Prostory se skalárním součinem

U je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$\langle\ ,\ \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{K}$

Norma (velikost) vektoru $\quad \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$

$u \perp v$, jestliže $\quad \langle u, v\rangle = 0$

Cauchyova nerovnost $\quad |\langle u, v\rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$

Pro $u \neq \vec{0}$, $v \neq \vec{0}$ $\quad -1 \le \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \le 1$

Odchylka vektorů u a v je úhel $\alpha \in [0, \pi]$ takový, že

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

(2)

Vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou **ORTOGONÁLNÍ**, jestliže jsou na sebe navzájem kolmé

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \qquad \forall i \neq j$$

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou **ORTONORMÁLNÍ**, jestliže jsou navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Lemma Jsou-li $v_1, v_2, \dots v_k$ ortogonální a nenulové, pak jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: Nechť $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = \vec{O}$ | vynásobíme skalárně vektorem v_1

$$\langle a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k, v_1 \rangle = \langle \vec{O}, v_1 \rangle$$

$$a_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{\neq 0} + a_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{= 0} + \dots + a_k \underbrace{\langle v_k, v_1 \rangle}_{= 0} = 0$$

③

$$a_1 \langle v_1, v_1 \rangle = 0$$

$$a_1 \underbrace{\|v_1\|^2}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$$

Analogicky se ukáže, že $a_2 = 0, \dots, a_k = 0$.

Grammův - Schmidtův ortogonalizační proces

je algoritmus, který lin. nezávislým vektorům $u_1, u_2, \dots, u_k$ přiřadí ORTOGONÁLNÍ vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ takové, že

$$[u_1, u_2, \dots, u_i] = [v_1, v_2, \dots, v_i] \text{ pro všechna } i \in \{1, 2, \dots k\}$$

Vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ hledáme takto:

$$v_1 = u_1$$

$$(*) \quad v_{\ell+1} = u_{\ell+1} - a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_\ell v_\ell$$

tak, aby $\langle v_{\ell+1}, v_i \rangle = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, \ell$.

Rovnici (*) vynásobíme postupně vektory $v_1, v_2, \dots, v_\ell$

$$\underbrace{\langle v_{\ell+1}, v_1\rangle}_{\text{Chceme } = 0} = \langle u_{\ell+1}, v_1\rangle - a_1\underbrace{\langle v_1, v_1\rangle}_{\neq 0} - a_2\underbrace{\langle v_2, v_1\rangle}_{= 0} - \underbrace{\dots\dots}_{= 0}$$

Odtud dostáváme

$$0 = \langle u_{\ell+1}, v_1\rangle - a_1\langle v_1, v_1\rangle$$

$$a_1 = \frac{\langle u_{\ell+1}, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$$

Analogicky

$$a_i = \frac{\langle u_{\ell+1}, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}$$

<u>Příklad</u> $U = \mathbb{R}^3$ $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,2,0)$, $u_3 = (1,1,2)$

GSOP dostaneme

$$v_1 = u_1 = (1,0,0) \qquad v_3 = (0,0,2)$$

$$v_2 = (0,2,0)$$

<u>Ortonormální báze</u> je báze tvořená ortonormálními vektory $u_1, u_2, \dots u_n$. $\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

<u>Věta</u> V každém prostoru (konečné dimenze) se skalárním součinem existuje ortonormální báze.

<u>Dk</u>: Nechť $u_1, u_2, \dots, u_n$ je libovolná báze v prostoru U. GS ortogonalizací proces nám dá ortogonální vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$. Ty jsou LN, je jich $n = \dim U$, tvoří bázi. Položíme $w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$. Potom

$$\|w_i\| = \sqrt{\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle} = \sqrt{\frac{\langle v_i, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}} = 1$$

Tedy $w_1, w_2, \dots, w_n$ je ortonormální báze.

ORTOGONÁLNÍ DOPLNĚK

Dán vekt. prostor U a jeho podprostor V. Ortogonální doplněk podprostoru V je

$$V^{\perp} = \{ u \in U \,;\, (\forall v \in V)(\langle u, v \rangle = 0)\}$$

$V^{\perp}$ je vekt. podprostor

$u_1, u_2 \in V^{\perp}$ $\quad \langle a_1 u_1 + a_2 u_2, v\rangle = a_1 \underbrace{\langle u_1, v\rangle}_{=0} + a_2 \underbrace{\langle u_2, v\rangle}_{=0} = 0$

pro všechna $v \in V$.

Věta: (U je vekt. prostor konečné dimenze)

Nechť $V \subseteq U$ je podprostor. Pak

$$U = V \oplus V^{\perp}$$

Důkaz: Součet $V + V^{\perp}$ je direktní. Nechť $u \in V \cap V^{\perp}$. Pak

$$\|u\|^2 = \langle \underset{V}{u}, \underset{V^{\perp}}{u} \rangle = 0\,, \text{ proto } u = \vec{0}. \qquad V \cap V^{\perp} = \{\vec{0}\}$$

Dokážeme, že $V + V^{\perp} = U$.

Nechť V má ortonormální bázi $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Tu lze doplnit na ortonormální bázi celého prostoru U:

$v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$. Tedy každý vektor $u \in U$ lze zapsat

$$u = \underbrace{a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k}_{\in V} + \underbrace{a_{k+1} v_{k+1} + \ldots + a_n v_n}_{\in V^{\perp}}$$

Odtud plyne, že

$$U = V + V^{\perp}.$$

Kolmá projekce vektorů do podprostoru V je zobrazení

$$P : U \longrightarrow V$$

definované takto: Pro každé $u \in U$ existuje právě jedno $v \in V$ a právě jedno $w \in V^{\perp}$, že

$$u = v + w$$

(8)

Definujme $Pu = v$.

Kolmá projekce je tedy charakterizována dvěma vlastnostmi

(1) $Pu \in V$

(2) $w = u - Pu \in V^\perp$

Kolmá projekce $P : U \to V$ je lineární zobrazení:

$$u_1 = v_1 + w_1 \qquad v_1 \in V, \; w_1 \in V^\perp$$

$$u_2 = v_2 + w_2 \qquad v_2 \in V, \; w_2 \in V^\perp$$

$$au_1 + bu_2 = \underbrace{av_1 + bv_2}_{\in V} + \underbrace{aw_1 + bw_2}_{\in V^\perp}$$

$$P(au_1 + bu_2) = aP(u_1) + bP(u_2)$$

9

jestliže $P_V : U \to V$ je kolmá projekce na V

$P_{V^\perp} : U \to V^\perp$ je kolmá projekce na $V^\perp$

a platí

$$u = v + w = \qquad v \in V \quad w \in V^\perp$$

$$u = P_V(u) + P_{V^\perp}(u)$$

Platí $\quad P_{V^\perp}(u) = u - P_V(u)$

(výhodné pro počítání. Kolmá projekce do podprostoru malé dimenze se počítá líp než projekce do podprostoru velké dim)

Výpočet kolmé projekce

U vekt. prostor, $V = [v_1, v_2, v_3]$

(1) v_1, v_2, v_3 jsou ortonormální

- $Pu \in V \Rightarrow Pu = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$
- $u - Pu \in V^\perp$: $u - Pu \perp v_1, v_2, v_3$

10

$$\langle u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3 , v_1 \rangle = 0$$

$$\langle u, v_1 \rangle - a_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{=1} - a_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} - a_3 \underbrace{\langle v_3, v_1 \rangle}_{=0} = \langle 0, v_1 \rangle = 0$$

$$a_1 = \langle u, v_1 \rangle$$

analogicky

$$a_2 = \langle u, v_2 \rangle$$

$$a_3 = \langle u, v_3 \rangle$$

$$Pu = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \langle u, v_3 \rangle v_3$$

v_1, v_2, v_3 nejsou ortogonální

- $Pu \in V$ $\qquad Pu = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$
- $u - Pu \in V^{\perp}$ $\qquad u - Pu \perp v_1, v_2, v_3$

$$u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3 \perp v_1, v_2, v_3$$

Po skalárním vynásobení dostaneme

$$\langle u, v_1 \rangle - a_1 \langle v_1, v_1 \rangle - a_2 \langle v_2, v_1 \rangle - a_3 \langle v_3, v_1 \rangle = 0$$

$$\langle u, v_2 \rangle - a_1 \langle v_1, v_2 \rangle - a_2 \langle v_2, v_2 \rangle - a_3 \langle v_3, v_2 \rangle = 0$$

$$\langle u, v_3 \rangle - a_1 \langle v_1, v_3 \rangle - a_2 \langle v_2, v_3 \rangle - a_3 \langle v_3, v_3 \rangle = 0$$

minus

Dokážeme soustavu 3 rovnic se 3 neznámými.
Soustava má matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_3, v_1\rangle & \langle u, v_1\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \langle v_3, v_2\rangle & \langle u, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_3\rangle & \langle v_2, v_3\rangle & \langle v_3, v_3\rangle & \langle u, v_3\rangle \end{array}\right)$$

Grammova matice vektorů
v_1, v_2, v_3.

Důležitá vlastnost kolmé projekce

Vzdálenost vektorů u a v je $\|u-v\|$

Věta: Nechť V je podprostor prostoru U. Nechť $u \in U$. Kolmá projekce Pu vektoru u do V je právě ten vektor z podprostoru V, který minimalizuje vzdálenost $\|u-v\|$, kde $v \in V$. Pro všechna $v \in V$ platí

$$\|u-v\| \geq \|u-Pu\|$$

a rovnost nastane, právě když $v = Pu$.

Důkaz: Pro $v \in V$ platí

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle \underbrace{u-Pu}_{\in V^\perp} + \underbrace{Pu-v}_{\in V}, u-Pu+Pu-v\rangle$$

$$= \langle u-Pu, u-Pu\rangle + \underbrace{\langle u-Pu, Pu-v\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle Pu-v, u-Pu\rangle}_{=0} + \langle Pu-v, Pu-v\rangle$$

$$= \|u-Pu\|^2 + \|Pu-v\|^2$$

To je tvrzení věty. $\|u-v\|^2 \geq \|u-Pu\|^2$, rovnost nastane pro $\|v-Pu\|^2=0$

Pythagorova věta Jestliže $u \perp v$ pak

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \underbrace{\langle u,v\rangle}_{0} - \underbrace{\langle v,u\rangle}_{0} + \langle v,v\rangle = \|u\|^2+\|v\|^2$$

Eukleidovská geometrie

U vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem

Vzdálenost dvou bodů $A, B \in U$ je

$$\operatorname{dist}(A, B) = \|A - B\|$$

$\mathcal{M}$ je afinní podprostor, A bod v U, pak

$$\operatorname{dist}(A, \mathcal{M}) = \inf_{M \in \mathcal{M}} \operatorname{dist}(A, M) = \inf_{M \in \mathcal{M}} \|A - M\|$$

$\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou dva afinní podprostory, pak

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \inf_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ N \in \mathcal{N}}} \operatorname{dist}(M, N) = \inf_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ N \in \mathcal{N}}} \|M - N\|$$

Vzdálenosti budeme počítat pomocí kolmých projekcí.

Věta

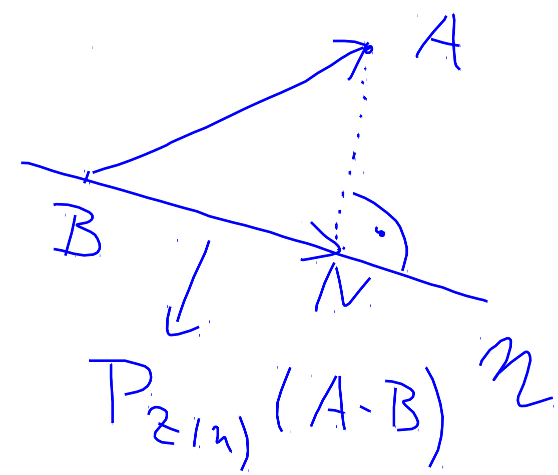
(a) Vzdálenost bodu A od afinního podprostoru $\mathcal{M} = B + Z(\mathcal{M})$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A - B$ do podprostoru $Z(\mathcal{M})^{\perp}$

(b) Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro $N \in \mathcal{M}$.

(1) $\operatorname{dist}(A, \mathcal{M}) = \|A - N\|$

(2) $A - N \perp Z(\mathcal{M})$

(3) $N = B + P_{Z(\mathcal{M})}(A - B)$



<u>Dk (a)</u> Nechť $X \in \mathcal{N}$ je libovolný, $X = B + u$, $u \in Z(\mathcal{N})$

$$\|A - X\| = \|A - (B - u)\| = \|(A - B) - u\| \overset{\text{věta}}{\geq} \|A - B - P_{Z(\mathcal{N})}(A - B)\|$$
$$= \|P_{Z^{\perp}(\mathcal{N})}(A - B)\|$$

<u>Dk (b)</u> (1) => (3) plyne z předchozího

$$\underset{\|A - N\|}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{dist}(A, \mathcal{N})}} = \|A - B - P_{Z(\mathcal{N})}(A - B)\|$$

Odtud a z věty plyne, že $N = B + P_{Z(\mathcal{N})}(A \cdot B)$, tj. platí (3)

(3) => (2) $A - N = A - B - P_{Z(\mathcal{N})}(A - B) \perp Z(\mathcal{N})$

(2) => (1) Nechť $A - N \perp Z(\mathcal{N})$, $u \in Z(\mathcal{N})$, $X \in \mathcal{N}$ je tvaru $N + u$

$$\|\underbrace{A - N}_{Z(\mathcal{N})^{\perp}} - \underbrace{u}_{Z(\mathcal{N})}\|^2 = \|A - N\|^2 + \|u\|^2 \implies \operatorname{dist}(A, \mathcal{N}) = \|A - N\|, \text{ tj. } (1).$$

Věta (vzdálenost dvou afinních podprostorů)

Nechť $\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M})$ a $\mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$

(a) Vzdálenost afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je rovna

$$\| P_{(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^\perp}(A - B) \|$$

(b) Pro body $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$ jsou následující tvrzení ekvivalentní

(1) $\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \|M - N\|$

body M a N realizují vzdálenost

(2) $M - N \perp Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$

(3) $M - N = P_{(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^\perp}(A - B)$

Důkaz:

(a) $\operatorname{dist}(m, n) = \operatorname{dist}(A + Z(m), B + Z(n)) =$

$= \operatorname{dist}(A, B + Z(n) + Z(m)) \overset{\text{podle předchozí věty}}{=}$

$= \| P_{(Z(n)+Z(m))^\perp}(A - B) \|$

(b) (1) $\Rightarrow$ (3) $\quad M = A + u, \ N = B + v, \ u \in Z(m), \ v \in Z(n)$

$\| M - N \| = \| A - B + \underbrace{u - v}_{\in Z(m)+Z(n)} \|$ nabývá minima na

$u - v = P_{Z(m)+Z(n)}(A - B)$

podle naší věty

aby velikost $\| M - N \|$ byla minimální, musí být

$M - N = A - B - P_{Z(m)+Z(n)}(A - B) = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A - B)$

$M - N \perp Z(m) + Z(n)$ (2), současně dostáváme (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) jestliže $M - N = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$, pak $M - N \perp Z(m) + Z(n)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) nechť $M - N \perp Z(m) + Z(n)$, $u \in Z(m)$, $v \in Z(n)$

Pythag. věta

$$\|M + u - (N + v)\|^2 = \underbrace{\|M - N\|^2}_{\perp Z(m)+Z(n)} + \|\underbrace{u - v}_{Z(m)+Z(n)}\|^2 \geq \|M - N\|^2.$$

Proto $\operatorname{dist}(m, n) = \|M - N\|$. Platí (1).