První aplikací parciálních derivací je výpočet diferenciálu funkce dvou proměnných, kterému se také říká totální diferenciál. Definice je uvedena na str. 44. Srovnáme-li vztah 4.5 s definicí diferenciálu jedné proměnné z prvního semestru, vidíme, že je to velmi podobné. Je dána funkce, bod a v tomto případě dva přírůstky nezávisle proměnných. Postupujeme stejně jako u funkce jedné proměnné. V příkladu 4. 12 není zadán konkrétní bod, ani konkrétní přírůstky. Diferenciál je vypočítán obecně, nyní bychom mohli dosazovat různé body (tady s výjimkou počátku [0,0]) a pracovat s různými přírůstky. Už z prvního semestru víme, že někdy nemusí být přírůstky zadány číselně, pak ve výsledku necháme jen dx a dy.

Konkrétní zadání najdeme v druhém přiloženém souboru priklady_chemici_2. Vše si procvičte na příkladu 5, str. 60.

Již v prvním semestru jsme viděli, že diferenciál je možno použít k přibližnému výpočtu hodnoty funkce. Tak je tomu i zde. Princip je zřejmý z příkladu 4. 14. Známe funkční hodnotu v nějakém bodě $[x_0,y_0]$ a potřebujeme s dostatečnou přesností odhadnout hodnotu v bodě $[x_0 + dx, y_0 + dy]$. Má-li funkce rozumné vlastnosti a přírůstky dx a dy jsou malé, pak platí „přibližný vzorec“ 4.7 . Oba příklady jsou srozumitelné, podívejte se ještě na příklad 3 v souboru priklady_chemici_2. Procvičte si na úloze 6 na str. 60.

Na str. 55 se ve Větě 4. 13 skrývá vzorec tečné roviny ke grafu funkce dvou proměnných. Je to velmi podobné tečně ke grafu funkce jedné proměnné. Víme, že grafem funkce dvou proměnných je v našich případech nějaká plocha. Představte si např. rotační parabolickou plochu, o které jsme na cvičení mluvili, „povrch rotačního paraboloidu“. Na této ploše zvolíme bod a hledáme rovnici roviny, která se v tomto bodě dotýká plochy. Není to nějaká přesná definice, ale pro představu to stačí. Příklad 4. 15 ukazuje, jak rovnici tečné roviny najdeme. Z analytické geometrie na střední škole víte, že obecná rovnice roviny je $ax + by + cz + d = 0$. Do tohoto tvaru výsledek upravujeme. Příklady na procvičení najdete v úloze 7 na str. 60. Výpočet diferenciálu a ještě častěji tečné roviny, bývají v první části zkouškové písemky.

Jedním ze základních příkladů zkouškové písemky ve druhém semestru bývá výpočet extrémů funkce dvou proměnných. Tomu je věnována celá kapitola 5, od str. 62. Postup výpočtu je opět podobný výpočtu extrémů funkce jedné proměnné. Nyní si ovšem situaci opravdu můžeme představit tak, že naší funkcí je „nadmořská výška“ bodu zadaného pomocí dvou zeměpisných souřadnic. Možná jste ve škole viděli plastickou mapu České republiky a nebo nějakého pohoří. To je nyní náš graf. Jsou na něm vrcholky hor, ale také údolí, sedla, „dolíky“. Stojíme-li na vrcholu Šeráku v Jeseníkách, všude těsně kolem nás jsou body s nižší nadmořskou výškou. Jsme v lokálním maximu. Na mapě je ale i Praděd, který představuje absolutní maximum pro Jeseníky.

Matematicky je toto přesně popsáno v části 5.1 Příklad 5.2 ukazuje, jak je možno lokální extrémy určit v některých případech funkcí přímo z definice. Většinou to ale nejde, takže musíme funkci zderivovat, obě první parciální derivace položit rovny nule a stanovit stacionární body. V nich může, ale také nemusí být lokální extrém. To víme z prvního semestru pro funkci jedné proměnné. Tam jsme rozhodli tak, že jsme zkoumali, jak se funkce chová v okolí stacionárních bodů – kde roste, kde klesá. To u funkcí dvou proměnných jednoduše nejde (zamyslete se ještě jednou nad plastickou mapou Jeseníků, jaká by byla situace v případě Červenohorského sedla). U funkce jedné proměnné jsme ale mohli také rozhodovat podle druhé derivace. To uděláme zde. Spočítáme všechny čtyři, dosadíme do nich stacionární bod, vypočteme hodnotu výrazu $D(x_0,y_0)$ ve vztahu 5.3. Pokud vyjde kladné číslo, je ve stacionárním bodě lokální extrém. O tom jaký bude, rozhodne znaménko derivace f_{xx} . Je-li kladné, je v bodě lokální minimum, je-li tato derivace záporná, je v tomto bodě lokální maximum. Pokud je výraz $D(x_0,y_0)$ záporný, pak v tomto stacionárním bodě extrém není. Pokud vyjde 0, nelze tímto způsobem rozhodnout. Někdy se nám podaří rozhodnout podle definice extrému. Toto v písemkách nebývá.

Pozor, studenti často píší, že když je výraz $D(x_0,y_0)$ kladný, je v tomto bodě lokální minimum. To nemusí být pravda, musíme zkoumat znaménko derivace f_{xx}.

Ve skriptu najdete čtyři řešené příklady. 5.6, 5.7, 5.8 a 5.9. Nejsložitější na nich je nalezení stacionárních bodů. V případě obvyklých polynomů parciální derivace zvládneme bez problémů, ale když je položíme rovny nule, řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Musí být totiž současně obě derivace rovny nule. Ze střední školy znáte soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Tomu odpovídá nalezení průsečíků dvou přímek. Znáte také úlohu najít průsečíky přímky a paraboly. V obou případech vyjádříme z rovnice přímky jednu neznámou a dosadíme do druhé rovnice. V př. 5.6 na str. 63 soustava odpovídá hledání průsečíků dvou parabol. Zbývající příklady jsou v tomto náročnější. Doporučuji nejprve prostudovat řešení příkladů 5 a 6 v souboru priklady_chemici_2, pak zkusit vyřešit př. 1) a, b, c, e a f. na str. 69. Pak se vraťte zpět k řešeným příkladům ve skriptu. Pokud vám nepůjdou, v tuto chvíli se tím netrapte.

Absolutní extrémy najdete v části 5.2 od str. 65. V prvním semestru jsme hledali absolutní extrémy funkce jedné proměnné na nějakém intervalu $<a,b>$. Místo pojmu absolutní extrémy je možná lepší říkat „největší a nejmenší hodnota funkce“ na intervalu $<a,b>$. Tyto hodnoty ležely buď ve stacionárních bodech uvnitř intervalu, nebo v jeho krajních bodech. Definici absolutních extrémů najdete na str. 65. Následuje popis, jak tyto extrémy najít na uzavřené a ohraničené množině *M*. My budeme uvažovat např. obdélník (čtverec), kruh a trojúhelník. Nejprve budeme hledat stacionární body uvnitř množiny *M*. Vypočteme v nich funkční hodnoty. Pak budeme studovat chování funkce na hranici množiny *M.* V našich případech budou hranici tvořit úsečky nebo polokružnice. Jejich rovnice již známe. Pro každou část hranice postupujeme takto. Vyjádříme z rovnice jednu proměnnou a dosadíme do funkce $f(x,y)$, tím získáme funkci jedné proměnné na nějakém intervalu a hledáme její největší a nejmenší hodnotu (hodnoty). Ty porovnáme s hodnotami ve stacionárních bodech a s podobně získanými hodnotami na zbývajících částech hranice množiny M. Vybereme body s největší a nejmenší z nich. Může jich být víc.

V př. 5.11 řešíme na trojúhelníku s vrcholy [0,0], [3,0] a [0,3]. Obrázek je vždy dobré udělat. Dostatečně veliký, aby do něj bylo možno vyznačit důležité body a hodnoty v nich. Spočítáme první parciální derivace a z nich získáme stacionární bod. Z obrázku bychom viděli, že leží uvnitř trojúhelníka. Není nutno určovat, zda je v něm extrém. Jen vypočteme funkční hodnotu. Strany I a III jsou kolmé na osy, jejich rovnice jsou zřejmé. Pro stranu II, která spojuje vrcholy [3,0] a [0,3], můžeme určit rovnici pomocí směrového vektoru. Nebo porovnáme tuto úsečku s přímkou $y = -x$. Další výpočet je myslím zřejmý. Doporučuji postupovat tak, že po výpočtu funkčních hodnot ve stacionárních bodech, určíme funkční hodnoty ve vrcholech trojúhelníka (jindy obdélníka, nebo bodech, ve kterých se stýkají polokružnice). Pak teprve pomocí první derivace funkce jedné proměnné zkoumáme chování uvnitř jednotlivých úseček nebo polokružnic.

Prostudujte si pak příklad 7 v souboru priklady_chemici_2, kde je množinou M obdélník. Tam jsou všechny strany kolmé na osy a s vyjadřováním jejich rovnic není problém. Teprve pak se podívejte na př. 5.12 s kruhem. Příklad 5. 13 nedělejte.

Vše si procvičte na příkladu 2) a, b. Soustřeďte se ale především na lokální extrémy. Ty musíte zvládnout velmi dobře. Příklady na absolutní extrémy jsou pro nás v tuto chvíli užitečné především v tom, že se na nich pracuje s obdélníky, trojúhelníky a kružnicemi. To budeme potřebovat u všech dalších integrálů. Pokud vám absolutní extrémy v tuto chvíli nepůjdou, počkejte na případné skupinové konzultace.