5. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Pomocí Cauchyovy nerovnosti dokažte nerovnost mezi aritmetických a kvadratickým průměrem nezáporných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Kdy nastane rovnost?

Příklad. 2. Najděte ortonormální bázi podrostoru

$$S = [(1, 2, -1, 3, 1),\ (5, 2, -1, 7, 1),\ (2, -1, 2, -4, -2)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem. Použijte k tomu prvně Gram-mův-Schmidtův ortogonalizační proces a potom získané vektory ortogonální báze vynormujte (tj. vydělte normou, abyste získali vektory jednotkové velikosti).

Příklad. 3. V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální doplněk podprostoru

$$V = [(1, 2, -1, -3, 3),\ (1, -2, 3, 1, -1)]\,.$$

Příklad. 4. Spočtěte kolmou projekci vektoru $u = (2, 11, -3, -4, 7)$ do podprostoru V a jeho ortogonálního doplňku $V^\perp$ z předchozího příkladu.

Příklad. 5. Uvažujme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem a nadrovinu ρ

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Pomocí skalárního součinu napište předpis lineárního zobrazení $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které je kolmou projekcí do nadroviny ρ. (Předpokládáme, že $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$.)

Příklad. 6. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Domácí úloha k 5. cvičení

Příklad. 1. [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 6, úloha 1d.]
Najděte ortonormální bázi podrostoru

$$V = [(1, 1, 3, 3, 4),\ (1, 3, -5, -7, -1),\ (1, -1, 5, 7, -3)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem.

Příklad. 2. [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 7, úloha 1]
V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte kolmou projekci vektoru $u = (1, 2, 3, 4, 5)$ do vektorových podprostorů

$$\begin{aligned} V &= [(3, 3, 2, 1, 3),\ (5, 1, 4, -1, 1)] \\ W &= [(1, -3, 4, -2, 2),\ (1, 5, -8, -2, 4),\ (1, -9, 16, 4, -4)] \end{aligned}$$

Ve druhém případě spočtěte prvně ortogonální doplněk $W^\perp$ a kolmou projekci vektoru u do $W^\perp$.

Příklad. 3. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na přímku p procházející počátkem se směrovým vektorem $(1, -2, 1)$. Najděte matici B tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Bx = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$