4. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. K symetrické matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ najděte diagonální matici D kongruentní s A. Současně najděte regulární matici P takovou, že $D = P^T AP$.

Poznámka. Matice D ani P nejsou určeny jednoznačně. Jednoznačně je určen pouze počet kladných a záporných čísel na diagonále matice D, tj. signatura matice D.

Příklad. 2. Symetrická bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má v souřadnicích standardní báze vyjádření $f(u,v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_3y_1$. ($x$ a y jsou souřadnice vektorů u a v ve standardní bázi.) Najděte v $\mathbb{R}^3$ nějakou její polární bázi, tj. bázi β v jejíž souřadnicích má f vyjádření $f(u,v) = b_{11}\bar{x}_1\bar{y}_1 + b_{22}\bar{x}_2\bar{y}_2 + b_{33}\bar{x}_3\bar{y}_3$. Toto vyjádření rovněž najděte. ($\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou souřadnice vektorů u a v v bázi β.)

Poznámka. Polární báze není určena jednoznačně. Jednoznačně je určen pouze počet kladných a záporných koeficientů v zápisu bilineární formy v souřadnicích polární báze.

Příklad. 3. Zjistěte, zda následující funkce jsou kvadratické formy. Pokud ano, napište odpovídající symetrickou bilineární formu a matici této formy ve standarní bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}_2[x]$.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - 5x_2$,
b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2$,
c) $h : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R},\ h(p) = p(1)p(2) + 4p(3)^3$,
d) $k : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R},\ k(p) = p(1)p(2) + 4p(3)p'(8)$.

Zde $p'(8)$ značí derivaci polynomu p v čísle 8.

Příklad. 4. Kvadratická forma $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má ve standardní bázi vyjádření

$$f(u) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2.$$

Najděte její vyjádření v bázi $\alpha = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Dále najděte nějakou její polární bázi, tj. bázi β, v jejíž souřadnicích je $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2$, kde čísla $b_{ii} = 0$, 1 nebo -1. Určete signaturu f.

Příklad. 5. Definují následující symetrické bilineární formy skalární součin na $\mathbb{R}^3$? Pokud ano, napište pro ně Caychyovu nerovnost.

a) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
b) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
c) $f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2$,
d) $f(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.

Domácí úloha

Příklad. Kvadratická forma $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ má ve standardní bázi vyjádření

$$f(u) = 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3 - 8x_2x_4 + 8x_3x_4.$$

Najděte nějakou bázi β, v jejíž souřadnicích je $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2 + b_{44}\bar{x}_4^2$, kde čísla $b_{ii} = 0$, 1 nebo -1.