10. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Najděte singulární rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a spočítejte její pseudoinverzi.

Singulární rozklad matice A tvaru $k \times n$ je její zápis ve tvaru součinu

$$A = P \cdot S \cdot Q^*$$

kde S je stejného tvaru jako A, tedy $k \times n$, v našem případě 3×2 a vypadá takto

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{kde} \quad s_1 \geq s_2 \geq 0$$

P je ortogonální (nad $\mathbb{R}$) nebo unitární (nad $\mathbb{C}$) matice $k \times k$ a Q je ortogonální nebo unitární matice tvaru $n \times n$.

$Q^* = Q^T$, jsme-li nad $\mathbb{R}$,

$Q^* = \overline{Q}^T$, jsme-li nad $\mathbb{C}$ (pruh znamená, že prvky jsou komplexně sdružená čísla).

<u>Postup</u> výpočtu je následující:

(1) Spočítáme matici

$$A^* A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Příklad. 1. Najděte singulární rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a spočítejte její pseudoinverzi.

To je vždy symetrická (nad $\mathbb{C}$ hermitovská) matice a její vlastní čísla jsou nezáporná.

$$\det\begin{pmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda)-4 = \lambda^2-15\lambda+50$$
$$= (\lambda-5)(\lambda-10)$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$. Singulární matice S je

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tj. $s_1 = \sqrt{5}$, $s_2 = \sqrt{10}$.

Matici Q spočítáme pomocí vlastních vektorů k vlastním číslům $\lambda_1 = 5$ a $\lambda_2 = 10$.

Tyto vlastní vektory jsou

k $\lambda_1 = 5$ je to $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

k $\lambda_2 = 10$ je to $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tyto vektory jsou na sebe kolmé, vektory

$$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tvoří ortonormální bázi a vezmeme je za sloupce matice Q. Tedy

Příklad. 1. Najděte singulární rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a spočítejte její pseudoinverzi.

$$Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Matici P hledáme tak, aby platilo

$$A = P S Q^*$$

tj, po vynásobení maticí Q zprava

$$AQ = P \cdot S \underbrace{Q^* Q}_{E} = P \cdot S$$

Protože u_1, u_2 jsou sloupce matice Q, je první sloupec matice P - označme ho v_1 roven

$$A u_1 = v_1 \cdot \sqrt{\lambda_1}$$

tj $$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} A u_1$$

Podobně $$A u_2 = v_2 \cdot \sqrt{\lambda_2}$$

tj $$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} A u_2$$

pro druhý sloupec. Toto můžeme provádět pouze pro kladná vlastní čísla. V našem případě:

Příklad. 1. Najděte singulární rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a spočítejte její pseudoinverzi.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že v_1, v_2 jsou navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost. Třetí sloupec matice P najdeme jako vektor v_3, který je kolmý k v_1, v_2 a má jednotkovou velikost. Pro jeho souřadnice (y_1, y_2, y_3) tedy platí

$$3y_1 + 4y_3 = 0$$
$$4y_1 + 5y_2 - 3y_3 = 0$$

Odtud $v_3 = a(-4, 5, 3)$, kde $a = \frac{1}{\|(-4,5,3)\|} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$. Matice P je tedy

$$P = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\sqrt{2} & -4/5\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 4/5 & -3/5\sqrt{2} & 3/5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Příklad. 1. Najděte singulární rozklad matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
a spočítejte její pseudoinverzi.

<u>Závěr</u>: Singulární rozklad matice A je

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5\sqrt{2} & -4/5\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 4/5 & -3/5\sqrt{2} & 3/5\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{Q^T}$$

Ze singulárního rozkladu můžeme spočítat přímo pseudoinverzi k matici A. To je matice $A^{(-1)}$ tvaru $n \times k$

$$A^{(-1)} = Q\, S^{(-1)} \cdot P^T =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix}}_{S^{(-1)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 4/5\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -3/5\sqrt{2} \\ -4/5\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 3/5\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{P^T}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5\sqrt{2} & 0 \\ 2/5 & 1/5\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} P^T = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 2 & 10 & -14 \\ 16 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

6

Příklad. 1. Najděte singulární rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a spočítejte její pseudoinverzi.

Protože matice $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ je regulární, lze pseudoinverzi spočítat také (a daleko jednodušeji) bez singulárního rozkladu. Platí totiž

$$A^{(-1)} = \underbrace{(A^T \cdot A)}_{\text{skutečná inv. matice}}{}^{-1} \cdot A^T = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 2 & 10 & -4 \\ 16 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

<u>Zkouška:</u> Musí platit $A^{(-1)} \cdot A = E$

$$\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 2 & 10 & -14 \\ 16 & 5 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Neplatí ovšem $A \cdot A^{(-1)} = E$!

Příklad. 2. Najděte singulární rozklad matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a spočítejte její pseudoinverzi.

Počítáme stejně jako u předchozí úlohy.

$$B^* B = B^T B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 13 & 3 \\ 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

je symetrická matice 3×3. Protože B má hodnost 2, tak také $B^T B$ má hodnost 2 a jedno z vlastních čísel matice $B^T B$ musí být rovno 0.

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 4 \\ -1 & 13-\lambda & 3 \\ 4 & 3 & 10-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 25\lambda^2 - 150\lambda = \lambda(15-\lambda)(\lambda-10)$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 15$, $\lambda_3 = 0$.

Matice $S = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{pmatrix}$

Matice Q typu 3×3 tvoří sloupce, které jsou vlastní vektory matice $B^T B$ k vlastním číslům $10, 15, 0$, a to jednotkové velikosti. Po troše počítání dostaneme $u_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(3, -4, 5)$, $u_2 = \frac{1}{5\sqrt{3}}(1, 7, 5)$, $u_3 = \frac{1}{5\sqrt{6}}(11, 2, -5)$

Příklad. 2. Najděte singulární rozklad matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a spočítejte její pseudoinverzi.

$$Q = \begin{pmatrix} 3/5\sqrt{2} & 1/5\sqrt{3} & 11/5\sqrt{6} \\ -4/5\sqrt{2} & 7/5\sqrt{3} & 2/5\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Sloupce matice P jsou vektory

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} B \cdot u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} B \cdot u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sing. rozklad je

$$B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5\sqrt{2} & -4/5\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/5\sqrt{3} & 7/5\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 11/5\sqrt{6} & 2/5\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Sing. rozklad lze počítat i jinak, možná jednodušeji: Matice $B^T B$ byla tvaru 3×3 a hledat její vlastní čísla je složitější než hledat vlastní čísla matice $B B^T = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$,

Příklad. 2. Najděte singulární rozklad matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a spočítejte její pseudoinverzi.

která je tvaru 2×2. Nenulová vlastní čísla vyjdou více stejně, ale jejich výpočet pro matici 2×2 je pohodlnější.

Takže můžeme najít singulární rozklad matice B^T. Ten hledáme právě pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů matice

$$(B^T)^T B^T = B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

Najdeme singulární rozklad matice B^T ve tvaru

$$\underset{(3\times 2)}{B^T} = \underset{(3\times 3)}{U} \cdot \underset{(3\times 2)}{S} \cdot \underset{(2\times 2)}{V^T}$$

Singulární rozklad matice B je pak

$$B = (U \cdot S \cdot V^T)^T = (V^T)^T \cdot S^T \cdot U^T =$$
$$= V \cdot S^T U^T.$$

Proveďte podle tohoto návodu sami.

Příklad. 2. Najděte singulární rozklad matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a spočítejte její pseudoinverzi.

Pseudoinverzi můžeme sice spočítat ze singulárního rozkladu, ale provedeme to daleko rychleji přímo:

Matice $B^T B$ je typu 3×3 a není regulární. Proto nemůžeme použít metodu z příkladu 1. Avšak matice

$$B\cdot B^T = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

je regulární. V tomto případě je pseudoinverze rovna

$$B^{(-1)} = B^T \left(B\cdot B^T\right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{150} \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{150} \begin{pmatrix} 16 & 13 \\ -38 & 16 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$$

Nyní zkoušku provedeme ověřením vztahu $B\cdot B^{(-1)} = E$.

V tomto případě (vzhledem k rozměrům matice B) neplatí $B^{(-1)}\cdot B = E$!