2)\pi]$*, resp.* $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$.
(a) $I_k = (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi) \cup (\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{6\pi}{4} + 2k\pi) \cup (\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$,
(b) $I_k = [-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$,
(c) $I_k = (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi) \cup (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$,
(d) $I_k = [\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi] \cup [\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$,
(e) $I_k = (\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \cup \{2k\pi\}$,
(f) $I_k = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\pi + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$,
(g) $I_k = (\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi) \cup (\pi + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi) \cup (\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$.]

13 Třetí písemka

Cvičení konaná 9. a 10. 12. 2019.