Program přednášky z lineární algebry II, jaro 2019

1. přednáška: Bilineární formy. Definice bilineárního zobrazení a bilineární formy, matice bilineární formy v dané bázi, změna matice bilineární formy při přechodu od jedné báze k druhé bázi, kongruentní matice. Symetrické bilineární formy a matice. Kongruence matic. Každá symetrická matice je kongruentní s diagonální maticí - popis a zdůvodnění algoritmu, který provádí stejné řádkové a sloupcové operace.

2. přednáška: Bilineární a kvadratické formy. Algoritmus pro nalezení báze, v níž má symetrická bilineární forma diagonální tvar. Definice kvadratické formy. Diagonalizace kvadratické formy. Polární báze. Sylvestrův zákon setrvačnosti.

3. přednáška: Kvadratické formy. Skalární součin. Signatura kvadratické formy. Sylvestrův zákon setrvačnosti. Kriterium kongruence symetrických matic. Pozitivně definitní, negativně definitní a indefinitní kvadratické formy. Hlavní minory a Sylvestrovo kriterium.
Skalární součin na reálných a komplexních vektorových prostorech, příklady. Velikost vektoru, kolmé vektory. Cauchyova nerovnost, úhel dvou vektorů.

4. přednáška: Skalární součin a eukleidovská geometrie. Trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta. Ortogonální vektory, Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces. Ortonormální báze. Kolmá projekce do podprostoru. Vzdálenost afinních podprostorů.medskip

5. přednáška: Odchylky podprostorů, ortonormální báze. Lineární operátory. Odchylky přímek, odchylky afinních podprostorů. Role kolmé projekce při počítání odchylky přímky a podprostoru.
Vlastnosti ortonormální báze - vyjádření souřadnic a skalárního součinu.
Lineární operátory. Matice lineárního operátoru v dané bázi. Invariantní podprostory. Příklad na invariantní podprostor.

6. přednáška: Lineární operátory, vlastní čísla a vlastní vektory. Definice a výpočet vlastních čísel a vektorů. Charakteristický polynom. Kořeny polynomů a jejich počítání. Matice lineárního operátoru v bázi tvořené vlastními vektory.

7. přednáška: Vlastní čísla a vektory. Ortogonální a unitární operátory. Definice algebraické a geometrické násobnosti vlastního čísla a jejich vztah.
Definice unitárního a ortogonálního operátoru. Základní vlastnosti. Příklady zadané pomocí ortogonálních a unitárních matic. Determinant má absolutní hodnotu 1. Vlastní čísla a vlastní vektory těchto operátorů. Každý unitární operátor má v prostoru na kterém operuje ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory. Ortogonální operátory v dimenzi 2 - otočení kolem počátku a symetrie podle přímky procházející počátkem.

8. přednáška: Ortogonální operátory II. Samoadjungované operátory. Ortogonální operátory v dimenzi 3.

Adjungované lineární zobrazení k danému zobrazení, samoadjungované operátory, symetrické a hermitovské matice. Vlastnosti vlastních čísel a vektorů. Pro každý samoadjungovaný operátor existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory. Důsledky: spektrální rozklad samoadjungovaných operátorů.

9. přednáška: Samoadjungované operátory II, singulární rozklad matice, pseudoinverzní matice.
Diagonalizace kvadratických forem v ortonormální bázi. vztah mezi samoadjungovanými operátory a symetrickými bilineárními formami.
Singulární rozklad matice $A = PSQ^*$. Důkaz, který dává návod k výpočtu. Sloupce Q jsou ortonomální vlastní vektory $u_1, \ldots, u_n$ matice A^*A. Matice S je "diagonální"s odmocninami z vlastních čísel matice $A * A$. Sloupce matice P jsou normované vektory Au_i, pokud jsou nenulové, zbývající jsou doplněním do ortonormální báze.
Příklad. Geometrická interpretace.
Definice pseudoinverzní matice pomocí singulárního rozkladu. Vlastnosti pseudoinverzních matic. Výpočet pseudoinverze z definice nebo pomocí inverzní matice k matici A^*A.

10. přednáška: Pseudoinverzní matice a jejich aplikace. Další rozklady matic. Pseudoinverzní matice a jejich vlastnosti. Nalezení nejlepší aproximace řešení soustavy $Ax = b$, pokud soustava není řešitelná, pomocí pseudoinverze, $x = A^{(-1)}b$. Příklad na lineární regresi.
Polární rozklad matice aplikací singulárního rozkladu.
QR rozklad čtvercové matice s použitím Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu.

11. přednáška: Jordanův kanonický tvar I. Jordanův kanonický tvar, věty o Jordanově kanonickém tvaru, řetězce. Příklady na výpočet Jordanova kanonického tvaru u matic 3×3 a 4×4.

12. přednáška: Jordanův kanonický tvar II, aplikace na řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic.
Další úlohy na Jordanův kanonický tvar v dimenzi 4.
Aplikace JKT na soustavy diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Výpočet pro matici A diagonální, v Jordanově tvaru, podobné matici v Jordanově tvaru.

13. přednáška: Důkaz Jordanovy věty. Základní myšlenka důkazu věty o JKT. Definice nilpotentního operátoru. Kořenové podprostory a jejich vlastnosti. Pro daný operátor splňující předpoklady Jordanovy věty je prostor direktním součtem kořenových podprostorů. Pro daný nilpotentní operátor najdeme jeho rozklad na direktní součet podprostorů, z nichž na každém je operátor cyklický. Tím dostaneme řetězce, které dávají bázi potřebnou pro Jordanův kanonický tvar.