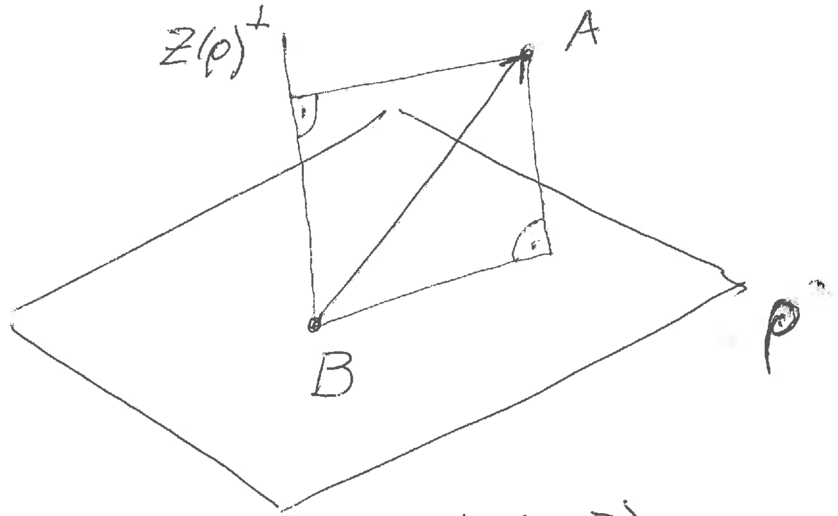
6. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost bodu $A = [4, 1, -4, -5]$ od roviny

$$\rho: \ [3, -2, 1, 5] + t(2, 3, -2, -2) + s(4, 1, 3, 2).$$

Současně najděte bod $M \in \rho$ takový, že $\|M - A\| = \operatorname{dist}(A, \rho)$.

Označíme $B = [3,-2,1,5] \in \rho$. Vzdálenost bodu A od roviny ρ je rovna velikosti vektoru kolmé projekce vektoru $A-B$ do ortogonálního doplňku k $Z(\rho)$



$$\operatorname{dist}(A,\rho) = P_{Z(\rho)^\perp}(A-B)$$

Spočteme kolmou projekci do $Z(\rho)$:

$$A-B = (1,3,-5,-10)$$

$$P_{Z(\rho)}(A-B) = a(2,3,-2,-2) + b(4,1,3,2)$$

$$(A-B) - P_{Z(\rho)}(A-B) \perp Z(\rho)$$

proto

$$a\langle u_1,u_1\rangle + b\langle u_2,u_1\rangle = \langle A-B,u_1\rangle$$
$$a\langle u_1,u_2\rangle + b\langle u_2,u_2\rangle = \langle A-B,u_2\rangle$$

kde $u_1 = (2,3,-2,-2)$, $u_2 = (4,1,3,2)$. Číselně

$$21a + b = 41$$
$$a + 30b = -28$$

6. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost bodu $A = [4, 1, -4, -5]$ od roviny

$$\rho: \; [3, -2, 1, 5] + t(2, 3, -2, -2) + s(4, 1, 3, 2).$$

Současně najděte bod $M \in \rho$ takový, že $\|M - A\| = \operatorname{dist}(A, \rho)$.

Řešíme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 21 & 1 & 41 \\ 1 & 30 & -28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 30 & -28 \\ 0 & -629 & 629 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} b = -1 \\ a = 2 \end{array}$$

Proto

$$P_{Z(\rho)}(A - B) = 2 \cdot u_1 - u_2 = (0, 5, -7, -6).$$

Dále

$$P_{Z(\rho)^\perp}(A-B) = (A - B) - P_{Z(\rho)}(A-B) = (1, 3, -5, -10) - (0, 5, -7, -6) = (1, -2, 2, -4)$$

$$\operatorname{dist}(A, \rho) = \| P_{Z(\rho)^\perp}(A-B) \| = \|(1, -2, 2, -4)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Pro bod $M \in \rho$ takový, že $\|A - M\| = \operatorname{dist}(A, \rho)$ musí platit:

$$A = M + P_{Z(\rho)^\perp}(A - B).$$

Tedy

$$M = A - P_{Z(\rho)^\perp}(A-B) = [4, 1, -4, -5] - (1, -2, 2, -4) = [3, 3, -6, -1].$$

Vzdálenost A od roviny ρ je 5 a realizuje se v bodě $M = [3, 3, -6, -1] \in \rho$.

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost přímky p od roviny ρ

$$p: \ [5,4,4,5] + r(0,0,1,-4), \qquad \rho: \ [4,1,1,0] + s(1,-1,0,0) + t(2,0,-1,0)$$

a body $M \in p$ a $N \in \rho$, v nichž se tato vzdálenost realizuje, tj. $\|M - N\| = \mathrm{dist}(p, \rho)$.

Označme $A = [5,4,4,5]$, $u = (0,0,1,-4)$, $B = [4,1,1,0]$, $v_1 = (1,-1,0,0)$, $v_2 = (2,0,-1,0)$.

Pokud bychom chtěli spočítat jen vzdálenost je nejlepší najít kolmou projekci vektoru $A-B$ do ortogonálního doplňku k $Z(p)+Z(\rho)$. Vzdálenost je pak rovna velikosti této kolmé projekce.

Najdeme $(Z(p)+Z(\rho))^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^4;\ x \perp u, v_1, v_2\}$

Pro $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ dostaneme soustavu tří rovnic

$$\langle x, u\rangle = 0$$
$$\langle x, v_1\rangle = 0$$
$$\langle x, v_2\rangle = 0$$

Matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Řešení je $x = a(2,2,4,1)$.

Kolmá projekce $A - B = (1,3,3,5)$ do $(Z(p)+Z(\rho))^{\perp} = [(2,2,4,1)]$ je

$$P(A-B) = a \cdot (2,2,4,1)$$

Platí $A - B - a(2,2,4,1) \perp (2,2,4,1)$

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost přímky p od roviny ρ

$$p: \; [5,4,4,5] + r(0,0,1,-4), \qquad \rho: \; [4,1,1,0] + s(1,-1,0,0) + t(2,0,-1,0)$$

a body $M \in p$ a $N \in \rho$, v nichž se tato vzdálenost realizuje, tj. $\|M - N\| = \operatorname{dist}(p, \rho)$.

To vede na rovnici

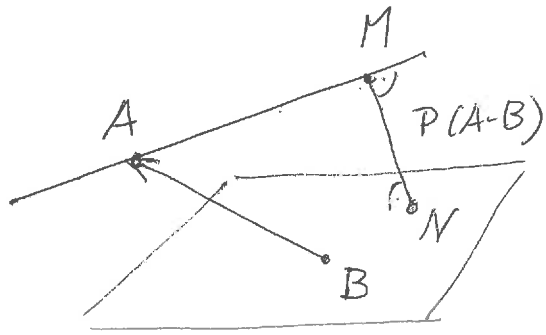
$$a = \frac{\langle A-B, (2,2,4,1)\rangle}{\|(2,2,4,1)\|^2} = \frac{25}{25} = 1$$

Tedy $P(A-B) = (2,2,4,1)$ a

$$\operatorname{dist}(p,\rho) = \|P(A-B)\| = \|(2,2,4,1)\| = 5.$$

Potom pro body $M \in p$ a $N \in \rho$, které vzdálenost realizují, musí platit

$$M = N + P(A-B)$$



To vede na rovnice

pro $M = A + ru$

a $N = B + s v_1 + t v_2$

v neznámých r, s, t:

$$A + ru = B + s v_1 + t v_2 + P(A-B)$$

$$(A-B) - P(A-B) = s v_1 + t v_2 - ru$$

Soustava 4 rovnic o 3 neznámých má matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & +4 & 4 \end{array}\right)$$

Jednoduše zjistíme, že řešení příslušné soustavy je $r = 1$, $t = 0$, $s = -1$.

Tedy $M = A + u = [5,4,5,1]$

$N = B - v_1 = [3,2,1,0]$.

Vzdálenost je 5, realizuje se v bodech M a N.

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost přímky p od roviny ρ

$$p: \ [5,4,4,5]+r(0,0,1,-4), \qquad \rho: \ [4,1,1,0]+s(1,-1,0,0)+t(2,0,-1,0)$$

a body $M \in p$ a $N \in \rho$, v nichž se tato vzdálenost realizuje, tj. $\|M-N\| = \operatorname{dist}(p,\rho)$.

Jiné řešení: Hledáme přímo body $M = A + ru$ a $N = B + sv_1 + tv_2$, kde se vzdálenost realizuje. Pro ně musí platit

$$M - N \perp Z(p) + Z(\rho)$$

Tedy

$$\langle M-N, u\rangle = 0$$
$$\langle M-N, v_1\rangle = 0$$
$$\langle M-N, v_2\rangle = 0$$

To vede na soustavu 3 rovnic a třech neznámých r, s, t, kde ale musíme počítat skalární součiny a to je potenciální zdroj chyb.

$$\langle A+ru-B-sv_1-tv_2, u\rangle = 0$$
$$\langle A+ru-B-sv_1-tv_2, v_1\rangle = 0$$
$$\langle A+ru-B-sv_1-tv_2, v_2\rangle = 0$$

Úpravou

$$s\langle v_1, v_1\rangle + t\langle v_2, v_1\rangle - r\langle u, v_1\rangle = \langle A-B, v_1\rangle$$
$$s\langle v_1, v_2\rangle + t\langle v_2, v_2\rangle - r\langle u, v_2\rangle = \langle A-B, v_2\rangle$$
$$s\langle v_1, u\rangle + t\langle v_2, u\rangle - r\langle u, u\rangle = \langle A-B, u\rangle$$

Číselně

6

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost přímky p od roviny ρ

$$p: \ [5,4,4,5] + r(0,0,1,-4), \qquad \rho: \ [4,1,1,0] + s(1,-1,0,0) + t(2,0,-1,0)$$

a body $M \in p$ a $N \in \rho$, v nichž se tato vzdálenost realizuje, tj. $\|M - N\| = \mathrm{dist}(p, \rho)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -17 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -17 & -17 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -17 & -17 \\ 0 & 0 & 50 & 50 \end{array}\right)$$

Řešení je $r = 1, \ t = 0, \ s = -1$.

Tedy $M = A + u = [5,4,5,1]$

$N = B - v_1 = [3,2,1,0]$

a vzdálenost p a ρ je

$\|M - N\| = \|(2,2,4,1)\| = 5.$

Příklad. 3. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost rovin σ a τ a body, v nichž se realizuje.

$$\sigma : [4,5,3,2] + s(1,2,2,2) + t(2,0,2,1),$$
$$\tau : [1,-2,1,-3] + p(2,-2,1,2) + q(1,-2,0,-1).$$

Nechť $A = [4,5,3,2]$, $u_1 = (1,2,2,2)$, $u_2 = (2,0,2,1)$

$B = [1,-2,1,-3]$, $v_1 = (2,-2,1,2)$, $v_2 = (1,-2,0,-1)$

Řešit tuto úlohu pomocí skalárních součinů by bylo pracné, navíc chyba při dosazování součinů je velice pravděpodobná. Použijeme tedy 1. metodu řešení z příkladu 2.

$$\left(Z(\sigma) + Z(\tau)\right)^{\perp} = \{ X \in \mathbb{R}^4,\ \langle X, u_1\rangle = \langle X, u_2\rangle = \langle X, v_1\rangle = \langle X, v_2\rangle = 0\}$$

Soustava 4 rovnic o 4 neznámých (x_1, x_2, x_3, x_4) má matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení je $x = a(2,1,-2,0)$

Kolmá projekce $A-B$ do $\left(Z(\sigma)+Z(\tau)\right)^{\perp} = [x]$ je $P(A-B) = a(2,1,-2,0)$

$$a = \frac{\langle A-B, (2,1,-2,0)\rangle}{\langle (2,1,-2,0), (2,1,-2,0)\rangle} =$$

Příklad. 3. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost rovin σ a τ a body, v nichž se realizuje.

$$\sigma : [4,5,3,2] + s(1,2,2,2) + t(2,0,2,1),$$
$$\tau : [1,-2,1,-3] + p(2,-2,1,2) + q(1,-2,0,-1).$$

$$= \frac{\langle (3,7,2,5),(2,1,-2,0)\rangle}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Tedy $\operatorname{dist}(\sigma,\tau) = \|(2,1,-2,0)\| = \sqrt{9} = \underline{\underline{3.}}$

(Protože $\dim(Z(\sigma)+Z(\tau)) = 3$, je $\dim(Z(\sigma)\cap Z(\tau)) = 1$, roviny σ a τ jsou tedy částečně rovnoběžné. Kdyby $\dim(Z(\sigma)+Z(\tau)) = 4$, měly by průnik, neboť jejich vzdálenost by vyšla nulová.) Nyní hledáme $M \in \sigma$ a $N \in \tau$ tak, že $\|M-N\| = 3$. Platí

$$M = N + P(A-B)$$

$$\underbrace{A + su_1 + tu_2}_{M} = \underbrace{B + pv_1 + qv_2}_{N} + P(A-B)$$

Odtud

$$(A-B) - P(A-B) = -su_1 - tu_2 + pv_1 + qv_2$$

Příslušná soustava je

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

(9)

Příklad. 3. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost rovin σ a τ a body, v nichž se realizuje.

$$\sigma : [4,5,3,2] + s(1,2,2,2) + t(2,0,2,1),$$
$$\tau : [1,-2,1,-3] + p(2,-2,1,2) + q(1,-2,0,-1).$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

rozdíl 3. a 2. řádku

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

řešení je $(s,t,p,q) = (-3-b, 1+b, 0, b)$, $b \in \mathbb{R}$

Tedy body M a N závisejí na parametru (tvoří dvě přímky v σ a v τ, které jsou rovnoběžné).

$$M_b = [4,5,3,2] - (3+b)(1,2,2,2) + (1+b)(2,0,2,1)$$
$$= [3,-1,-1,-3] + b(1,-2,0,-1)$$

$$N_b = [1,-2,1,-3] + b(1,-2,0,-1).$$

Směrové vektory obou přímek jsou stejné.

Zkontrolujeme, že $\|M_b - N_b\| = \|(2,1,-2,0)\| = 3.$

(10)

Příklad. 4. Určete odchylku přímky $p:\ [1,2,3,4]+t(-3,15,1,-5)$ od roviny
$\rho:\ [0,0,0,0]+r(1,-5,-2,10)+s(1,8,-2,-16)$.

Spočteme kolmou projekci vektoru
$u=(-3,15,1,-5)$ do $Z(\rho)=[v_1,v_2]$.
Potom odchylka přímky a roviny je α,
kde $\cos\alpha=\dfrac{\|Pu\|}{\|u\|}$.

$Pu = a v_1 + b v_2$, $\quad u - Pu \perp v_1, v_2$.

Dostáváme soustavu

$$a\langle v_1,v_1\rangle + b\langle v_2,v_1\rangle = \langle u,v_1\rangle$$
$$a\langle v_1,v_2\rangle + b\langle v_2,v_2\rangle = \langle u,v_2\rangle$$

Číselně máme soustavu s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} 130 & -195 & -130 \\ -195 & 325 & 195 \end{array}\right)$$

Koeficienty jsou „hrozné", ale při pozornějším pohledu matice můžeme uhodnout řešení $a=-1$, $b=0$.

Tedy $Pu=(-1,5,2,-10)$

$$\cos\alpha=\frac{\|Pu\|}{\|u\|}=\frac{\sqrt{130}}{\sqrt{260}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tedy $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$. Odchylka přímky a roviny je $\dfrac{\pi}{4}$.

Příklad. 5. V $\mathbb{R}^4$ určete odchylku rovin τ a σ.

$$\sigma : [2,1,0,1] + s(1,1,1,1) + t(1,-1,1-1),$$
$$\tau : [1,0,1,1] + p(2,2,1,0) + q(1,-2,2,0).$$

Odchylka σ a τ je odchylkou jejich zaměření $Z(\sigma)$ a $Z(\tau)$. Spočteme si, že

$$Z(\sigma) \cap Z(\tau) = [(1,0,1,0)]$$ (nebudu počítat).

Potom odchylka $Z(\sigma)$ a $Z(\tau)$ se počítá jako odchylka

$$Z(\sigma) \cap (Z(\sigma)\cap Z(\tau))^{\perp} \text{ a } Z(\tau)\cap(Z(\sigma)\cap Z(\tau))^{\perp}.$$

Jednoduše zjistíme, že

$$(Z(\sigma)\cap Z(\tau))^{\perp} = [(1,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)]$$

a spočítáme, že

$$P = Z(\sigma)\cap(Z(\sigma)\cap Z(\tau))^{\perp} = [(0,1,0,1)],$$
$$Q = Z(\tau)\cap(Z(\sigma)\cap Z(\tau))^{\perp} = [(1,4,-1,0)].$$

Odchylka α rovin σ a τ je tedy rovna odchylce přímek P a Q a pro ni platí

$$\cos\alpha = \frac{|\langle(0,1,0,1),(1,4,-1,0)\rangle|}{\|(0,1,0,1)\|\,\|(1,4,-1,0)\|} = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{18}} = \frac{2}{3}$$

Tedy $\alpha \in (0,\frac{\pi}{2})$ takový, že $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Příklad. 6. V $\mathbb{R}^5$ spočítejte odchylku roviny ρ a nadroviny Γ.

$$\rho : s(1,-1,1,1,3) + t(1,-3,-3,-3,-9),$$
$$\Gamma : x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0.$$

K výpočtu využijeme toho, že

$$\text{odchylka}\,(\rho, \Gamma) + \text{odchylka}\,(\rho, \vec{n}) = \frac{\pi}{2},$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor k nadrovině Γ. (Znáte to ze střední školy z 3-rozměrného prostoru pro ρ ~~přímky~~ a Γ roviny.)

Normálový vektor ke Γ je $\vec{n} = (1, 2, -1, 3, 1)$ (souřadnice jsou koeficienty rovnice popisující nadrovinu Γ).

Kolmá projekce $\vec{n}$ do $Z(\rho) = [v_1, v_2]$, $v_1 = (1,-1,1,1,3)$, $v_2 = (1,-3,-3,-3,-9)$ je

$$P\vec{n} = s v_1 + t v_2. \qquad \vec{n} - P\vec{n} \perp v_1, v_2$$

Dostáváme

$$s\langle v_1, v_1\rangle + t\langle v_2, v_1\rangle = \langle \vec{n}, v_1\rangle$$
$$s\langle v_1, v_2\rangle + t\langle v_2, v_2\rangle = \langle \vec{n}, v_2\rangle$$

Číselně má soustava matici

$$\left(\begin{array}{cc|c} 13 & -29 & 4 \\ -29 & 109 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 13 & -29 & 4 \\ -3 & 51 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 17 & -4 \\ 0 & 192 & -48 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 17 & -4 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$$ Řešení je $t = -\frac{1}{4}$, $s = -\frac{1}{4}$

(13)

Příklad. 6. V $\mathbb{R}^5$ spočítejte odchylku roviny ρ a nadroviny Γ.

$$\rho : s(1,-1,1,1,3) + t(1,-3,-3,-3,-9),$$
$$\Gamma : x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0.$$

~~Ale~~ Tedy $P\vec{n} = -\frac{1}{4}(v_1+v_2) = \frac{1}{2}(-1,2,1,1,3)$

Odchylka vektorů $\vec{n}$ a $P\vec{n}$ je α, kde

$$\cos\alpha = \frac{\|P\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\frac{1}{2}\|(-1,2,1,1,3)\|}{\|(1,2,-1,3,1)\|} = \frac{1}{2}$$

Tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Proto odchylka roviny ρ a nadroviny Γ je

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}.$$