Minule: prováděním stejných řádkových a sloupcových operací na matici A

$$A \rightsquigarrow PAP^T$$

← reg. matice

Algoritmus: A symetrická matice, tj. $A = A^T$

Prováděním vhodných řád. a sl. operací dostaneme

na horních ř. levých sl.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline E & \end{array}\right) \xrightarrow[\text{operace}]{\text{stejné ř a s.}} \left(\begin{array}{c|c} D & P \\ \hline P^T & \end{array}\right)$$

kde D je diagonální a platí

$$D = PAP^T$$

Pr:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) +1x \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$+1x$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2x \\ 2x \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & 12 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$2x \quad 2x$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 24 & 0 & 2 & 0 \\ 20 & 24 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} -1x \\ -5x \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 4 & 20 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -100 & -5 & -5 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -5 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right) +1\times \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -5 & & & \\ 1 & 1 & -5 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

$$+1\times$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -96 & -6 & -4 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -6 & & & \\ 1 & 1 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} D & P \\ \hline P^T & \end{array}\right)$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Interpretace příkladu pomocí sym. bil. forem

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim f(x,y) = 2x_1y_2 + 4x_1y_3 + 2x_2y_1 + 6x_2y_3 + 4x_3y_1 + 6x_3y_2$$

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} = D$$

A - matice f v bázi ε

$$D = \underbrace{(id)^T_{\varepsilon\alpha}}_{= P} \; A \; \underbrace{(id)_{\varepsilon\alpha}}_{= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = P^T} = \text{matice } f \text{ v bázi } \alpha$$

$\Rightarrow$ D ... matice f v bázi α

takové, že $\underbrace{(id)_{\varepsilon\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ $= P^T$

$$\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Explicitně: $\bar{x} = (u)_\alpha$, $\bar{y} = (v)_\alpha$

souřadnice vektorů v bázi α

$$\Rightarrow f(u,v) = 4\bar{x}_1\bar{y}_1 - 4\bar{x}_2\bar{y}_2 - 96\bar{x}_3\bar{y}_3$$

<u>Věta</u>. Pro každou sym. bil. formu

$f: U \times U \to \mathbb{K}$ lze (nejednoznačně) najít bázi β

takovou, že v jejích souřadnicích má f tvar

$$f(u,v) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \bar{x}_i \bar{y}_i$$

pouze diagonální členy

kde $(u)_\beta = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$

$(v)_\beta = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)^T$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$$ matice f v bázi β.

β se nazývá <u>polární báze</u>.

<u>Dk.</u> Nechť f má v nějaké bázi α matici $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = f(u_i, u_j)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & u_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & u_n \\ \hline u_1 & \cdots & u_n & \end{array}\right)$$

aplikujeme ř. a s. op.

Platí, že na pozici (i,j) je hodn. formy f na dvojici vektorů nach. se vpravo a pod členem

$f(u_i, u_j)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & \vdots & & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots & u_i \\ & \vdots & & \\ \hline & u_j & & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cdots & a_{1j} & \cdots & u_1 \\ \cdots & a_{2j} & \cdots & u_2 \\ & & & \vdots \\ & & & u_n \\ \hline u_1 & \cdots & u_n & \end{array}\right) \cdot k + \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \cdots & a_{1j} + k \cdot a_{2j} & \cdots & u_1 + k u_2 \\ \cdots & a_{2j} & \cdots & u_2 \\ & \vdots & & \vdots \\ & & & u_n \\ \hline u_1 \cdots & u_j & \cdots u_n & \end{array}\right)$$

pořád platí $\quad a_{1j} + k \cdot a_{2j} = f(u_1, u_j) + k\, f(u_2, u_j)$

analogicky pro zbylé operace $\quad = f(u_1 + k \cdot u_2, u_j)$

algoritmus dá:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \\ \hline u_1 \cdots u_n & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} D & \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \\ \hline v_1 \cdots v_n & \end{array}\right)$$

D … matice f v bázi $\beta = (v_1, \dots, v_n)$

Př: $f: \mathbb{R}_1[x] \times \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(p, q) \longmapsto 6 \cdot \int_0^1 p \cdot q \, dx$$

matice f: $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & x \\ \hline 1 & x & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2x \\ \hline 1 & x & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 2x \\ \hline 1 & 2x & \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 2x-1 \\ \hline 1 & 2x & \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2x-1 \\ \hline 1 & 2x-1 & \end{array}\right)$

f má v bázi $(1, 2x-1)$ matici $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

↳ polární báze

Kvadratická forma

$$q : U \to \mathbb{K}$$

je takové zobrazení, pro které existuje sym. bil. forma $f : U \times U \to \mathbb{K}$ taková, že $q(u) = f(u,u)$

Př: $f(x,y) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 + 6x_2y_3 + 6x_3y_2$

$$q(x) = f(x,x) = 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 12x_2x_3$$

Lemma. Každá kvadr. forma q určuje jednoznačně sym. bil. formu f t.ž. $q(u) = f(u,u)$.

Př. $q(x) = 8x_1^2 - 3x_1x_2 + 9x_2x_3$

$$f(x,y) = 8x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + \frac{9}{2}x_2y_3 + \frac{9}{2}x_3y_2$$

Dk. f ex. podle def.

$q(u) = f(u,u)$ ← aplikujeme na $u+v$, $u-v$:

$$q(u+v) = f(u+v, u+v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v)$$

$$q(u-v) \quad - \quad - \quad \quad - \quad -$$

odečtením:

$$q(u+v) - q(u-v) = 2f(u,v) + 2f(v,u)$$
$$= 4f(u,v)$$

$\Rightarrow$ $f(u,v) = \frac{1}{4}\left(q(u+v) - q(u-v)\right)$ je jedn. určena q. $\square$

<u>Důsledek</u> předch. věty:

Ke každé kvadr. formě $q: U \to \mathbb{K}$ ex. báze β t. ž. v jejích souřadnicích je

$$q(u) = b_{11}\underbrace{\bar{x}_1^2 + \ldots + b_{nn}\bar{x}_n^2}_{}$$ souř. v bázi β

Kvadratické formy nad $\mathbb{R}$

Sylvesterův zákon setrvačnosti:

Nechť $q: U \to \mathbb{R}$ je reálná ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) kvadratická forma.
Pak v U ex. báze, v jejíchž souřadnicích je

$$q(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 \left(+ 0 \cdot x_{p+q+1}^2 + \dots + 0 \cdot x_n^2 \right)$$

Přitom počet $+1, -1, 0$ nezávisí na volbě báze.

Signatura ... $(s_+, s_-, s_0) = (\underbrace{p}_{\text{počet } +1}, \underbrace{q}_{\text{počet } -1}, \overbrace{n-p-q}^{\text{počet } 0})$

<u>Důkaz</u>. Umíme

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \\ \hline u_1 \cdots u_n & \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} b_{11} & & 0 & v_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & b_{nn} & v_n \\ \hline v_1 & \cdots & v_n & \end{array}\right) \begin{matrix} \times \lambda_1 \\ \\ \times \lambda_n \end{matrix}$$

kde $\lambda_i = \dfrac{1}{\sqrt{|b_{ii}|}}$, $b_{ii} \neq 0$

$\lambda_i = 1$ $\quad b_{ii} = 0$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 b_{11} & & & \lambda_1 v_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_n b_{nn} & \lambda_n v_n \\ \hline v_1 & \cdots & v_n & \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1^2 b_{11} & & & \lambda_1 v_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_n^2 b_{nn} & \lambda_n v_n \\ \hline \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n & \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} \times \lambda_1 & \quad & \times \lambda_n \end{matrix}$$

Potom $\lambda_i^2 b_{ii} = \begin{cases} 1 & b_{ii} > 0 \\ -1 & b_{ii} < 0 \\ 0 & b_{ii} = 0 \end{cases}$

Případným prohazováním ř. a sl. dostaneme

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & & & & & & & w_1 \\ & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & & \vdots \\ & & & -1 & & & & \vdots \\ & & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & -1 & & \vdots \\ & & & & & & 0 & \vdots \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 & w_n \\ \hline w_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & w_n & \end{array}\right) \Rightarrow q(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4 & & \\ & -4 & \\ & & -96 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times\frac{1}{2} \\ \times\frac{1}{2} \\ \times\frac{1}{\sqrt{96}} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc} \times\frac{1}{2} & \times\frac{1}{2} & \times\frac{1}{\sqrt{96}} \end{array}}$$

Zbývá nezávislost signatury na bázi:

Nechť

$$q(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 \quad \text{v bázi } \alpha = (u_1, \dots, u_n)$$

$$q(u) = y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots - y_{s+t}^2 \quad \text{v bázi } \beta = (v_1, \dots, v_n)$$

Předp. pro určitost že $p > s$

Uvažujme podprostory

$V = [u_1, \dots, u_p]$; $v \in V, v \neq 0 \Rightarrow q(v) > 0$

L_D $(v)_\alpha = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$

$W = [v_{s+1}, \dots, v_n]$; $w \in W \Rightarrow q(w) \leq 0$

L_D $(w)_\beta = (0, \dots, 0, y_{s+1}, \dots, y_n)$

Ukážeme, že $V \cap W \neq 0$, pak pro lib. $u \in V \cap W, u \neq 0$ bude platit $q(u) > 0$, $q(u) \leq 0$ $\longrightarrow$ spor.

$p > s$

"Spočtěme" dim $V \cap W$

$$\dim(V \cap W) = \underbrace{\dim V}_{=p} + \underbrace{\dim W}_{=n-s} - \underbrace{\dim(V+W)}_{\leq n}$$

$$\geq p + n - s - n = p - s \geq 1$$

protože $p > s$

Díky sporu musí být $p = s$

analogicky $q = t$.

$\square$