Sedmá kapitola skripta je věnována trojnému integrálu. Struktura kapitoly je podobná předcházející kapitole věnované dvojnému integrálu. I zde se naučíme převádět trojný integrál na trojnásobný, naučíme se transformaci do válcových souřadnic a nakonec se budeme věnovat aplikacím. Máme výhodu v tom, že kdo pochopil postupný výpočet dvojnásobného integrálu, ten nebude mít problém s výpočtem integrálu trojnásobného. Bude tam prostě o jeden krok víc. Využijeme také toho, že umíme popsat „pomocí nerovností“ útvar v rovině. O něco horší je, že nyní budeme integrovat přes množinu *V*, která bude představovat těleso, dostaneme se tak do analytické geometrie v prostoru. Té na střední škole není věnována taková pozornost jako analytické geometrii v rovině. Výpočet trojných integrálů je proto pro nás mnohem těžší a bude vyžadovat doplňkové konzultace, ke kterým se snad za měsíc dostaneme.

Na str. 84 najdete motivační situaci z fyziky, kdy počítáme hmotnost tělesa a přitom hustota materiálu je v různých bodech tělesa různá a je popsána funkcí tří souřadnic $f(x,y,z)$. Trojný integrál této funkce na tělese *V* vyjadřuje hmotnost tělesa. Kdyby hustota byla rovna všude jedné, pak integrál stanoví objem tělesa. Je to stejné jako u integrálu dvojného, tam integrál „z jedničky“ určoval míru (obsah) množiny *M*, nyní je to míra (objem) tělesa *V*. Výpočet objemu tělesa pro nás bude základní aplikace trojného integrálu.

Část 7. 1 představuje Fubiniovu větu pro trojný integrál. Začínáme na kvádru (krychli), kde je situace nejjednodušší. Kvádr nebude zadán svými vrcholy, je zadán nerovnostmi pro jednotlivé souřadnice libovolného bodu kvádru. Ve větě 7. 1 platí: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ a $e \le z \le f$. Vidíme na příkladu 7. 3, že krychle je tak rovnou zadaná, takže sestavení trojnásobného integrálu není žádný problém. Můžeme počítat v libovolném pořadí, kterých je celkem šest (známe z kombinatoriky, že tři prvky můžeme seřadit do šesti pořadí). Spočítejte si příklad 7. 3 v několika z nich. Když vám pokaždé vyjde 2, můžete říct, že jste zvládli „trojnásobné integrování“ v nejsnadnějším případě. V dalším ale budeme dodržovat pořadí, které je dáno v příkladu závorkami. Nejprve zintegrujeme podle proměnné *z* (na *x* a *y* se díváme jako na konstanty), do výsledku dosadíme meze pro *z* a získáme dvojnásobný integrál, který jsme již řešili. Opět tedy integrujeme nejprve podle *y* a nakonec podle *x*. Toto pořadí integrování budeme používat ve většině dalších příkladů, protože to odpovídá tomu, jak budou v budoucnu popsána „složitější“ tělesa *V*. Příklad s kvádrem máte popsán také v doporučeném videu. Vhodných videí je na kanále společnosti Isibalo víc. Čekal jsem, až vám je paní profesorka doporučí a připravím komentář k dalším z nich. Videa jsou na diferenciální rovnice, diferenciální počet funkcí více proměnných a také tedy na vícenásobné integrály. Sami uvidíte, že rozsah mnohdy velmi výrazně přesahuje to, co probíráme s vámi. Proto připravím ten komentář a vyberu jen vhodná videa. V každém případě nám tato videa pomohou ještě trochu lépe společně zvládnout tento nešťastný semestr.

Zatím tedy jen stručně, mluvíme o videích „Integrální počet funkcí více proměnných“, celý seznam je na adrese

https://www.youtube.com/playlist?list=PLD-MTmOzXT5OHC4_vHa_PE2GJcsopTZOS

a my nyní hovoříme o videu číslo 21 v tomto seznamu.

Věta 7. 4 na str. 85 popisuje vyjádření trojného integrálu v případě složitějšího tělesa. To je popsáno tak, že v rovině *xy* je zadána množina *M*. Stejně jako u dvojného integrálu, čili to umíme zvládnout již v řadě situací. Nyní je každému bodu $[x,y]$ z množiny *M* přiřazeno nějaké číslo *z*, které představuje třetí souřadnici bodu $[x, y, z]$. Máme tedy tři nerovnosti pro každou z proměnných, z nich vyčteme meze jednotlivých integrálů. Integrujeme v pořadí *z*, *y* , *x*. Proměnná *x* má již konstantní meze, takže výsledkem celého procesu je číslo.

Názornou ukázkou je příklad 7. 5. Těleso *V* si nedovedeme představit, sestavit trojnásobný integrál a postupně ho spočítat umíme. Jen si musíme zvyknout, že v prvních dvou krocích nedosazujeme za meze čísla, ale výrazy s proměnnými. Podívejte se i na video 22. Učitel to tam vysvětluje hodně jinak, než to učíme my, ale tam zadaný příklad si spočítejte a musíte dojít ke stejnému výsledku jako on.

Vidíme, že pokud je těleso *V* zadané přímo nerovnicemi, pak stačí jen vytvořit trojnásobný integrál a ten postupně zintegrovat. Příklad 7. 6 ovšem ukazuje situaci komplikovanější, kdy si těleso musíme nejprve představit a teprve pak jsme schopni ho nerovnicemi popsat. Skoro stejnou úlohu řeší video 23. Jen „šikmá rovina“ je jiná a jiná je i integrovaná funkce. Samotný výpočet trojnásobného integrálu je pak dělaný stejně, jako bychom ho dělali my. Tentokrát doporučuji to počítat stejně.

Když se vrátíme k příkladu 7. 6 ve skriptu, pak v řešení je vyslovena základní myšlenka pro odvození potřebných nerovností (je to i ve videu). Těleso, v našem případě čtyřstěn, promítneme do spodní roviny xy. Průmětem je trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$ a $[0,1]$, vidíme ho na obrázku b). To je situace jako u dvojného integrálu, tento trojúhelník popíšeme nerovnostmi $0 \le x \le 1$ a $0 \le y \le 1-y$. Zdola je těleso ohraničené rovinou xy, která má rovnici $z = 0$, shora pak šikmou rovinou $z = 1 - x - y$. Tím máme všechny meze trojnásobného integrálu.

Trojnásobné integrování si můžete dostatečně procvičit na příkladech 1a-e, na str. 93. To jsou ty snadnější situace, kdy těleso si většinou představit nedokážeme, ale sestavit trojnásobný integrál není problém.

V příkladu 1a integrujeme přes krychli, všechny meze jsou konstantní a integrovaná funkce je součin xy^2z. Podobně jako u dvojného integrálu můžeme postupovat tak, že pro každou proměnnou vytvoříme „vlastní určitý integrál“, každý spočítáme zvlášť a výsledky vynásobíme.

V přiloženém textu priklady_chemici_5.pdf najdete čtyři příklady. První je počítán přes kvádr. Je tedy možno šest různých pořadí integrace, zvolil jsem dvě. Protože proměnné je možno „separovat“ do tří určitých integrálů, je příklad vyřešen i tímto způsobem. Je zřejmé, že tento postup je nejrychlejší. Není ho možno provést vždy, to je vidět u druhého příkladu, kde meze konstantní nejsou. Těleso si představit nedokážeme, ale je zadáno tak, že můžeme sestavit trojnásobný integrál.

Třetí příklad se vrací k příkladu 7. 6 ve skriptu. Počítáme tam objem čtyřstěnu, tedy položíme $f(x,y,z) = 1$. Vše ostatní zůstane stejné. Objem počítáme i v posledním příkladu. Roviny $x=0$, $y=0$ a $z=0$ jsou roviny yz, xz a xy. Roviny $x=1$ a $y=1$ jsou kolmé na rovinu xy a prochází jedničkami na odpovídajících osách. Šikmou rovinou $z = 3 - x - y$ je tedy seříznut hranol, který stojí v rovině xy, má čtvercovou jednotkovou podstavu a kdyby nebyl seříznut, měl by nekonečnou výšku. Z obrázku je těleso snad zřejmé. Kolmým průmětem do roviny xy je tedy čtverec. Je důležité si uvědomit, že kdybychom zvolili šikmou rovinu stejně jako v předchozím příkladu, průmětem by již nebyl čtverec a výpočet by byl mnohem složitější.