5. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Pomocí Cauchyovy nerovnosti dokažte nerovnost mezi aritmetických a kvadratickým průměrem nezáporných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Kdy nastane rovnost?

V R^n vezměme standardní skalární součin

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n .$$

Cauchyova nerovnost říká, že

$$|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \|y\|$$

Vezměme $y = (1, 1, \dots, 1)$. Pak dostaneme

$$|x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + \dots + x_n \cdot 1| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}$$

Tedy
$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{n}$$

Pro nezáporná $x_1, x_2, \dots x_n$ upravíme na

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}\, n,$$

tedy

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

Rovnost nastane, právě když jsou vektory $(x_1, x_2, \dots x_n)$ a $(1, 1, \dots, 1)$ lineárně závislé, tj. pro $(x_1, x_2, \dots x_n) = k \cdot (1, 1, \dots, 1)$, neboli

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n .$$

2

Příklad. 2. Najděte ortonormální bázi podrostoru

$$S = [(1,2,-1,3,1),\ (5,2,-1,7,1),\ (2,-1,2,-4,-2)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem. Použijte k tomu prvně Gram-mův-Schmidtův ortogonalizační proces a potom získané vektory ortogonální báze vynormujte (tj. vydělte normou, abyste získali vektory jednotkové velikosti).

K vektorům $u_1 = (1,2,-1,3,1)$, $u_2 = (5,2,-1,7,1)$, $u_3 = (2,-1,2,-4,-2)$ najdeme pomocí Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu vektory v_1, v_2, v_3 takové, že $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ pro $i \neq j$ a

$$[v_1] = [u_1], \quad [v_1, v_2] = [u_1, u_2], \quad [v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2, u_3]$$

Prvně $\quad v_1 = u_1 = (1,2,-1,3,1)$

a hledáme v_2 ve tvaru

$$v_2 = u_2 - a v_1$$

Musí být $\quad \langle v_2, v_1\rangle = \langle u_2, v_1\rangle - a\langle v_1, v_1\rangle = 0$

$$a = \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} = \frac{32}{16} = 2$$

$$v_2 = u_2 - 2v_1 = (3,-2,1,1,-1)$$

v_3 hledáme ve tvaru

$$v_3 = u_3 - b v_2 - c v_1$$

Musí být

$$0 = \langle v_3, v_1\rangle = \langle u_3, v_1\rangle - b\overbrace{\langle v_2, v_1\rangle}^{=0} - c\langle v_1, v_1\rangle$$

$$= \langle u_3, v_1\rangle - c\langle v_1, v_1\rangle$$

$$c = \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} = \frac{-16}{16} = -1$$

3

Příklad. 2. Najděte ortonormální bázi podrostoru

$$S = [(1, 2, -1, 3, 1),\ (5, 2, -1, 7, 1),\ (2, -1, 2, -4, -2)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem. Použijte k tomu prvně Gram-mův-Schmidtův ortogonalizační proces a potom získané vektory ortogonální báze vynormujte (tj. vydělte normou, abyste získali vektory jednotkové velikosti).

Dále

$$0 = \langle v_3, v_2 \rangle = \langle u_3, v_2 \rangle - b\langle v_2, v_2 \rangle - c\underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0}$$

$$= \langle u_3, v_2 \rangle - b\langle v_2, v_2 \rangle$$

$$b = \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Proto

$$v_3 = (2, -1, 2, -4, -2) - \frac{1}{2}(3, -2, 1, 1, -1) + (1, 2, -1, 3, 1)$$

$$= \frac{1}{2}(3, 4, 1, -3, -1).$$

Za ortonormální bázi podprostoru S nyní vezmeme vektory

$$\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\right), \text{ neboť } \left\|\frac{v_i}{\|v_i\|}\right\| = \frac{\|v_i\|}{\|v_i\|} = 1.$$

Jsou to vektory

$$\frac{1}{4}(1, 2, -1, 3, 1),\ \frac{1}{4}(3, -2, 1, 1, -1),\ \frac{1}{6}(3, 4, 1, -3, -1),$$

neboť $\|v_1\| = 4$, $\|v_2\| = 4$, $\|v_3\| = 3$

④

Příklad. 3. V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální doplněk podprostoru

$$V = [(1, 2, -1, -3, 3),\ (1, -2, 3, 1, -1)]\,.$$

Definice ortogonálního doplňku říká, že

$$V^\perp = \{\, x \in \mathbb{R}^5 \mid \forall v \in V;\ \langle x, v\rangle = 0 \}$$

Splnění podmínky $\langle x, v\rangle = 0$ stačí požadovat jen po vektorech báze podprostoru V, tedy po vektorech $v_1 = (1, 2, -1, -3, 3)$ a $v_2 = (1, -2, 3, 1, -1)$. Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\langle x, v_1\rangle = x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0$$
$$\langle x, v_2\rangle = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0$$

Řešíme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení je

$$V^\perp = \{(-p+q-s, -p+q+s, s, q, p) \in \mathbb{R}^5 \mid p, q, s \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{ p(-1,-1,0,0,1) + q(1,1,0,1,0) + s(-1,1,1,0,0) \in \mathbb{R}^5 \mid p, q, s \in \mathbb{R}\} = [(-1,-1,0,0,1), (1,1,0,1,0), -1,1,1,0,0]$$

Tedy ortogonální doplněk $V^\perp$ je lineární obal vektorů $(-1,-1,0,0,1)$, $(1,1,0,1,0)$, $(-1,1,1,0,0)$.

5

Příklad. 4. Spočtěte kolmou projekci vektoru $u = (2, 11, -3, -4, 7)$ do podprostoru V a jeho ortogonálního doplňku $V^\perp$ z předchozího příkladu.

Kolmou projekci vektoru u do podprostoru V označme Pu. Hledáme ji ve tvaru

$$Pu = a v_1 + b v_2,$$

kde $V = [v_1 = (1, 2, -1, -3, 3),\ v_2 = (1, -2, 3, 1, -1)]$,

a musí pro ni platit, že

$$u - Pu \perp V$$

($u - Pu$ je kolmé na $V \iff u - Pu$ leží ve $V^\perp$).

Tato podmínka znamená, že

$$\langle u - Pu, v_1 \rangle = 0$$
$$\langle u - Pu, v_2 \rangle = 0$$

Dosazením $a v_1 + b v_2$ za Pu dostaneme

$$\langle u - (a v_1 + b v_2), v_1 \rangle = 0$$
$$\langle u - (a v_1 + b v_2), v_2 \rangle = 0$$

Tedy dostáváme soustavu dvou rovnic o neznámých $\underline{a}$ a $\underline{b}$:

$$a \langle v_1, v_1 \rangle + b \langle v_2, v_1 \rangle = \langle u, v_1 \rangle$$
$$a \langle v_1, v_2 \rangle + b \langle v_2, v_2 \rangle = \langle u, v_2 \rangle$$

Číselně

$$24a - 12b = 60$$
$$-12a + 16b = -40$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 24 & -12 & 60 \\ -12 & 16 & -40 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim$$

součet 1. a 2. řádku

Příklad. 4. Spočtěte kolmou projekci vektoru $u = (2, 11, -3, -4, 7)$ do podprostoru V a jeho ortogonálního doplňku $V^{\perp}$ z předchozího příkladu.

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \quad \text{Tedy } b = -1,\ a = 2.$$

Kolmá projekce vektoru u do podprostoru V je

$$Pu = 2(1,2,-1,-3,3) - (1,-2,3,1,-1)$$
$$= (1, 6, -5, -7, 7)$$

Kolmou projekci Qu vektoru u do $V^{\perp}$ spočteme nyní jako

$$Qu = u - Pu = (2,11,-3,-4,7) - (1,6,-5,-7,7)$$
$$= (1, 5, 2, 3, 0).$$

Zkouška: $Pu \perp Qu \quad \langle (1,6,-5,-7,7), (1,5,2,3,0) \rangle = 0$

$$Pu + Qu = u$$

7

Příklad. 5. Uvažujme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem a nadrovinu ρ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Pomocí skalárního součinu napište předpis lineárního zobrazení $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které je kolmou projekcí do nadroviny ρ. (Předpokládáme, že $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.)

Nadrovina v $\mathbb{R}^n$ má dimenzi $n-1$. Její ortogonální doplněk má dimenzi 1. Protože pro všechna $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \rho$ platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

je vektor $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ kolmý k ρ. Proto

$$\rho^\perp = [v].$$

Tento vektor nazýváme normálový k nadrovině ρ.

Spočítáme kolmou projekci Q vektoru $y \in \mathbb{R}^n$ do $\rho^\perp$. Hledáme ji ve tvaru

$$Qy = k \cdot v \quad , \quad k \in \mathbb{R}.$$

Musí pro ni platit, že

$$y - Qy = y - k \cdot v \in \rho,$$

to je

$$y - kv \perp v$$

$$\langle y - kv, v \rangle = 0$$

Odtud máme $k = \dfrac{\langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle} =$

$$= \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

8

Příklad. 5. Uvažujme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem a nadrovinu ρ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Pomocí skalárního součinu napište předpis lineárního zobrazení $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které je kolmou projekcí do nadroviny ρ. (Předpokládáme, že $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.)

Tedy

$$Qy = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}(a_1, a_2 \ldots a_n)$$

Kolmá projekce P vektoru y do nadroviny ρ pak bude

$$Py = y - Qy = y - \frac{\langle y, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v =$$

$$= (y_1, y_2, \ldots, y_n) - \frac{a_1y_1 + a_2y_2 \cdots + a_ny_n}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

9

Příklad. 6. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Jestliže $\varphi(x) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

pak $\varphi(e_1) = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ = 1. sloupec matice A

$\varphi(e_2) = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}$ = 2. sloupec matice A

$\varphi(e_3) = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ = 3. sloupec matice A

K nalezení matice A nám tedy stačí najít hodnoty kolmé projekce φ na vektorech e_1, e_2, e_3 standardní báze. To můžeme udělat dvěma způsoby:

1. způsob využívá výsledku předchozího příkladu. Normálový vektor dané roviny je $(2,-1,2)$, kolmá projekce na rovinu podle předchozí úlohy je

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{\langle x, (2,-1,2) \rangle}{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

Příklad. 6. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{9}(2x_1 - x_2 + 2x_3)\cdot(2) \\ x_2 - \frac{1}{9}(2x_1 - x_2 + 2x_3)(-1) \\ x_3 - \frac{1}{9}(2x_1 - x_2 + 2x_3)(2) \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} +5x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Matice A je

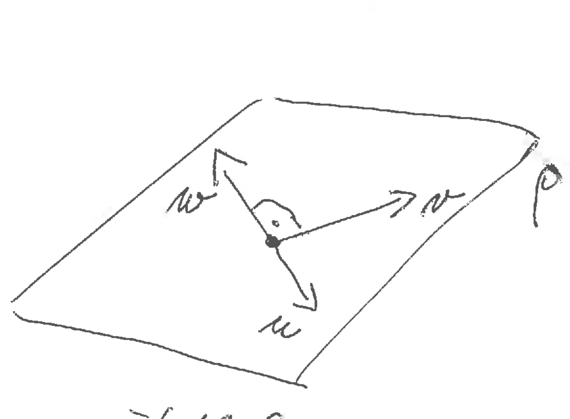
$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} +5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. způsob Najdeme obrazy tří vektorů vhodné báze při kolmé projekci. Pro vektory $u = (1,2,0)$, $v = (1,0,-1) \in \rho$ platí

$$\varphi(u) = u, \quad \varphi(v) = v.$$

Pro normálový vektor $w = (2,-1,2)$ platí

$$\varphi(w) = (0,0,0).$$



Nyní z těchto údajů spočítáme $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ a $\varphi(e_3)$.

Napišme vektory u, v, w do řádků matice a za nimi vektory $\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)$.

Příklad. 6. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{c|c} u & \varphi(u) \\ v & \varphi(v) \\ w & \varphi(w) \end{array}\right) \sim \text{pořádíme element. řádkové úpravy} \sim \left(\begin{array}{c|c} e_1 & \varphi(e_1) \\ e_2 & \varphi(e_2) \\ e_3 & \varphi(e_3) \end{array}\right)$$

Při pořádání úprav, pokud φ je lineární, zůstává zachováno, že vedle vektoru je jeho obraz

$$\left(\begin{array}{c|c} u & \varphi(u) \\ v & \varphi(v) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} u & \varphi(u) \\ v+au & \varphi(v)+a\varphi(u) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} u & \varphi(u) \\ v+au & \varphi(v+au) \end{array}\right)$$

Počítáme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & -9 & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 9 & -36 & 18 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Tedy $\varphi(9e_1) = (5,2,-4)$, $\varphi(9e_2) = (2,8,2)$, $\varphi(9e_3) = (-4,2,5)$. Proto $\varphi(e_1) = \frac{1}{9}(5,2,-4)$, $\varphi(e_2) = \frac{1}{9}(2,8,2)$, $\varphi(e_3) = \frac{1}{9}(-4,2,5)$. Vektory $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$ tvoří sloupce hledané matice A. Proto

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$