8. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Lineární zobrazení $\varphi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

je otočení o úhel α proti směru hodinových ručiček. Přesvědčte se o tom tím, že zobrazíte vektory $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}r\cos\beta\\r\sin\beta\end{pmatrix}$.

Ukažte podle definice, že je to ortonormální operátor. Spočtěte determinant příslušné matice a v oboru komplexních čísel najděte její vlastní čísla.

Příklad. 2. Zobrazení $\varphi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je symetrie podle přímky $x_1 - 2x_2 = 0$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = B\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$.

Jaká jsou vlastní čísla zobrazení φ a čemu se rovná $\det B$?

Příklad. 3. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Ax$, kde

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -2\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Příklad. 4. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Bx$, kde

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Příklad. 5. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Cx$, kde

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Příklad. 6. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Příklad. 7. Zobrazení $\varphi: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je rotace kolem přímky

$$x_1 - x_2 = 0\ ,\ x_3 = 0$$

převádějící vektor $(0,0,2)^T$ na vektor $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)^T$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi(x) = Bx$.

Domácí úloha k 8. cvičení

Příklad. 1. [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 10, úloha 1a.]
Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Gx$, kde

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 2. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Fx$, kde

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 3. [Studijní materiály v ISu, domácí úkoly ke cvičení č. 10, úloha 2b.]
Zobrazení $\varphi: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je rotace kolem přímky

$$x_2 - x_3 = 0\ ,\ x_1 = 0$$

převádějící vektor $(2,0,0)^T$ na vektor $(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})^T$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi(x) = Bx$.

Příklad. 4. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Najděte matici C tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je $\varphi(x) = Cx$.