(1)

4. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. K symetrické matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ najděte diagonální matici D kongruentní s A. Současně najděte regulární matici P takovou, že $D = P^T A P$.

Postup řešení:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \sim \text{stejné řádkové a sloupcové úpravy} \sim \left(\begin{array}{c|c} D & P^T \\ \hline P & \end{array}\right)$$

k 1. řádku přičteme 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim$$

k 1. sloupci přičteme 2.

2. a 3. řádek vynásobíme 5

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 20 & 15 & -5 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & -5 & 20 & 0 & 0 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim$$

2. a 3. sloupec vynásobíme 5

Od 2. řádku odečteme 4. násobek první

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 20 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 20 & 75 & -25 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & -25 & +100 & 0 & 0 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 5 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 5 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 20 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -45 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -45 & +95 & -1 & -1 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \text{Od 3. řádku} & & \\ 1 & 5 & 0 & \text{odečteme 1.} & & \\ 0 & 0 & 5 & & & \end{array}\right)$$

4. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. K symetrické matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ najděte diagonální matici D kongruentní s A. Současně najděte regulární matici P takovou, že $D = P^T A P$.

Stejně se sloupci

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -45 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -45 & +95 & -1 & -1 & 5 \\ \hline 1 & -4 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 5 & & & \end{array}\right)$$

3. řádek − 9 × 2. řádek

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -45 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 35 & -10 & 5 \\ \hline 1 & -4 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 5 & & & \end{array}\right)$$

3. sloupec − 9 × 2. sloupec

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 35 & -10 & 5 \\ \hline 1 & -4 & 35 & & & \\ 1 & 1 & -10 & & & \\ 0 & 0 & 5 & & & \end{array}\right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 305 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 35 \\ 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Zkouška:</u> Přesvědčíme se, že

$P^T A P = D.$

Příklad. 2. Symetrická bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má v souřadnicích standardní báze vyjádření $f(u,v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_3y_1$. ($x$ a y jsou souřadnice vektorů u a v ve standardní bázi.) Najděte v $\mathbb{R}^3$ nějakou její polární bázi, tj. bázi β v jejíž souřadnicích má f vyjádření $f(u,v) = b_{11}\bar{x}_1\bar{y}_1 + b_{22}\bar{x}_2\bar{y}_2 + b_{33}\bar{x}_3\bar{y}_3$. Toto vyjádření rovněž najděte. ($\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou souřadnice vektorů u a v v bázi β.)

Postup: matice bilin. formy f ve stand. bázi je $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

$$\left(\begin{array}{c|c} f(e_i,e_j) & e_i \\ \hline e_j & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} f(u_i,u_j) & u_i \\ \hline u_j & \end{array}\right)$$

stejné řádk. a sloupcové úpravy

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \\ \hline e_1\ e_2\ e_3 & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & b_{22} & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & b_{33} & u_3 \\ \hline u_1 & u_2 & u_3 & \end{array}\right)$$

Konkrétně:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & e_1 \\ 2 & 0 & 0 & e_2 \\ 3 & 0 & 0 & e_3 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & e_1 \\ 0 & -4 & -6 & e_2-2e_1 \\ 0 & -6 & -9 & e_3-3e_1 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & \end{array}\right)$$

Příklad. 2. Symetrická bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má v souřadnicích standardní báze vyjádření $f(u,v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_3y_1$. ($x$ a y jsou souřadnice vektorů u a v ve standardní bázi.) Najděte v $\mathbb{R}^3$ nějakou její polární bázi, tj. bázi β v jejíž souřadnicích má f vyjádření $f(u,v) = b_{11}\bar{x}_1\bar{y}_1 + b_{22}\bar{x}_2\bar{y}_2 + b_{33}\bar{x}_3\bar{y}_3$. Toto vyjádření rovněž najděte. ($\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou souřadnice vektorů u a v v bázi β.)

3. řádek vynásobíme 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -4 & -6 & e_2-2e_1 \\ 0 & -6 & -9 & e_3-3e_1 \\ \hline e_1 & e_2-2e_1 & e_3-3e_1 & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -4 & -6 & e_2-2e_1 \\ 0 & -12 & -18 & 2e_3-6e_1 \\ \hline & & & \end{array}\right)$$

3. sloupec vynásobíme 2

3. řádek $- 3\times$ 2. řádek

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -4 & -12 & e_2-2e_1 \\ 0 & -12 & -36 & 2e_3-6e_1 \\ \hline e_1 & e_2-2e_1 & 2e_3-6e_1 & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -4 & -12 & e_2-2e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2e_3-3e_2 \\ \hline & & & \end{array}\right)$$

3. sloupec $- 3\times$ 2. sloupec

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & -4 & 0 & e_2-2e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2e_3-3e_2 \\ \hline e_1 & e_2-2e_1 & 2e_3-3e_2 & \end{array}\right)$$

Hledaná báze β (jedna z mnoha)

$$\beta = \big((1,0,0), (-2,1,0), (0,-3,2)\big)$$

V jejích souřadnicích

$$f(u,v) = \bar{x}_1\bar{y}_1 - 4\bar{x}_2 y_2.$$

Příklad. 3. Zjistěte, zda následující funkce jsou kvadratické formy. Pokud ano, napište odpovídající symetrickou bilineární formu a matici této formy ve standarní bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}_2[x]$.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - 5x_2,$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2,$

c) $h : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R},\ h(p) = p(1)p(2) + 4p(3)^3,$

d) $k : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R},\ k(p) = p(1)p(2) + 4p(3)p'(8).$

Zde $p'(8)$ značí derivaci polynomu p v čísle 8.

(a) Není kvadr. forma. Pro kvadratickou formu f definovanou ze sym. bilin. formy F vztahem

$$f(x) = F(x,x)$$

platí

$$f(tx) = F(tx, tx) = t^2 F(x,x) = t^2 f(x).$$

Pro $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - 5x_2$ to ale neplatí

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = -3$$

ale $$f\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) = 4+4-10 = -2 \neq 4\cdot(-3)$$

(b) g je kvadr. forma. Odpovídající sym. bilin. forma je

$$G(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 5x_2y_2$$

s maticí ve stand. bázi

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix}.$$

6

Příklad. 3. Zjistěte, zda následující funkce jsou kvadratické formy. Pokud ano, napište odpovídající symetrickou bilineární formu a matici této formy ve standarní bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}_2[x]$.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - 5x_2$,
b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2$,
c) $h : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R},\ h(p) = p(1)p(2) + 4p(3)^3$,
d) $k : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R},\ k(p) = p(1)p(2) + 4p(3)p'(8)$.

Zde $p'(8)$ značí derivaci polynomu p v čísle 8.

(c) h není kvadratická forma. Neplatí

$$h(tp) = t^2 h(p)$$

Vezmeme polynom $p(x) = 1$.

$$h(p) = 1\cdot 1 + 4\cdot 1^3 = 5$$

$$h(2p) = 2\cdot 2 + 4\cdot 8 = 36 \neq 4\cdot 5$$

(d) k je kvadratická forma. Odpovídající sym. bilin. forma je

$$K(p,q) = \tfrac{1}{2}p(1)q(2) + \tfrac{1}{2}p(2)q(1) + 2p(3)q'(8) + 2p'(8)q(3)$$

Ta má v bázi $(1, x, x^2)$ matici

$$\begin{pmatrix} K(1,1) & K(1,x) & K(1,x^2) \\ K(x,1) & K(x,x) & K(x,x^2) \\ K(x^2,1) & K(x^2,x) & K(x^2,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3\frac{1}{2} & 34\frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} & 14 & 117 \\ 34\frac{1}{2} & 117 & 580 \end{pmatrix}$$

Příklad. 4. Kvadratická forma $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má ve standardní bázi vyjádření

$$f(u) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2.$$

Najděte její vyjádření v bázi $\alpha = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Dále najděte nějakou její polární bázi, tj. bázi β, v jejíž souřadnicích je $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2$, kde čísla $b_{ii} = 0, 1$ nebo -1. Určete signaturu f.

Kvadr. forma f má odpovídající sym. bilin. formu $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(u,v) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_3.$$

V bázi α je vyjádření dáno maticí $A = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = F(u_i, u_j)$, kde $\alpha = (u_1, u_2, u_j)$. Např.

$$a_{12} = F\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 2\cdot1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 - 1\cdot1 - 1\cdot0 - 1\cdot1 - 1\cdot0 = 2$$

Ve kvadratické formě f bude u $\bar{x}_1\bar{x}_2$ ve vyjádření v bázi α koeficient $2\cdot a_{12} = a_{12} + a_{21} = 4$.

Matice F ve stand. bázi je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & e_1 \\ 1 & -1 & 0 & e_2 \\ -1 & 0 & -1 & e_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & e_2 \\ 2 & 1 & -1 & e_1 \\ -1 & 0 & -1 & e_3 \end{array}\right) \sim$$

(8)

Příklad. 4. Kvadratická forma $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má ve standardní bázi vyjádření

$$f(u) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2.$$

Najděte její vyjádření v bázi $\alpha = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Dále najděte nějakou její polární bázi, tj. bázi β, v jejíž souřadnicích je $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2$, kde čísla $b_{ii} = 0, 1$ nebo -1. Určete signaturu f.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & e_2 \\ 1 & 2 & -1 & e_1 \\ 0 & -1 & -1 & e_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 3 & -1 & e_1+e_2 \\ 0 & -1 & -1 & e_3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 3 & -1 & e_1+e_2 \\ 0 & -1 & -1 & e_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & -1 & -1 & e_3 \\ 0 & 3 & -1 & e_1+e_2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & -1 & -1 & e_3 \\ 0 & -1 & 3 & e_1+e_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & -1 & -1 & e_3 \\ 0 & 0 & 4 & e_1+e_2-e_3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & -1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 4 & e_1+e_2-e_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & -1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2}(e_1+e_2-e_3) \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & -1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(e_1+e_2-e_3) \end{array}\right)$$

V bázi $\beta = \left((0,1,0), (0,0,1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right)$

má f vyjádření

$$f(u) = -z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$$

Signatura f je $(1,2,0)$ = (počet 1, počet −1, počet 0)

9

Příklad. 5. Definují následující symetrické bilineární formy skalární součin na $\mathbb{R}^3$? Pokud ano, napište pro ně Caychyovu nerovnost.

a) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
b) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
c) $f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2$,
d) $f(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.

Napíšeme si matici bilineární formy. Ta určuje pozitivní kvadr. formu, právě když splňuje Sylvestrovo kritérium, tj. její hlavní minory jsou kladné.

(a) Matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ Hlavní minory $1,\ 3,\ 15-27-1<0$

f není skalární součin.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ Hlavní minory

$1>0,\ 3>0,\ 15-12-1=2>0$

Jde o skalární součin. Příslušná Cauchyova nerovnost je

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

$$|x_1y_1+3x_2y_2+5x_3y_3+2x_1y_3+2x_3y_1-x_2y_3-x_3y_2|$$

$$\leq \sqrt{x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+4x_1x_3-2x_2x_3}\,\sqrt{y_1^2+3y_2^2+5y_3^2+4y_1y_3-2y_2y_3}$$

10

Příklad. 5. Definují následující symetrické bilineární formy skalární součin na $\mathbb{R}^3$? Pokud ano, napište pro ně Caychyovu nerovnost.

a) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
b) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
c) $f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2$,
d) $f(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ Hlavní minory jsou $0, -1, 16$

$f(x,x)$ není pozitivně definitní. Nejde o skalární součin.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Hlavní minory jsou $1, 1, 10 - 8 - 1 = 1$.

Jde o skalární součin. Cauchyova nerovnost je

$$|x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3|$$

$$\leq \sqrt{x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2}$$

$$\cdot \sqrt{y_1^2 - 4y_1y_2 + 5y_2^2 - 2y_2y_3 + 2y_3^2}$$