(1)

8. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Lineární zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

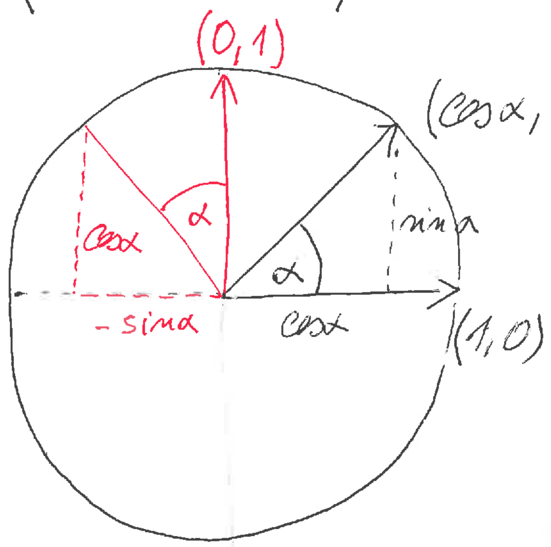
$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

je otočení o úhel α proti směru hodinových ručiček. Přesvědčte se o tom tím, že zobrazíte vektory $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}r\cos\beta\\r\sin\beta\end{pmatrix}$.

Ukažte podle definice, že je to ortonormální operátor. Spočtěte determinant příslušné matice a v oboru komplexních čísel najděte její vlastní čísla.

Počítáme

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$



$$\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\varphi\begin{pmatrix}r\cos\beta\\ r\sin\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\cos\beta\\ r\sin\beta\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}r(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\\ r(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos(\alpha+\beta)\\ r\sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

Použili jsme vzorec na $\cos(\alpha+\beta)$ a $\sin(\alpha+\beta)$.

Namalujeme si obrázek:

2

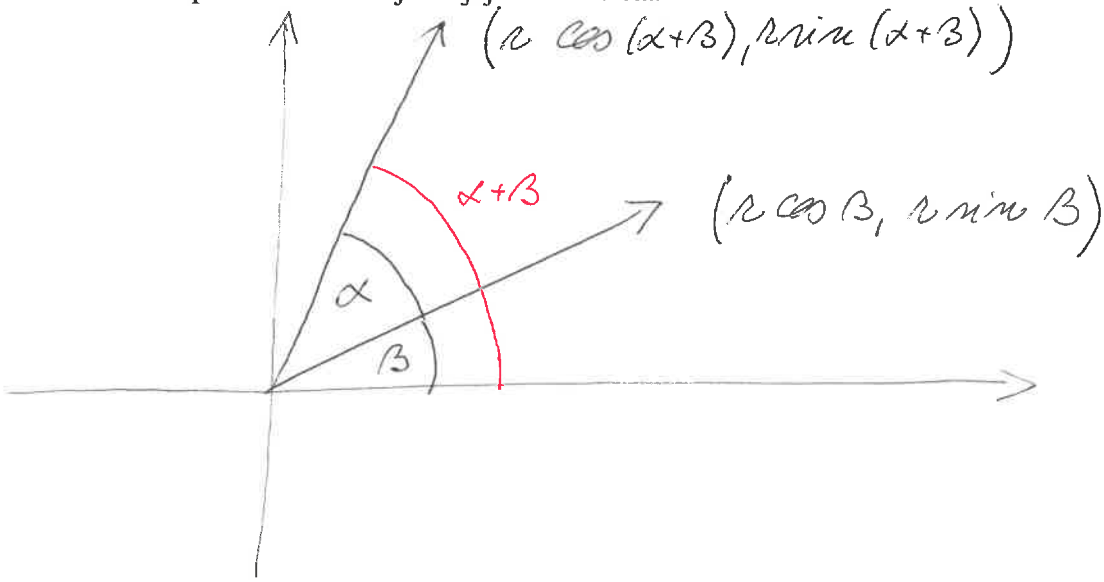
8. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

je otočení o úhel α proti směru hodinových ručiček. Přesvědčte se o tom tím, že zobrazíte vektory $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}r\cos\beta\\ r\sin\beta\end{pmatrix}$.

Ukažte podle definice, že je to ortonormální operátor. Spočtěte determinant příslušné matice a v oboru komplexních čísel najděte její vlastní čísla.



$$\det\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Charakteristický polynom je

$$\det\begin{pmatrix}\cos\alpha-\lambda & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha-\lambda\end{pmatrix} = (\lambda-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha =$$

$$= \lambda^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \lambda^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + 1.$$

Kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \dfrac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} =$

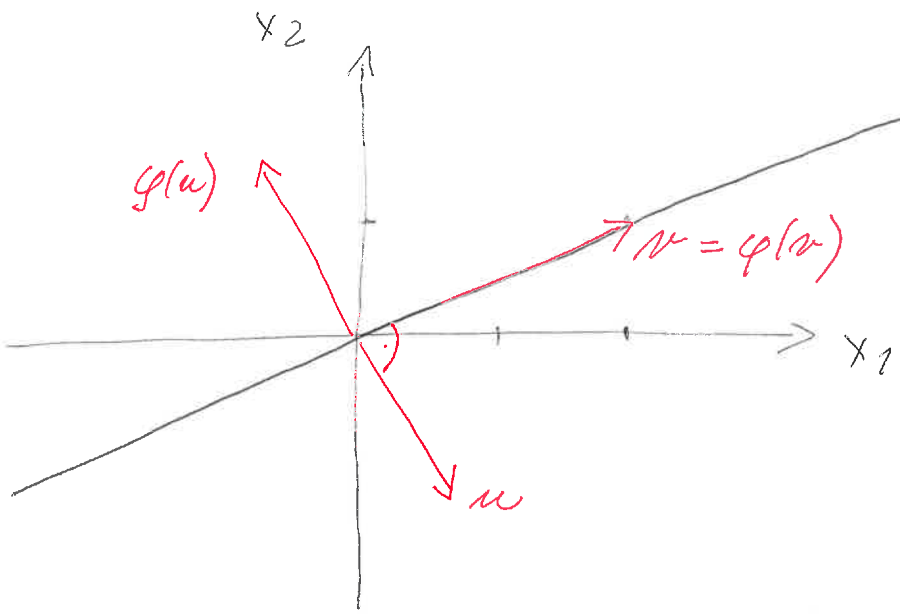
$= \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$

Vlastní čísla jsou $\cos\alpha + i\sin\alpha$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$.

Příklad. 2. Zobrazení $\varphi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je symetrie podle přímky $x_1 - 2x_2 = 0$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Jaká jsou vlastní čísla zobrazení φ a čemu se rovná det B?

Vektory ležící na přímce se zobrazují na sebe. Jsou to vlastní vektory k vlastnímu číslu 1. Vektory kolmé na přímku se zobrazí do opačných vektorů, jsou to vlastní vektory k vlastnímu číslu -1.



Na přímce leží vektor $v = (2,1)$, $\varphi(2,1) = (2,1)$.
Kolmý na přímku je vektor $u = (1,-2)$, $\varphi(1,-2) = (-1,2)$. Sloupce matice B jsou dány vektory $\varphi(1,0)$ a $\varphi(0,1)$.

$$\begin{array}{cc} u & \varphi(u) \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & +5 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & +\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$$\sim \qquad \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 4/5 & -3/5 \end{array}\right)$$

Příklad. 2. Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je symetrie podle přímky $x_1 - 2x_2 = 0$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Jaká jsou vlastní čísla zobrazení φ a čemu se rovná $\det B$.

Tedy $\varphi(1,0) = (3/5, 4/5)$, $\varphi(0,1) = (4/5, -3/5)$.

Proto $B = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$.

Vlastní čísla matice B jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$.

Determinant matice B je

$$\det B = \det \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25}\left(-3^2 - 4^2\right) = \frac{-25}{25} = -1.$$

Všimněte si, že $\det B = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

To platí pro všechny ortogonální matice.

5

Příklad. 3. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Ax$, kde

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice A je ortogonální (její sloupce tvoří ortonormální bázi $\Leftrightarrow$ její řádky tvoří ortonormální bázi $\Leftrightarrow$ $A \cdot A^T = E$ $\Leftrightarrow$ $A^T \cdot A = E$). Zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je tedy také ortogonální. Máme tyto dvě možnosti:

(1) φ je otočení kolem přímky procházející počátkem. V tomto případě je $\det A = 1$ a vlastní čísla jsou 1, $\cos\alpha + i\sin\alpha$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$. Osa otáčení má směrový vektor určený vlastním vektorem k 1. Úhel otáčení je α.

(2) φ je složení symetrie podle roviny procházející počátkem a otočení kolem přímky kolmé k této rovině. V tomto případě je $\det A = -1$ a vlastní čísla jsou -1, $\cos\alpha + i\sin\alpha$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$. Osa otáčení je určena vlastním vektorem k vlastnímu číslu k -1. Otáčení je o úhel α.

6

Příklad. 3. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Ax$, kde

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zvláštní případ je, když $\alpha = 0$. V tomto případě je φ pouze symetrie podle roviny kolmé k vlastnímu vektoru k -1. (Vlastní čísla pak $-1, +1, +1$).

Předchozí závěr využijeme k řešení naší úlohy.

$$\det A = \det \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\left(-4-4-4-8+1-8\right) = -1.$$

A má určitě vl. čísla -1. Spočteme k němu vlastní vektor (provedte sami). Je to $u = (1, 1, 2)$. Vezmeme vektor kolmý k u, např. $v = (1, -1, 0)$.

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy otočení je o úhel 0. Zjistili bychom i díky vlastním číslům, které pak $(-1, 1, 1)$. φ je symetrie podle roviny kolmé k vektoru $(1, 1, 2)$ tj. podle roviny

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

7

Příklad. 4. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Bx$, kde

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

B je ortogonální matice.
Postupujeme podle rozboru v předchozí úloze.

$$\det B = \det \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\left(8 - 1 + 8 + 4 + 4 + 4\right) = 1.$$

Zobrazení φ je tedy otočení kolem přímky procházející počátkem se směrovým vektorem, který je vlastní vektor k vl. čísla 1. Spočítáme jej:

$$(B - E)x = 0.$$

Matice homogenní soustavy je

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} - 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektory jsou $t(1,1,1)$, $t \neq 0$.

Příklad. 4. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Bx$, kde

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úhel otáčení zjistíme tak, že vezmeme nějaký vektor v rovině kolmé k $(1,1,1)$, např. $v = (1,-1,0)$, spočítáme $\varphi(v)$ a určíme odchylku vektorů v a $\varphi(v)$.

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$ Odchylka α je

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v)\rangle}{\|v\|\,\|\varphi(v)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Tedy úhel otáčení je $\alpha = \frac{\pi}{3}$ a směr otáčení je od vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ k vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

<u>Závěr</u>: φ je otáčení o úhel $\frac{\pi}{3}$ kolem přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $(1,1,1)$.

Příklad. 5. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Cx$, kde

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

C je ortogonální matice.
Nejdříve spočítáme

$$\det C = \det \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\det\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}(-8+1-8-4-4-4) = -1.$$

Tedy φ má vlastní číslo -1. Spočítáme vlastní vektor k tomuto vlastnímu číslu: $(C+E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}+1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}+1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení je $t(1,1,1)$.

Úhel otočení α zjistíme tak, že vezmeme nějaký vektor $v \perp (1,1,1)$, zobrazíme ho zobrazením φ a spočítáme odchylku.

Vezmeme $v = (1,-1,0)$.

(10)

Příklad. 5. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Cx$, kde

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi(v) = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v)\rangle}{\|v\|\,\|\varphi(v)\|} = \frac{1}{2}.$$

Tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Závěr:

Zobrazení φ je složení symetrie podle roviny $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ s otočením kolem přímky $p: t(1,1,1)$ o $\frac{\pi}{3}$ od vektoru $(1,-1,0)$ k vektoru $(1,0,1)$.

(Všimněte si, že otáčení zde je v opačném směru než otáčení v předchozím příkladu.)

Příklad. 6. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Vektory v rovině se zobrazují na sebe. Zvolme dva lineárně nezávislé:

$$u = (1, 2, 0), \quad v = (1, 0, -1)$$

$$\varphi(u) = u, \quad \varphi(v) = v.$$

Vektor kolmý k rovině se zobrazuje do opačného vektoru.

$$z = (2, -1, 2) \qquad \varphi(z) = (-2, 1, -2).$$

Matice A má za sloupce vektory $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$. Spočítáme je

$$\begin{array}{c} \qquad w \qquad\qquad \varphi(w) \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & -9 & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 9 & -36 & 36 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 1 & 4 & -8 \\ 0 & 9 & 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 4/9 & -8/9 \\ 0 & 1 & 0 & 4/9 & 7/9 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 & -8/9 & 4/9 & 1/9 \end{array}\right)$$

Příklad. 6. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Řeš.

$$\varphi(e_1) = \frac{1}{9}(1, 4, -8)$$

$$\varphi(e_2) = \frac{1}{9}(4, 7, 4)$$

$$\varphi(e_3) = \frac{1}{9}(-8, 4, 1)$$

Matice A je

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(13)

Příklad. 7. Zobrazení $\varphi:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je rotace kolem přímky

$$x_1 - x_2 = 0\ ,\ x_3 = 0$$

převádějící vektor $(0,0,2)^T$ na vektor $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)^T$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi(x) = Bx$.

Směrový vektor přímky je $u = (1,1,0)^T$. Vektor $v = (0,0,2)^T$ je k němu kolmý a zobrazuje se do vektoru $w = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)^T$. Odchylka vektorů v a w je

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} = 0 .$$

Tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a jde tedy o otáčení o úhel $\frac{\pi}{2}$. Proto $\varphi\circ\varphi$ je otočení o π;

$$\varphi(w) = \varphi(\varphi(v)) = -v .$$

Takže o zobrazení φ máme tyto informace.

$$\varphi(u) = u,\quad \varphi(v) = w,\quad \varphi(w) = -v .$$

K určení matice B potřebujeme spočítat $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & z & & & \varphi(z) & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Příklad. 7. Zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je rotace kolem přímky

$$x_1 - x_2 = 0\,,\ x_3 = 0$$

převádějící vektor $(0,0,2)^T$ na vektor $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)^T$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi(x) = Bx$.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Proto $\varphi(e_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T,$

$\varphi(e_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T,$

$\varphi(e_3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T.$

Matice $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$

Ověřme, že
$Bu = u,$
$Bv = w,$
$Bw = -v.$

Jiné řešení: V bázi $\beta = (u, v, w)$

má φ matici

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice $B = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}$, kde $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$.

Proto

$$B = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\beta} (\varphi)_{\beta,\beta} (id)_{\beta,\varepsilon} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \dots = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$