

## 7. cvičení z lineární algebry II

**Příklad. 1.** Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pokud lze z vlastních vektorů sestavit bázi prostoru  $\mathbb{R}^3$ , napište matici zobrazení  $\varphi$  v této bázi.

**Příklad. 2.** Najděte vlastní čísla a vlastní podprostory lineárního zobrazení

$$\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pokud lze z vlastních vektorů sestavit bázi prostoru  $\mathbb{R}^3$ , napište matici zobrazení  $\psi$  v této bázi.

**Příklad. 3.** Najděte vlastní čísla a jejich algebraickou a geometrickou násobnost u lineárního zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Bázi vlastních podprostorů doplňte na bázi  $\alpha$  celého prostoru  $\mathbb{R}^4$  a napište matici zobrazení  $\varphi$  v této bázi.

**Příklad. 4.** Pomocí vlastních čísel a vektorů zjistěte, které z následujících matic jsou podobné diagonální matici nad  $\mathbb{R}$  a které nad  $\mathbb{C}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

**Příklad. 5.** Zobrazení  $\varphi$  je symetrií prostoru  $\mathbb{R}^3$  podle přímky procházející počátkem se směrovým vektorem  $(1, 1, 1)$ . Napište předpis tohoto zobrazení v souřadnicích standardní báze ve tvaru  $\varphi(x) = Ax$ . Jaké má  $\varphi$  vlastní čísla a vektory?

**Příklad. 6.** Zobrazení  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je kolmá projekce na rovinu

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Napište předpis tohoto zobrazení v souřadnicích standardní báze ve tvaru  $\varphi(x) = Bx$ . Jaké má  $\varphi$  vlastní čísla a vektory?

**Domácí úloha k 7. cvičení**

**Příklad. 1.** Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního operátoru zadaného maticí

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Příklad. 2.** Spočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Příklad. 3.** Necht'  $\varphi$  je zobrazení  $\mathbb{R}^3$  do sebe, které je symetrií podle roviny  $x_1 - x_3 = 0$ . Najděte matici  $B$  takovou, že v souřadnicích standardní báze je  $\varphi(x) = Bx$ .